Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 301, 2003 г.

**А. В. Головашкин, В. М. Максимов**

# АЛГЕБРЫ КОСЫХ ПОЛИНОМОВ, ПОРОЖДАЕМЫЕ КВАДРАТИЧНЫМИ ОДНОРОДНЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ

## Введение

Рассматриваются алгебры $Q(\alpha,\beta,\gamma)$ от двух образующих $a$ и $b$, порожденные квадратичным соотношением

$$ba = \alpha a^2 + \beta ba + \gamma b^2, \qquad (1)$$

где коэффициенты $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ принадлежат произвольному полю $F$ характеристики 0.

Исследуются условия на $\alpha, \beta$ и $\gamma$, при которых такая алгебра имеет базис вида $\{a^m b^n\}$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, называемый базисом Пуанкаре–Биркгофа–Витта (ПБВ).

Алгебры, в которых образующие связаны квадратичными соотношениями, играют большую роль в анализе и математической физике. Например, алгебры Клиффорда, Вейля–Гейзенберга, Склянина и другие (см. [1–7]).

В случае базиса ПБВ такие алгебры могут быть представлены алгеброй косых полиномов от образующей $b$ над кольцом обычных полиномов $F[a]$. Она определяется коммутациями

$$bp(a) = \Psi_0(p(a)) + \Psi_1(p(a))b + \ldots$$

для любого полинома $p(a) \in F[a]$, где $\Psi_k(\cdot)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, — некоторые однозначно определенные операторы на $F[a]$. Здесь суммы конечны для каждого полинома $p(a)$.

Основная идея такого представления состоит в возможности явного нахождения условий существования операторов $\Psi_k$, определяющих квадратичную алгебру $Q(\alpha,\beta,\gamma)$, что эквивалентно существованию базиса ПБВ для этой алгебры.

Об этих алгебрах известно достаточно много. В частности, вычислен ряд Пуанкаре для квадратичных алгебр с произвольным числом образующих, см., например, [8].

В работе А. М. Вершика [9] указано, что если $F$ – поле комплексных чисел, то при переходе к новым образующим $x$ и $y$, линейно зависящим от $a$ и $b$, соотношение (1) можно привести к одному из следующих видов:

$$\begin{aligned} &1)\,[x,y]=\omega(x^2+y^2),\\ &2)\,[x,y]=x^2,\\ &3)\,x^2+y^2=0,\\ &4)\,x^2=0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\omega$ – некоторый элемент поля комплексных чисел.

В работе [9] показано, что в случае 1) условие $\cos(n\,\mathrm{arctan}\,\omega) \neq 0$, $n=2,\cdots$, является необходимым и достаточным для существования базиса ПБВ алгебры $Q(\alpha,\beta,\gamma)$.

Приведем краткое содержание работы.

В разделе 1 подробно описана идея представления алгебры косыми полиномами и на ее основе рассмотрены некоторые частные случаи.

В разделе 2 найдены алгебраические уравнения для операторов $\Psi_k$ и даны условия их однозначного решения.

В разделе 3 дано необходимое и достаточное условие существования базы $\{a^m b^n\}$ при $\alpha\gamma+\beta\neq 0$. В случае, когда $F$ – поле комплексных чисел, эти условия оказываются эквивалентными условиям А. М. Вершика.

В разделе 4 даны алгебраические выражения операторов $\Psi_k$, $k\geq 2$, через операторы $\Psi_0$ и $\Psi_1$.

В разделе 5 исследуется случай $\alpha\gamma+\beta=0$. Показано, что если $\beta\neq 0$, $\beta\neq -1$, то $Q(\alpha,\beta,\gamma)$ имеет базис ПБВ. Кроме того, при $\beta=-1$ показано, что элементы $\{a^m b^n\}$, $m,n=0,1,2,\ldots$, линейно независимы, но базиса алгебры $Q(\alpha,\beta,\gamma)$ они не образуют.

Краткое изложение результатов работы дано в [10].

## 1. Основные определения. Случай $\alpha\gamma=0$

**1**. Принципиально возможны три типа алгебр, порождаемых (1):

1) Алгебры, в которых одночлены $\{a^m b^n\}$, $m,n=0,1,2,\ldots$, образуют линейный базис, т.е. базис ПБВ.

2) Алгебры, в которых одночлены $\{a^m b^n\}$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, линейно зависимы. Например, алгебра, определяемая соотношением $ba = a^2 + ab + b^2$.

Действительно, умножим это соотношение слева на $b$, а потом справа на $a$ и сложим левые и правые части полученных равенств. После очевидных сокращений имеем $a^3 + aba + bab + b^3 = 0$. Заменяя здесь $ba$ равным ему выражением $a^2 + ab + b^2$, получим $2a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 = 0$. Можно указать и другие подобные примеры.

3) Алгебры, в которых одночлены $\{a^m b^n\}$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, линейно независимы, но базиса не образуют. В разделе 5 будет показано, что этот случай возможен, например, при соотношении $ba = a^2 - ab + b^2$.

**2**. Случай, когда одночлены $\{a^m b^n\}$ образуют базис, представляет для нас основной интерес. В этом случае алгебра определяется структурными константами, возникающими при разложении по базису $\{a^m b^n\}$ произведений $(a^k b^r)(a^l b^s)$. Однако, оказывается, что здесь удобнее использовать не структурные константы, а специальные линейные отображения кольца полиномов $F[a]$.

Действительно, так как одночлены $\{a^m b^n\}$ образуют базис, то для любой степени $a^n \in F[a]$ имеем однозначное разложение

$$ba^n = \Psi_{0,n}(a) + \Psi_{1,n}(a)b + \ldots + \Psi_{m(n),m}(a)b^{m(n)}, \tag{3}$$

где $\Psi_{k,n}(a)$ – некоторые полиномы из $F[a]$. Поэтому для каждого $k = 0, 1, \ldots$ можно определить линейное отображение $\Psi_k$ кольца $F[a]$ в $F[a]$:

$$\Psi_k(a^n) = \Psi_{k,n}(a). \tag{4}$$

Для удобства положим $a^0 = b^0 = 1$, где 1 – единица поля коэффициентов $F$. Тогда $ba^0 = b \cdot 1 = 1 \cdot b + 0 \cdot b^2 + \ldots$, поэтому из (3) имеем

$$\Psi_0(1) = 0, \Psi_1(1) = 1, \Psi_k(1) = 0, \quad k = 2, 3, \ldots. \tag{5}$$

Тогда для любого $p(a) \in F[a]$ имеет место однозначное разложение

$$bp(a) = \Psi_0(p(a)) + \Psi_1(p(a))b + \ldots + \Psi_{m(p(a))}(p(a))b^{m(p(a))}. \tag{6}$$

Так как $b^n p(a) = b(b^{n-1}p(a)) = \ldots = b(b(\ldots b(bp(a))\ldots))$, то значения операторов $\Psi_k, k = 0, 1, \ldots$, однозначно определяют алгебру косых полиномов, порождаемую (1), в случае, когда $\{a^m b^n\}$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, образуют линейный базис.

Общий случай алгебры косых полиномов с образующей $\tau$ над кольцом $K$ также определяется некоторыми линейными операторами $\Psi_k$ кольца $K$ в себя, при которых для всех $\alpha \in K$ имеет место однозначное представление

$$\tau\alpha = \Psi_0(\alpha) + \Psi_1(\alpha)\tau + \ldots + \Psi_{m(\alpha)}\tau^{m(\alpha)}. \tag{7}$$

В частности, если $K$ – кольцо с одной образующей, то алгебра косых полиномов имеет базис ПБВ.

В случае, когда имеется бесконечное число ненулевых операторов $\Psi_k$, мы говорим, что алгебра косых полиномов имеет бесконечный порядок. Если для некоторого $m_0 < \infty$, все $m(\alpha) \leqslant m_0$ и для некоторого $\alpha_0$ выполнено $m(\alpha_0) = m_0$, то будем говорить, что алгебра косых полиномов имеет порядок $m_0$. Если $m_0 = 1$, то такая алгебра является алгеброй классических косых полиномов Оре [11].

Следует особо подчеркнуть, что алгебры косых полиномов (см. [12, 13]) рассматриваются при условии, что $\Psi_0 = 0$, в то время как в алгебрах, определяемых (1), имеем $\Psi_0(a) = \alpha a^2$. Следовательно, при $\alpha \neq 0$ получаем $\Psi_0 \neq 0$. Таким образом, общие свойства алгебр, порождаемых (1), при $\alpha \neq 0$, вообще говоря, не являются следствием свойств алгебр косых полиномов при $\Psi_0 = 0$.

Ассоциативность и однозначность представления (7) накладывают на множество операторов $\{\Psi_k\}, k = 0, 1, 2, \ldots$, условия согласованности, которые являются необходимыми и достаточными для задания алгебры косых полиномов с одной образующей и коммутацией (7) над кольцом коэффициентов $K$ (см. [14, 15]).

В разделе 3 формулы (40) и (41) дают адаптированные к нашему случаю условия согласованности. Так как в этом случае кольцо коэффициентов $K$ есть кольцо $F[a]$, то эти условия согласованности становятся условием существования базиса ПБВ. Такой подход к нахождению условий существования базиса ПБВ является главным в нашей работе.

**3**. Рассмотрим два частных случая (1), для которых имеется базис ПБВ и легко находятся операторы $\Psi_k$. Это случаи $\alpha = 0, \gamma \neq 0$ или $\alpha \neq 0, \gamma = 0$. В первом случае уравнение (1) приводится к виду $ba = \beta ab + \gamma b^2$. Полагая $a_1 = a$, $b_1 = \gamma b$, получим

$$b_1 a_1 = \beta a_1 b_1 + b_1^2. \tag{8}$$

Во втором случае получим

$$b_1 a_1 = \beta a_1 b_1 + a_1^2, \tag{9}$$

где $b_1 = b$, $a_1 = \alpha a$.

Алгебры, порождаемые (8) и (9), имеют операторные представления, естественно возникающие в анализе (см. [3–7]). Мы будем рассматривать операторы, определенные на кольце полиномов $F[a]$.

Обозначим через $X$ оператор умножения полинома $f(a)$ на переменную $a$, т.е. положим $Xf(a) = af(a)$. Пусть $D$ – оператор обычного дифференцирования, т.е. $Da^n = na^{n-1}$, а $D_q$ – оператор $q$-дифференцирования: $D_q f(a) = \dfrac{f(a) - f(qa)}{a - qa}$ для любого $q \in F$. При $q = 1$ имеем $D_1 = D$, а при $q = 0$ оператор $D_0 = \bar{D}$ есть оператор разделенной разности: $\bar{D}f(a) = (f(a) - f(0))/a$. Введем еще оператор интегрирования $J$: $Ja^n = \dfrac{1}{n+1}a^{n+1}$, и оператор $q$-интегрирования $J_q$: $J_q a^n = \dfrac{1-q}{1-q^{n+1}}a^{n+1}$. Обозначим через $V_0$ оператор значения в нуле (оператор Дирака), т.е. положим $V_0 f(a) = f(0)$, и через $E$ — единичный оператор (тождественное отображение).

Между этими операторами имеются следующие соотношения, которые легко проверяются на базисных полиномах $\{a^n\}$: $\bar{D}X = E$, $X\bar{D} = E - V_0$, $D_q J_q = E$, $J_q D_q = E - V_0$, $D_q X - qXD_q = E$ ($q$-соотношение Вейля). Кроме того, имеем соотношения $\bar{D}D_q = qD_q\bar{D} + \bar{D}^2$ и $XJ_q = qJ_q X + J_q^2$, которые являются точными представлениями (8) и (9) соответственно. При $q = 1$ получаем соотношение Вейля $DX - XD = E$ и эквивалентные ему соотношения $\bar{D}D - D\bar{D} = \bar{D}^2$, $XJ - JX = J^2$.

Элементарно показывается, что каждое из множеств операторов $\{X^m D_q^n\}$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, или $\{D_q^m X^n\}$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, является линейным базисом алгебры, порождаемой операторами $X$ и $D_q$. Аналогично, множества операторов $\{X^m J_q^n\}$ или $\{J_q^m X^n\}$ ($\{\bar{D}^m D^n\}$ или $\{D^m \bar{D}^n\}$), $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, являются линейными базисами алгебр, порожденных операторами $X$ и $J_q$ ($D$ и $\bar{D}$). Отсюда следует, что множества $\{a^m b^n\}$ или $\{b^m a^n\}$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, являются базисами алгебры (1) при $\alpha = 0, \gamma \neq 0$ или $\alpha \neq 0, \gamma = 0$.

**4**. Рассмотрим случай $\alpha = 0$. Тогда (1) принимает вид

$$ba = \beta ab + \gamma b^2.$$

Вопрос, являются ли алгебры, порождаемые (8) или (9), алгебрами косых полиномов, можно решить также с помощью задания представления (7). Для этого вычислим $b^n a$. Имеем $b^2 a = \beta(ba)b + \gamma b^3 = \beta(\beta ab + \gamma b^2)b + \gamma b^3 = \beta^2 ab^2 + \gamma(1+\beta)b^3$. Поэтому по индукции получаем

$$b^n a = \beta^n ab^n + \gamma(1 + \beta + \ldots + \beta^{n-1})b^{n+1} = \beta^n ab^n + \gamma \frac{\beta^n - 1}{\beta - 1} b^{n+1}.$$

Умножая последовательно выражение для $ba$ справа на $a$ и используя приведенное выше выражение для $b^n a$, индуктивно получим

$$\begin{aligned} ba^n = \beta^n a^n b + \gamma\beta^{n-1}\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1}a^{n-1}b^2 + \gamma^2\beta^{n-2}\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1} \\ \cdot\frac{\beta^{n-1} - 1}{\beta - 1}a^{n-2}b^3 + \ldots + +\gamma^{n-1}\beta\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1}\cdot\frac{\beta^{n-1} - 1}{\beta - 1}\cdot\ldots\cdot\frac{\beta^2 - 1}{\beta - 1}ab^n \\ +\gamma^n\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1}\cdot\frac{\beta^2 - 1}{\beta - 1}\cdot\frac{\beta - 1}{\beta - 1}b^{n+1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда соотношение (10), согласно (3) и (6), определяет операторы $\Psi_0 = 0$, $\Psi_1(a^n) = \beta^n a^n, \Psi_2(a^n) = \Psi_1\gamma D_\beta(a^n)$, $\Psi_3(a^n) = \Psi_1\gamma^2 {D_\beta}^2(a^n)$, $\ldots$, то есть

$$\Psi_k = \Psi_1\gamma^{k-1}D_\beta^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Но для этих операторов соотношение согласованности (см. п. **2**) легко проверяется. Следовательно, алгебры, порождаемые (8) и (9), являются алгебрами косых полиномов с базисом $\{a^m b^n\}$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$.

Заметим, что формулы (11) являются частным случаем теоремы 6 из [16], так как $\beta$-дифференцирование $D_\beta$ является локально-нильпотентным оператором на $F[a]$.

С другой стороны, если $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, то уравнение (1) можно рассмотреть в виде

$$ab = \frac{1}{\beta}ba - \frac{\gamma}{\beta}b^2. \tag{12}$$

В этом случае по индукции получим

$$ab^n = (\frac{1}{\beta}b)^n a - \frac{\gamma}{\beta}(1 + \frac{1}{\beta} + ... + \frac{1}{\beta^{n-1}})b^{n+1}. \tag{13}$$

Если $\varphi$ – оператор, заданный на $F[b]$: $\varphi(b^n) = (\frac{b}{\beta})^n$, а $\Psi$ – оператор, заданный на $F[b]$: $\Psi(b^n) = -\frac{\gamma}{\beta}(1 + \frac{1}{\beta} + ... + \frac{1}{\beta^{n-1}})b^{n+1}$, то легко видеть, что $\varphi$ есть автоморфизм подобия, а $\Psi$ есть $\varphi$-дифференцирование. Поэтому алгебру, порождаемую (12), можно рассматривать как алгебру косых полиномов Оре с образующей $a$ над кольцом полиномов $F[b]$. Таким образом, одночлены $\{b^m a^n\}$, $n, m = 0, 1, 2, ...$, также являются базисом алгебры, порождаемой (12).

**5**. Случаи, когда два коэффициента из $\alpha, \beta, \gamma$ равны нулю, сводятся к следующим:

$$1)\ ba = \alpha a^2, \quad 2)\ ba = \gamma b^2, \quad 3)\ ba = \beta ab. \tag{14}$$

Первые два соотношения заменой $c = \alpha a$ и $d = \gamma b$ сводятся к случаям $1')$ $bc = c^2$ и $2')$ $da = d^2$. На основании Бриллиантовой леммы (см. [8]), алгебры, порождаемые $1')$ и $2')$, имеют базисы $\{c^m b^n\}$ и $\{a^m d^n\}$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, соответственно. Поэтому алгебры, порождаемые соотношениями 1) и 2) в (14), имеют базис $\{a^m b^n\}$, т.е. базис ПБВ. Алгебра, порождаемая соотношением 3) в (14), есть, очевидно, алгебра косых полиномов Оре с автоморфизмом подобия $\varphi$ и нулевым дифференцированием.

Кроме того, во всех трех случаях (14) легко находятся операторы $\Psi_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Из $ba = \alpha a^2$ имеем $ba^n = \alpha a^{n+1}$. Следовательно, $\Psi_0 = \alpha X$, $\Psi_1 = \Psi_2 = \cdots = 0$. Из $ba = \gamma b^2$ имеем $ba^n = \gamma^n b^{n+1}$. Следовательно, $\Psi_{n+1}(a^n) = \gamma^n$, $\Psi_{n+1}(a^m) = 0$, если $m \neq n$. Поэтому $\Psi_0 = 0$, $\Psi_{n+1} = \gamma^n V_0 \bar{D}^n$. В случае $ba = \beta ab$ имеем $ba^n = (\beta a)^n b$. Поэтому $\Psi_k = 0$ при $k \neq 1$, $\Psi_1 = \varphi$, где $\varphi$ – оператор подобия: $\varphi(a^n) = (\beta a)^n$.

**6**. В случае $\alpha = \beta = \gamma = 0$ имеем $ba = 0$. Тогда из Бриллиантовой леммы (см. [8]) следует, что $\{a^m b^n\}$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, есть базис алгебры, порождаемой соотношением $ba = 0$. С другой стороны, из $ba = 0$ следует $ba^k = 0$. Следовательно, операторы $\Psi_k$, определяемые этой алгеброй, являются нулевыми. Поэтому они удовлетворяют уравнению согласованности, а из согласованности также следует, что $\{a^m b^n\}$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, есть базис ПБВ.

На основании пунктов **4** и **5** получаем следующее предложение.

**Предложение 1.** *Алгебра, определяемая* (1), *при условии* $\alpha\gamma = 0$ *является алгеброй косых полиномов над* $F[a]$ *и имеет базис* $\{a^m b^n\}$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, *базис ПБВ.*

Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать соотношение (1) только при условии $\alpha\gamma \neq 0$.

## 2. Алгебраические уравнения, определяемые операторами $\Psi_0, \Psi_1, \ldots$. Основные леммы

**1**. Рассмотрим операторы $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \ldots$ на кольце $F[a]$, определенные в разделе 1. Индуктивно определяются линейные отображения $\Psi_n^{(k)}$, $k = 2, 3, \ldots$; $n = 0, 1, 2, \ldots$, на $F[a]$, для которых

$$b^k p(a) = \Psi_0^{(k)}(p(a)) + \Psi_1^{(k)}(p(a))b + \ldots . \tag{15}$$

Полагая, что $\Psi_n^{(1)} = \Psi_n$, имеем

$$\begin{aligned} b^{k+1}p(a) &= \Psi_0^{(k+1)}(p(a)) + \Psi_1^{(k+1)}(p(a))b + \ldots = b(b^k p(a)) \\ &= \{b[\Psi_0^{(k)}(p(a))]\} + \{b[\Psi_1^{(k)}(p(a))]\}b + \ldots . \end{aligned} \tag{16}$$

Общие соотношения между операторами $\Psi_n^{(k)}$ были указаны в [12], [14] и [15]. В данном разделе для нас важно, что

$$\Psi_0^{(2)} = {\Psi_0}^2, \Psi_k^{(2)} = \Psi_0\Psi_k + \Psi_1\Psi_{k-1} + \ldots + \Psi_k\Psi_0. \tag{17}$$

Эти равенства следуют из (16) ($k = 1$) и однозначности разложения (15) по степеням $b$.

**Лемма 1.** *Линейные операторы* $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \ldots$ *на* $F[a]$ *удовлетворя-*

*ют бесконечному числу уравнений:*

$$
\begin{aligned}
&0)\quad \Psi_0 X = \alpha X^2 + \beta X \Psi_0 + \gamma \Psi_0^{(2)},\\
&1)\quad \Psi_1 X = \beta X \Psi_1 + \gamma \Psi_1^{(2)},\\
&\qquad\qquad \dots\\
&k)\quad \Psi_k X = \beta X \Psi_k + \gamma \Psi_k^{(2)},\\
&\qquad\qquad \dots
\end{aligned}
\tag{18}
$$

**Доказательство.** Умножив (1) справа на $a^n, n = 0, 1, 2, \dots$ , получим

$$ba^{n+1} = \alpha a^{n+2} + \beta a(ba^n) + \gamma b^2 a^n. \tag{19}$$

Тогда, согласно (15), имеем

$$
\begin{aligned}
ba^{n+1} &= \Psi_0(a^{n+1}) + \Psi_1(a^{n+1})b + \dots,\\
ba^n &= \Psi_0(a^n) + \Psi_1(a^n)b + \dots,\\
b^2 a^n &= \Psi_0^{(2)}(a^n) + \Psi_1^{(2)}(a^n)b + \dots.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Подставляя (20) в (19) и сравнивая коэффициенты при $b^k, k = 0, 1, \dots$, имеем

$$
\begin{aligned}
&\Psi_0(a^{n+1}) = \alpha a^{n+2} + \beta a \Psi_0(a^n) + \gamma \Psi_0^{(2)}(a^n),\\
&\Psi_1(a^{n+1}) = \beta a \Psi_1(a^n) + \gamma \Psi_1^{(2)}(a^n),\\
&\quad \dots \quad \dots\\
&\Psi_k(a^{n+1}) = \beta a \Psi_k(a^n) + \gamma \Psi_k^{(2)}(a^n),\\
&\quad \dots \quad \dots
\end{aligned}
\tag{21}
$$

В силу определения оператора $X$ (п. **3** раздела 1) имеем $\Psi_k(a^{n+1}) = \Psi_k X(a^n)$, $a\Psi_k(a^n) = X\Psi_k(a^n)$ и $\alpha a^{n+2} = \alpha X^2(a^n)$. Сделав такую замену в (21), получим

$$
\begin{aligned}
&\Psi_0 X(a^n) = \alpha X^2(a^n) + \beta X \Psi_0(a^n) + \gamma \Psi_0^{(2)}(a^n),\\
&\Psi_k X(a^n) = \beta X \Psi_k(a^n) + \gamma \Psi_k^{(2)}(a^n),\ k = 1, 2, \dots.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Так как $\{a^n\}, n = 0, 1, \dots$, образуют базис $F[a]$, то уравнения (22) эквивалентны (18).

**2**. Уравнения (18) можно рассматривать независимо от (1). Если дополнить (18) условиями (5), то в этом случае мы будем называть их начальными условиями, согласованными с уравнением (1).

В дальнейшем большую роль в исследовании алгебр, определяемых соотношением (1), играет матрица $\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}$, которую мы будем называть сопровождающей матрицей для соотношения (1).

**Предложение 2.** *Пусть правый нижний элемент матрицы $\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}^n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ отличен от нуля. Тогда бесконечная система уравнений (18) относительно операторов $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \ldots$ имеет единственное решение при начальных условиях (5). При этом операторы $\Psi_k$, определенные на $F[a]$, будут иметь вид*

*$\Psi_{m+1}(a^n) = \tilde{\Psi}^n_{m+1} a^{n-m}$, если $-1 \leqslant m \leqslant n$,*

*$\Psi_{m+1}(a^n) = 0$, если $m > n$,*

*где $\tilde{\Psi}^i_j$ – элементы поля $F$.*

Прежде чем приступить к доказательству предложения 2, обозначим $\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} * & d_m \\ * & c_m \end{pmatrix}$ (для нас левый столбец не важен). Очевидно, что

$$d_{m+1} = \beta d_m + \alpha c_m, \quad c_{m+1} = -\gamma d_m + c_m, \quad c_0 = 1, d_0 = 0. \qquad (23)$$

Рассмотрим также рекуррентные уравнения для неизвестных $y_m$, $m = 0, 1, \ldots$:

$$(1 - \gamma y_m) y_{m+1} = \alpha + \beta y_m, \qquad y_0 = 0. \qquad (24)$$

**Лемма 2.** *Пусть первые $c_k$, $k \leqslant n$, отличны от нуля. Тогда из уравнений (24) определяются $y_m$, $1 \leqslant m < n$, где*

$$y_m = d_m / c_m, \quad 1 - \gamma y_m = c_{m+1}/c_m \neq 0. \qquad (25)$$

**Доказательство.** Для $m = 0$ из (23), (24) имеем $y_1 = \alpha$, $c_1 = 1$, $d_1 = \alpha$, $c_2 = 1 - \alpha\gamma$, то есть формула (25) справедлива при $m = 0, 1$.

Предположим по индукции, что (25) справедлива для всех $k \leqslant m < n$. Заменяя $y_m$ на $d_m/c_m$ и учитывая (23), получим $1 - \gamma y_m = 1 - \gamma(d_m/c_m) = = (c_m - \gamma d_m)/c_m = c_{m+1}/c_m \neq 0$. Аналогично $\alpha + \beta y_m = \alpha + \beta(d_m/c_m) = (\alpha c_m + \beta d_m)/c_m = d_{m+1}/c_m$. Тогда из (24) имеем $y_{m+1} = (\alpha+\beta y_m)/(1-\gamma y_m) = (d_{m+1}/c_m)/(c_{m+1}/c_m) = d_{m+1}/c_{m+1}$.

**Следствие.** *Если все $c_m \neq 0$, то рекуррента (24) разрешима для всех $m$, где $y_m = d_m/c_m$, $1-\gamma y_m = c_{m+1}/c_m \neq 0$.*

**Доказательство предложения 2.** В силу начальных условий (5) и равенства $\Psi_0^{(2)} = \Psi_0^2$ в (17), из уравнения 0) в (18) получим $\Psi_0(a) = \alpha a^2$.

Предположим по индукции, что $\Psi_0(a^m) = \tilde{\Psi}_0^m a^{m+1}$ и $\tilde{\Psi}_0^m \neq 0$ для $m < n$. Тогда, действуя обеими частями операторного уравнения 0) из (18) на $a^{m-1}$, получим $\Psi_0(a^m) = \alpha a^{m+1} + \beta\tilde{\Psi}_0^{m-1}a^{m+1} + \gamma\tilde{\Psi}_0^{m-1}\Psi_0(a^m)$. Отсюда $(\alpha+\beta\tilde{\Psi}_0^{m-1})a^{m+1} = \Psi_0(a^m)(1-\gamma\tilde{\Psi}_0^{m-1}) = (1-\gamma\tilde{\Psi}_0^{m-1})\tilde{\Psi}_0^m a^{m+1}$ и поэтому

$$\tilde{\Psi}_0^m(1-\gamma\tilde{\Psi}_0^{m-1}) = \alpha + \beta\tilde{\Psi}_0^{m-1}. \tag{26}$$

Поскольку из начальных условий следует, что $\tilde{\Psi}_0^0 = 0$, то $\tilde{\Psi}_0^m$ является единственным решением рекурренты (24). По предположению $c_m \neq 0$ при всех $m$, а значит и $1-\gamma y_m \neq 0$ при всех $m$. Поэтому, полагая $m = n-1$, имеем $\tilde{\Psi}_0^{n-1} = y_{n-1}, 1-\gamma\tilde{\Psi}_0^{n-1} = 1-\gamma y_{n-1} \neq 0$. Следовательно, $\Psi_0(a^n) = (d_n a^{n+1})/c_n = y_n a^{n+1}$. Таким образом, для всех $n = 1, 2, ...$ имеем $\Psi_0(a^n) = y_n a^{n+1} = \tilde{\Psi}_0^n a^{n+1}$ при условии $c_n \neq 0$. Из начальных условий и уравнения 1) в (18) имеем $\Psi_1(a) = \beta a$.

Предположим по индукции, что $\Psi_1(a^m) = \tilde{\Psi}_1^m a^m$ для $m < n$. Тогда, действуя обеими частями операторного уравнения 1) из (18) на $a^{n-1}$, получим $\Psi_1(a^n) = \beta\tilde{\Psi}_1^{n-1}a^n + \gamma\tilde{\Psi}_0^{n-1}\Psi_1(a^n) + \gamma\tilde{\Psi}_1^{n-1}\tilde{\Psi}_0^{n-1}a^n$. Отсюда

$$\Psi_1(a^n)\cdot(1-\gamma\tilde{\Psi}_0^{n-1}) = (\beta\tilde{\Psi}_1^{n-1} + \gamma\tilde{\Psi}_1^{n-1}\tilde{\Psi}_0^{n-1})a^n. \tag{27}$$

Так как в наших условиях $1-\gamma\tilde{\Psi}_0^{n-1} = c_n/c_{n-1} \neq 0$, то тем самым $\Psi_1(a^n) = \tilde{\Psi}_1^n a^n$.

Аналогично доказывается существование решения $\Psi_k$ указанного вида для любого $k$. Действительно, предположим по индукции, что операторы $\Psi_0, \Psi_1, ..., \Psi_{k-1}$ удовлетворяют первым $k$ уравнениям (18) и формулам, определенным в предложении 2. В силу начальных условий (5), по индукции можно предположить, что для $m \leqslant n$ имеет место равенство $\Psi_k(a^m) = \tilde{\Psi}_k^m a^{m-(k-1)}$, если $k \leqslant m+1$, и $\tilde{\Psi}_k^m = 0$, если $k > m+1$.

Действуя обеими частями $k$-го уравнения в (18) на $a^n$ и используя выражение для $\Psi_k^{(2)}$ из (17), получим $\Psi_k(a^{n+1}) = \{\beta\tilde{\Psi}_k^{n-1} + \gamma[\tilde{\Psi}_0^{n-k+1}\tilde{\Psi}_k^n + ... + \tilde{\Psi}_{k-1}^n\tilde{\Psi}_1^n]\}a^{n+2-k} + \gamma\tilde{\Psi}_0^n\Psi_k(a^{n+1})$.

Перенося член $\gamma\tilde{\Psi}_0^n\Psi_k(a^{n+1})$ в левую часть и учитывая, что $1-\gamma\tilde{\Psi}_0^n \neq 0$, очевидно, имеем

$$\begin{aligned}\Psi_k(a^{n+1}) &= \{\beta\tilde{\Psi}_k^{n-1} + \gamma[\tilde{\Psi}_0^{n-k+1}\tilde{\Psi}_k^n + ... + \tilde{\Psi}_{k-1}^n\tilde{\Psi}_1^n]\}\frac{a^{n+2-k}}{1-\gamma\tilde{\Psi}_0^n} = \\ &= \tilde{\Psi}_k^{n+1}a^{n+2-k}.\end{aligned} \tag{28}$$

Далее, если $n+1 < k-1$, то по индукции получаем $\tilde{\Psi}_{k-1}^n = \tilde{\Psi}_{k-2}^{n-1} = ... = 0$. Поэтому каждое из слагаемых в фигурных скобках равно 0. Следовательно, при $k > n+2$ имеем $\tilde{\Psi}_k^{n+1} = 0$.

**3**. Докажем следующую лемму.

**Лемма 3 (основная).** *Допустим, что в некоторой алгебре $A$ над полем $F$ имеются два элемента $a$ и $b$, удовлетворяющие (1). Тогда если матрицы $\begin{pmatrix}\beta & \alpha \\ -\gamma & 1\end{pmatrix}^n$ удовлетворяют условиям предложения 2, то есть $c_n \neq 0$, $n = 0, 1, ...$, то для любого $n$ имеет место равенство*

$$ba^n = \Psi_0(a^n) + \Psi_1(a^n)b + ... + \Psi_{n+1}(a^n)b^{n+1}, \tag{29}$$

*где операторы $\Psi_k$ заданы на $F[a]$ и однозначно определены предложением 2. (Заметим, что (29) может быть не единственным представлением $ba^n$.)*

**Доказательство.** Начальные условия (5) для $\Psi_k$, следующие из уравнения (1), являются частными случаями (29). Поэтому предположим по индукции, что (29) справедливо для всех $m \leqslant n$. То есть из (29) и предложения 2 имеем

$$ba^m = \tilde{\Psi}_0^m a^{m+1} + \tilde{\Psi}_1^m a^m b + ... + \tilde{\Psi}_{m+1}^m b^{m+1}, \quad m \leq n. \tag{30}$$

Опишем алгоритм нахождения разложения $ba^{n+1}$. Имеем $ba^{n+1} = (ba)a^n = (\alpha a^2 + \beta ab + \gamma b^2)a^n = \alpha a^{n+2} + \beta a(ba^n) + \gamma b^2 a^n = \alpha a^{n+2} + (\beta a + \gamma b)ba^n$.

Элемент $ba^n$ представим в виде (30) для $m = n$. Тогда

$$ba^{n+1} = \alpha a^{n+2} + (\beta a + \gamma b)[\tilde{\Psi}_0^n a^{n+1} + \tilde{\Psi}_1^n a^n b + ... + \tilde{\Psi}_{n+1}^n b^{n+1}].$$

Раскрывая скобки и перенося член $\gamma \tilde{\Psi}_0^n ba^{n+1}$ в левую часть, получим

$$\begin{aligned}(1 - \gamma\tilde{\Psi}_0^n) ba^{n+1} = (\alpha + \beta\tilde{\Psi}_0^n) a^{n+2} + \beta[\tilde{\Psi}_1^n a^{n+1} b + ... + \tilde{\Psi}_{n+1}^n ab^{n+1}] \\ + \gamma[\tilde{\Psi}_1^n (ba^n) b + \tilde{\Psi}_2^n (ba^{n-1}) b^2 + ... + \tilde{\Psi}_{n+1}^n b^{n+2}]. \qquad (31)\end{aligned}$$

В силу следствия имеем $1 - \gamma\tilde{\Psi}_0^n \neq 0$ для всех $n$. Заменяя $ba^n, ba^{n-1}, ..., ba$ выражениями (30), собирая подобные слагаемые из одночленов $a^i b^j$ и деля после этого (31) на $1 - \gamma\tilde{\Psi}_0^n$, получим

$$ba^{n+1} = \frac{\alpha + \beta\tilde{\Psi}_0^n}{1 - \gamma\tilde{\Psi}_0^n} a^{n+2} + \sum_{k=1}^{n+2} \frac{\beta\tilde{\Psi}_k^n + \gamma \sum\limits_{i=1}^{k} \tilde{\Psi}_i^n \tilde{\Psi}_{k-i}^{n+1-i}}{1 - \gamma\tilde{\Psi}_0^n} a^{n+2-k} b^k. \quad (32)$$

Но коэффициенты при $a^{n+2-k}b^k$, $k = 0, 1, ..., n+2$, в (32) в точности совпадают с коэффициентами при $a^{n+2-k}b^k$ в (28), т.е. равны $\tilde{\Psi}_k^{n+1}$. Таким образом, (32) перепишется в виде $ba^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+2} \tilde{\Psi}_k^{n+1} a^{n+2-k} b^k$, что совпадает с (30) для $m = n+1$.

**Лемма 4.** *Допустим, что в некоторой алгебре $A$ над полем $F$ имеются два элемента $a$ и $b$, удовлетворяющие (1). Тогда если матрицы $\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}^k$, $k \leqslant n+1$, удовлетворяют условиям $c_k \neq 0$, то для любого $m \leqslant n+1$ имеем*

$$ba^m = \tilde{\Psi}_0^m a^{m+1} + \tilde{\Psi}_1^m a^m b + ... + \tilde{\Psi}_{m+1}^m b^{m+1}. \qquad (33)$$

**Доказательство.** Уравнение (1) является частным случаем (33). Поэтому по индукции допустим, что (33) верно для всех $m \leqslant n$. Покажем, что (33) справедлива и для $m = n+1$. Вспомним, что в доказательстве основной леммы мы проводили эту индукции при условии, что соотношение (30) (которое совпадает с (33)) справедливо при всех $m \leqslant n$, и доказывали, что (30) справедливо и для $m = n+1$, используя лишь условия, что $c_m \neq 0$, $m = 0, 1, ..., n+1$.

**4**. Расширим поле $F$ до кольца полиномов $F[t]$ и рассмотрим кольцо полиномов от $a$ над $F[t]$. Тогда действие операторов $\Psi_k$, $k=0,1,2,...$, и оператора $X$ можно расширить на $F[t][a]$, рассматривая $F[t]$ как кольцо коэффициентов. Очевидно, что соотношения между $\Psi_k$ и $X$ как операторами в $F[a]$ справедливы для них и как для операторов в $F[t][a]$. Рассмотрим оператор $\Psi(t)$ на $F[t][a]$, определенный формулой

$$\Psi(t)=\Psi_0+t\Psi_1+t^2\Psi_2+...+t^k\Psi_k+... . \tag{34}$$

Очевидно, что

$$\Psi^2(t)=\sum_{k=0}(\Psi_0\Psi_k+...+\Psi_k\Psi_0)t^k=\sum_{k=0}\Psi_k^{(2)}t^k. \tag{35}$$

Хотя оператор $\Psi(t)$ задается, вообще говоря, бесконечной суммой, но для каждого $a^n$ значения $\Psi(t)(a^n)$ по определению (34) равны

$$\Psi(t)(a^n)=\Psi_0(a^n)+t\Psi_1(a^n)+t^2\Psi_2(a^n)+...+t^{n+1}\Psi_{n+1}(a^n), \tag{36}$$

так как $\Psi_m(a^n)=0$ для $m>n+1$ из определения $\Psi_m$ в предложении 2.

**Лемма 5.** *Рассмотрим алгебру линейных отображений $F[t][a]$ в себя над полем $F$. Тогда операторы $\Psi(t)$ и $X$ принадлежат этой алгебре и удовлетворяют соотношению*

$$\Psi(t)X=\alpha X^2+\beta X\Psi(t)+\gamma\Psi^2(t), \tag{37}$$

*т.е. являются представлениями алгебры $Q(\alpha,\beta,\gamma)$.*

**Доказательство.** Умножим $k$-е уравнение из (18), $k=0,1,2,...$, на $t^k$, а потом сложим правые и левые части всех уравнений. Тогда получим

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_k t^k\right)X=\alpha X^2+\beta X\left(\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_k t^k\right)+\gamma\left(\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_k^{(2)}t^k\right),$$

что в силу (34) и (35) совпадает с (37).

## 3. Предложения о базисе $\{a^m b^n\}$

**Предложение 3.** *Рассмотрим операторы $\Psi_k$, $k = 0, 1, 2, ...$, определенные в предложении 2. Существует алгебра косых полиномов над кольцом коэффициентов $F[a]$ с образующей $\tau$, для которых выполняется соотношение коммутации*

$$\tau p(a) = \Psi_0(p(a)) + \Psi_1(p(a))\tau + \Psi_2(p(a))\tau^2 + \dots, \qquad p(a) \in F[a]. \quad (38)$$

В силу определения кольца косых полиномов, это представление задается однозначно (6).

**Доказательство.** Для того, чтобы операторы $\Psi_k$, $k = 0, 1, 2, ...$, определяли алгебру косых полиномов с соотношением (37), необходимо и достаточно, чтобы операторы $\Psi_k$, $k = 0, 1, 2, ...$, удовлетворяли уравнениям согласованности, вытекающим из ассоциативности умножения (см. [14, 15]). Эти уравнения в случае произвольной алгебры косых полиномов (7) имеют при любых $\alpha, \beta \in K$ вид

$$\begin{aligned}
&\Psi_0(\alpha\beta) = \Psi_0(\alpha)\beta + \Psi_1(\alpha)\Psi_0(\beta) + \Psi_2(\alpha)\Psi_0^2(\beta) + \dots, \\
&\Psi_1(\alpha\beta) = \Psi_1(\alpha)\Psi_1(\beta) + \Psi_2(\alpha)\Psi_1^{(2)}(\beta) + \dots, \\
&\quad \dots \quad \dots \\
&\Psi_k(\alpha\beta) = \Psi_1(\alpha)\Psi_k(\beta) + \Psi_2(\alpha)\Psi_k^{(2)}(\beta) + \dots, \\
&\quad \dots \quad ,
\end{aligned} \qquad (39)$$

где $\Psi_k^{(m)} = \sum\limits_{i_1+\ldots+i_m=k} \Psi_{i_1} \ldots \Psi_{i_m}$.

При этом суммы в правой части (39) конечны при всех $\alpha, \beta \in K$ и $k = 0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, нам достаточно проверить, что операторы $\Psi_k$, определяемые предложением 2, удовлетворяют уравнениям (39) для всех $\alpha = a^n$, где $n = 0, 1, \ldots$. Так как $X$ – оператор умножения на $a$ в $F[a]$, то значение $\Psi_k(a^n\beta)$ можно представить как $\Psi_k X^n(\beta)$, а значение $\Psi_k(a^n)\Psi_m^{(r)}(\beta)$ — как $\left(\Psi_k(X^n)\Psi_m^{(r)}\right)(\beta)$. Поскольку $\beta$ – произвольный элемент $F[a]$, то уравнения (39) можно представить для любого $n$ в эквивалентной операторной форме

$$\begin{aligned} &\Psi_0 X^n = \Psi_0(X^n) + \Psi_1(X^n)\Psi_0 + \Psi_2(X^n)\Psi_0^2 + \dots, \\ &\Psi_1 X^n = \Psi_1(X^n)\Psi_1 + \Psi_2(X^n)\Psi_1^{(2)} + \dots, \\ &\Psi_2 X^n = \Psi_1(X^n)\Psi_2 + \Psi_2(X^n)\Psi_2^{(2)} + \dots, \\ &\quad \dots \quad \dots \end{aligned} \tag{40}$$

Умножая $k$-е уравнение в (40) получим уравнение, эквивалентное системе (40):

$$\Psi(t)X^n = \Psi_0(X^n) + \Psi_1(X^n)\Psi(t) + \Psi_2(X^n)\Psi(t)^2 + \dots. \tag{41}$$

Докажем, что уравнение (41) действительно имеет место. Из леммы 5 вытекает, что оператор $\Psi(t)$ удовлетворяет уравнению (37). А в силу основной леммы оно удовлетворяет и уравнению (29), которое совпадает с уравнением (41) при $\Psi(t) = b$, $X = a$, так как $\Psi_m X^n = 0$ при $m > n+1$.

**Предложение 4.** *Пусть в матрицах* $\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}^n$, $n = 0, 1, \dots,$ *правый нижний элемент* $c_n \neq 0$. *Тогда квадратичная алгебра* $Q(\alpha, \beta, \gamma)$, *определяемая соотношением (1), имеет базис* $a^m b^n$, *где* $m, n = 0, 1, 2, \dots$. *Другими словами, алгебра* $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ *есть кольцо косых полиномов над* $F[a]$, *определяемое последовательностью операторов* $\Psi_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, *удовлетворяющих уравнениям (18).*

**Доказательство.** Если $c_n \neq 0$ при всех $n$, то в силу предложения 2 определены операторы $\Psi_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, действующие на $F[a]$ согласованными начальными условиями (5). В силу предложения 3 существует кольцо косых полиномов над $F[a]$, в котором выполнено соотношение (38). Из начальных условий (5) и уравнения 0) из (18) имеем $\Psi_0(a) = \alpha a^2$, $\Psi_1(a) = \beta a$, $\Psi_2(a) = 1$, $\Psi_m(a) = 0$, $m \geqslant 3$. Таким образом, уравнение

$$\tau a = \alpha a^2 + \beta a \tau + \gamma \tau^2 \tag{42}$$

является частным случаем уравнения (38). Тогда отображение, индуцированное отображением $b \to \tau$, $a \to a$, можно продолжить до $F[a]$-кольцевого гомоморфизма кольца $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ на кольцо косых полиномов, определяемое (38). Таким образом, из линейной независимости мономов $\{a^m\tau^n\}$ (предложение 3) следует линейная независимость мономов $\{a^m b^n\}$, $m,n=0,1,2,\ldots$.

**Предложение 5.** *Пусть определитель* $\Delta = \begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ -\gamma & 1 \end{vmatrix} = \beta+\alpha\gamma$ *не равен нулю. Тогда для того, чтобы мономы* $\{a^m b^n\}$, $m,n=0,1,2,\ldots$, *образовывали базис алгебры* $Q(\alpha,\beta,\gamma)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $c_n\neq 0$, $n=1,2,\ldots$.

**Доказательство.** Достаточность вытекает из предложения 4, так как $c_n\neq 0$, $n=1,2,\ldots$.

Доказательство необходимости. Предположим противное, то есть предположим, что при некотором наименьшем $n_0+1$ в матрице $\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}^{n_0+1}$ правый нижний элемент равен нулю: $c_{n_0+1}=0$. Тогда $c_k\neq 0$ для $k\leqslant n_0$. Поэтому согласно лемме 2 при $m<n_0$ имеем $1-\gamma\tilde\Psi_0^m\neq 0$.

Рассмотрим выражение (31) для $n=n_0$. Тогда коэффициент $1-\gamma\tilde\Psi_0^{n_0}$ в левой части равен $c_{n_0+1}/c_{n_0}=0$ в силу леммы 2. В правой части коэффициент при $a^{n_0+2}$ равен $\alpha+\beta\tilde\Psi_0^{n_0}$ и, в силу леммы 2, он равен $d_{n_0+1}/c_{n_0}$. Напомним, что $d_{n_0+1}$ является верхним правым элементом, а $c_{n_0+1}$ – нижним правым элементом матрицы $\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}^{n_0+1}$. Поэтому если $\begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ -\gamma & 1 \end{vmatrix}\neq 0$, а $c_{n_0+1}=0$, то $d_{n_0+1}\neq 0$. Следовательно, $\alpha+\beta\tilde\Psi_0^{n_0}=d_{n_0+1}/c_{n_0}\neq 0$. Остальные члены правой части (31) при $n=n_0$ имеют вид $a^ib^j$, $j\geqslant 1$, или $(ba^{n_0-r})b^{r+1}$, $0\leqslant r\leqslant n_0$, с некоторыми коэффициентами. Из определения $n_0$ и леммы 4 следует, что каждое выражение $(ba^{n_0-r})$ является линейной комбинацией членов $a^sb^t$. Поэтому каждый член $(ba^{n_0-r})b^{r+1}$ представляется линейной комбинацией одночленов $a^sb^{t+r+1}$, не равных $a^m$. Следовательно, член $(\alpha+\beta\tilde\Psi_0^{n_0})a^{n_0+2}$ не сокращается в (31). Таким образом, для $n=n_0$ в (31) получаем, что левая часть равна нулю, а правая часть является ненулевой линейной комбинацией одночленов $a^{n_0+2-k}b^k$, $k=0,1,\ldots,n_0+2$.

**Замечание 1.** Применим предложение 5 для доказательства теоремы 1 в [9] (см. Введение).

Случай теоремы А. М. Вершика в наших обозначениях относится к алгебре с образующими $a$ и $b$, связанными соотношением $ba = \omega a^2 + ab + \omega b^2$, где $\omega$ – элемент поля комплексных чисел. В условиях предложения 5 имеем $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \omega \\ -\omega & 1 \end{vmatrix} = 1 + \omega^2 \neq 0$, т.е. $\omega \neq i$.

Найдем правый нижний элемент $c_n$ в матрице $\begin{pmatrix} 1 & \omega \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}^n$. Для этого заметим, что

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \omega_n & \omega b_n \\ -\omega b_n & \omega_n \end{pmatrix},$$

где

$$\omega_{n+1} = 2\omega_n - (1+\omega^2)\omega_{n-1},\ \omega_0 = 1,\ \omega_1 = 1$$

и

$$b_{n+1} = 2b_n - (1+\omega^2)b_{n-1},\ b_0 = 0,\ b_1 = 1.$$

Из первого рекуррентного соотношения находим

$$\omega_n = \mathrm{Re}\,(1+i\omega)^n = (1+\omega^2)^{\frac{n}{2}}\cos(n\mathrm{arctan}\omega).$$

Из второго аналогично получаем

$$b_n = \frac{\mathrm{Im}\,(1+i\omega)^n}{\omega} = \frac{(1+\omega^2)^{\frac{n}{2}}\sin(n\arctan\omega)}{\omega}.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}^n = (1+\omega^2)^{\frac{n}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos(n\mathrm{arctan}\omega) & \sin(n\mathrm{arctan}\omega) \\ -\sin(n\mathrm{arctan}\omega) & \cos(n\mathrm{arctan}\omega) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, согласно предложению 5, условие $c_n = \cos(n\arctan\omega) \neq 0$, $n = 1, 2, \cdots$, при $\omega \neq i$ является необходимым и достаточным для того, чтобы алгебра, задаваемая соотношением $ba = \omega a^2 + ab + \omega b^2$, $\omega \neq i$, над полем комплексных чисел, имела базис Пуанкаре–Биркгофа–Витта. Если $\omega = i$, то $\Delta = 0$, $\beta = 1$ и к этому случаю применимо предложение 9 (из раздела 5), также утверждающее существование базиса ПБВ.

Заметим, что в случае $\omega \neq i$ имеем $c_1 = \cos(\arctan\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \neq 0$. Следовательно, в случае поля комплексных чисел из предложений 5 и 9 получается теорема 1 из [9].

## 4. Выражение операторов $\Psi_k$, $k \geqslant 2$, через $\Psi_0$ и $\Psi_1$

**1**. В разделе 1 п. **4** рассмотрен случай уравнения (1) при $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. В этом случае матрицы $\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}^n$ удовлетворяют условиям предложения 2. Поэтому элементы $\{a^m b^n\}$ образуют базис и задают операторы $\Psi_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, которые связаны соотношениями (11). Так как $\alpha = 0$, то $\Psi_0 = 0$. Тогда алгебра $Q(0, \beta, \gamma)$ является частным случаем алгебры косых рядов над кольцом $K$, определяемой коммутацией

$$\tau a = \Psi_1(\alpha)\tau + \Psi_2(\beta)\tau^2 + \cdots, \tag{43}$$

где $\tau$ – образующая кольца рядов и $\alpha \in K$ (см. [16]). Таким образом, в случае, когда оператор $\Psi_1$ является автоморфизмом кольца $K$, имеет место общая формула для операторов $\Psi_k$:

$$\Psi_k = \Psi_1 \Delta^{k-1}, \tag{44}$$

где $\Delta$ – некоторое дифференцирование кольца $K$ (см. [16]). Заметим, что для $Q(0, \beta, \gamma)$ мы имеем $\Psi(p(a)) = p(\beta a)$, то есть $\Psi_0$ есть оператор подобия, а $\Delta$ есть $\beta$-дифференцирование в кольце полиномов $F[a]$. Если $\gamma = -1$, то уравнение 0) из (18) имеет решение $\Psi_0 = J_\beta$ (при $\lambda = 1$). Поэтому, используя равенство $\Psi_0^{(2)} = \Psi_0^2$, вновь приходим к уравнению $J_\beta X = \beta X J_\beta - J_\beta^2$ (см. раздел 1 п. **3**). Применяя для этого случая формулу (10), получим

$$J_\beta X^n = \beta^n X^n J_\beta + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left( \prod_{i=1}^{k} \frac{\beta^{n+1-i} - 1}{\beta - 1} \right) \beta^{n-k} X^{n-k} J_\beta^{k+1}. \tag{45}$$

При $\beta = 1$ формула (45) принимает вид

$$J X^n = X^n J - n X^{n-1} J^2 + n(n-1) X^{n-2} J^3 + \cdots + (-1)^n n! J^{n+1}. \tag{46}$$

Таким образом, видно, что в случаях $\alpha\gamma = 0$ операторы $\Psi_k$, определяющие алгебру $Q(\alpha, \beta, \gamma)$, связаны соотношением (44). Например, из формулы (46) получаем, что $\Psi_1 = E$ – тождественное отображение, а $\Delta = -D$, где $D$ – обычное дифференцирование в кольце полиномов $F[X]$.

Цель этого раздела — обобщить формулу (44) для алгебр $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ в случае $\alpha\gamma \neq 0$.

**2**. Докажем следующую лемму.

**Лемма 6.** *В условиях предложения 2, то есть в случае, когда все операторы $\Psi_k$ определены для $k = 0, 1, 2, \ldots$, имеет место равенство*

$$\tilde{\Psi}_1^n = \frac{\beta}{\alpha}(\tilde{\Psi}_0^n - \tilde{\Psi}_0^{n-1}). \tag{47}$$

**Доказательство.** Для $n = 1$ из соотношения (1) и начальных условий (5) имеем $\tilde{\Psi}_0^0 = 0$, $\tilde{\Psi}_0^1 = \alpha$, $\tilde{\Psi}_1^1 = \beta$. Отсюда $\tilde{\Psi}_1^1 = \frac{\beta}{\alpha}(\tilde{\Psi}_0^1 - \tilde{\Psi}_0^0)$. Поэтому по индукции предположим справедливость (47) для $n \leqslant m$. Величину $\tilde{\Psi}_1^{m+1}$ можно определить, действуя обеими частями уравнения 1) в (18) на $a^m$. Получим $\Psi_1 X(a^m) = \beta X \Psi_1(a^m) + \gamma \Psi_1^{(2)}(a^m)$. Отсюда $\tilde{\Psi}_1^{m+1} a^{m+1} = \beta \tilde{\Psi}_1^m a^{m+1} + \gamma(\tilde{\Psi}_1^m \tilde{\Psi}_0^m + \tilde{\Psi}_0^m \tilde{\Psi}_1^{m+1}) a^{m+1}$. Таким образом, поскольку $1 - \gamma \tilde{\Psi}_0^m = c_{m+1}/c_m \neq 0$, имеем

$$\tilde{\Psi}_1^{m+1} = \left(\frac{\beta + \gamma \tilde{\Psi}_0^m}{1 - \gamma \tilde{\Psi}_0^m}\right) \tilde{\Psi}_1^m. \tag{48}$$

Проверим, что $\tilde{\Psi}_1^{m+1}$ удовлетворяет (47) при $n = m + 1$. Подставляя полученные выражения для $\tilde{\Psi}_1^{m+1}$ в (47) и используя выражение (47) для $n = m$, получаем $\frac{\beta + \gamma \tilde{\Psi}_0^m}{1 - \gamma \tilde{\Psi}_0^m} \frac{\beta}{\alpha}(\tilde{\Psi}_0^m - \tilde{\Psi}_0^{m-1}) = \frac{\beta}{\alpha}(\tilde{\Psi}_0^{m+1} - \tilde{\Psi}_0^m)$ или $(\tilde{\Psi}_0^{m+1} - \tilde{\Psi}_0^m)(1 - \gamma \tilde{\Psi}_0^m) = (\beta + \gamma \tilde{\Psi}_0^m)(\tilde{\Psi}_0^m - \tilde{\Psi}_0^{m-1})$. Раскрывая скобки и производя сокращения, получаем

$$\tilde{\Psi}_0^{m+1}(1 - \gamma \tilde{\Psi}_0^m) = \beta(\tilde{\Psi}_0^m - \tilde{\Psi}_0^{m-1}) + (1 - \gamma \tilde{\Psi}_0^{m-1}) \tilde{\Psi}_0^m. \tag{49}$$

Соотношение (26) справедливо для всех $n$. Поэтому, заменяя в (49) значения $\tilde{\Psi}_0^m(1 - \gamma \tilde{\Psi}_0^{m-1})$ и $\tilde{\Psi}_0^{m+1}(1 - \gamma \tilde{\Psi}_0^m)$ по формуле (26), получаем тождество.

**3**. Имеет место следующее обобщение формулы (44).

**Предложение 6.** *В условиях предложения 2, пусть $\Psi_0$ есть единственное решение уравнения $\Psi_0 X = \alpha X^2 + \beta X \Psi_0 + \gamma \Psi_0^2$, а $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ – остальные решения системы (18). Если $\alpha \neq 0$, то имеют место равенства*

$$\Psi_1 = V_0 + \frac{\beta}{\alpha}(\bar{D}\Psi_0 - \Psi_0 \bar{D}), \tag{50}$$

$$\Psi_m = \Psi_1 \Phi^{m-1}, \quad m \geqslant 1, \quad \text{где} \quad \Phi = \frac{\gamma}{\alpha} \bar{D}^2 \Psi_0. \tag{51}$$

**Доказательство.** Покажем вначале, что $\Psi_1$ удовлетворяет (50). Для этого достаточно сравнить значения операторов из равенства (50) на элементе $a^n$.

Если $n \geqslant 1$, то, с одной стороны, $\Psi_1(a^n) = \tilde{\Psi}_1^n a^n$, а с другой стороны (из определения $\bar{D}, X$), $V_0(a^n) + \frac{\beta}{\alpha}(\bar{D}\Psi_0 - \Psi_0 \bar{D})(a^n) = \frac{\beta}{\alpha}(\tilde{\Psi}_0^n - \tilde{\Psi}_0^{n-1})a^n$. В силу леммы 6, коэффициенты при $a^n$ равны.

Если $n = 0$, то по определению начальных условий (5), $\Psi_1(a^0) = \Psi_1(1) = 1$. С другой стороны, имеем $V_0(1) + \frac{\beta}{\alpha}(\bar{D}\Psi_0 - \Psi_0 \bar{D})(1) = 1$. Таким образом, равенство (50) доказано.

Далее мы будем предполагать, что $\gamma \neq 0$, что соответствует условию $\alpha\gamma \neq 0$. Так как для $m = 1$ формула (51) справедлива, то предположим по индукции, что она выполняется для всех $m$, $m \leqslant k$. Поэтому при $m < k$ имеем $\Psi_{m+1} = \Psi_m \Phi$. Кроме того, $\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_k$ удовлетворяют уравнениям $0), 1), \ldots, k)$ в (18), согласованным с начальными условиями (5). В соответствии с предположением индукции, подставим в $(k+1)$-е уравнение (18) вместо оператора $\Psi_{m+1}$ оператор $\Psi_m \Phi$, $m < k$. Тогда, производя соответствующие элементарные преобразования, получим $\Psi_{k+1} X = \beta X \Psi_{k+1} + \gamma(\Psi_0 \Psi_{k+1} + [\Psi_1 \Psi_{k-1} + \ldots + \Psi_k \Psi_0]\Phi - \Psi_k \Psi_0 \Phi + \Psi_k \Psi_1 + \Psi_{k+1}\Psi_0)$. Ясно, что для полученного уравнения, также как и для $(k+1)$-го уравнения в (18), оператор $\Psi_{k+1}$ является единственным решением. Покажем, что если некоторый оператор $Y$, подставленный вместо $\Psi_{k+1}$, также является решением, то $Y = \Psi_{k+1}$. Подставим в это уравнение вместо $\Psi_{k+1}$ оператор $\Psi_k \Phi$. Тогда, внося $\Psi_0 \Psi_{k+1}$ в квадратные скобки, получим

$$\Psi_k \Phi X = \beta X \Psi_k \Phi + \gamma([\Psi_0 \Psi_k + \ldots + \Psi_k \Psi_0]\Phi - \Psi_k \Psi_0 \Phi + \Psi_k \Psi_1 + \Psi_k \Phi \Psi_0). \tag{52}$$

Из уравнения $k)$ в (18) следует, что сумма в квадратных скобках равна $(\Psi_k X - -\beta X \Psi_k)/\gamma$. Производя очевидные сокращения, перенося все в левую часть и вынося $\Psi_k$, получим

$$\Psi_k[\Phi X - X\Phi + \gamma \Psi_0 \Phi - \gamma \Phi \Psi_0 - \gamma \Psi_1] = 0. \tag{53}$$

Покажем, что оператор $\Phi X - X\Phi + \gamma \Psi_0 \Phi - \gamma \Phi \Psi_0 - \gamma \Psi_1$ равен нулю. Для этого необходимо показать, что его значения на элементах $a^n$, $n = 1, 2, \ldots$, равны нулю. Так как $\Phi(1) = \Psi_0(1) = 0$,

$\Phi(a)=\gamma$, $-\gamma\Psi_1(1)=-\gamma$, то значение этого оператора на элементе $a^0=1$ равно нулю.

Используя предложение 2 при вычислении значения оператора на элементах $a^n$, $n\geqslant 1$, получим $\frac{\gamma}{\alpha}[\tilde{\Psi}_0^{n+1}-\tilde{\Psi}_0^n+\gamma\tilde{\Psi}_0^{n-1}\tilde{\Psi}_0^n-\gamma\tilde{\Psi}_0^{n+1}\tilde{\Psi}_0^n-\alpha\tilde{\Psi}_1^n]a^n$. После группировки слагаемых коэффициент в квадратных скобках принимает вид

$$(1-\gamma\tilde{\Psi}_0^n)\tilde{\Psi}_0^{n+1}-(1-\gamma\tilde{\Psi}_0^{n-1})\tilde{\Psi}_0^n-\alpha\tilde{\Psi}_1^n. \tag{54}$$

В силу (26) и (47), выражение (54) равно

$$(\alpha+\beta\tilde{\Psi}_0^n)-(\alpha+\beta\tilde{\Psi}_0^{n-1})-\alpha\tilde{\Psi}_1^n=\alpha\left[\frac{\beta}{\alpha}(\tilde{\Psi}_0^n-\tilde{\Psi}_0^{n-1})-\tilde{\Psi}_1^n\right]=0.$$

Следовательно, левая часть (53) на всех элементах $a^n$ равна нулю, а значит, равенство (53) справедливо. Таким образом, операторы $\Psi_0$, $\Psi_1\Phi^{k-1}$, $k\geqslant 1$, удовлетворяют начальным условиям согласованности (5) и являются решением уравнений (18). В силу предложения 2, решения $\Psi_0$, $\Psi_k$, $k\geqslant 1$, единственны и поэтому $\Psi_k=\Psi_1\Phi^{k-1}$.

При $\gamma=0$ формула (51) сохраняется (см. (11)). В этом случае имеем $\Psi_k=0$ для $k>1$, что совпадает с (51) для $\gamma=0$. Оператор $\Psi_1$ есть $\beta$-автоморфизм, то есть $\Psi_1(a^n)=\beta^n a^n$, а $\Psi_0==\alpha X^2D_\beta$.

**Замечание 2**. Хотя равенство $\Psi_1=\frac{\beta}{\alpha}(\bar{D}\Psi_0-\Psi_0\bar{D})+V_0$ было доказано выше независимо от значения $\gamma$, но в случае $\gamma=0$ оно проверяется непосредственно. Действительно, с одной стороны, имеем $\Psi_1(a^n)=\beta^n a^n$. С другой стороны, для $a^n$, $n\geqslant 1$, имеем $\frac{\beta}{\alpha}\left\{\bar{D}\Psi_0(a^n)-\Psi_0\bar{D}(a^n)\right\}+V_0(a^n)=\frac{\beta}{\alpha}\left\{\alpha\frac{1-\beta^n}{1-\beta}-\alpha\frac{1-\beta^{n-1}}{1-\beta}\right\}a^n=\beta^n a^n$.

## 5. Случай $\Delta=\beta+\alpha\gamma=0$

**1**. Если $\beta=0$, то при условии $\Delta=0$ имеем $\alpha\gamma=0$. Таким образом, мы приходим к случаям, разобранным в разделе 1.

**2**. Если $\beta\neq 0$, то $\alpha\gamma=-\beta\neq 0$ и поэтому все три коэффициента $\alpha,\beta,\gamma$ отличны от нуля. В этом случае сопровождающая матрица равна $\begin{pmatrix}\beta & \alpha\\ \beta/\alpha & 1\end{pmatrix}$. Так как $\begin{pmatrix}\beta & \alpha\\ \beta/\alpha & 1\end{pmatrix}^n=(\beta+1)^{n-1}\cdot\begin{pmatrix}\beta & \alpha\\ \beta/\alpha & 1\end{pmatrix}$, то $c_n==(\beta+1)^n$, $d_n=\alpha(\beta+1)^{n-1}$. В этом пункте мы будем предполагать, что $\beta+1\neq -1$, $\beta\neq 0$. Тогда $c_n\neq 0$ и поэтому, согласно

(24), (25), (26), имеем $\tilde{\Psi}_0^n = d_n/c_n = \alpha$, $n \geqslant 1$ или $\Psi_0(a^n) = \alpha a^{n+1}$, $n \geqslant 1$; $\Psi_0(1) = 0$. Тогда оператор $\Psi_0$ можно представить в виде

$$\Psi_0 = \alpha X^2 \bar{D} = \alpha X(1 - V_0). \tag{55}$$

В силу предложения 6 имеем $\Psi_1 = \frac{\beta}{\alpha}(\bar{D}\Psi_0 - \Psi_0\bar{D}) + V_0 = \frac{\beta}{\alpha}[\alpha\bar{D}X(1- V_0) - -\alpha X(1 - V_0)\bar{D}] + V_0 = \beta X V_0 \bar{D} + V_0$. Таким образом,

$$\Psi_1 = \beta X V_0 \bar{D} + V_0, \tag{56}$$

$$\Phi = \frac{\gamma}{\alpha}\bar{D}^2\Psi_0 = \frac{\gamma}{\alpha}\bar{D}^2(\alpha X^2\bar{D}) = \gamma\bar{D}. \tag{57}$$

Из предложения 6 и соотношений (56), (57) легко определить остальные операторы $\Psi_k$, $k \geqslant 2$:

$$\Psi_k = \Psi_1\Phi^{k-1} = \beta\gamma^{k-1}XV_0\bar{D}^k + \gamma^{k-1}V_0\bar{D}^{k-1}. \tag{58}$$

Подействуем оператором $\Psi_k$ на $a^n$. Получим $\Psi_k(a^n) = 0$ для $n > k$, $\Psi_k(a^k) = \beta\gamma^{k-1}a$, $\Psi_k(a^{k-1}) = \gamma^{k-1}$, $\Psi_k(a^r) = 0$, $r < k - 1$. Таким образом,

$$ba^n = \alpha a^{n+1} + \beta\gamma^{n-1}ab^n + \gamma^n b^{n+1}. \tag{59}$$

Так как $\beta = -\alpha\gamma$, то из (58) получаем следующее предложение.

**Предложение 7.** *Если задано соотношение (1) с условиями $\alpha\gamma = -\beta \neq 0$, $\beta \neq -1$, то для $n = 1, 2, \ldots$ имеем*

$$ba^n = \alpha a^{n+1} - \alpha\gamma^n ab^n + \gamma^n b^{n+1}. \tag{60}$$

Это соотношение позволяет по индукции доказать

**Предложение 8.** *В условиях предложения 7, для $m \geqslant 1, n \geqslant 0$ имеем*

$$b^m a^n = \alpha^m a^{n+m} - \alpha^m\gamma^n a^m b^n + \gamma^n b^{n+m}. \tag{61}$$

Напишем производящий ряд $\Psi(t)$ для этого случая. Из (34) и (56), (57), (58) имеем

$$\Psi(t) = \alpha X(1 - V_0) + \Psi_1 t\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma t)^{k-1}\bar{D}^{k-1}. \tag{62}$$

Оператор $\sum_{k=0}^{\infty}(\gamma t)^k\bar{D}^k = \bar{D}_{\gamma t}$ есть оператор разделенной разности в точке $\gamma t$ и определен, как легко видеть на полиномах, формулой

$$\bar{D}_{\gamma t}f(a) = \frac{f(a) - f(\gamma t)}{a - \gamma t}.$$

Итак, $\Psi(t) = \alpha X(1 - V_0) + \Psi_1 t\bar{D}_{\gamma t}$. Таким образом, с учетом леммы 5 имеем

**Предложение 9.** *Если* $\alpha\gamma = -\beta \neq 0$, $\beta \neq -1$, *то уравнение (1) определяет алгебру косых полиномов с базисом* $\{a^n b^m\}$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$. *В этой алгебре выполняются равенства (60), (61), а операторы* $X$ *и* $\Psi(t)$ *связаны соотношением*

$$\Psi(t)X = \alpha X^2 - \alpha\gamma X\Psi(t) + \gamma\Psi^2(t).$$

3. **Случай** $\beta = -1$**.** В этом случае $\alpha\gamma = -\beta = 1$. Таким образом, в этих предположениях, умножая соотношения (1) на $\alpha$, получим

$$\alpha ba = \alpha^2 a - \alpha ab + \alpha\gamma b^2. \tag{63}$$

Делая замену $a_1 = \alpha a$, приходим к соотношению

$$ba_1 = a_1^2 - a_1 b + b^2. \tag{64}$$

Таким образом, случай $\beta = -1$ эквивалентен рассмотрению алгебры $A_0$, порожденной соотношением $ba = a^2 - ab + b^2$ (см. п. **1** раздела 1).

Для алгебры $A_0$ легко указать нормальный мономиальный базис при помощи базиса Гребнера (см. [8]), состоящего в рассматриваемом случае из одного элемента $u_0 = b^2 - ab - ba + a^2$. Поэтому если принять порядок $a < b$, то нормальный базис алгебры $A_0$ состоит из всех одночленов вида

$$\{a^m\}, \{a^{m_1} b a^{m_2} b \cdots a^{m_k} b a^{m_{k+1}}\}, \tag{65}$$

где $m \geq 1$, $m_1, m_{k+1} \geq 0$, $m_2, \cdots, m_k \geq 1$.

Если принять порядок $a > b$, то имеем другой нормальный базис алгебры $A_0$:

$$\{b^m\}, \{b^{m_1} a b^{m_2} a \cdots b^{m_k} a b^{m_{k+1}}\},$$

где $m \geq 1$, $m_1, m_{k+1} \geq 0$, $m_2, \cdots, m_k \geq 1$.

Еще один базис алгебры $A_0$ можно найти, сделав линейную замену образующих $c = b - a$, $a = a$. Тогда $A_0$ порождается образующими $a$ и $c$, где $c^2 = (b-a)^2 = b^2 - ab - ba + a^2 = 0$. Поэтому базис алгебры $A_0$ в этих образующих можно представить в виде, аналогичном (65):

$$\{a^m\}, \{a^{m_1} c a^{m_2} c \cdots a^{m_k} c a^{m_{k+1}}\},$$

где $m \geq 1$, $m_1, m_{k+1} \geq 0$, $m_2, \cdots, m_k \geq 1$.

**Предложение 10.** *Пусть $A_0$ – алгебра, порожденная соотношением $ba = a^2 - ab + b^2$. Тогда одночлены $\{a^m b^n\}$, $m, n = 0, 1, 2, ...$, линейно независимы, но базиса в $A_0$ не образуют.*

Для доказательства предложения можно было бы использовать соотношение $b^2 - ab - ba + a^2 = 0$ для получения разложений $a^m b^n$ по базису (65). Однако, использование таких разложений порождает дополнительные трудности. Поэтому мы предлагаем другой метод, основанный на нескольких элементарных леммах.

**Лемма 7.** *Пусть $L_n$, $n = 1, 2, ...,$ – линейные подпространства, порождаемые словами длины $n$, состоящими из элементов $a$ и $b$ в алгебре $A_0$. Тогда $L_n \bigcap L_m = 0$ при $m \neq n$.*

**Доказательство.** Каждое слово $S$ длины $n$, если оно отлично от вида (65), содержит элемент $b^j$, $j \geq 2$. Отщепляя $b^2$ и заменяя $b^2$ на $ba - a^2 + ab$, представим $S$ комбинацией слов длины $n$, в которых степени элемента $b$ не больше $j - 1$. Продолжая такой процесс, на конечном шаге получим либо 0, либо представление $S$ линейной комбинации слов длины $n$ вида (65). Таким образом, слова длины $n$ вида (65) образуют базис $L_n$.

**Лемма 8.** *Если некоторые слова $S_1, S_2, ..., S_r$ в алгебре $A_0$ линейно независимы (зависимы), то слова $aS_1, ..., aS_r$ или $S_1 a, ..., S_r a$ также линейно независимы (зависимы).*

Действительно, пусть слова $S_1, ..., S_r$ линейно независимы; тогда существуют элементы базиса (65), обозначим их $b_1, ..., b_m$, такие, что,

$$S_1 = \alpha_{11} b_1 + ... + \alpha_{1m} b_m,$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$S_r = \alpha_{r1} b_1 + ... + \alpha_{rm} b_m,$$

и строки матрицы $||\alpha_{ij}||$ линейно независимы. Умножая эти уравнения слева на $a$, получим

$$aS_1 = \alpha_{11} ab_1 + ... + \alpha_{1m} ab_m,$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$aS_r = \alpha_{r1} ab_1 + ... + \alpha_{rm} ab_m.$$

Элементы $ab_i$, $i = 1, ..., m$, снова будут иметь вид (65), и поэтому они различны как элементы базы. Следовательно, они линейно независимы. А так как строки матрицы $||\alpha_{ij}||$ также линейно независимы, то и элементы $aS_1, ..., aS_r$ линейно независимы. То же рассуждение справедливо и для слов $S_1a, ..., S_ra$.

Случай линейной зависимости очевиден.

**Лемма 9.** *В разложении $b^n$ по базису (65) встретится хотя бы один элемент базиса, начинающийся с $b$.*

**Доказательство.** Для элементов $b$ и $b^2 = ba - a^2 + ab$ лемма, очевидно, справедлива. Поэтому предположим по индукции, что она справедлива для всех $b^k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Рассмотрим разложение $b^n$ по базису (65):

$$b^n = \sum_1 + \sum_2, \tag{66}$$

где сумма $\sum_1$ состоит из элементов базы (65), начинающихся с $b$ ($m_1 = 0$), а сумма $\sum_2$ состоит из элементов базы, начинающихся с $a$. Согласно предположению индукции, сумма $\sum_1$ непуста. Упорядочим элементы базиса (65) в лексикографическом порядке, при котором $a < b$. Тогда этот порядок можно продолжить на всю алгебру по порядку старших слов.

Пусть $h \in \sum_1$ – наибольший элемент разложения (66), и пусть $g$ – любой другой элемент разложения (66), $g < h$. Обозначим через $\bar{h}$ и $\bar{g}$ слова, полученные из $h$ и $g$ вычеркиванием последней буквы. Ясно, что $\bar{h}$ и $\bar{g}$ принадлежат (65) и $\bar{g} \leq \bar{h}$. Рассмотрим отдельно случаи $\bar{g} < \bar{h}$ и $\bar{g} = \bar{h}$.

Умножая обе части (66) справа на $b$, получим, что в разложении $b^{n+1}$ есть элемент $hb$. Пусть $\bar{g} < \bar{h}$. Тогда, если $h = \bar{h}a$, то $hb = \bar{h}ab > gb$. Во втором случае $\bar{g} = \bar{h}$. Так как $h > g$, то отсюда следует, что $h = \bar{h}b$ и $g = \bar{g}a$. Поэтому $hb = \bar{h}b^2 = \bar{h}ba - \bar{h}a^2 + \bar{h}ab > \bar{h}ab = \bar{g}ab = gb$. Следовательно, разложение $b^{n+1}$ по элементам (65) содержит элемент, начинающийся с $b$.

**4. Доказательство предложения 10.** Покажем индукцией, что одночлены вида $a^k, a^{k-1}b, ..., b^k$ линейно независимы. Для $k = 1$ это очевидно. Предположим по индукции, что одночлены $a^n, a^{n-1}b, ..., b^n$ линейно независимы. Тогда, если допустить, что одночлены $a^{n+1}, a^n b, ..., b^{n+1}$ линейно зависимы, то из предположения индукции и леммы 8 должно следовать равенство

$$b^{n+1} = \lambda_0 a^{n+1} + \lambda_1 a^n b + ... + \lambda_n ab^n. \tag{67}$$

Разлагая элементы $b, b^2, ..., b^n$ по базису (65) и подставляя эти разложения в (67), получим разложение $b^{n+1}$ по базису (65). Однако, из вида элементов (67) следует, что в полученном разложении элемента $b^{n+1}$ не будет элементов базы (65), начинающихся с $b$, что противоречит лемме 9. Таким образом, доказана первая часть утверждения о линейной независимости одночленов вида $\{a^m b^n\}$, $m, n = 0, 1, 2, ...$ .

В силу леммы 7, одночлены $a^{i_1} b^{j_1} a^{i_2} ... b^{j_k}$ степени $n$, $n = i_1 + j_1 + ... + j_k$ принадлежат подпространству $L_n$, а базу $L_n$ образуют одночлены степени $n$ вида (65). Если теперь допустить, что одночлены $\{a^m b^k\}$, $m, k = 0, 1, 2, ...$, образуют базис алгебры $A_0$, то все одночлены $\{a^m b^k\}$ степени $n$, $n = m + k$, также образуют базис $L_n$ и их количество совпадает с размерностью $L_n$. Поэтому, например, при $n = 4$ в $L_4$ должно быть два базиса: $a^4, a^3b, a^2ba, aba^2, ba^3, abab, baba, ba^2b$ и $a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4$, которые содержат разное количество элементов. Таким образом, мы приходим к противоречию.

**Замечание 3.** Доказательства лемм 7, 8 и 9, очевидно, остаются справедливыми для любой алгебры, порождаемой квадратичным соотношением (1), если она имеет базис вида (65). Тогда справедливо следующее предложение.

**Предложение 11.** *Пусть алгебра $A$, порожденная соотношением (1), имеет базис вида (65). Тогда одночлены $\{a^m b^n\}$, $m, n = 0, 1, 2, ...$, линейно независимы, но базис алгебры $A$ не образуют.*

Пользуясь случаем, авторы благодарят А. М. Вершика за многочисленные замечания и плодотворное обсуждение проблем, связанных с квадратичными алгебрами.

## Литература

1. Е. К. Склянин, *О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга–Бакстера.* — Функц. анализ и прил. **16** (1982), 27–34.

2. Е. К. Склянин, *О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга–Бакстера. II. Представление квантовой алгебры.* — Функц. анализ и прил. **17** (1983), 34–48.
3. F. H. Jackson, *q-Difference Equations.* — Amer. J. Math. **32** (1910), 305–314.
4. W. Hahn, *Orthogonalpolynome, die q-Differenzengleihungen genugen.* — Math. Nachr. **2** (1949), 4–34.
5. N. Ja. Vilenkin, A. U. Klimuk, *Representation of Lie grours and spesial functions.* Vol.3. — Kluwer Academic Publishers (1992).
6. В. Л. Островский, Ю. С. Самойленко, *Представления *-алгебр с двумя образующими и полиномиальными соотношениямию.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **172** (1989), 121–129.
7. V. L. Ostkovskii, Yu. S. Samoilenko, *Structure theorems for a pair of unbounded selfadjoint operators satisfying quadratic relation.* — In: Infinite-dimentional representations of quadratic and polynomial *-algebras. Preprint Acad. Sci. Ukr. SSR. Inst. Math. **91.4** (1991), 2–25.
8. В. А. Уфнаровский, *Алгебра-6.* — Итоги науки и техники **57** (1990), 5–177.
9. A. M. Vershik, *Algebras with quadratic relations.* — Selecta Math. Sov. **11** (1992), 293–315.
10. А. В. Головашкин, В. М. Максимов, *О косых полиномах Оре высших порядков, порождаемых однородными квадратичными соотношениями.* — УМН **53** (1998), 145–146.
11. O. Ore, *Theory of noncomutative polynomials.* — Ann. Math. **32** (1931), 463–477.
12. T. H. M. Smits, *Skew polynomial rings.* — Indag. Math. **30** (1968), 209–224.
13. F. Dumas, *Sous-corps de fraction rationnelles des corps gauches de series de Laurent.* — Lecture Notes in Math. **1478** (1991), 192–214.
14. В. М. Максимов, *Об одном обобщении кольца косых полиномов Оре.* — УМН **55** (2000), 215–216.
15. V. M. Maximov, *Canonical forms of skew polynomial rings.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **292** (2002), 40–61.
16. П. Кон, *Свободные кольца и их связи.* — М., Мир (1975).

Golovashkin A. V., Maximov V. M. On algebras of skew polynomials generated by quadratic homogeneous relations.

We consider algebras, with two generators $a$ and $b$, generated by the quadratic relations $ba = \alpha a^2 + \beta ab + \gamma b^2$, where the coefficients $\alpha$, $\beta$, and $\gamma$ belong to an arbitrary field $F$ of characteristics 0. We find conditions for the algebra to be expressed as a skew polynomial algebra with generator $b$ over the polynomial ring $F[a]$. These conditions are equivalent to the existence of the Poincaré–Birkhoff–Witt basis, i.e., basis of the form $\{a^m, b^n\}$.

Тверской
государственный университет

Российский государственный
гуманитарный университет

Поступило 19 августа 2003 г.