Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

М. А. Степанова

ТИПИЧНЫЕ ПОГРУЖЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СФЕРЫ В R^3 И ИХ ОСТОВЫ

§1. Основные формулировки

1.1. Постановка задачи. *Гладким погружением* сферы $\mathbf{S}^2$ в $\mathbf{R}^3$ называется гладкое отображение $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^3$, ранг которого в каждой точке сферы $\mathbf{S}^2$ равен 2. Гладкое погружение $f : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^3$ называется *типичным*, если для любого $n \leqslant 3$ и для любых точек $y_1, \dots, y_n$ с $f(y_1) = f(y_2) = \dots = f(y_n)$ образы касательных пространств к сфере $\mathbf{S}^2$ в точках $y_1, \dots, y_n$ под действием дифференциала df находятся в $\mathbf{R}^3$ в общем положении. Назовем типичные гладкие погружения f_0, $f_1 : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^3$ *диффеотопными*, если существуют гладкие отображения

$$G : \mathbf{S}^2 \times I \to \mathbf{S}^2 \quad \text{и} \quad H : \mathbf{R}^3 \times I \to \mathbf{R}^3,$$

сужения которых соответственно на $\mathbf{S}^2 \times t$ и $\mathbf{R}^3 \times t$ являются диффеоморфизмами (для любого $t \in I$), такие что

$$G(x, 0) = x, \quad H(y, 0) = y$$

для любых $x \in \mathbf{S}^2$ и $y \in \mathbf{R}^3$ и что

$$H(f_0(G(x, 1)), 1) = f_1(x)$$

для любого $x \in \mathbf{S}^2$.

(Ясно, что $H(f_0(G(x, 0)), 0) = f_0(x)$ для любого $x \in \mathbf{S}^2$.) Задача, которой посвящена эта работа, состоит в классификации типичных гладких погружений $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^3$ с точностью до диффеотопии.

1.2. Результаты, имеющиеся в литературе. Автору известна одна статья, в которой изучались диффеотопические классы гладких погружений $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^3$. Горюнов [2] построил все локальные инварианты гладких погружений степени 1 (в смысле Васильева–Гусарова).

1.3. Основные результаты работы. Всюду в этом пункте будем считать фиксированным неотрицательное целое четное число n.

1.3.1. Множество M_n. Хорошо известно, что если гладкое погружение $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^3$ типично, то число его тройных точек конечно и четно, и что если типичные гладкие погружения $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^3$ диффеотопны, то числа тройных точек этих погружений равны между собой.

Через M_n обозначим множество классов диффеотопии типичных гладких погружений $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^3$ с n тройными точками.

1.3.2. Полуграфы. Множество $\mathfrak{F}_n$. Пусть A – произвольное множество. Обозначим через $\widetilde{A}$ множество неупорядоченных пар элементов множества A. Если $\varphi : A \to B$ – отображение, то обозначим через $\widetilde{\varphi}$: $\widetilde{A} \to \widetilde{B}$ отображение, задаваемое формулой $\widetilde{\varphi}(a_1, a_2) = (\varphi(a_1), \varphi(a_2))$. Назовем *полуграфом* упорядоченную четверку (V, R', R'', ∂), где V, R', R'' – множества, ∂ – отображение $R' \to V$. Элементы множества V называются *вершинами*, элементы множества R' – *ребрами*, элементы множества R'' – *свободными петлями*. Вершина $\nu \in V$ называется *инцидентной* ребру r, если существует вершина $\nu' \in V$ такая, что $\partial(r) = (\nu, \nu')$; в этом случае вершины ν и ν' называются *концами* ребра r. Ребро, концы которого совпадают, называются *петлей*. Назовем *валентностью* вершины сумму числа инцидентных ей ребер, не являющихся петлями, и удвоенного числа инцидентных ей петель.

Отображением Ψ полуграфа $(V_1, R_1', R_1'', \partial_1)$ в полуграф $(V_2, R_2', R_2'', \partial_2)$ называется тройка отображений $\psi_1 : V_1 \to V_2$, $\psi_2 : R_1' \to R_2'$, $\psi_3 : R_1'' \to R_2''$ таких, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} R_1 \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\partial_1"'] & R_2 \arrow[d, "\partial_2"] \\ \widetilde{V}_1 \arrow[r, "\widetilde{\psi}_2"'] & \widetilde{V}_2 \end{tikzcd}$$

коммутативна. Если отображения ψ_i биективны для $1 \leqslant i \leqslant 3$, то Ψ называется *изоморфизмом*. Ясно, что изоморфность полуграфов есть отношение эквивалентности.

Далее будем рассматривать только полуграфы, каждая вершина которых инцидентна не более чем одной петле. Тройка $D, \Gamma, p)$ называется *остовом*, если D – полуграф, каждая вершина которого четырехвалентна, Γ – полуграф, каждая вершина которого шестивалентна, $p : D \to \Gamma$ – отображение, которое сопоставляет трем вершинам полуграфа D вершину полуграфа Γ, паре ребер полуграфа D – ребро полуграфа Γ, паре свободных петель полуграфа D – свободную петлю полуграфа Γ. (Ясно, что не любую пару полуграфов D и Γ можно дополнить отображением $p : D \to \Gamma$; например, число вершин в D должно быть в 3 раза больше числа вершин в Γ.)

Отображением остова (D_1, Γ_1, p_1) *в остов* (D_2, Γ_2, p_2) будем называть пару отображений $\xi_1 : D_1 \to D_2$, $\xi_2 : \Gamma_1 \to \Gamma_2$, таких, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{\xi_1} & D_2 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ \Gamma_1' & \xrightarrow[\xi_2]{} & \Gamma_2' \end{array}$$

коммутативна. Если ξ_1, ξ_2 – изоморфизмы, то отображение остова в остов будем называть *изоморфизмом*.

Подполуграфом полуграфа (V, R', R'', ∂) называется полуграф $(V_1, R_1', R_1'', \partial_1)$ такой, что: $V_1 \subset V$, $R_1' \subset R'$, $R_1'' \subset R''$, ∂_1 – сокращение отображения ∂ на V_1 и R_1'. *Циклом* полуграфа (V, R', R'', ∂) будем называть либо подполуграф вида $(\varnothing, \varnothing, R_1'', \partial_1)$, либо подполуграф, ребра и вершины которого можно упорядочить следующим образом:

$$\nu_0, \partial_1^{-1}((\nu_0, \nu_1)), \nu_1, \partial_1^{-1}((\nu_1, \nu_2)), \nu_2, \ldots, \nu_k, \partial_1^{-1}((\nu_k, \nu_0))$$

(где k – натуральное число). Множество циклов полуграфа называется *фундаментальным*, если:

1) число вершин в каждом цикле четно;
2) для любого цикла валентность каждой вершины в цикле не превосходит 4;
3) никакие два цикла не имеют общих ребер;
4) объединение всех циклов есть весь полуграф.

Полуграф с фиксированной фундаментальной системой циклов будем называть *оснащенным*. Пусть G_1 и G_2 – оснащенные полуграфы, δ_1 и δ_2 – их фундаментальные множества циклов. *Изоморфизмом* оснащенного полуграфа (G_1, δ_1) в оснащенный полуграф (G_2, δ) называется изоморфизм $\psi : G_1 \to G_2$, который индуцирует биекцию множества δ_1 на δ_2.

Оснащенным остовом будем называть остов $((D, \delta_1), (\Gamma, \delta_2), p)$, такой, что (D, δ_1) и (Γ, δ_2) – оснащенные полуграфы, где δ_1 – фундаментальная система циклов полуграфа D, δ_2 – фундаментальная система циклов полуграфа Γ, отображение $p : D \to \Gamma$ индуцирует отображение элементов из δ_1 в элементы δ_2.

Изоморфизмом оснащенного остова $((D,\delta_1),(\Gamma,\delta_2),p)$ в оснащенный остов $(D',\delta_1'),(\Gamma,\delta_2')$ будем называть пару изоморфизмов $\xi_1 : (D,\delta_1) \to (D',\delta_1)$ и $\xi_2 : (\Gamma,\delta_2) \to (\Gamma,\delta_2)$, таких, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(D,\delta_1) \arrow[r, "\xi_1"] \arrow[d, "p"'] & (D',\delta_1') \arrow[d, "p'"] \\
(\Gamma,\delta_2) \arrow[r, "\xi_2"'] & (\Gamma',\delta_2')
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Два оснащенных остова *изоморфны*, если существует изоморфизм первого остова во второй. Ясно, что изоморфизм оснащенных остовов есть отношение эквивалентности.

Число вершин полуграфа Γ будем называть *степенью* остова (D,Γ,p).

Разобьем множество оснащенных остовов степени n на классы изоморфных оснащенных остовов. Полученное множество будем обозначать через $\mathfrak{F}_n$.

1.3.3. Отображение φ_n. Начнем с подготовительного материала. Определение отображения φ_n будет дано в последнем абзаце этого подпункта.

Пусть $f : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^3$ – типичное гладкое погружение с n тройными точками.

Обозначим через Γ_f полуграф (в $\mathbf{R}^3$), вершины которого – тройные точки погружения f, ребра – гомеоморфные интервалу $(0;1)$ компоненты линейной связности множества $\mathrm{Dopp}\, f$ двойных точек погружения f, свободные петли – гомеоморфные $\mathbf{S}^1$ компоненты линейной связности множества $\mathrm{Dopp}\, f$. (Ясно, что число как ребер, так и свободных петель конечно, и что любая двойная точка погружения f принадлежит либо ребру, либо свободной петле.) Очевидно, что валентность каждой вершины равна 6.

Далее, обозначим через D_f полуграф (в $\mathbf{S}^2$), вершинами которого являются прообразы при отображении f вершин полуграфа Γ_f, ребрами – прообразы ребер полуграфа Γ_f, свободными петлями – прообразы свободных петель полуграфа Γ_f. (Ясно, что число вершин полуграфа D_f равно $3n$. Ясно также, что прообразом каждого ребра полуграфа Γ_f является пара ребер полуграфа D_f, и что прообразом каждой свободной петли полуграфа Γ_f является пара свободных петель полуграфа D_f.) Нетрудно видеть, что валентность каждой вершины полуграфа D_f равна 4.

Наконец, обозначим через $p_f\colon D_f \to \Gamma_f$ отображение, являющееся сокращением отображения f.

Ясно, что тройка (D_f, Γ_f, p_f) – остов. Будем называть его *остовом погружения* f.

Нетрудно видеть, что существует гладкое замкнутое одномерное многообразие K и гладкое погружение $g : K \to \mathbf{R}^3$, такие, что $g(K)$ – множество кратных точек погружения f, и что если, сверх того, K' – замкнутое одномерное многообразие и $g' : K' \to \mathbf{R}^3$ – гладкое погружение с $g'(K') = g(K)$, то существует диффеоморфизм $h : K' \to K$, такой, что $g' = g \circ h$.

Пусть $K_1, \ldots, K_s$ – все компоненты линейной связности многообразия K. Ясно, что каждое из множеств $g(K_1), \ldots, g(K_s)$ обладает структурой цикла полуграфа Γ_f и совокупность этих циклов является фундаментальным множеством циклов полуграфа Γ_f. Мы определили оснащение δ_f полуграфа Γ_f.

Простая проверка показывает, что для любого натурального $i \leqslant s$ множество $f^1(g(K_i))$ состоит из 2 компонент линейной связности; обозначим их через L_i и L'_i. Нетрудно проверить, что каждое из множеств $L_1, L'_1, \ldots, L_s, L'_s$ обладает структурой цикла полуграфа D_f, и очевидно, что совокупность всех таких циклов является фундаментальным множеством полуграфа D_f. Таким образом, мы определили оснащение полуграфа D_f; обозначим его через δ'_f.

Оснащенный остов $((D_f, \delta'_f), (\Gamma_f, \delta'_f)p_f)$ будем называть *оснащенным остовом погружения* f.

Определим *отображение* $\varphi_n : M_n \to \mathfrak{F}_n$ следующим образом. Пусть $\alpha \in M_n$ и пусть $f : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^3$ – типичное гладкое погружение класса α. Мы полагаем $\varphi_n(\alpha)$ равным классу оснащенных остовов, изоморфных оснащенному остову погружения f. Прямая проверка показывает, что это определение корректно.

1.3.4. Основная теорема. *Для* $n = 0, 2, 4$ *отображение* $\varphi_n : M_n \to \mathfrak{F}_n$ *сюрьективно.*

1.3.5. Замечание. Отображение φ_n не является инъективным ни для какого неотрицательного целого четного числа n (см. §3).

§2. Доказательство основной теоремы

Полуграф степени n называется *линейно связным*, если он есть или свободная петля при $n = 0$ или связный граф при $n > 1$. Обозначим через $\mathfrak{F}_n^0$ множество классов изоморфных оснащенных остовов $((D, \delta'), (\Gamma, \delta), p)$ степени n с линейно связным полуграфом Γ. Доказательство основной теоремы заключается в построении при $n = 0, 2, 4$ для каждого класса $\alpha \in \mathfrak{F}_n^0$ гладкого типичного погружения $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^3$, оснащенный остов которого принадлежит классу α. Этим теорема будет доказана, поскольку имеется простая очевидная редукция, использующая связное суммирование погружений $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^3$, общего случая к этому случаю.

2.1. Таблицы остовов. В этом пункте для $n = 0, 2, 4$ мы предъявим по одному представителю каждого элемента множества $\mathfrak{F}_n^0$. В таблицах приведены схемы полуграфов D и Γ; ребра и свободные петли, входящие в один цикл полуграфа, изображены линиями одного вида (сплошные линии, пунктирные линии и т.п.), отображение p – это какое-нибудь отображение, которое сопоставляет набору ребер и свободных петель полуграфа D набор ребер и свободных петель полуграфа Γ, изображенных линиями того же вида, а вершинам полуграфа D, изображенным символами одного вида, – вершины полуграфа Γ, изображенные теми же символами.

Таблица 1. Случай $n = 0$.

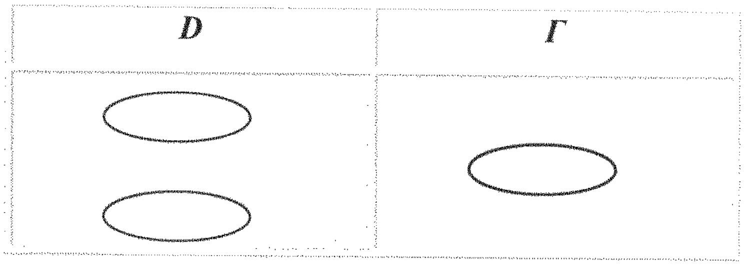


Таблица 2. Случай $n = 2$.

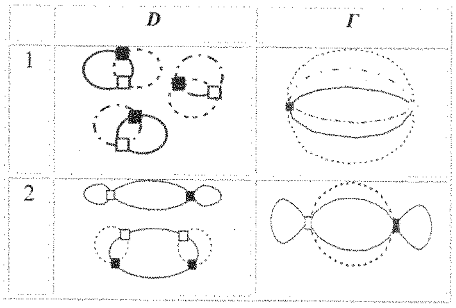
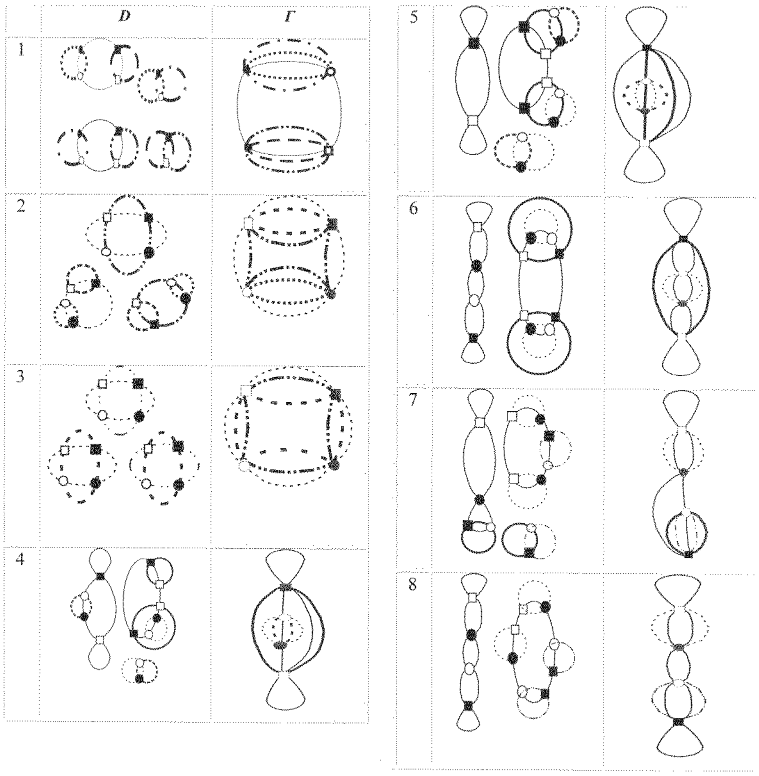
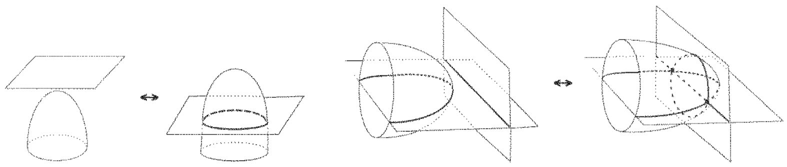


Таблица 3. Случай $n = 4$.

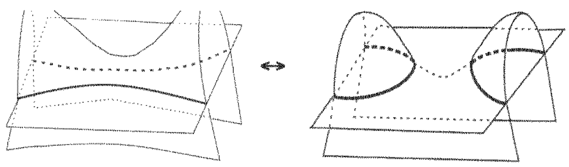


2.2. Материал для п. 2.3. В этом пункте перечислены способы построения гладкого типичного погружения, которые понадобятся нам для доказательства основной теоремы.

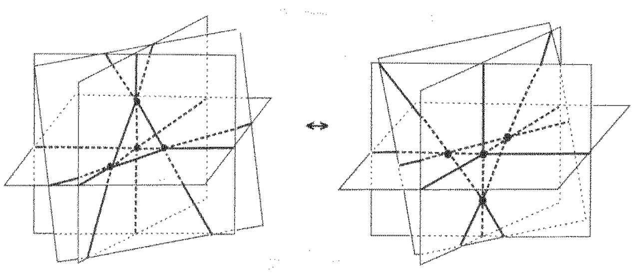
2.2.1. Перестройки E, T, H, Q. Они изображены на рис. 1. Заметим, что, как хорошо известно, любое типичное гладкое погружение $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^3$ можно получить из стандартного вложения $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^3$ последовательностью перестроек E, T, H, Q.



Перестройка E Перестройка T.



Перестройка H.



Перестройка Q.

Рис. 1.

2.2.2. Связное суммирование погружений. По поводу примера см. рис. 2.

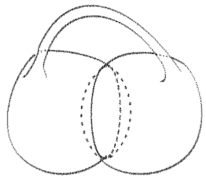


Рис. 2.

2.3. Типичные гладкие погружения $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^3$, оснащенные остовы которых заданы таблицами 2.1.

2.3.1. Случай $n = 0$. На рис. 3 изображен образ некоторого гладкого погружения, схема оснащенного остова которого приведена в табл. 1

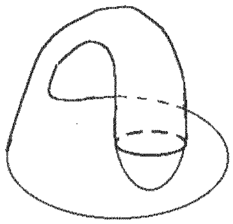


Рис. 3.

2.3.2. Случай $n = 2$. На рис. 4 и части рис. 5, расположенной правее стрелки с символом $\mathbf{T}$, изображены образы некоторых гладких погружений, схемы оснащенных остовов которых приведены в табл. 2 в первой и второй строках соответственно. Рис. 5 иллюстрирует так же схему построения искомого погружения.

2.3.3. Случай $n = 4$. На части рис. 6, расположенной правее стрелки с символами $\mathbf{T}, \mathbf{T}$, изображен образ некоторого гладкого погружения, схема оснащенного остова которого приведена в 1-й строке табл. 3. На части рис. 7, расположенной правее стрелки с символом $\mathbf{T}$, изображен образ некоторого гладкого погружения, схема оснащенного остова которого приведена в табл. 3

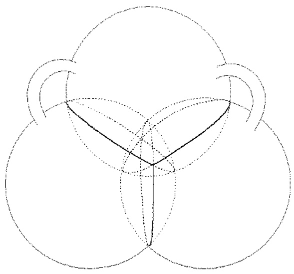


Рис. 4.

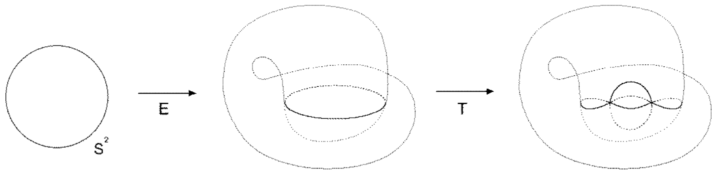


Рис. 5.

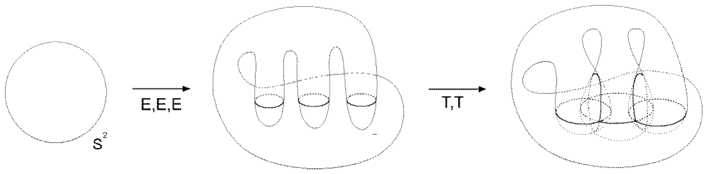


Рис. 6.

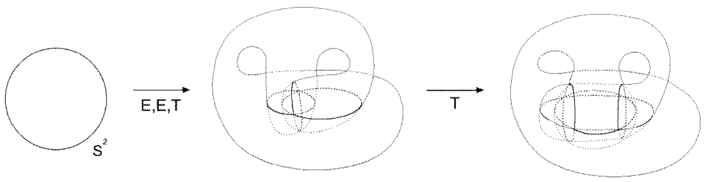


Рис. 7.

во 2-й строке. На рис. 8, 9, 10, 12 правее стрелок с символом

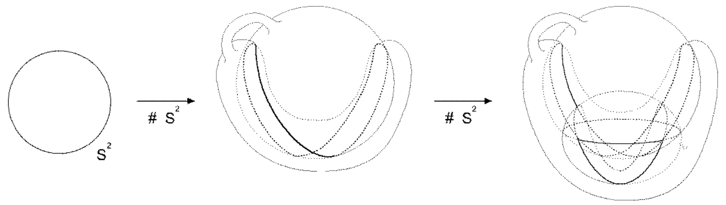


Рис. 8.

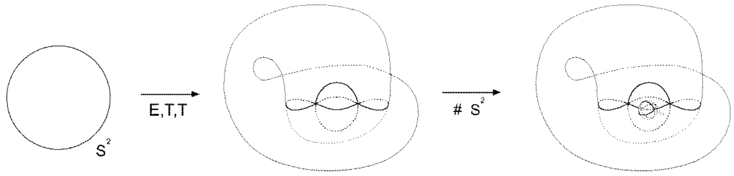


Рис. 9.

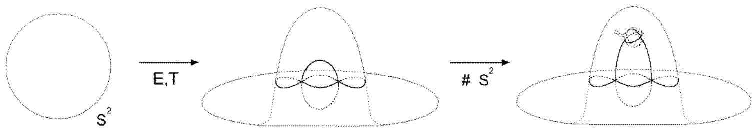


Рис. 10.

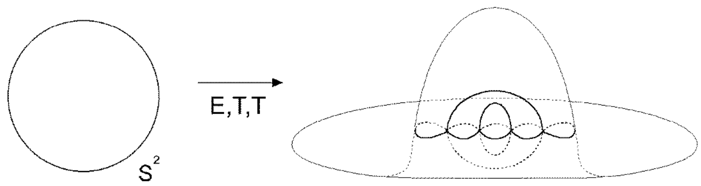


Рис. 11.

$\#\mathbf{S}^2$ изображены образы некоторых гладких погружений, схемы оснащенных остовов которых приведены в табл. 2 в 3-й, 4-й, 5-й и 7-й строках, соответственно. На рис. 11, 13 правее стрелки с символами $\mathbf{E}, \mathbf{T}, \mathbf{T}$ изображены образы некоторых гладких погру-

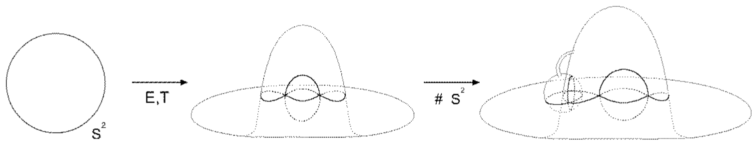


Рис. 12.

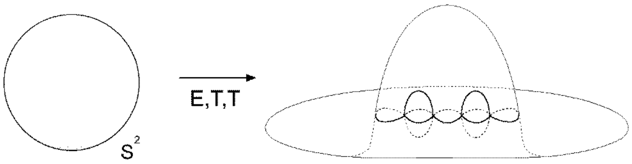


Рис. 13.

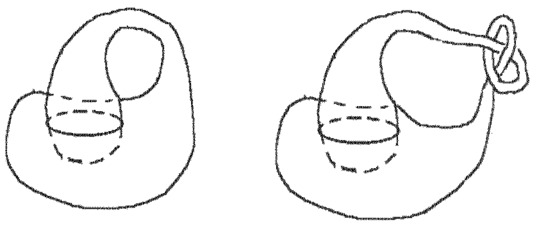


Рис. 14.

жений, схемы оснащенных остовов которых приведены в табл. 2 в 6-й и 8-й строках соответственно. Рис. 6–12 иллюстрируют так же схему построения искомых погружений.

§3. Неинъективность отображения φ_n

3.1. Пусть $f : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^3$ – типичное гладкое погружение, и пусть $h : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{S}^2$ – обращающий ориентацию диффеоморфизм. Тогда $f \circ h$ – типичное гладкое погружение, оснащенный остов которого изоморфен остову погружения f, но погружения f и h не диффеотопны. (Первое и второе очевидно, а третье следует из того, что любая типичная регулярная гомотопия $\mathbf{S}^2$ в $\mathbf{R}^3$, выворачивающая сферу наизнанку, имеет нечетное число четверных точек [3]).

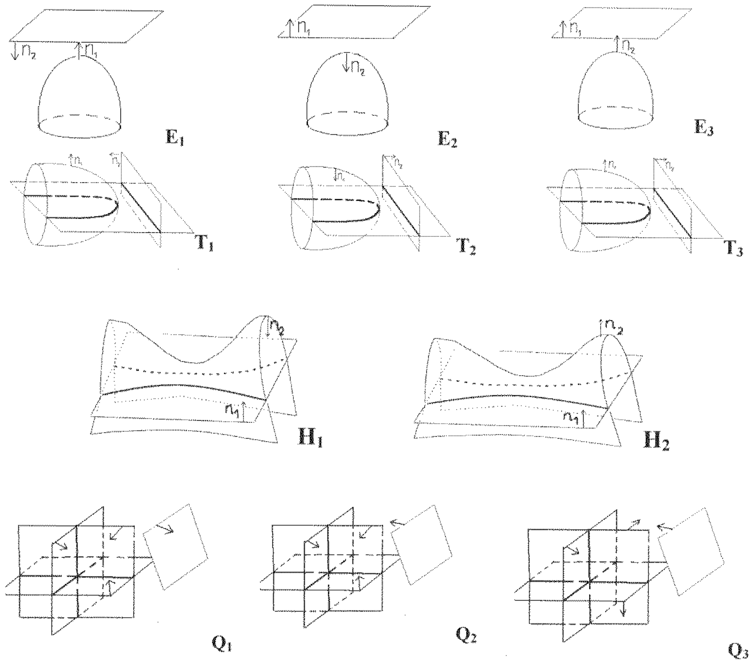


Рис. 15.

3.2. Гладкие типичные погружения $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^3$, образы которых изображены на рис. 14, имеют изоморфные остовы, но не диффеотопны друг другу.

3.3. Имеется развитие понятий перестроек типа $\mathbf{E}, \mathbf{T}, \mathbf{H}$ и $\mathbf{Q}$ до перестроек $\mathbf{E}_{1-3}$, $\mathbf{T}_{1-3}$, $\mathbf{H}_{1,2}$ и $\mathbf{Q}_{1-3}$, соответственно (см. рис. 15). (Учитываются ориентации и погруженных сфер, и пространства $\mathbf{R}^3$.)

Пусть

$$f, g, h : \mathbf{S}^2 \looparrowright \mathbf{R}^3$$

типичные гладкие погружения. Если g и h получены из f либо перестройками $\mathbf{E}_i$ и $\mathbf{E}_j$, либо перестройками $\mathbf{T}_i$ и $\mathbf{T}_j$, либо перестройками $\mathbf{H}_i$ и $\mathbf{H}_j$ с $i \neq j$, то остовы погружений g и h изоморфны между собой, но сами g и h не диффеотопны. (Первое очевидно, для доказательства второго достаточно заметить, что $I(f) \neq I(g)$, где I – инвариант диффеотопных погружений, определенный Горюновым [2]).

Литература

1. В. И. Арнольд, А. И. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*. Наука, Москва, 1979.
2. V. V. Goryunov, *Local invariants of mappings of surfaces into three-space.* — Preprint, 1994.
3. N. Max, T. Banchoff, *Every sphere eversion has a quadruple point.* — Contributions to Analysis and Geometry, John Hopkins University Press (1997), 191–209.
4. T. Nowik, *Quadruple points of regular homotopies of surfaces in* 3*-manifolds.* — Topology **39** (2000), 1069–1088.

Stepanova M. A. Generic immersions of the two-sphere to $\mathbf{R}^3$ and their skeleta.

Let $f : S^2 \to \mathbb{R}^3$ be a generic smooth immersion. The *skeleton* of f is the following triple (Γ, D, p). Γ is the 1-polyhedron of singular points of f, $D = f^{-1}(\Gamma)$ is also a 1-polyhedron, and $p : D \to \Gamma$, $x \mapsto f(x)$, is the projection. For triples of the form (D, Γ, p), where Γ has at most 4 vertices, we give an iff-condition under which the triple is the skeleton of a smooth immersion $f : S^2 \to \mathbb{R}^3$.

Российский государственный
педагогический университет
им. А. И. Герцена

Поступило 31 января 2003 г.