Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 302, 2003 г.

Е. Г. Голузина

О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМЫ $\{f(z_1), f(z_2), f(z_3)\}$ В КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

Пусть T – класс функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdot$, регулярных и типично вещественных в круге $U = \{z : |z| < 1\}$. Данная работа продолжает исследования множеств значений систем начальных тейлоровских коэффициентов на классе T [1–4], а также на других классах регулярных в круге функций, допускающих интегральное представление [5].

Как известно, множество значений $f(z_1)$ на классе T было найдено Рогозинским в классической работе [1]. Множество значений системы $\{f(z_1), f(z_2)\}$ на классе T исследовано в [3, 4]. В [4] также найдено множество значений $f(z_1)$ при фиксированном $f(z_2)$.

В настоящей работе дается алгебраическая характеристика множества значений системы, указанной в заглавии, на классе T (при любых фиксированных z_1, z_2 и z_3). Найдено также множество значений $f(z_3)$ при заданных $f(z_1)$ и $f(z_2)$. Как и в [1–4], при этом используются критерий разрешимости степенной проблемы моментов и теорема Маркова–Лукача для неотрицательных алгебраических многочленов.

§1. Обозначения и формулировки результатов

1.1. Обозначим через D множество значений системы

$$I(f) = \{f(z_1), f(z_2), f(z_3)\}$$

на классе T, где z_j $(j = 1, 2, 3)$ – различные фиксированные точки круга U.

Рассмотрим четыре случая:

$$\begin{array}{lll} 1. & \operatorname{Im} z_j \neq 0, \quad j = 1,2,3. & \\ 2. & \operatorname{Im} z_1 = 0, \quad \operatorname{Im} z_j \neq 0, \quad j = 2,3. & \\ 3. & \operatorname{Im} z_j = 0, \quad j = 1,2, \qquad \operatorname{Im} z_3 \neq 0. & \\ 4. & \operatorname{Im} z_j = 0, \quad j = 1,2,3. & \end{array} \tag{1}$$

В первом случае положим

$$\zeta(z) = z + \frac{1}{z}, \quad \zeta_j = \zeta(z_j), \quad w_j = f(z_j), \quad \varkappa_j = (\zeta_j^2 - 4) w_j, \quad j = 1,2,3.$$

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{Im} z_j \neq 0$, $j = 1,2,3$. *Тогда* D *есть множество всех точек* $X = X(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$, *в которых неотрицательна эрмитова форма* $H_1(X) = H_1(w_1, w_2, w_3)$:

$$H_1(X) = \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\operatorname{Im} \varkappa_j}{\operatorname{Im} \zeta_j} - 1 \right) |X_j|^2 + 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=2}^{3} \left(\frac{\varkappa_1 - \overline{\varkappa}_j}{\zeta_1 - \overline{\zeta}_j} - 1 \right) X_1 \overline{X}_j \right] +$$

$$+ 2 \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\varkappa_2 - \overline{\varkappa}_3}{\zeta_2 - \overline{\zeta}_3} - 1 \right) X_2 \overline{X}_3 \right] + |Y_0|^2 + \sum_{j=1}^{3} \frac{\operatorname{Im} \overline{w}_j}{\operatorname{Im} \zeta_j} |Y_j|^2 +$$

$$+ 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{3} \overline{w}_j Y_0 \overline{Y}_j \right] + 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=2}^{3} \frac{\overline{w}_j - w_1}{\zeta_1 - \overline{\zeta}_j} Y_1 \overline{Y}_j \right] + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\overline{w}_3 - w_2}{\zeta_2 - \overline{\zeta}_3} Y_2 \overline{Y}_3 \right].$$

Обозначим $\widetilde{D}$ множество значений системы $\{f(z_1), f(z_2)\}$ на классе T. Как показано в [4], множество внутренних точек $\widetilde{D}$ при $\operatorname{Im} z_j \neq 0$ $(j = 1,2)$ определяется неравенствами

$$\frac{\operatorname{Im} \varkappa_1}{\operatorname{Im} \zeta_1} - 1 > 0, \quad \prod_{j=1}^{2} \left(\frac{\operatorname{Im} \varkappa_j}{\operatorname{Im} \zeta_j} - 1 \right) > \left| 1 - \frac{\varkappa_1 - \overline{\varkappa}_2}{\zeta_1 - \overline{\zeta}_2} \right|^2,$$

$$- \frac{\operatorname{Im} w_1}{\operatorname{Im} \zeta_1} - |w_1|^2 > 0, \quad \prod_{j=1}^{2} \left(\frac{\operatorname{Im} w_j}{\operatorname{Im} \zeta_j} + |w_j|^2 \right) > \left| \frac{w_2 - \overline{w}_1}{\zeta_2 - \overline{\zeta}_1} + \overline{w}_1 w_2 \right|^2,$$

где $w_j = f(z_j)$, $j = 1,2$.

Пусть эти неравенства выполняются при $w_j = w_j^{(0)}$. Введем класс

$$T_1 = \{ f \in T : f(z_j) = w_j^{(0)}, \ j = 1,2 \}.$$

Пусть

$$D_1 = \{f(z_3) : f \in T_1\}, \quad \text{где} \quad z_3 \quad \text{– заданная точка} \quad U, \ \operatorname{Im} z_3 \neq 0.$$

Обозначим

$$a_{jj}(w_j) = \frac{\operatorname{Im} \varkappa_j}{\operatorname{Im} \zeta_j} - 1, \ j = 1, 2; \quad a_{12}(w_1, w_2) = \frac{\varkappa_1 - \overline{\varkappa}_2}{\zeta_1 - \overline{\zeta}_2} - 1;$$

$$s_{11}(w_1) = |\zeta_3 - \overline{\zeta}_1|^2 a_{11}(w_1),$$

$$s_{33}(w_1) = \operatorname{Im}(\zeta_1 - \varkappa_1)/\operatorname{Im}\zeta_3 + s_{11}(w_1)/(2\operatorname{Im}\zeta_3)^2,$$

$$s_{22}(w_1, w_2) = |\zeta_3 - \overline{\zeta}_2|^2 a_{22}(w_2) + |\zeta_3 - \overline{\zeta}_1|^2 a_{11}(w_1) -$$

$$-2\operatorname{Re}\left[(\zeta_3 - \overline{\zeta}_1)(\overline{\zeta}_3 - \zeta_2)\overline{a_{12}(w_1, w_2)}\right],$$

$$s_{12}(w_1, w_2) = (\overline{\zeta}_3 - \zeta_1)(\zeta_3 - \overline{\zeta}_2) a_{12}(w_1, w_2) - |\zeta_3 - \overline{\zeta}_1|^2 a_{11}(w_1),$$

$$s_{23}(w_1, w_2) = \zeta_2 - \zeta_1 + \varkappa_1 - \varkappa_2 + \frac{i}{2\operatorname{Im}\zeta_3}\,\overline{s_{12}(w_1, w_2)}.$$

Обозначим далее,

$$b_{0j}(w_j) = w_j(\zeta_j - \overline{\zeta}_3) - 1, \quad b_{jj}(w_j) = 1 - \frac{1}{\operatorname{Im}\zeta_j}\operatorname{Im}\left[w_j(\zeta_j - \zeta_3)(\zeta_j - \overline{\zeta}_3)\right],$$

$$b_{j3}(w_j) = 1 + \overline{w}_j(\overline{\zeta}_3 - \overline{\zeta}_j), \quad j = 1, 2;$$

$$b_{12}(w_1, w_2) = 1 + \frac{1}{\overline{\zeta}_1 - \zeta_2}\left[w_2(\zeta_2 - \overline{\zeta}_3)(\zeta_2 - \zeta_3) - \overline{w}_1(\overline{\zeta}_1 - \overline{\zeta}_3)(\overline{\zeta}_1 - \zeta_3)\right];$$

$$\sigma_{12}(w_1, w_2) = b_{11}(w_1) b_{02}(w_2) - b_{01}(w_1) b_{12}(w_1, w_2),$$

$$\sigma_{22}(w_1, w_2) = b_{11}(w_1) b_{22}(w_2) - |b_{12}(w_1, w_2)|^2,$$

$$\sigma_{23}(w_1, w_2) = b_{11}(w_1) b_{23}(w_2) - b_{13}(w_1)\,\overline{b_{12}(w_1, w_2)}.$$

Следствие 1. *Множество D_1 есть пересечение двух кругов Ω_1 и Ω_2, где*

$$\Omega_j = \{w : |w - O_j| \leqslant R_j\}, \quad j = 1, 2,$$

и

$$O_1 = \frac{1}{\zeta_3^2 - 4}\left[\zeta_3 - \overline{\zeta}_1 + \overline{w_1^{(0)}}\,(\overline{\zeta}_1^2 - 4) + \frac{i}{2\operatorname{Im}\zeta_3}\,s_{11}(w_1^{(0)}) - \right.$$

$$-\frac{\overline{s_{12}(w_1^{(0)}, w_2^{(0)})}\ \overline{s_{23}(w_1^{(0)}, w_2^{(0)})}}{s_{22}(w_1^{(0)}, w_2^{(0)})}\Bigg],$$

$$R_1 = \frac{1}{|\zeta_3^2 - 4|}\left[s_{11}(w_1^{(0)}) - \frac{|s_{12}(w_1^{(0)}, w_2^{(0)})|^2}{s_{22}(w_1^{(0)}, w_2^{(0)})}\right]^{1/2} \times$$

$$\times \left[s_{33}(w_1^{(0)}) - \frac{|s_{23}(w_1^{(0)}, w_2^{(0)})|^2}{s_{22}(w_1^{(0)}, w_2^{(0)})}\right]^{1/2},$$

$$O_2 = \frac{-i}{2\operatorname{Im}\zeta_3}\Bigg\{1 + \frac{1}{b_{11}(w_1^{(0)})}\Bigg[b_{01}(w_1^{(0)})b_{13}(w_1^{(0)}) +$$

$$+ \frac{\sigma_{12}(w_1^{(0)}, w_2^{(0)})\,\sigma_{23}(w_1^{(0)}, w_2^{(0)})}{\sigma_{22}(w_1^{(0)}, w_2^{(0)})}\Bigg]\Bigg\},$$

$$R_2 = \frac{1}{2|\operatorname{Im}\zeta_3|}\left[1 - \frac{1}{b_{11}(w_1^{(0)})}\left(|b_{01}(w_1^{(0)})|^2 + \frac{|\sigma_{12}(w_1^{(0)}, w_2^{(0)})|^2}{\sigma_{22}(w_1^{(0)}, w_2^{(0)})}\right)\right]^{1/2} \times$$

$$\times\left[1 - \frac{1}{b_{11}(w_1^{(0)})}\left(|b_{13}(w_1^{(0)})|^2 + \frac{|\sigma_{23}(w_1^{(0)}, w_2^{(0)})|^2}{\sigma_{22}(w_1^{(0)}, w_2^{(0)})}\right)\right]^{1/2}.$$

1.2. В случае $z_1 = r_1$, $0 < r_1 < 1$, $\operatorname{Im} z_j \neq 0$, $j = 2, 3$, положим

$$\rho = r_1 + \frac{1}{r_1}, \quad x_1 = f(r_1), \quad w_j = x_j + iy_j = f(z_j),$$

$$x_j, y_j \in \mathbb{R}, \quad \zeta_j = z_j + \frac{1}{z_j}, \quad j = 2, 3.$$

Обозначим также

$$\omega_1^{(\varepsilon)}(x_1) = (2 + \varepsilon\rho)x_1, \quad \omega_j^{(\varepsilon)}(w_j) = (2 + \varepsilon\zeta_j)w_j, \quad j = 2, 3;$$

$$a_{11}^{(\varepsilon)} = a_{11}^{(\varepsilon)}(x_1) = -\varepsilon + \omega_1^{(\varepsilon)}(x_1),$$

$$a_{1j}^{(\varepsilon)} = a_{1j}^{(\varepsilon)}(x_1, w_j) = \frac{\omega_1^{(\varepsilon)}(x_1) - \omega_j^{(\varepsilon)}(w_j)}{\zeta_j - \rho},$$

$$a_{jj}^{(\varepsilon)} = a_{jj}^{(\varepsilon)}(x_1, w_j) = \frac{1}{|\zeta_j - \rho|^2}\omega_1^{(\varepsilon)}(x_1) - \frac{1}{\operatorname{Im}\zeta_j}\operatorname{Im}\frac{\omega_j^{(\varepsilon)}(w_j)}{\rho - \zeta_j}, \;\; j = 2, 3;$$

$$a_{23}^{(\varepsilon)} = a_{23}^{(\varepsilon)}(x_1, w_2, w_3) = \frac{\omega_1^{(\varepsilon)}(x_1)}{(\overline{\zeta}_2 - \rho)(\zeta_3 - \rho)} +$$

$$+\frac{\overline{\omega_2^{(\varepsilon)}(w_2)}}{(\rho - \overline{\zeta}_2)(\zeta_3 - \overline{\zeta}_2)} + \frac{\omega_3^{(\varepsilon)}(w_3)}{(\rho - \zeta_3)(\overline{\zeta}_2 - \zeta_3)}, \ \varepsilon = -1, 1.$$

Теорема 2. *Пусть $z_j \neq 0$, $j = 2, 3$, $z_1 = r_1 > 0$. Тогда D есть множество всех точек $X = X(x_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \in \mathbb{R}^5$, в которых неотрицательна эрмитова форма $H_2(X) = H_2(x_1, w_1, w_2)$:*

$$H_2(X) = \sum_{j=1}^{3} a_{jj}^{(-1)} |X_j|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=2}^{3} a_{1j}^{(-1)} \overline{X}_1 X_j + 2 \operatorname{Re} \left(a_{23}^{(-1)} \overline{X}_2 X_3\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{3} a_{jj}^{(1)} |Y_j|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=2}^{3} a_{1j}^{(1)} \overline{Y}_1 Y_j + 2 \operatorname{Re} \left(a_{23}^{(1)} \overline{Y}_2 Y_3\right).$$

Множество внутренних точек $\widetilde{D}$ при $z_1 = r_1 > 0$, $\operatorname{Im} z_2 \neq 0$, определяется неравенствами

$$a_{11}^{(\varepsilon)}(x_1) > 0, \quad a_{11}^{(\varepsilon)}(x_1) a_{22}^{(\varepsilon)}(x_1, w_2) > \left|a_{12}^{(\varepsilon)}(x_1, w_2))\right|^2, \quad \varepsilon = -1, 1,$$

где $x_1 = f(r_1)$, $w_2 = f(z_2)$.

Пусть эти неравенства выполняются при $x_1 = x_1^{(0)}$, $w_2 = w_2^{(0)}$. Введем класс

$$T_2 = \{f \in T : f(r_1) = x_1^{(0)}, f(z_2) = w_2^{(0)}\}.$$

Пусть

$$D_2 = \{f(z_3) : f \in T_2\},$$

где z_3 – заданная точка U, $\operatorname{Im} z_3 \neq 0$.

Положим

$$A^{(\varepsilon)} = \omega_1^{(\varepsilon)}(x_1^{(0)})(\rho - \overline{\zeta}_3) - \omega_2^{(\varepsilon)}(w_2^{(0)})(\zeta_2 - \overline{\zeta}_3) - \varepsilon(\rho - \zeta_2),$$

$$B^{(\varepsilon)} = \overline{\omega_2^{(\varepsilon)}(w_2^{(0)})}\,(\overline{\zeta}_2 - \overline{\zeta}_3) - \omega_1^{(\varepsilon)}(x_1^{(0)})(\rho - \overline{\zeta}_3) + \varepsilon(\rho - \overline{\zeta}_2),$$

$$C^{(\varepsilon)} = |\rho - \zeta_3|^2 \omega_1^{(\varepsilon)}(x_1^{(0)}) - |\zeta_2 - \rho|^2 \varepsilon +$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{Im} \zeta_2} \operatorname{Im} \left[\omega_2^{(\varepsilon)}(w_2^{(0)})(\zeta_3 - \zeta_2)(\zeta_2 - \overline{\zeta}_3)(\rho - \overline{\zeta}_2)\right], \ \varepsilon = -1, 1.$$

Следствие 2. $D_2 = \Omega^{(-1)} \cap \Omega^{(1)}$, *где*

$$\Omega^{(\varepsilon)} = \left\{ w : \left| w - O^{(\varepsilon)} \right| \leqslant R^{(\varepsilon)} \right\}, \quad \varepsilon = -1, 1,$$

и

$$O^{(\varepsilon)} = \frac{i}{2(2+\varepsilon\zeta_3)\operatorname{Im}\zeta_3} \left[\omega_1^{(\varepsilon)}(x_1^{(0)})(\overline{\zeta}_3 - \rho) + (\zeta_3 - \rho)\left(\frac{A^{(\varepsilon)} B^{(\varepsilon)}}{C^{(\varepsilon)}} - \varepsilon \right) \right],$$

$$R^{(\varepsilon)} = \frac{|\rho - \zeta_3|}{2|2+\varepsilon\zeta_3|\,|\operatorname{Im}\zeta_3|} \left[\omega_1^{(\varepsilon)}(x_1^{(0)}) - \varepsilon - \frac{|A^{(\varepsilon)}|^2}{C^{(\varepsilon)}} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \left[\omega_1^{(\varepsilon)}(x_1^{(0)}) - \varepsilon - \frac{|B^{(\varepsilon)}|^2}{C^{(\varepsilon)}} \right]^{1/2}.$$

1.3. В случае $z_j = r_j$, $0 < r_2 < r_1 < 1$, $j = 1, 2$, $z_3 \in U$, $\operatorname{Im} z_3 \neq 0$, положим

$$\rho_j = r_j + \frac{1}{r_j}, \quad x_j = f(r_j), \quad \zeta_0 = z_3 + \frac{1}{z_3},$$

$$w_3 = x_3 + iy_3 = f(z_3), \quad x_3,\ y_3 \in \mathbb{R};$$

$$\omega_j = x_j(\rho_j^2 - 4), \quad j = 1, 2, \quad \omega_3 = w_3(\zeta_0^2 - 4).$$

Обозначим далее,

$$\alpha_{11} = \alpha_{11}(x_1, x_2) = -1 + \frac{1}{\rho_2 - \rho_1}(\omega_2 - \omega_1),$$

$$\alpha_{22} = \alpha_{22}(x_1, x_2) = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1}\left(\frac{\omega_2}{|\zeta_0 - \rho_2|^2} - \frac{\omega_1}{|\zeta_0 - \rho_1|^2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{Im}\zeta_0} \operatorname{Im}\left[\frac{\omega_3}{(\rho_1 - \zeta_0)(\rho_2 - \zeta_0)} \right],$$

$$\beta_{11} = \beta_{11}(x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{\rho_2 - \rho_1},$$

$$\beta_{12} = \beta_{12}(x_1, x_2) = \frac{x_1\rho_1 - x_2\rho_2}{2(\rho_2 - \rho_1)},$$

$$\beta_{13} = \beta_{13}(x_1, x_2, w_3) = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1}\left(\frac{x_1}{\zeta_0 - \rho_1} - \frac{x_2}{\zeta_0 - \rho_2} \right) + \frac{w_3}{(\rho_1 - \zeta_0)(\rho_2 - \zeta_0)},$$

$$\beta_{22} = \beta_{22}(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x_1\rho_1^2 - x_2\rho_2^2}{\rho_2 - \rho_1}\right),$$

$$\beta_{23} = \beta_{23}(x_1, x_2, w_3) = \frac{1}{2(\rho_2 - \rho_1)}\left(\frac{x_1\rho_1}{\zeta_0 - \rho_1} - \frac{x_2\rho_2}{\zeta_0 - \rho_2}\right) + \\ + \frac{\zeta_0 w_3}{2(\rho_1 - \zeta_0)(\rho_2 - \zeta_0)},$$

$$\beta_{33} = \beta_{33}(x_1, x_2, w_3) = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1}\left(\frac{x_1}{|\zeta_0 - \rho_1|^2} - \frac{x_2}{|\zeta_0 - \rho_2|^2}\right) - \\ - \frac{1}{\operatorname{Im}\zeta_0}\operatorname{Im}\left[\frac{w_3}{(\rho_1 - \zeta_0)(\rho_2 - \zeta_0)}\right].$$

Теорема 3. *Пусть* $\operatorname{Im} z_3 \neq 0$, $z_j = r_j$, $0 < r_j < 1$, $j = 1, 2$, $r_1 > r_2$. *Тогда* D *есть множество всех точек* $X = X(x_1, x_2, x_3, y_3) \in \mathbb{R}^4$, *в которых неотрицательна эрмитова форма* $H_3(X) = H_3(x_1, x_2, w_3)$:

$$H_3(X) = \alpha_{11}|X_1|^2 + 2\operatorname{Re}(\alpha_{12}\overline{X}_1 X_2) + \alpha_{22}|X_2|^2 + \sum_{j=1}^{3}\beta_{jj}|Y_j|^2 + \\ + 2\operatorname{Re}(\beta_{12}Y_1\overline{Y}_2) + 2\operatorname{Re}(\beta_{13}\overline{Y}_1 Y_3) + 2\operatorname{Re}(\beta_{23}\overline{Y}_2 Y_3).$$

Множество внутренних точек $\widetilde{D}$ при $z_j = r_j > 0$, $j = 1, 2$, $r_1 > r_2$, определяются неравенствами

$$x_1 > x_2, \quad x_2(\rho_2^2 - 4) - x_1(\rho_1^2 - 4) > \rho_2 - \rho_1, \quad x_1 - x_2 - x_1x_2(\rho_2 - \rho_1) > 0,$$

где $x_1 = f(r_1)$, $x_2 = f(r_2)$ [3].

Пусть эти неравенства выполняются при $x_1 = a$, $x_2 = b$. Введем класс

$$T_3 = \{f \in T\colon f(r_1) = a, f(r_2) = b\}, \quad r_1 > r_2.$$

Положим

$$D_3 = \{f(z_3) : f \in T_3\},$$

где z_3 – заданная точка U, $\operatorname{Im} z_3 \neq 0$.

Следствие 3. $D_3 = \Omega_1' \cap \Omega_2'$, *где*

$$\Omega_j' = \{w : |w - O_j'| \leqslant R_j'\}, \quad j = 1, 2,$$

и

$$O_1' = \frac{i(\rho_1 - \zeta_0)(\rho_2 - \zeta_0)}{2(4 - \zeta_0^2)\operatorname{Im}\zeta_0} \times$$

$$\times\left\{1+\frac{1}{\rho_2-\rho_1}\left[\frac{(4-\rho_1^2)a(\rho_1-\overline{\zeta}_0)}{\zeta_0-\rho_1}-\frac{(4-\rho_2^2)b(\rho_2-\overline{\zeta}_0)}{\zeta_0-\rho_2}\right]\right\},$$

$$R_1'=\frac{|(\rho_1-\zeta_0)(\rho_2-\zeta_0)|}{2|4-\zeta_0^2|\,|\operatorname{Im}\zeta_0|}\left[\frac{(4-\rho_1^2)a-(4-\rho_2^2)b}{\rho_2-\rho_1}-1\right],$$

$$O_2'=\frac{i(\rho_1-\zeta_0)(\rho_2-\zeta_0)}{2(\rho_2-\rho_1)\operatorname{Im}\zeta_0}\left\{\frac{[a(\rho_1-\overline{\zeta}_0)-b(\rho_2-\overline{\zeta}_0)]^2}{\Delta}-\right.$$

$$\left.-\frac{a(\overline{\zeta}_0-\rho_1)}{\zeta_0-\rho_1}+\frac{b(\overline{\zeta}_0-\rho_2)}{\zeta_0-\rho_2}\right\},$$

$$R_2'=\frac{|(\rho_1-\zeta_0)(\rho_2-\zeta_0)|}{2(\rho_2-\rho_1)|\operatorname{Im}\zeta_0|}\left[a-b-\frac{|b(\rho_2-\zeta_0)-a(\rho_1-\zeta_0)|^2}{\Delta}\right]$$

с

$$\Delta=\rho_2-\rho_1+a|\rho_1-\zeta_0|^2-b|\rho_2-\zeta_0|^2.$$

1.4. Рассмотрим в заключение случай

$$z_j=r_j,\quad 0<r_j<1,\quad j=1,2,3.$$

Положим

$$\rho_j=r_j+\frac{1}{r_j},\quad x_j=f(r_j),$$

$$c_{j,k,\varepsilon}=\frac{(2+\varepsilon\rho_i)\rho_j^k}{(\rho_{j+1}-\rho_j)(\rho_{j+2}-\rho_j)},$$

где $\rho_4=\rho_1$, $\rho_5=\rho_2$, $k=0,1,2$, $\varepsilon=-1,1$; $j=1,2,3$.

Теорема 4. *Пусть* $\operatorname{Im} z_j=0$, $z_j=r_j$, $0<r_j<1$. *Тогда* D *есть множество всех точек* $X=X(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, *в которых неотрицательна вещественная квадратичная форма* $H_4(X)=H_4(x_1,x_2,x_3)$:

$$H_4(X)=\left[\sum_{j=1}^3(c_{j,0,-1}\,x_j)\right]\beta_0^2+\left[\sum_{j=1}^3(c_{j,2,-1}\,x_j)+1\right]\beta_1^2+$$

$$+2\left[\sum_{j=1}^3(c_{j,1,-1}\,x_j)\right]\beta_0\beta_1+\left[\sum_{j=1}^3(c_{j,0,1}\,x_j)\right]\gamma_0^2+$$

$$+2\left[\sum_{j=1}^3(c_{j,1,1}\,x_j)\right]\gamma_0\gamma_1+\left[\sum_{j=1}^3(c_{j,2,1}\,x_j)-1\right]\gamma_1^2.$$

§2. Доказательства

Доказательство теорем 1–4.

Для класса T известно интегральное представление

$$f(z) \in T \Longleftrightarrow f(z) = \int_{-1}^{1} z(1 - 2tz + z^2)^{-1} d\alpha(t), \quad \alpha \in M_1, \tag{2}$$

где M_1 – класс функций $\alpha(t)$, неубывающих на $[-1, 1]$, $\int_{-1}^{1} d\alpha(t) = 1$. Из (2) для системы $I(f)$ получаем представление

$$f(z_j) = \int_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{\zeta_j - 2t}, \quad \alpha \in M_1, \quad j = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Используя (3), нетрудно показать, что D – выпуклое, ограниченное и замкнутое множество. По теореме [6, теорема 1.3, с. 86–87], для того чтобы имело место представление (3), необходимо и достаточно, чтобы при выполнении для всех $t \in [-1, 1]$ неравенства

$$\varphi(t) \equiv \operatorname{Re}\left[\delta_0 + \sum_{j=1}^{3} \frac{\delta_j}{\zeta_j - 2t}\right] \geqslant 0, \tag{4}$$

(где $\delta_0 \neq 0$, δ_j, $j = 1, 2, 3$, – некоторые комплексные числа) вытекало неравенство

$$H \equiv \operatorname{Re}\left[\delta_0 + \sum_{j=1}^{3} \delta_j w_j\right] \geqslant 0. \tag{5}$$

В случае $\operatorname{Im} z_j \neq 0$, $j = 1, 2, 3$, запишем (4) в виде

$$\varphi(t) = \frac{A_6(t)}{\prod\limits_{j=1}^{3} |\zeta_j - 2t|^2} \geqslant 0, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{6}$$

где $A_6(t)$ – алгебраический многочлен от t шестой степени. По теореме Маркова–Лукача, неотрицательный на $[-1, 1]$ многочлен $A_6(t)$ представим в виде

$$A_6(t) = (1 - t^2)\left(\sum_{k=0}^{2} \beta_k t^k\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{3} \gamma_k t^k\right)^2, \tag{7}$$

где β_k и γ_l ($k=0,1,2$; $l=0,1,2,3$) – некоторые вещественные числа (см. [6, с. 89]).

Подставим (7) в левую часть неравенства (6) и запишем $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t)=(1-t^2)\left|\sum_{j=1}^{3}\frac{X_j}{\zeta_j-2t}\right|^2+\left|Y_0+\sum_{j=1}^{3}\frac{Y_j}{\zeta_j-2t}\right|^2, \tag{8}$$

где $\{X_k\}_1^3$ и $\{Y_l\}_0^3$ – некоторые комплексные числа, зависящие от $\{\beta_k\}_0^2$ и $\{\gamma_l\}_0^3$, соответственно.

Заметим, что имеют место разложения

$$\frac{1-t^2}{(\zeta_j-2t)(\overline{\zeta}_k-2t)}=-\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{\overline{\zeta}_k-\zeta_j}\left(\frac{\zeta_j^2-4}{\zeta_j-2t}-\frac{\overline{\zeta}_k^2-4}{\overline{\zeta}_k-2t}\right)\right], \tag{9}$$

$$\frac{1}{(\zeta_j-2t)(\overline{\zeta}_k-2t)}=\frac{1}{\overline{\zeta}_k-\zeta_j}\left[\frac{1}{\zeta_j-2t}-\frac{1}{\overline{\zeta}_k-2t}\right],\quad j,k=1,2,3.$$

В силу условия $\varphi(t)\geqslant 0$ на промежутке $[-1,1]$, из (8) получаем, что для того чтобы неравенство (4) влекло за собой неравенство (5) необходимо и достаточно, чтобы при произвольном выборе z_j из круга U, $\operatorname{Im} z_j\neq 0$ ($j=1,2,3$), была неотрицательна эрмитова форма H_1. Теорема 1 доказана.

В случае $\operatorname{Im} z_1=0$, $z_1=r_1$, запишем (4) в виде

$$\varphi(t)=\frac{A_5(t)}{|\zeta_2-2t|^2|\zeta_3-2t|^2(\rho-2t)}\geqslant 0,\quad -1\leqslant t\leqslant 1, \tag{10}$$

где $A_5(t)$ – алгебраический многочлен пятой степени.

По теореме Маркова–Лукача, неотрицательный на отрезке $[-1,1]$ многочлен $A_5(t)$ можно представить в виде

$$A_5(t)=(1-t)\left(\sum_{k=0}^{2}\beta_k t^k\right)^2+(1+t)\left(\sum_{k=0}^{2}\gamma_k t^k\right)^2, \tag{11}$$

где β_k и γ_k ($k=0,1,2$; $l=0,1,2,3$) – некоторые вещественные числа (см. [6, с. 89]).

Подставим (11) в (10) и запишем $\varphi(t)$ в виде

$$\begin{aligned}\varphi(t)=\frac{1-t}{\rho-2t}&\left|X_1+\frac{X_2}{\zeta_2-2t}+\frac{X_3}{\zeta_3-2t}\right|^2\\ &+\frac{1+t}{\rho-2t}\left|Y_1+\frac{Y_2}{\zeta_2-2t}+\frac{Y_3}{\zeta_3-2t}\right|^2,\end{aligned} \tag{12}$$

где X_j, $Y_j \in \mathbb{C}$, $j = 1,2,3$, и зависят соответственно от β_k и γ_k $(k = 0,1,2)$.

Заметим, что

$$\frac{1+\varepsilon t}{\rho - 2t} = -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2+\varepsilon\rho}{2(\rho - 2t)},$$

$$\frac{1+\varepsilon t}{(\rho-2t)(\zeta_j - 2t)} = \frac{1}{2}\left[\frac{2+\varepsilon\rho}{\rho - 2t} - \frac{2+\varepsilon\zeta_j}{\zeta_j - 2t}\right]\frac{1}{\zeta_j - \rho},$$

$$\frac{1+\varepsilon t}{(\rho-2t)|\zeta_j - 2t|^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{2+\varepsilon\rho}{(\rho-2t)|\zeta_j - \rho|^2} + \right.$$

$$\left. +2\operatorname{Re}\frac{2+\varepsilon\zeta_j}{(\rho-\zeta_j)(\overline{\zeta}_j - \zeta_j)(\zeta_j - 2t)}\right], \quad j = 2,3;$$

$$\frac{1+\varepsilon t}{(\rho-2t)(\zeta_2 - 2t)(\overline{\zeta}_3 - 2t)} = \frac{1}{2}\left[\frac{2+\varepsilon\rho}{(\zeta_2-\rho)(\overline{\zeta}_3 - \rho)(\rho - 2t)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2+\varepsilon\zeta_2}{(\rho-\zeta_2)(\overline{\zeta}_3 - \zeta_2)(\zeta_2 - 2t)} + \frac{2+\varepsilon\overline{\zeta}_3}{(\rho-\overline{\zeta}_3)(\zeta_2 - \overline{\zeta}_3)(\overline{\zeta}_3 - 2t)}\right].$$

Следовательно, получим, что в случае, когда $\operatorname{Im} z_1 = 0$, а $\operatorname{Im} z_j \neq 0$, $j = 2,3$, $z_1 = r$, для того чтобы имело место представление (3) необходимо и достаточно, чтобы была неотрицательна эрмитова форма H_2. Теорема 2 доказана.

В случае $\operatorname{Im} z_j = 0$, $z_j = r_j$, $0 < r_j < 1$, $j = 1,2$, $r_1 > r_2$, $\operatorname{Im} z_3 \neq 0$, запишем (4) в виде

$$\varphi(t) = \frac{A_4(t)}{(\rho_1 - 2t)(\rho_2 - 2t)|\zeta_0 - 2t|^2} \geqslant 0, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{13}$$

Здесь $A_4(t)$ – неотрицательный на $[-1,1]$ алгебраический многочлен четвертой степени и его можно представить в виде

$$A_4(t) = (1-t^2)(\beta_0 + \beta_1 t)^2 + \left(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2\right)^2, \tag{14}$$

где β_k, $\gamma_l \in \mathbb{R}$, $(k = 0,1;\ l = 0,1,2)$.

Подставим (14) в (13). Тогда $\varphi(t)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}\varphi(t) = \frac{1-t^2}{(\rho_1-2t)(\rho_2-2t)}\left|X_1 + \frac{X_2}{\zeta_0 - 2t}\right|^2 + \\ + \frac{1}{(\rho_1-2t)(\rho_2-2t)}\left|Y_1 + Y_2 t + \frac{Y_3}{\zeta_0 - 2t}\right|^2,\end{aligned} \tag{15}$$

где X_1, X_2 и Y_1, Y_2, Y_3 – некоторые комплексные числа, зависящие соответственно от β_0, β_1 и γ_0, γ_1, γ_2.

Таким образом получим, что в третьем случае в (1) для того, чтобы имело место представление (3) необходимо и достаточно, чтобы при произвольном выборе r_1, r_2 $0 < r_2 < r_1 < 1$, и $z_3 \in U$, $\operatorname{Im} z_3 \neq 0$, была неотрицательна эрмитова форма H_3. Теорема 3 доказана.

В случае $\operatorname{Im} z_j = 0$, $j = 1, 2, 3$, $z_j = r_j$, $0 < r_j < 1$, имеем

$$\varphi(t) = \frac{A_3(t)}{\prod\limits_{j=1}^{3} (\rho_j - 2t)} \geqslant 0, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{16}$$

Здесь $A_3(t)$ – неотрицательный на $[-1, 1]$ многочлен третьей степени, который представим в виде

$$A_3(t) = (1-t)(\beta_0 + \beta_1 t)^2 + (1+t)\big(\gamma_0 + \gamma_1 t\big)^2, \tag{17}$$

где β_0, β_1, γ_0 и $\gamma_1 \in \mathbb{R}$.

Заметим, что

$$\frac{(1+\varepsilon t)t^k}{\prod\limits_{j=1}^{3} (\rho_j - 2t)} = \frac{1}{2^{k+1}} \left[\sum_{j=1}^{3} c_{j,k,\varepsilon} \frac{1}{\rho_j - 2t} - \varepsilon \frac{k(k-1)}{2} \right], \quad k = 0, 1, 2.$$

Следовательно, в четвертом случае в (1) для того, чтобы из (4) вытекало (5) необходимо и достаточно, чтобы была неотрицательна вещественная квадратичная форма H_4. Теорема 4 доказана.

Доказательство следствий 1–3.

Пусть $w_j \in \mathbb{C}$, $w_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2, 3$. Каждой точке $X = X(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^6$ сопоставим эрмитову форму $H_1(X)$, каждой точке $X = X(x_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^5$ – эрмитову форму $H_2(X)$ и каждой точке $X = X(x_1, x_2, w_3) \in \mathbb{R}^4$ – эрмитову форму $H_3(X)$.

Лемма. 1. *Точка $X = X(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^n$, $n = 4, 5, 6$, тогда и только тогда является внутренней точкой множества D, когда форма $H_{7-n}(X)$ положительно определена.*

2. *Точка $X \in D$ тогда и только тогда является граничной точкой множества D, когда $|C_{7-n}(X)| = 0$, где $C_l(X)$ – матрица формы $H_l(X)$, $|C_l(X)|$ – ее определитель, $l = 1, 2, 3$.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1 в [2] и мы его опускаем.

Положительная определенность эрмитовой формы $H_l(X)$, $l = 1, 2, 3$, равносильна положительности последовательных главных миноров матрицы $C_l(X)$, $l = 1, 2, 3$ [7, с. 300]. Преобразуя эти матрицы, получаем следствия 1–3.

Литература

1. W. Rogosinski, *Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen,* Math. Z. **35**, No. 1 (1932), 93–121.
2. Е. Г. Голузина, *Об областях значений некоторых систем функционалов в классе типично вещественных функций,* Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех., и астр., вып. 2 (1965), 45–63.
3. Е. Г. Голузина, *О множестве значений одной системы функционалов в классе типично вещественных функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 69–79.
4. Е. Г. Голузина, *О множестве значений систем* $\{f(z_1), f'(z_1)\}$ *и* $\{f(z_1), f(z_2)\}$ *в классе типично вещественных функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 65–75.
5. В. А. Адреева, Н. А. Лебедев, А. В. Стовбун, *Об областях значений некоторых систем функционалов в некоторых классах регулярных функций,* Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех., и астр., вып. 2 (1961), 8–22.
6. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи,* М., 1973.
7. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц,* 3-е изд., М., 1967.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:goluzina@pdmi.ras.ru

Поступило 3 октября 2003 г.