Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

В. В. Макеев

О ДЕЛЕНИИ НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССЫ

Целый класс задач комбинаторной геометрии о делении непрерывно распределенной массы в евклидовом пространстве может быть сформулирован следующим образом [1, 2]. Пусть $\mathbb{R}^n$ разбито на k измеримых множеств $E_1, \dots, E_k$ и заданы k неотрицательных чисел x_i, $\sum_{i=1}^{k} x_i = 1$, а B — подмножество группы A_n невырожденных аффинных преобразований $\mathbb{R}^n$. Спрашивается: верно ли, что для всякой непрерывно распределенной в $\mathbb{R}^n$ конечной массы m найдется такой элемент $b \in B$, что $m(b(E_i)) = x_i m$ для $1 \leqslant i \leqslant k$, где $m(b(E_i))$ означает массу, заключенную во множестве $b(E_i) \subset \mathbb{R}^n$?

В известных примерах решений подобных задач обычно E_i – части от деления $\mathbb{R}^n$ гиперплоскостями; $x_1 = \cdots = x_k = 1/k$; B – замкнутая подгруппа аффинной группы A_n, например группа трансляций движений или сама группа A_n.

§1. О делении непрерывно распределенной массы на плоскости

Ниже мы докажем несколько теорем о делении непрерывно распределенной на плоскости конечной массы правильной системой подобластей плоскости.

Пусть $l_1, \dots, l_n$ – n исходящих из одной точки $0 \in \mathbb{R}^2$ лучей, причем соседние составляют углы в $2\pi/n$. Пусть $K_1 \subset \mathbb{R}^2$ – круг с центром в точке 0. Пусть $A_1, \dots, A_n$ – точки пересечения лучей $l_1, \dots l_n$ с диска ∂K_1. Таким образом, плоскость разбита на $n+1$ областей $K_1, \dots, K_{n+1}$, из которых последние n ограничены кусками границы ∂K_1 и подлучами $l_1, \dots, l_n$, ограниченными точками $A_1, \dots, A_n$ (рис. 1).

В дальнейшем под *правильной конфигурацией* $n+1$ областей $K_1, \dots, K_{n+1}$ мы всегда понимаем вышеописанную конфигурацию. *Аффинно правильной* конфигурацией областей называем аффин-

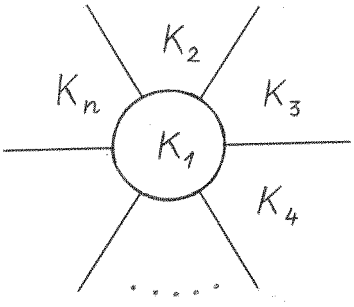

Рис. 1.

ный образ правильной конфигурации.

Подвергнем правильную конфигурацию областей гладкой изотопии, сохраняя ее свойство переходить в себя при повороте на угол $2\pi/n$ вокруг точки 0. Полученную конфигурацию $n+1$ областей $K_1, \ldots, K_{n+1}$ (рис. 2) мы в дальнейшем называем *топологически правильной*, если минимальный радиус круга, пересекающего все области K_i при $i \geqslant 2$ стремится к ∞ при удалении центра круга на бесконечность равномерно для всей изотопии системы областей K_i.

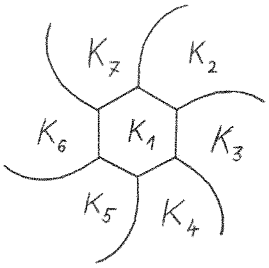

Рис. 2.

Хорошо известно, что всякую непрерывно распределенную конечную массу на плоскости можно разбить на четыре равные части парой перпендикулярных прямых.

Теорема 1. *Для любой топологически правильной конфигурации 5 областей (см. рис. 3) всякой конечной непрерывно распределенной на плоскости массы m и любого $x > 0$ найдется такое подобное* *преобразование a плоскости, что*

$$m(a(K_2)) = \cdots = m(a(K_5)) = xm(a(K_1)).$$

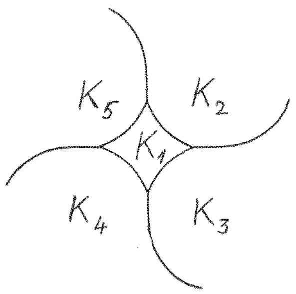

Рис. 3.

Доказательство. Докажем теорему 1 для распределений массы с гладкой плотностью и компактным выпуклым носителем с гладкой границей. В остальных случаях теорема доказывается стандартным предельным переходом.

Покажем, что в типичной ситуации для вышеописанных распределений массы имеется нечетное число требуемых подобных образов конфигурации областей $K_1, \ldots, K_5$, рассматриваемых с точностью до самосовмещений конфигурации.

Группа сохраняющих ориентацию подобных преобразований плоскости является связным некомпактным четырехмерным многообразием. Четыре условия, налагаемые на образ топологически правильной системы областей $K_1, \ldots, K_5$ в условии теоремы выделяют для типичного распределения массы конечное число требуемых конфигураций. Покажем, что в типичной ситуации число искомых конфигураций топологически правильных конфигураций областей, рассматриваемых с точностью до самосовмещений, нечетно.

По стандартным топологическим соображениям четность числа искомых конфигураций областей $K_1, \ldots, K_5$ не зависит от выбора конфигурации, типичного распределения массы и числа $x > 0$, так как все они гладко деформируемы друг в друга. Поэтому достаточно сделать проверку для какого-нибудь $x > 0$, правильной конфигурации $K_1, \ldots, K_5$ и типичного распределения массы.

Будем считать, что распределение массы близко к обладающему круговой симметрией.

Хорошо известно [3], что для типичного распределения массы имеется нечетное число пар перпендикулярных прямых, делящих эту массу на 4 равные части.

Действительно, для всякой плоской выпуклой фигуры существует единственная пара прямых l_1 и l_2, параллельных заданным перпендикулярным прямым, каждая из которых разделяет площадь фигуры пополам. Следовательно площади частей фигуры, расположенных в симметричных относительно точки пересечения прямых l_1 и l_2 квадратов, равны. Обозначим α и β площади фигуры, расположенные в I и II квадрантах. При повороте конфигурации прямых l_1 и l_2 на $90°$ величина $\alpha - \beta$ меняет знак, поэтому в типичной ситуации $\alpha - \beta = 0$ для нечетного числа промежуточных положений прямых l_1 и l_2, что и доказывает сказанное выше.

Рассмотрим выпуклую фигуру K с гладкой границей, близкую к кругу, и достаточно большое число $x > 0$. Тогда очевидно, что все искомые подобные образы системы областей $K_1, \ldots, K_5$ таковы, что разделяющие их лучи $l_1, \ldots, l_4$ пересекаются вблизи "центра" K – такой точки O, что все проходящие через нее прямые делят площадь фигуры K в близком к единице отношении. Следовательно при достаточно больших $x > 0$ центральная область K_1 целиком содержится в K и лучи l_1, l_2, l_3 и l_4 разделяют площадь фигуры K на четыре равные части, но последних конфигураций, как мы видели выше, в типичной ситуации имеется нечетное число.

Проверим, что рассматриваемая фигура K является типичной, если она типична для задачи деления ее площади на четыре равные части парой перпендикулярных прямых. Из последнего условия следует, что для K можно независимо нарушать одно из трех условий

$$m(a(K_2)) = m(a(K_3)) = m(a(K_4)) = m(a(K_5)).$$

Меняя размер области $a(K_1)$, подвергая всю конфигурацию областей $a(K_1), \ldots, a(K_5)$ гомотетии с близким к 1 коэффициентом и центром в центре области $a(K_1)$) мы можем нарушать условие $m(a(K_5)) = xm(A(A_1))$. Теорема 1 доказана. $\square$

Замечание. Условие "разбегания" областей K_i при $i \geqslant 2$ на бесконечности требуется для обеспечения компактности множества искомых в теореме 1 конфигураций областей $K_1, \ldots, K_5$, что необходимо для корректной определенности вышерассматриваемого вычета по модулю 2.

Пусть $K_1, \ldots, K_7$ – топологически правильная система областей на плоскости. Мы считаем, что области K_2 и K_5, K_3 и K_6, K_4 и K_7 попарно симметричны относительно точки 0 (рис. 2).

Теорема 2. *Для всякой конечной непрерывно распределенной массы m и положительных чисел x_1, x_2, x_3 найдется такое сохраняющее ориентацию аффинное преобразование a плоскости, что*

$$\begin{aligned} x_1 m(a(K_2)) = x_1 m(a(K_5)) = x_2 m(a(K_3)) = x_2 m(a(K_6)) \\ = x_3 m(a(K_4)) = x_3 m(a(K_7)) = m(a(K_1)). \end{aligned}$$

Доказательство. Оно сходно с доказательством теоремы 1. Мы проверяем, что в типичной ситуации требуемых систем областей $K_1, \ldots, K_7$, в рассматриваемых с точностью до аффинных самосовмещений имеется нечетное число.

Рассмотрим случай правильной конфигурации областей K_1, $\ldots, K_7$ достаточно малые числа $x_1 = x_2 = x_3$ и будем делить в требуемом отношении площадь выпуклой фигуры $K \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей и достаточно близкой к кругу. В этом случае нечетность числа искомых конфигураций областей сводится к хорошо известной нечетности числа шестидольных точек для типичной фигуры $K \subset \mathbb{R}^2$ [3, 4]. $\square$

Теорема 3. *Пусть $K_1, \ldots, K_9$ – топологически правильная конфигурация областей на плоскости с центром в точке $0 \in \mathbb{R}^2$. Для всякой конечной непрерывно и симметрично относительно точки 0 распределенной на плоскости массы m и числа $x > 0$ найдется такое сохраняющее точку 0 аффинное преобразование a плоскости, что*

$$m(a(K_2)) = \cdots = m(a(K_9)) = x m(a(K_1)).$$

Доказательство. Как и при доказательстве предшествующих теорем, нужно показать, что в типичной ситуации требуемых аффинных образов конфигурации областей, рассматриваемых с точностью до самосовмещения, имеется нечетное число.

В этом достаточно убедиться для правильной конфигурации $K_1, \ldots, K_9$ и достаточно большого $x > 0$.

Остается заметить, что существует единственная аффинно правильная конфигурация областей $K_1, \dots, K_9$, разделяющая в требуемом отношении площадь квадрата $K \subset \mathbb{R}^2$. Лучи $l_1, \dots, l_8$ этой конфигурации имеют направления диагоналей и сторон квадрата, а их продолжения пересекаются в центре квадрата.

Теорема 4. *Пусть l – ориентированная прямая на плоскости. Тогда для всякой топологически правильной конфигурации шести областей $K_1, \dots, K_6$, числа $x > 0$ и непрерывно распределенной на плоскости конечной массы m найдется такое аффинное преобразование плоскости a, что*

$$m(a(K_1)) = xm(a(K_2)) = \dots = xm(a(K_6))$$

и прямая $a(l)$ имеет заранее заданное направление.

Доказательство аналогично доказательству п. 2 теоремы 2.2 [6].

§2. О делении непрерывно распределенной массы в трехмерном пространстве

Три попарно перпендикулярные плоскости разбивают трехмерное пространство на восемь равных октантов, которые мы в дальнейшем называем правильной системой октантов. Повернем одновременно четыре из этих октантов, имеющие общий луч, на некоторый угол вокруг этого луча. Полученную конфигурацию октантов будем называть *скрученной*.

Теорема 5. *Для всякой непрерывно распределенной в $\mathbb{R}^3$ конечной массы m и положительного числа x найдется такая скрученная система октантов $(K_1, \dots, K_8)$ и шар K_9 с центром в общей вершине O этих октантов, что*

$$m(K_1 \setminus K_9) = \dots = m(K_8 \setminus K_9) = xm(K_9).$$

Доказательство. Оно аналогично проведенному в теореме 1.

Покажем, что для типичного распределения массы с гладкой плотностью с компактным носителем таких конфигураций $(K_1, \dots, K_9)$ октантов и шара имеется нечетное число.

Рассмотрим распределения массы, близкие к сферически симметричным с постоянной вблизи центра плотностью. Тогда как и при доказательстве теоремы 1 при достаточно больших $x > 0$

искомых конфигураций $(K_1, \ldots, K_9)$ октантов и шара будет ровно столько, сколько есть скрученных систем октантов, разделяющих данную массу на 8 равных частей, а, как известно [3, теорема 6], таких систем октантов в типичной ситуации имеется нечетное число. $\square$

Особо отметим случай центрально симметричного распределения массы.

Следствие. *Для всякой непрерывно и центрально симметрично относительно точки $0 \in \mathbb{R}^3$ распределенной в $\mathbb{R}^3$ конечной массы m и положительного $x > 0$ найдется такая правильная система октантов $(K_1, \ldots, K_8)$ с общей вершиной в точке 0, что*

$$m(K_1 \setminus K_9) = \cdots = m(K_8 \setminus K_9) = xm(K_9).$$

Заметим, что шар K_9 можно деформировать в сохраняющуюся при всех самосовмещениях правильной системы октантов область.

Полным ориентированным флагом в $\mathbb{R}^n$ называем последовательность ориентированных подпространств возрастающей размерности:

$$0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_n = \mathbb{R}^n,$$

где ориентация внешнего пространства фиксирована.

Теорема 6. *Пусть L – полный ориентированный флаг в $\mathbb{R}^3$, а $K_1, \ldots, K_{12}$ конусы над гранями правильного додекаэдра или ромбододекаэдра с общей вершиной в центре 0, а K_{13} – выпуклый многогранник, переходящий в себя при всех самосовмещениях системы конусов $K_1, \ldots, K_{12}$. Тогда для любой конечной массы m непрерывно и симметрично относительно точки 0 распределенной в $\mathbb{R}^3$ и числа $x > 0$ найдется такое сохраняющее ориентацию невырожденное линейное преобразование a, что*

$$m(K_1 \setminus K_{13}) = \cdots = m(K_{12} \setminus K_{13}) = xm(K_{13})$$

и флаг $a(L)$ любой наперед заданный.

Доказательство аналогично доказательству теоремы [4].

Замечания. 1). Многогранник K_{13} можно деформировать с сохранением инвариантности относительно всех самосовремещений системы конусов $K_1, \ldots, K_{12}$.

2) В [4] высказано предположение, что для системы конусов $K_1, \ldots, K_{12}$ над гранями ромбододекаэдра с общей вершиной 0 в его центре и конечной непрерывно распределенной в $\mathbb{R}^3$ массы m найдется такое аффинное преобразование a, что $m(a(K_1)) = \cdots = m(a(K_{12}))$.

Кажется правдоподобным, что для типичного распределения конечной массы в $\mathbb{R}^3$ число требуемых афинных образов рассматриваемой системы из 12 конусов нечетно.

Подтверждает это и тот факт, что имеется нечетное число афинных образов системы конусов $K_1, \ldots, K_{12}$, делящих на равные части объем заданного тетраэдра K. Одной такой конфигурацией конусов является конфигурация с общей вершиной в центре тяжести тетраэдра K, причем каждый из конусов пересекает границу ∂K тетраэдра по четырехугольнику, одна из вершин которого совпадает с вершиной тетраэдра, две другие являются серединами исходящих из этой вершины ребер тетраэдра, а четвертая является центром тяжести грани тетраэдра, содержащей рассматриваемые ребра.

Описанная конфигурация конусов переходит в себя при всех аффинных автоморфизмах тетраэдра K. Других делящих на равные части объем K конфигураций конусов вероятно имеется четное число благодаря аффинным симметриям тетраэдра K. Проверка этого условия и того, что тетраэдр K (или близкое тело с теми же симметриями) типичен, завершило бы доказательство.

§3. О делении центрально-симметрично распределенной массы в пространстве или массы, распределенной на проективной плоскости

Пусть $K_1, \ldots, K_{18}$ – конусы над гранями правильной симметрично биусеченой восьмиугольной биперамиды с общей вершиной 0 в центре бипирамиды. Пусть конусы K_i и K_{i+9} для $1 \leqslant i \leqslant 9$ симметричны относительно точки 0, причем конусы K_9 и K_{18} – восьмигранные.

Теорема 7. *Для всякой непрерывно и симметрично-относительно точки 0 распределенной в $\mathbb{R}^3$ массы m и числа $x > 0$ найдется такое сохраняющее точку 0 аффинное преобразование a, что*

$$m(a(K_1)) = \cdots = m(a(K_8)) = xm(a(K_9)).$$

Доказательство. Конфигурация конусов $K_1, \ldots, K_{18}$ обладает однопараметрической группой аффинных автоморфизмов – гомотетиями относительно точки 0. Поэтому 8 независимых условий $m(a(K_1)) = \cdots = xm(a(K_9))$ в условии теоремы 7 выделяют для типичного распределения массы с гладкой симметричной относительно точки 0 плотностью с компактным носителем конечное число искомых конфигураций конусов $a(K_1), \ldots, a(K_{18})$. При этом четность числа требуемых конфигураций конусов рассматриваемых с точностью до самосовмещения, не зависит от выбора типичного распределения массы. Покажем, что в ситуации общего положения это число нечетно.

Для этого рассмотрим распределение массы, обладающее тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, пересекающимися по прямым l_1, l_2, l_3. В этом случае, как мы видели выше в теореме 3 (§1), имеется нечетное число искомых конфигураций конусов с осями l_1, l_2 или l_3 в качестве оси $a(l)$, где l – ось бипирамиды. Остальных искомых конфигураций конусов имеется четное число благодаря симметриям рассматриваемого распределения массы. $\square$

Всякое симметричное относительно точки 0 распределение массы в $\mathbb{R}^3$ индуцирует распределение массы на проективной плоскости, а разбиение пространства на попарно симметричные относительно точки 0 конусы с общей вершиной 0 индуцирует разбиение проективной плоскости (точки проективной плоскости мы отождествляем с исходящими из точки 0 прямыми). Поэтому теоремы о делении в $\mathbb{R}^3$ центрально-симметрично распределенной массы аффинными образами системы конусов с тем же центром симметрии можно переформулировать, как теоремы о делении распределенной на проективной плоскости массы проективным образом некоторого разбиения проективной плоскости на части.

Пусть $K_1, \ldots, K_9$ – разбиение проективной плоскости на восьмиугольник K_9 и 8 четырехугольных граней $K_1, \ldots K_8$ (рис. 4), индуцированное системой конусов $K_1, \ldots, K_{18}$ из теоремы 7. Тогда теорему 7 можно переформулировать следующим образом.

Пусть $K_1, \ldots, K_9$ – вышеописанное разбиение проективной плоскости на многоугольники, m – непрерывно распределенная на этой плоскости масса и число $x > 0$. Найдется такое проек-

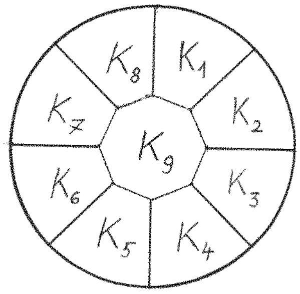

Рис. 4.

тивное преобразование a, что

$$m(a(K_1)) = \cdots = m(a(K_8)) = xm(a(K_9)).$$

Нижеследующие теоремы можно интерпретировать, как теоремы о делении двух (или трех) непрерывно распределенных на проективной плоскости масс проективным образом разбиения проективной плоскости на 6 равных правильных пятиугольников или ромбов, индуцированных соответственно гранями правильного додекаэдра и ромбододекаэдра.

Пусть $K_1, \ldots, K_{12}$ – конусы над гранями правильного додекаэдра с общей вершиной в его центре 0, причем конусы K_{11} и K_{12} симметричны относительно 0, конусы $K_1, \ldots, K_5$ имеют общие грани с K_{11}, а $K_6, \ldots, K_{10}$ – с K_{12}.

Теорема 8. *Для всяких конечных и непрерывно и симметрично относительно точки 0 распределенных в $\mathbb{R}^3$ масс m_1 и m_2 найдется такое сохраняющее точку 0 аффинное преобразование a, что*

$$m_1(a(K_1)) = \cdots = m_1(a(K_{12}))$$

и

$$m_2(a(K_1)) = \cdots = m_2(a(K_4)) \geqslant m_2(a(K_5))$$

(соответственно, $\leqslant m_2(a(K_5))$).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.1 [5], как и доказательства трех нижеследующих теорем.

Пусть $K_1, \ldots, K_{12}$ по-прежнему конусы над гранями правильного додекаэдра с общей вершиной в его центре 0, причем конусы K_1, K_2, K_3 имеют общую прямую.

Теорема 9. *Для всяких конечных и непрерывно и симметрично относительно точки* 0 *распределенных в* $\mathbb{R}^3$ *масс* m_1, m_2, m_3 *найдется такое сохраняющее точку* 0 *аффинное преобразование* a, *что*

$$m_1(a(K_1)) = \cdots = m_1(a(K_{12})),$$
$$m_2(a(K_1)) = m_2(a(K_2)) = m_3(a(K_3))$$

и

$$m_3(a(K_1)) = m_3(a(K_2)) \geqslant m_3(a(K_3))$$

(соответственно $\leqslant m_3(a(K_3))$*).*

Теорема 10. *Пусть* $K_1, \ldots, K_{12}$ – *конусы над гранями ромбододекаэдра с общей вершиной в его центре* 0 *и пусть конусы* K_1, K_2, K_3, K_4 *имеют общую прямую, а массы* m_1 *и* m_2 *непрерывно и симметрично относительно точки* 0 *распределены в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда найдется такое сохраняющее точку* 0 *аффинное преобразование* a, *что*

$$m_1(a(K_1)) = \cdots = m_1(a(K_{12})) \quad \text{и} \quad m_2(a(K_1)) = \cdots = m_2(a(K_4)).$$

Пусть $K_1, \ldots, K_{12}$, как и выше, конусы над гранями ромбододекаэдра, причем конусы K_1, K_2 и K_3 над гранями, сходящимися в трехвалентной вершине.

Теорема 11. *Для трех масс* m_1, m_2, m_3 *непрерывно и симметрично относительно точки* 0 *распределенных в* $\mathbb{R}^3$ *найдется такое сохраняющее точку* 0 *аффинное преобразование* a, *что*

$$m_1(a(K_1)) = \cdots = m_1(a(K_{12})),$$
$$m_2(a(K_1)) = m_2(a(K_2)) = m_3(a(K_3))$$

и

$$m_3(a(K_1)) = m_3(a(K_2)) \geqslant m_3(a(K_3))$$

(соответственно $\leqslant m_3(a(K_3))$*).*

§4. О разбиении массы, распределенной на поверхности многогранника

В [7] доказано, что для конусов $K_1, \ldots, K_{n+1}$ над гранями n-мерного симплекса в $\mathbb{R}^n$ с общей вершиной в его внутренней точке, выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ и набора положительных чисел $x_1, \ldots, x_{n+1}$ найдется единственный вектор $\bar{a}$ такой, что

$$\operatorname{Vol}(K_i \cap (K + \bar{a})) = x_i \operatorname{Vol}(K) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant n+1.$$

Нервом покрытия топологического пространства $X = \bigcup_i F_i$ называется симплициальный комплекс, вершины которого A_i соответствуют элементам покрытия F_i, а симплекс $A_{i_1} \dots A_{i_k}$ принадлежит комплексу $N(F)$ тогда и только тогда, когда $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \varnothing$.

Пусть X – компактное метрическое пространство с такой счетно-аддитивной борелевской мерой μ, что мера шара $\mu(B_r(x))$ есть непрерывная функция его радиуса r и центра x.

Для покрытия $X = \bigcup_{i=1} F_i$ пространства X его n замкнутыми подмножествами определим непрерывное отображение

$$f_r : X \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \frac{(\mu(B_r(x) \cap F_1), \dots, \mu(B_r(x) \cap F_n))}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu(B_r(x) \cap F_i)}.$$

Для достаточно малых r шар $B_r(x)$ может пересекать лишь такие подмножества F_i, которые сами имеют непустое пересечение и в этом случае образ $f_r(X)$ содержится в нерве покрытия $N(F)$, вершины A_i которого расположены в точках $(0, \dots, 1, \dots, 0)$, где единица стоит на i-м месте для $1 \leqslant i \leqslant n$. В некоторых важных случаях отображение f_r – гомотопическая эквивалентность.

Многогранник $M \subset \mathbb{R}^k$ называется *простым*, если в каждой его вершине сходится k его $(k-1)$-мерных граней.

Теорема 12. *Для покрытия границы ∂M простого многогранника $M \subset \mathbb{R}^k$ его замкнутыми $(k-1)$-мерными гранями вышеописанное отображение f_r является гомотопической эквивалентностью на нерв покрытия, который изоморфен границе двойственного M многогранника.*

Доказательство. Так как и пространство ∂M и нерв его покрытия гомеоморфны сфере, то достаточно доказать, что $\deg(f_r) = 1$.

Непрерывной деформацией можно некоторую малую окрестность вершины A многогранника M сгладить и превратить в вышеописанную конфигурацию $(k-1)$-мерных конусов над гранями $(k-1)$-мерного симплекса с общей вершиной A. Тогда по сформулированной выше теореме всякая внутренняя точка двойственной вершине A грани нерва покрытия является регулярным значением и имеет при отображении f_r единственный прообраз для всех достаточно малых $r > 0$. $\square$

Замечания. 1. Если многогранник $M \subset \mathbb{R}^k$ является кубом с ребром a, то отображение $f_{a/2}$ является гомеоморфизмом на двойственный M k-мерный "октаэдр".

2. Теорема обобщается на разбиения на области Вороного компактного риманова многообразия M для достаточно плотных систем его точек общего положения, т.е. когда не более чем $\dim M + 1$ областей Вороного могут иметь общую точку.

Литература

1. Б. Грюнбаум, *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел.* Наука, М., 1971.
2. В. Макеев, *Шестидольные разбиения трехмерного пространства.* — Вестник ЛГУ сер. 1, вып. 2 (1988), 31–34.
3. В. В. Макеев, *Некоторые специальные конфигурации областей, связанные с выпуклыми компактами.* — Записки научн. семинаров ПОМИ **252** (1998), 165–174.
4. В. В. Макеев, *Деление на равные части непрерывно распределенной массы на сфере и в пространстве.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **279** (2001), 187–196.
5. В. В. Макеев, *Трехмерные многогранники, вписанные и описанные вокруг выпуклых компактов.* II. — Алгебра и анализ (2001), No. 5.
6. В. В. Макеев, *О двух нерешенных геометрических задачах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **280** (2001), 211–218.
7. В. В. Макеев, *Теорема о делении объема выпуклого тела плоскостями.* — В кн.: Межвуз. сб. научн. тр. по геометрии, Л. (1984), 130–133.

Makeev V. V. On subdivision of a continuously distributed mass.

Several theorems on subdivision of a mass continuously distributed on the plane, projective plane, or in space is proved by topological means.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 1 июня 2002 г.