Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

М. Д. Ковалев

О ШАРНИРНИКАХ, ВОССТАНОВИМЫХ ПО ЕДИНСТВЕННОМУ НАПРЯЖЕНИЮ

Введение

Повторим, следуя [1, 2], определения, необходимые для понимания дальнейшего.

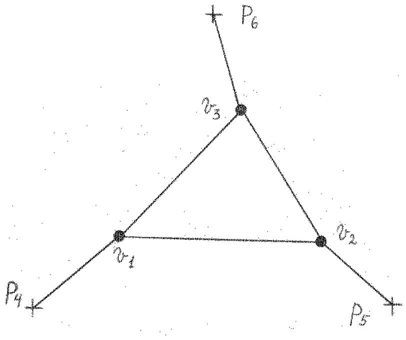
Шарнирной структурной схемой мы называем связный неориентированный граф $G(V,E)$ без петель и кратных ребер, множество V вершин которого состоит из двух непустых подмножеств $V_1 = \{v_1, \dots, v_m\}$ и $V_2 = \{v_{m+1}, \dots, v_{m+n}\}$, удовлетворяющий тем условиям, что его подграф $G_1(V_1, E_1)$, порожденный множеством V_1, связен, а вершины множества V_2 несмежны между собой. Таким образом, множество E ребер графа $G(V,E)$ распадается на два подмножества: E_1 – состоящее из ребер (v_i, v_j), для которых $i, j \leqslant m$, и E_2 – из (v_i, v_j), с $i \leqslant m$, $j > m$. Далее вершины из множества V_1 будем называть *свободными шарнирами*, из множества V_2 – *закрепленными шарнирами*, а ребра графа G – *рычагами*, что определяется механическим смыслом нашей модели.

Закрепленной шарнирной схемой в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$ (ЗШС в $\mathbf{R}^d$) назовем структурную схему, каждому закрепленному шарниру $v_i \in V_2$ которой поставлена в соответствие некоторая точка $p_i \in \mathbf{R}^d$. (Примеры шарнирных схем приведены на рис. 1 а), б).) Если теперь поставить в соответствие и каждому свободному шарниру свою точку евклидова пространства $\mathbf{R}^d$, то мы получим конкретный шарнирник $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, отвечающий заданной ЗШС. При этом не исключается совпадение любых двух шарниров как точек пространства.

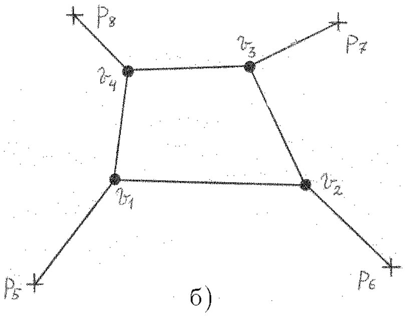
Условие равновесия сил, приложенных к i-му свободному шарниру шарнирника со стороны остальных его шарниров, имеет вид

$$\sum_j \omega_{ij}(p_j - p_i) = 0, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 9700100266 и 00-01-00619).



а)



б)

Рис. 1

где суммирование проводится по всем шарнирам p_j, смежным с p_i, т. е. соединенным с ним рычагом, а скаляр $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ называют *внутренним напряжением* рычага $p_i p_j$. Если в $\mathbf{R}^d$ задан шарнирник $\mathbf{p}$, то его *внутренние напряжения* $\omega = \{\omega_{ij}\}$ определяются как нетривиальные решения однородной системы линейных уравнений вида (1):

$$\sum_j \omega_{ij}(p_j - p_i) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{2}$$

Таким образом, множество внутренних напряжений ω заданного шарнирника $\mathbf{p}$ вместе с нулевым напряжением представляет собой линейное подпространство $\mathbf{W}(\mathbf{p})$ пространства $\mathbf{W}^r$, $r = |E|$. Когда это подпространство нульмерно, множество внутренних напряжений – пусто, и мы говорим, что $\mathbf{p}$ *не допускает внутренних напряжений*. Заметим, что шарнирники, не допускающие внутренних напряжений, возможны лишь в случае $r \leqslant dm$. Закрепленную шарнирную схему, которой отвечает хотя бы один шарнирник, не допускающий внутренних напряжений, мы называем *правильной*, а в случае $r = dm$ – *изостатической*. Для правильной ЗШС размерность множества шарнирников, допускающих внутренние напряжения, строго меньше dm. Сведения об этих множествах для случая изостатических ЗШС можно найти в [3].

Постановка задачи. Зафиксируем ЗШС в $\mathbf{R}^d$, а значит, и положения $p^0_{m+1}, \dots, p^0_{m+n}$ закрепленных шарниров. Пусть $\mathbf{W}(\mathbf{p}^0)$ – пространство внутренних напряжений шарнирника $\mathbf{p}^0 = (p^0_1, p^0_2, \dots, p^0_m)$ с этой ЗШС, т.е. $\mathbf{W}(\mathbf{p}^0)$ есть множество решений $\omega = \{\omega_{ij}\}$ системы уравнений (2) при заданных $p_1 = p^0_1, \dots, p_m = p^0_m$.

Систему уравнений (2), зафиксировав ω и считая неизвестными радиус-векторы $p_1, p_2, \dots, p_m$ свободных шарниров, можно переписать так:

$$\Bigl(\sum_{j,(v_i,v_j)\in E} \omega_{ij}\Bigr) p_i - \sum_{j,(v_i,v_j)\in E_1} \omega_{ij} p_j = \sum_{j,(v_i,v_j)\in E_2} \omega_{ij} p^0_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \qquad (3)$$

Матрица $\Omega = \Omega(\omega)$ этой системы является симметрической. Ее элементы, стоящие на главной диагонали, равны $\sum_{j,(v_i,v_j)\in E} \omega_{ij}$, прочие же ее элементы равны $-\omega_{ij}$, если шарниры v_i и v_j смежны в ЗШС, и нулю – в противном случае. Пусть

$$\mathbf{p}(\omega) = (p_1(\omega), \dots, p_m(\omega))$$

– множество всех решений системы (3) для данной ЗШС при фиксированном $\{\omega_{ij}\} = \omega \in \mathbf{W}(\mathbf{p}^0)$. И пусть $\mathbf{W}^r$ – пространство всех мыслимых напряжений рычагов шарнирника с нашей ЗШС. Мы говорим, что шарнирник $\mathbf{p}^0$ *восстанови́м* по своему пространству внутренних напряжений $\mathbf{W}(\mathbf{p}^0) \subset \mathbf{W}^r$, если

$$\bigcap_{\omega \in \mathbf{W}(p^0)} \mathbf{p}(\omega) = \mathbf{p}^0. \qquad (4)$$

Условие

$$\det \Omega(\omega) \neq 0, \qquad (5)$$

где ω – какой-либо ненулевой вектор из $\mathbf{W}(\mathbf{p}^0)$, является достаточным для восстановимости шарнирника $\mathbf{p}^0$ по пространству его напряжений. Если имеет место неравенство (5), то говорим, что $\mathbf{p}^0$ *восстановим по напряжению* ω, а напряжение ω называем *восстанавливающим*. В случае одномерного пространства $\mathbf{W}(\mathbf{p}^0)$ это условие является и необходимым для восстановимости шарнирника $\mathbf{p}^0$ по его пространству внутренних напряжений.

В работе [2] был поставлен вопрос: является ли условие (5) необходимым для восстановимости шарнирника $\mathbf{p}^0$ и в случае многомерного пространства $\mathbf{W}(\mathbf{p}^0)$?

Результаты. В §1 данной статьи этот вопрос решен положительно для шарнирников на прямой. В §2 рассматривается связь локальных свойств образа рычажного отображения с наличием восстанавливающего шарнирник напряжения. Получено достаточное условие существования восстанавливающего напряжения для шарнирников в пространствах произвольной размерности. В §3 установлены некоторые свойства множества шарнирников, восстановимых по внутренним напряжениям.

Один пример. В связи с поставленным вопросом уместно привести пример двух систем линейных уравнений с неизвестными x, y, z, матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и правыми частями

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы этих систем вырожденны, множества решений обеих систем суть прямые. Рассмотрим двупараметрическое семейство S систем линейных уравнений с матрицей $uA + vB, u^2 + v^2 \neq 0$, и правой частью $ua + vb$. Легко проверить, что каждая из систем семейства S имеет в качестве решения прямую: $x = 1+t, y = t, z = -\frac{t(u+v)}{v}$ при $v \neq 0$ и $x = 1$, $y = 0$, $z = t$ при $v = 0$, $u \neq 0$. Однако пересечение всех таких прямых состоит из единственной точки $(1, 0, 0)$.

§1. Существование восстанавливающего напряжения для шарнирника на прямой

Шарнирник называется *несократимым*, если длины всех его рычагов отличны от нуля. Имеет смысл ограничиться рассмотрением именно таких шарнирников [2]. Здесь будет доказана

Теорема 1. *Для любого восстановимого несократимого шарнирника* $\mathbf{p}^0$ *на прямой найдется восстанавливающее его напряжение* $\omega \in \mathbf{W}(\mathbf{p}^0)$*.*

Доказательство. Проведем его по индукции, основываясь на следующих утверждениях, справедливость первого из которых сразу вытекает из леммы 5, а второго – из леммы 10 работы [2]. *Полностью напрягаемым* называем шарнирник, допускающий внутреннее напряжение ω с ненулевыми составляющими ω_{ij} на каждом рычаге p_ip_j.

Утверждение 1. *Несократимый шарнирник* $\mathbf{p}^0$ *на прямой с ЗШС* $З_0$*, представляющей собой простую цепь* $v_a, v_1, \ldots, v_p, v_b$ *с двумя закрепленными в различных точках крайними шарнирами* p_a *и* p_b*, полностью напрягаем и восстановйм по любому своему внутреннему напряжению.* □

Объект, отличающийся от шарнирника только тем, что каждые два его шарнира могут быть соединены друг с другом более чем одним рычагом, мы называем *псевдошарнирником*. Шарнирная структурная схема псевдошарнирника является мультиграфом, а понятия несократимости и внутреннего напряжения сохраняют свой смысл.

Утверждение 2. *Для любого несократимого восстановимого шарнирника* $\mathbf{p}$ *на прямой существует последовательность* $\mathbf{p}^0 = \mathfrak{p}^0, \mathfrak{p}^1, \ldots, \mathfrak{p}^s = \mathbf{p}$ *несократимых псевдошарнирников такая, что множество шарниров каждого из них является подмножеством множества шарниров шарнирника* $\mathbf{p}$*, псевдошарнирник* $\mathfrak{p}^0$ *представляет собой простую цепь, а каждый следующий псевдошарнирник последовательности получается из предыдущего одним из двух преобразований:*

1. *добавлением рычага, соединяющего два несмежных и несовпадающих как точки прямой шарнира, по крайней мере один из которых – свободный;*

2. *подразбиением какого-либо рычага* p_lp_k*, т. е. заменой его на пару коллинеарных рычагов* p_lp_p *и* p_pp_k *ненулевой длины, с добавлением свободного шарнира* p_p*.* □

Следующая лемма является основной в доказательстве теоремы 1.

Лемма 1. *Пусть несократимый псевдошарнирник $\mathfrak{p}$, не обязательно лежащий на прямой, восстановим по напряжению $\omega \in \mathbf{W}(\mathfrak{p})$, ненулевому на каждом из его рычагов. Тогда несократимый псевдошарнирник $\mathfrak{p}'$, полученный из $\mathfrak{p}$ преобразованием вида 1 или 2, также восстановим по некоторому напряжению $\omega' \in \mathbf{W}(\mathfrak{p}')$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{p}'$ получается из $\mathfrak{p}$ преобразованием 1, то можно взять напряжение ω' имеющим по всем рычагам, общим для $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}'$, те же составляющие, что и ω, а по добавленному рычагу – нулевую составляющую. Очевидно, в этом случае $\Omega'(\omega') = \Omega(\omega)$.

В случае преобразования 2 также положим составляющие напряжения ω' на всех рычагах, общих псевдошарнирникам $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}'$, совпадающими с соответствующими составляющими напряжения ω. Допустим для удобства записи, что рычаг p_1p_2 псевдошарнирника $\mathfrak{p}$ подразбивается на два рычага p_1p_0 и p_0p_2, и пусть x_0, x_1, x_2 – координаты их концевых шарниров. Тогда положим

$$\omega'_{10} = \omega_{12}\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_0} \quad \text{и} \quad \omega'_{20} = \omega_{12}\frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0}.$$

Будем далее считать оба шарнира p_1 и p_2 свободными. Матрица $\Omega'(\omega')$ имеет на 1 больший порядок, чем $\Omega(\omega)$. Выпишем ее определитель, обозначая: $-\omega_{12} + \sum \omega_{1j} = S_1$ и $-\omega_{12} + \sum \omega_{2j} = S_2$, где суммирование ведется по всем рычагам, исходящим в псевдошарнирнике $\mathfrak{p}$ из шарниров p_1 и p_2 соответственно:

$$\det \Omega'(\omega') = \begin{vmatrix} \omega'_{01} + \omega'_{02} & -\omega'_{01} & -\omega'_{02} & 0 & \dots \\ -\omega'_{10} & S_1 + \omega'_{10} & 0 & \dots & \\ -\omega'_{20} & 0 & S_2 + \omega'_{20} & \dots & \\ 0 & \dots & & & \\ \dots & & & & \end{vmatrix}.$$

Прибавляя ко второй и третьей строкам первую строку, умноженную соответственно на $\frac{\omega'_{10}}{\omega'_{01}+\omega'_{02}}$ и на $\frac{\omega'_{20}}{\omega'_{01}+\omega'_{02}}$, и учитывая равенство $\frac{\omega'_{20}\omega'_{10}}{\omega'_{01}+\omega'_{02}} = \omega_{12}$, получим

$$\det \Omega'(\omega') = \begin{vmatrix} \omega'_{01} + \omega'_{02} & -\omega'_{01} & -\omega'_{02} & 0 & \dots \\ 0 & S_1 + \omega_{12} & -\omega_{12} & \dots & \\ 0 & -\omega_{12} & S_2 + \omega_{12} & \dots & \\ 0 & \dots & & & \\ \dots & & & & \end{vmatrix},$$

где алгебраическое дополнение первого элемента первой строки совпадает с $\det\Omega(\omega)$. Разложение по первому столбцу дает

$$\det\Omega'(\omega') = (\omega_{01}+\omega_{02})\det\Omega(\omega) = \frac{(x_1-x_2)^2}{(x_1-x_0)(x_0-x_2)}\omega_{12}\det\Omega(\omega).$$

Вследствие условий леммы ни один из сомножителей последнего произведения не равен нулю, а значит, $\det\Omega'(\omega')\neq 0$.

В случае же когда один из шарниров p_1, p_2 является закрепленным, приведенные рассуждения проходят с некоторыми упрощениями. Лемма доказана. □

Поскольку при преобразовании вида 2 из несократимого псевдошарнирника, восстановимого по ненулевому на каждом рычаге напряжению очевидно получается снова таковой же, то индукционный переход для преобразования вида 2 обоснован. Для преобразования вида 1 остается установить наличие внутреннего напряжения $\omega'\in\mathbf{W}(\mathfrak{p}')$ со всеми ненулевыми составляющими, по которому $\mathfrak{p}'$ восстанови́м. Справедливость этого вытекает из следующих утверждений 3–5.

Утверждение 3. *Если псевдошарнирник $\mathfrak{p}$ восстанови́м по внутреннему напряжению $\omega\in\mathbf{W}(\mathfrak{p})$, а $N(\mathfrak{p})$ – множество внутренних напряжений псевдошарнирника $\mathfrak{p}$, по которым он не восстанови́м, то справедливо неравенство* $\dim N(\mathfrak{p}) < \dim\mathbf{W}(\mathfrak{p})$.

Доказательство. Действительно, пусть $\dim\mathbf{W}(\mathfrak{p}) = t > 0$. Внутрение напряжения ω псевдошарнирника $\mathfrak{p}$ удобно рассматривать как точки вещественного проективного пространства $P\mathbf{W}^{t-1}$: пусть множеству $N(\mathfrak{p})\subset\ \mathbf{W}(\mathfrak{p})$ отвечает множество $PN(\mathfrak{p})\subset P\mathbf{W}^{t-1}$. Поскольку однородное полиномиальное уравнение $\det\Omega(\omega)=0$ не выполняется тождественно на $P\mathbf{W}^{t-1}$, то множество его решений, совпадающее с $PN(\mathfrak{p})$, имеет размерность $< t-1$.

Утверждение 3 имеет тот смысл, что псевдошарнирник, восстановимый по единственному напряжению, восстанови́м почти по каждому своему внутреннему напряжению.

Утверждение 4. *Пусть псевдошарнирник $\mathfrak{p}'$, входящий в последовательность псевдошарнирников утверждения 2, получается из восстановимого полностью напрягаемого псевдошарнирника $\mathfrak{p}$ преобразованием вида 1. Тогда у $\mathfrak{p}'$ существует внутреннее напряжение ω', ненулевое на добавленном рычаге.*

Доказательство. Рассмотрим случай свободных шарниров p_α и p_β. По построению мультиграф, порожденный свободными вершинами псевдошарнирника $\mathfrak{p}$ на прямой, связен. Следовательно, в $\mathfrak{p}'$ найдется простой цикл, составленный из рычагов псевдошарнирника, лежащих на одной прямой, и содержащий добавленный рычаг $p_\alpha p_\beta$. Очевидно, у $\mathfrak{p}'$ имеется напряжение ненулевое на каждом рычаге этого цикла, а значит и на $p_\alpha p_\beta$, и нулевое на всех остальных рычагах псевдошарнирника $\mathfrak{p}'$.

Если один из шарниров p_α, p_β, пусть, например p_α закреплен, то в $\mathfrak{p}'$ можно выделить простую цепь, содержащую рычаг $p_\alpha p_\beta$, и оканчивающуюся в шарнире p_α и еще в одном закрепленном шарнире. Псевдошарнирник $\mathfrak{p}'$ допускает внутреннее напряжение ненулевое на каждом рычаге этой цепи и нулевое на всех остальных рычагах. □

Утверждение 5. *Пусть для каждого рычага произвольного псевдошарнирника $\mathfrak{p}$ имеется внутреннее напряжение псевдошарнирника ненулевое на этом рычаге. Тогда размерность множества напряжений псевдошарнирника $\mathfrak{p}$, нулевых хотя бы на одном рычаге, меньше $\dim \mathbf{W}(\mathfrak{p})$, и, следовательно, $\mathfrak{p}$ является полностью напрягаемым.*

Доказательство. Действительно, множество напряжений из $\mathbf{W}(\mathfrak{p})$, нулевых на выделенном рычаге, в условиях утверждения задается линейным однородным нетождественно выполнимым уравнением, а значит, представляет собой подпространство в $\mathbf{W}(\mathfrak{p})$ коразмерности 1. □

Из двух последних утверждений можно заключить, что в случае, когда псевдошарнирник $\mathfrak{p}'$ получен из $\mathfrak{p}$ преобразованием вида 1, множество его внутренних напряжений нулевых хотя бы на одном рычаге, имеет неполную размерность в $\mathbf{W}(\mathfrak{p}')$. Теперь из утверждения 3 следует, что для $\mathfrak{p}'$ найдется восстанавливающее напряжение, ненулевое на каждом его рычаге. Таким образом, индукционный переход обоснован, и теорема 1 доказана. □

Заметим еще, что из наших рассуждений следует

Утверждение 6. *Если шарнирник восстанови́м по единственному напряжению и полностью напрягаем, то существует восстанавливающее его напряжение, ненулевое на каждом его рычаге.* □

§2. Угловые точки образа рычажного отображения и восстанавливающие напряжения

Известно одно простое условие существования восстанавливающего напряжения (см. [4, 2]): если шарнирник $\mathbf{p}$ в $\mathbf{R}^d$ допускает внутреннее напряжение ω, составляющие которого ω_{ij} ненулевые и имеют один и тот же знак на всех рычагах шарнирника, то $\mathbf{p}$ восстановим по напряжению ω. Следуя Р. Коннелли, мы называем такие шарнирники *паутинными* (spider webs),

Существование восстанавливающего напряжения у шарнирника $\mathbf{p}$ связано как с локальными, так и с глобальными свойствами рычажного отображения. Напомним, что *рычажное отображение*

$$F : \mathbf{R}^{dm} \to \mathbf{R}^r$$

сопоставляет с $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ квадраты длин его рычагов [2]. Покоординатно рычажное отображение задается формулами $d_{ij} = (p_i - p_j)^2$, $(v_i, v_j) \in E$. Имея их в виду, мы считаем стандартными евклидовыми координатами в пространстве $\mathbf{R}^r$ квадраты d_{ij} длин рычагов шарнирника.

Касательный конус $K(x) \subset \mathbf{R}^l$ отображения $f : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^l$ в точке $x \in \mathbf{R}^k$ определяется как множество предельных лучей последовательностей лучей $f(x)f(x_i)$, где $\{x_i\}$, $x_i \neq x$, – всевозможные сходящиеся к x последовательности точек. Рассмотрим касательный конус $K(\mathbf{p})$ рычажного отображения F в точке $\mathbf{p}$ и нормали N к касающимся его плоскостям. Пусть $W_{\mathbf{p}}$ – линейная оболочка множества всех нормалей N. Между пространством $\mathbf{W}^r$ и пространством $\mathcal{R}^r$ существует изоморфизм, отождествляющий векторы этих пространств с одинаковыми координатами в стандартных базисах. Одноимённые координаты в этих стандартных базисах суть напряжение и квадрат длины одного и того же рычага. Будем называть этот изоморфизм *координатным*. Если $W(\mathbf{p})$ – образ подпространства $\mathbf{W}(p) \subset \mathbf{W}^r$ внутренних напряжений шарнирника $\mathbf{p}$ в $\mathbf{R}^r$ при координатном изоморфизме, то очевидно включение $W_{\mathbf{p}} \subset W(\mathbf{p})$.

Пусть конус $K(\mathbf{p})$ обладает опорной плоскостью $\mathcal{P}$, т. е., плоскость $\mathcal{P}$ проходит через вершину конуса, и конус лежит в одном из замкнутых полупространств, ограничиваемых этой плоскостью. Пусть $w(\mathbf{p})$ – линейная оболочка нормалей ко всем таким опорным плоскостям $\mathcal{P}$, а $\mathbf{S}(p)$ – множество внешних относительно конуса нормалей к плоскостям $\mathcal{P}$, отложенных как точки на сфере направлений S^{r-1}. Подпространство $w(\mathbf{p})$ мы будем называть *подпространством излома* рычажного отображения в точке $\mathbf{p}$.

Допустим для опорной к конусу $K(\mathbf{p}^0)$ плоскости $\mathcal{P}(N)$ с внешней нормалью N существование такой шаровой окрестности U_ρ радиуса ρ точки $\mathbf{p}^0 \in \mathbf{R}^{dm}$, что эта плоскость является опорной и к образу $F(U_\rho)$ окрестности U_ρ. Такую плоскость $\mathcal{P}(N)$ будем называть *опорной* к F в точке $\mathbf{p}^0$. Несущественно видоизменяя рассуждения леммы 7 работы [2], получим

Утверждение 7. *Если в точке $\mathbf{p}^0$ имеется плоскость $\mathcal{P}(N)$ с нормальным вектором $N = \{\omega_{ij}\} \in \mathbf{R}^r$, опорная к F, то шарнирник $\mathbf{p}^0$ допускает внутреннее напряжение $\{\omega_{ij}\} = \omega \in \mathbf{W}^r$.*

Обобщая утверждение 4 работы [2], можно сказать, что имеется не более одной опорной к рычажному отображению F плоскости $\mathcal{P}(N)$ каждого данного направления N. Справедлива также следующая

Теорема 2. *Пусть каждая опорная к конусу $K(\mathbf{p}^0)$ плоскость $\mathcal{P}(N)$ опорна и к отображению F. Тогда либо шарнирник $\mathbf{p}^0$ не восстанови́м по напряжениям из подространства излома $w(\mathbf{p}^0)$, либо $\mathbf{p}^0$ восстанови́м по любому напряжению $\omega \in \operatorname{Int} \mathbf{S}(\mathbf{p}^0)$, где внутренняя часть множества берется относительно сферы $w(\mathbf{p}^0) \cap S^{r-1}$.*

Доказательство. Пусть напряжение $\omega_0 \in \operatorname{Int} \mathbf{S}(p^0)$ не является восстанавливающим для $\mathbf{p}^0$. Тогда имеется линейное многообразие $L \subset \mathbf{R}^{dm}$, $\dim L \geq 1$, шарнирников, допускающих напряжение ω_0. Опорная к отображению плоскость $\mathcal{P}(\omega_0)$ является опорной в точке $\mathbf{d}_0$ с внешней нормалью ω_0 к множеству $F(U_\rho)$ при достаточно малом $\rho > 0$. По теореме 3 работы [2] $F(L) \subset \mathcal{P}(\omega_0)$. Пусть линейное многообразие $M \subset \mathbf{R}^r$ есть пересечение всех плоскостей $\mathcal{P}(\omega)$ с $\omega \in w(\mathbf{p}^0)$, проходящих через точку $\mathbf{d}_0$. Тогда $F(L \cap U_\rho) \subset M$. Действительно, если допустить существование точки $\mathbf{d} \in F(L) \subset \mathcal{P}(\omega_0)$ и $\mathbf{d} \notin M$, то тогда точка с таким свойством нашлась бы и в произвольно малой окрестности точки $\mathbf{d}_0 = F(\mathbf{p}^0)$. Причем у неё существовал бы прообраз, сколь угодно близкий к $\mathbf{p}^0$. (Здесь мы пользуемся следующим простым свойством полиномиального отображения $f : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^l$: если образ какой-либо окрестности $U \subset \mathbf{R}^k$ лежит в плоскости $P \subset \mathbf{R}^l$, то и весь образ $f(\mathbf{R}^k)$ лежит в P.) Но тогда очевидным образом имеется плоскость $\mathcal{P}(\omega)$, проходящая через $\mathbf{d}_0$ и разделяющая $\mathbf{d}$

с конусом $K(\mathbf{p}^0)$ (конус и точка находятся по разные стороны от плоскости $\mathcal{P}(\omega)$, и $\mathbf{d} \notin \mathcal{P}(\omega)$). А это противоречит опорности плоскости $\mathcal{P}(\omega)$ к отображению F.

Таким образом, для произвольной плоскости $\mathcal{P}(\omega)$ с $\omega \in \operatorname{Int} \mathbf{S}(\mathbf{p}^0)$ имеем $F(L \cap U_\rho) \subset \mathcal{P}(\omega) \cap K(\mathbf{p}^0)$. Возьмем точку $\mathbf{d}' \in F(L \cap U_\rho)\{\mathbf{d}_0\}$. Пусть $\mathbf{p}' \in U_\rho$ – какой-либо ее прообраз при рычажном отображении. Вследствие утверждения 7 шарнирник $\mathbf{p}'$ допускает любое внутреннее напряжение $\omega \in w(\mathbf{p}^0)$. Поскольку $\mathbf{p}' \neq \mathbf{p}^0$, то $\mathbf{p}^0$ невосстанови́м по подпространству излома $w(\mathbf{p}^0)$. Теорема доказана. □

Если подпространство излома $w(\mathbf{p}^0)$ совпадает по координатному изоморфизму с пространством внутренних напряжений шарнирника $\mathbf{p}^0$, то доказанная теорема указывает на наличие в данном случае восстанавливающего напряжения для шарнирника восстановимого по пространству внутренних напряжений. Следующая теорема доставляет дополнительные сведения об угловых точках выпуклой оболочки образа рычажного отображения. Точку $\mathbf{d} \in \partial C$ мы называем *угловой* точкой множества C, если конус $\mathcal{K}(\mathbf{d})$ множества S в точке $\mathbf{d}$ (называемый также *контингенцией*) имеет более одной опорной плоскости. Допустим кроме того, что через угловую точку $\mathbf{d}_0 = F(\mathbf{p}^0)$ множества C проходят плоскости, опорные ко всему C. И пусть $s(\mathbf{p}^0)$ – множество на сфере направлений $S^{r-1} \subset \mathbf{R}^r$, состоящее из концов единичных внешних по отношению к C нормалей к этим плоскостям, а $w_c(\mathbf{p}^0)$ – его несущее подпространство, т.е. подпространство излома выпуклой оболочки множества C.

Теорема 3. *Напряжение $\omega_0 \in \partial s(\mathbf{p}^0)$, где $\partial s(\mathbf{p}^0)$ – граница множества $s(\mathbf{p}^0)$ на сфере $w_c(\mathbf{p}^0) \cap S^{r-1}$, не является восстанавливающим для шарнирника $\mathbf{p}^0$. (Напряжения переносятся из пространства $\mathbf{R}^r$ в $\mathbf{W}^r$ по координатному изоморфизму.)*

Доказательство. Рассмотрим проходящую через $\mathbf{d}_0$ опорную к S плоскость P_0 направления $\omega_0 \in \partial s(\mathbf{p}^0)$. Допустим, напряжение ω_0 является восстанавливающим для $\mathbf{p}_0$. Тогда с необходимостью $P_0 \cap C = \{\mathbf{d}_0\}$. Рассмотрим последовательность $\{P_i\}$ плоскостей, не являющихся опорными к C и проходящих через $\mathbf{d}_0$, направления которых $v_i \in w_c(\mathbf{p}^0) \cap S^{r-1}$, $v_i \notin s(\mathbf{p}^0)$, сходятся к ω_0. Возможны два случая: либо среди них есть хотя бы одна плоскость P_i, отсекающая от C ограниченное подмножество S_0, либо все они отсекают от C неограниченные подмножества. Если бы имел место первый случай, то у множества S_0 нашлась бы опорная плоскость, параллельная P_i и не совпадающая с P_i. Эта плоскость имела бы в силу замкнутости S общую точку $\mathbf{d}'$ с множеством C, и шарнирник $\mathbf{p}' = F^{-1}(\mathbf{d}')$ допускал бы внутреннее напряжение υ_i. Последнее противоречит тому, что образы всех таких шарнирников лежат в P_i.

Чтобы отвергнуть вторую возможностьм нам понадобятся две леммы.

Лемма 2. *Пусть $P_0 \cap C = \mathbf{d}_0$ в условиях теоремы 3, и в каждом из малых двугранных углов между плоскостями P_i и P_0 лежит неограниченная часть множества C. Тогда найдется последовательность шарнирников $\mathbf{p}^i \to \infty$, обладающих внутренними напряжениями $\omega_i \to \omega_0$ при $i \to \infty$.*

Доказательство. Допустим противное: пусть существовуют угол $\varphi > 0$ и расстояние $\rho > 0$ такие, что для любого допускающего внутреннее напряжение ω шарнирника $\mathbf{p}$ с $|F(\mathbf{p}) - \mathbf{d}_0| > \rho$ угол между ω и ω_0 больше φ. Рассмотрим касательный конус $\mathcal{K}(\mathbf{x})$ множества C в точке $\mathbf{x} \in C$. Покажем, что, какова бы ни была точка $\mathbf{x} \in \partial C$, $|\mathbf{x} - \mathbf{d}_0| > \rho$, найдется луч $\mathbf{x}y$ конуса $\mathcal{K}(\mathbf{x})$, образующий с P_0 угол $> \varphi$. В самом деле, пусть $\mathbf{p} \in F^{-1}(\mathbf{x})$. Тогда угол между подпространством $W(\mathbf{p})$, вложенным по координатному изоморфизму в $\mathbf{R}^r$, и ω_0 больше φ. А следовательно, касательное многообразие $L(\mathbf{p}) \subset \mathbf{R}^r$ к отображению F в точке $\mathbf{p}$, т. е. линейное многообразие, ортогонально дополнительное к $W(\mathbf{p})$ и проходящее через $\mathbf{x}$, содержит прямую, образующую с P_0 угол $> \varphi$. Но, очевидным образом, $L(\mathbf{p}) \subset \mathcal{K}(\mathbf{x})$, а значит, $\mathcal{K}(\mathbf{x})$ содержит луч, образующий с P_0 угол $> \varphi$.

Более того, вследствие кусочной алгебраичности поверхности ∂C, для любой точки $\mathbf{x} \in C$, $|\mathbf{x} - \mathbf{d}_0| > \rho$, можно утверждать существование такой её окрестности $U_{\mathbf{x}} \subset \mathbf{R}^r$, в которой имеется кусочек $l_{\mathbf{x}}$ гладкой кривой, исходящий из $\mathbf{x}$ и оканчивающийся на границе окрестности, касательный вектор которого наклонен к P_0 на угол $> \varphi$ в каждой его точке.

Выберем из последовательности $\{P_i\}$ плоскость P_{i_0}, образующую с P_0 угол $\theta \in (0, \varphi/4)$. Возьмем точку $\mathbf{x}_0 \in P_{i_0} \cap C$, удовлетворяющую условию

$$|\mathbf{x}_0 - \mathbf{d}_0|\Big(\cos\theta - \sin\theta \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\Big) > \rho.$$

Последнее условие означает, что отрезок $\mathbf{d}_0 A$ на рис. 2 имеет

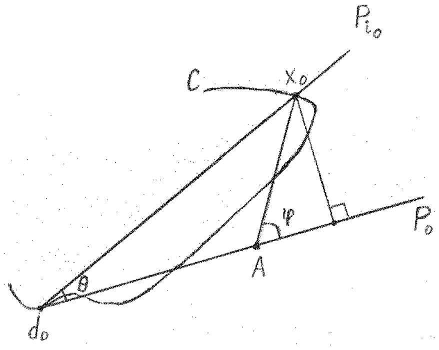


Рис. 2.

длину $> \rho$. Можно утверждать существование кусочно-гладкой кривой, начинающейся в $\mathbf{x}_0$, целиком содержащейся в C и пересекающей P_0 в точке $\neq \mathbf{d}_0$. Это противоречит условию $P_0 \cap C = \{\mathbf{d}_0\}$. Действительно, из любой точки $\mathbf{x} \in C$ с $|\mathbf{x} - \mathbf{d}_0| > \rho$ исходит кусочек гладкой кривой $l_{\mathbf{x}} \subset C$, касательный вектор которого в каждой его точке составляет с внешней к C нормалью ω_0 плоскости P_0 угол $< \pi/2 - \varphi/2$. Если составить из таких кусочков, начиная от $\mathbf{x}_0$, непрерывную кусочно-гладкую кривую L, то ее можно продолжать до тех пор, пока ее длина не превзойдет $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{d}_0| \sin\theta / \sin\frac{\varphi}{2}$. При этом она пересечет плоскость P_0, а все ее точки отстоят от $\mathbf{d}_0$ далее чем на ρ. Это противоречит тому, что $P_0 \cap C = \{\mathbf{d}_0\}$. $\square$

Лемма 3. *Пусть шарнирник $\mathbf{p}^0$ допускает внутреннее напряжение ω_0 и имеется последовательность шарнирников $\mathbf{p}^i \to \infty$ с той же ЗШС, допускающих внутренние напряжения $\omega_i \to \omega_0$ при $i \to \infty$. Тогда напряжение ω_0 не является восстанавливающим.*

Доказательство. Допустим противное: пусть ω_0 является восстанавливающим. Тогда система линейных уравнений $\Omega(\omega_0)\mathbf{p} = b(\omega_0)$ вида (3) имеет единственное решение $\mathbf{p} = \mathbf{p}^0$, а значит, ее определитель не равен нулю. Более того, существует окрестность $\mathcal{O}$ точки ω_0 в проективном пространстве $P\mathbf{R}^{r-1}$, в которой $\det \Omega(\omega) > \varepsilon > 0$. Поэтому шарнирники, допускающие внутреннее напряжение из окрестности $\mathcal{O}$, восстановимы по этому напряжению. Вследствие условия $\det \Omega(\omega) > \varepsilon > 0$ их координаты ограничены, а значит эти шарнирники образуют ограниченное множество в пространстве параметров. Последнее противоречит условию леммы. □

Завершим доказательство теоремы 3. Во втором случае, вследствие леммы 2, найдется последовательность шарнирников $\mathbf{p}^i \to \infty$, обладающих внутренними напряжениями $\omega_i \to \omega_0$ при $i \to \infty$. Из леммы 3 теперь следует, что ω_0 не является восстанавливающим. Противоречие. □

Заметим, что опорная к C в точке $\mathbf{d}_0$ плоскость направления $\omega_0 \in \partial s(\mathbf{p}^0)$ пересекает C по неограниченному связному множеству.

§3. Некоторые свойства множества восстановимых шарнирников и рычажного отображения

Здесь мы установим ограниченность множества паутинных шарнирников для произвольной ЗШС и неограниченность множества восстановимых шарнирников для ЗШС, имеющих по крайней мере 2 закрепленных в различных точках шарнира. Кроме того, будут проанализированы некоторые свойства рычажного отображения и его образа, связанные с паутинными шарнирниками.

Теорема 4. *ЗШС Z в $\mathbf{R}^d$ тогда и только тогда отвечает неограниченное множество $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}^{dm}$ шарнирников, допускающих восстанавливающее напряжение, когда Z имеет по крайней мере 2 закрепленных в различных точках шарнира.*

Доказательство. Необходимость указанного условия следует из того, что если все закрепленные шарниры шарнирника $\mathbf{p}$ закреплены в одной точке $a \in \mathbf{R}^d$, то все шарнирники, гомотетичные $\mathbf{p}$ относительно a, обладают тем же пространством внутренних напряжений, что и $\mathbf{p}$.

Перейдем к доказательству достаточности. Заметим, во-первых, что если имеется последовательность шарнирников $\mathbf{p}^k \to \mathbf{p}$, обладающих напряжениями ω_k, тоже имеющими предел: $\omega_k \to \omega$, то предельный шарнирник $\mathbf{p}$ допускает внутреннее напряжение ω. Действительно, справедливость этого вытекает из возможности предельного перехода при $k \to \infty$ в системе уравнений (2) равновесия сил в свободных шарнирах.

Заметим теперь, что функция $\det \Omega(\omega)$ является однородным по ω_{ij} многочленом, не равным тождественно нулю в силу теоремы 4 работы [2]. Будем рассматривать напряжения ω шарнирника как точки проективного пространства $\mathbf{R}P^{r-1}$. Тогда множество $D \subset \mathbf{R}P^{r-1}$ нулей многочлена $\det \Omega(\omega)$ имеет размерность $\leqslant r-2$. Вследствие утверждения 1 работы [2], имеется внутреннее напряжение $\omega_0 \in D$, не допустимое ни для одного шарнирника с ЗШС З. Поскольку $\dim D \leqslant r-2$, то можно выбрать последовательность напряжений $\omega_k \in \mathbf{R}P^{r-1} \setminus D$, сходящуюся к точке ω_0. Так как $\det \Omega(\omega_k) \neq 0$, каждому из напряжений ω_k этой последовательности отвечает шарнирник $\mathbf{p}^k$ с ЗШС З, восстановимый по этому напряжению. Допустим, что множество восстановимых по единственному напряжению шарнирников с ЗШС З ограниченно. Тогда из последовательности $\mathbf{p}^k$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому шарнирнику $\mathbf{p}^0$. Шарнирник $\mathbf{p}^0$, как мы заметили вначале, допускает напряжение ω_0. Это противоречит выбору напряжения ω_0. □

Используя утверждение 1 работы [2], теорему 4 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 4′. *ЗШС в $\mathbf{R}^d$ тогда и только тогда отвечает неограниченное множество $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}^{dm}$ шарнирников, допускающих восстанавливающее напряжение, когда эта ЗШС допускает не все внутренние напряжения из $\mathbf{W}^r$.* □

Перейдем к множеству паутинных шарнирников.

Лемма 4. *Пусть X – произвольное подмножество множества свободных шарниров паутинного шарнирника $\mathbf{p} \in P$, а X' – множество не обязательно свободных шарниров шарнирника $\mathbf{p}$, не входящих в X и смежных хотя бы одному шарниру из X. Тогда выпуклая оболочка $\operatorname{conv} X' \supset X$.*

Доказательство. В самом деле, если это не так, то хотя бы одна из вершин выпуклого многогранника $\operatorname{conv}(X' \cup X)$, пусть p_i, принадлежит X. Поскольку у паутинного шарнирника все рычаги одновременно либо растянуты либо сжаты, равнодействующая сил, приложенных к свободному шарниру p_i со стороны смежных с ним шарниров, не равна нулю. Таким образом, p_i не может находиться в равновесии, что противоречит условию. □

Теорема 5. *Какова бы ни была ЗШС в $\mathbf{R}^d$, множество $P \subset \mathbf{R}^{dm}$ отвечающих ей паутинных шарнирников ограниченно.*

Доказательство. Действительно, достаточно взять в качестве X множество всех свободных шарниров шарнирника $\mathbf{p}$. Тогда X' будет множеством его закрепленных шарниров, и утверждение теоремы вытекает из включения $X \subset \operatorname{conv} X'$. □

Пристального внимания заслуживает изучение образа $C = F(\mathbf{R}^{dm})$ рычажного отображения. Он определяет глобальные свойства совокупности шарнирников с данной ЗШС. Однако здесь мало что известно. Даже в самом интересном для практики случае *правильной* ЗШС в $\mathbf{R}^d$, т.е. такой, что $\dim C = r$, при $d > 1$, по-существу, известно лишь, что C замкнуто, связно, неограниченно, размерно-однородно и имеет кусочно-гладкую границу ∂C [1]. Для правильной ЗШС на прямой C совпадает с неотрицательным ортантом стандартной координатной системы в $\mathbf{R}^r$. В случае же $d > 1$ множество C, как правило, невыпукло. Теоремой 4 работы [2] установлено, что каков бы ни был вектор $\omega \in \mathbf{R}^r$ с $\omega_{ij} > 0$, у C имеется опорная плоскость $\mathcal{P}_\omega$ с нормальным вектором ω, пересекающая C всего лишь в одной точке, принадлежащей $F(P)$. Более того, в каждой точке $\mathbf{d}_0 \in F(P)$ имеется такая опорная плоскость $\mathcal{P}_\omega$. Итак, любая точка $\mathbf{d}_0 \in F(P)$ обладает тем свойством, что, какова бы ни была точка $\mathbf{d} \in C$, $\mathbf{d} \neq \mathbf{d}_0$, в стандартной системе координат у нее имеется координата, большая сооответствующей координаты точки $\mathbf{d}_0$. Это означает, что множество $F(P)$ представляет собой так называемый *минимум Парето* [5] отображения F.

Теорема 6. *Образ $F(P)$ множества P паутинных шарнирников при рычажном отображении ограничен и гомеоморфен P.*

Доказательство. Лемма 1 работы [1] утверждает, что при рычажном отображении образ любого ограниченного множества ограничен, а неограниченного – неограничен. Поэтому ограниченность $F(P)$ сразу вытекает из предыдущей теоремы. Взаимная однозначность ограничения $\mathcal{F} = F|_P$ установлена теоремой

4 работы [2]. Непрерывность отображения $\mathcal{F}$ очевидна. Остается удостовериться в непрерывности обратного отображения. Допустим противное. Тогда найдется последовательность точек $\mathbf{d}_i \in F(P)$, сходящаяся к точке $\mathbf{d} \in F(P)$ и такая, что последовательность их прообразов $\mathbf{p}^i$ не сходится к $\mathbf{p} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{d}) \in \mathbf{R}^{dm}$. В силу компактности замыкания $\overline{P}$ множества P последовательность $\{\mathbf{p}^i\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{p}' \in \overline{P}$, $\mathbf{p}' \neq \mathbf{p}$. Но тогда по непрерывности $F(\mathbf{p}') = \mathbf{d}$, что противоречит однократности отображения F на $F(P)$ (теорема 4 работы [2]). □

Пусть S_-^{r-1} – часть сферы S^{r-1}, вырезаемая отрицательным ортантом ($d_{ij} < 0$, $v_i v_j \in E$) стандартной координатной системы в $\mathbf{R}^r$. Очевидно, S_-^{r-1} представляет собой выпуклое множество, гомеоморфное открытому $(r-1)$-мерному шару.

Теорема 7. *Если* $\operatorname{Rg} dF(\mathbf{p}) = r-1$ *на* P, *то* $F(P)$ *представляет собой гладкую строго выпуклую шапочку, гомеоморфную открытому* $(r-1)$-*мерному шару. Она обращена выпуклостью к началу стандартной системы координат в* $\mathbf{R}^r$ *и взаимно-однозначно проектируется на координатные плоскости вдоль осей.*

Доказательство. Как следует из результатов работы [2], в каждой точке $\mathbf{d} \in F(P)$ имеется опорная к $F(P)$ плоскость $\mathcal{P}_\omega$, отделяющая начало координат в $\mathbf{R}^r$ от множества C и такая, что $\mathcal{P}_\omega \cap C = \{\mathbf{d}\}$. (Координаты ее нормального вектора $\omega \in S^{r-1}$ имеют смысл составляющих допустимого внутреннего напряжения шарнирника $\mathbf{p} = F^{-1}(\mathbf{d})$.) Таким образом, $F(P)$ есть строго выпуклая поверхность, обращенная выпуклостью к началу координат. Если $\operatorname{Rg} dF(\mathbf{p}) = r-1$, то в точке $\mathbf{d} = F(\mathbf{p})$ нет других, кроме $\mathcal{P}_\omega$, опорных к $F(P)$ плоскостей, и, следовательно, поверхность $F(P)$ является гладкой. Отсюда следует, что сферическое изображение точки $\mathbf{d} \in F(P)$ является точкой сферы S^{r-1}, непрерывно зависящей от $\mathbf{p}$. Более того, вследствие теоремы 5 и утверждения 4 [2], ограничение $\mathcal{S}$ сферического отображения на множество $F(P)$ взаимно-однозначно отображает $F(P)$ на S_-^{r-1}. Если мы установим гомеоморфность множеств $F(P)$ и S_-^{r-1}, то тем самым будет доказана гомеоморфность $F(P)$ открытому шару. А для этого достаточно установить непрерывность отображения, обратного к $\mathcal{S}$.

Допустим противное. Тогда найдется такая последовательность $\{\omega_i\} \subset S_-^{r-1}$, сходящаяся к некоторой точке $\omega \in S_-^{r-1}$, что последовательность их прообразов $\mathbf{d}_i \in F(\Pi)$ не сходится к $\mathbf{d} = \mathcal{S}^{r-1}(\omega) \in F(P)$. Ей отвечает последовательность $\mathbf{p}^i = F^{-1}(\mathbf{d}_i)$, которая, очевидно, не сходится к $\mathbf{p} = F^{-1}(\mathbf{d})$. В силу ограниченности множества P из последней последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{p}' \neq \mathbf{p}$. Но тогда, как замечено при доказательстве теоремы 4, шарнирник $\mathbf{p}'$ допускает внутреннее напряжение ω. Это противоречит восстановимости паутинного шарнирника $\mathbf{p}$ по внутреннему напряжению $\omega \in S_-^{r-1}$.

Наконец, допустим, что точки $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2 \in F(P)$ проектируются вдоль координатной оси в одну и ту же точку координатной плоскости P стандартной системы в $\mathbf{R}^r$. Пусть для определенности $\mathbf{d}_1$ лежит от P дальше, чем $\mathbf{d}_2$. Тогда, поскольку опорная к множеству C в точке $\mathbf{d}_1$ плоскость отрезает от положительного ортанта координатной системы ограниченное множество, то $\mathbf{d}_2$ будет лежать по ту же сторону от этой плоскости, что и начало координат. Это противоречит выпуклости шапочки $F(P)$ к началу координат. Теорема доказана. □

Примеры. Пример ЗШС на плоскости, удовлетворяющих условиям последней теоремы, дают схемы, изображенные на рис. 1а), б). Покажем, например, что каждый несократимый паутинный шарнирник со схемой 1а), где шарниры p_4, p_5, p_6 закреплены в вершинах невырожденного треугольника, имеет одномерное пространство внутренних напряжений. Допустим противное: паутинный шарнирник $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ имеет не менее чем двумерное пространство внутренних напряжений. Тогда $\mathbf{p}$ допускает напряжение ω, нулевое на непустом собственном подмножестве E' своих рычагов и положительное на остальных рычагах. Каждому из свободных шарниров инцидентно 3, 1 или 0 рычагов из E'. Назовем шарнир *ненапряженным*, если ему инцидентны лишь рычаги из E', и *напряженным* – в противном случае. Назовем рычаг *ненапрягаемым*, если любое допустимое для этого шарнирника внутреннее напряжение имеет на этом рычаге нулевую составляющую. У паутинного шарнирника все рычаги напрягаемы. Поскольку силы, приложенные со стороны свободных шарниров к закрепленным, должны уравновешиваться, то у $\mathbf{p}$ не может быть 2 ненапряженных закрепленных шарниров. Допущение о ненапряженности всех трех его закрепленных шарниров приводит к коллинеарности трёх его свободных шарниров. Но тогда имеется ненапрягаемый рычаг между закреплённым и свободным шарнирами, что невозможно для паутинного шарнирника.

Рассмотрим случай наличия 1 ненапряженного закрепленного шарнира, пусть, для определенности, p_4. Тогда усилие от него не может передаваться на шарниры p_2 и p_3, и значит, оба они должны лежать на прямой p_5p_6, иначе $\mathbf{p}$ был бы ненапрягаем. Возможны два случая: либо p_1 лежит на прямой p_5p_6, либо нет. В первом случае рычаг p_4p_1 в $\mathbf{p}$ ненапрягаем, ибо любое ненулевое его напряжение не может быть уравновешено напряжениями остальных рычагов, лежащих на неколлинеарной ему прямой. Во втором случае по той же причине ненапрягаемы рычаги p_1p_2 и p_1p_3. Итак, наши предположения противоречат тому, что $\mathbf{p}$ – паутинный шарнирник.

Если допустить, что все закрепленные шарниры шарнирника $\mathbf{p}$ напряжены, то E' состоит из одного лишь рычага, соединяющего два свободных шарнира. Пусть, для определенности, – из рычага p_1p_2. В этом случае p_4,p_1,p_3 лежат на одной прямой, p_5,p_2,p_3 – также. И так как рычаг p_1p_2 напрягаем, то все три свободных шарнира лежат на прямой p_4p_5. Но тогда ненапрягаем рычаг p_6p_3. Для паутинного шарнирника это невозможно. Несложно установить отсутствие в этом случае сократимых паутинных шарнирников. Подобными же, но более длинными рассуждениями можно показать, что и для схемы рис. 1б), у которой закрепленные шарниры лежат в вершинах выпуклого четырехугольника, каждый несократимый паутинный шарнирник имеет одномерное пространство внутренних напряжений.

Рассмотрим свойства образа рычажного отображения (не обязательно с изостатической ЗШС), связанные с паутинными шарнирниками, обладающими более чем одномерным пространством внутренних напряжений.

Лемма 5. *Пусть шарнирник* $\mathbf{p}$ *– паутинный и* $\dim \mathbf{W}(\mathbf{p}) = s > 1$. *Тогда* $\mathbf{d} = F(\mathbf{p}) \in \partial C$ *является угловой точкой выпуклой оболочки множества* C. *Пусть* $W(\mathbf{p})$ *– вложение пространства* $\mathbf{W}(\mathbf{p})$ *в* $\mathbf{R}^r$ *по естественному координатному изоморфизму. Тогда* $W(\mathbf{p})$ *есть подпространство излома множества* $\operatorname{conv} C$ *в точке* $\mathbf{d}$. *Кроме того, сферическое изображение точки* $\mathbf{d}$ *как точки* $\operatorname{conv} C$ *содержит множество* $\mathcal{V}(\mathbf{d}) = W(\mathbf{p}) \cap S_{-}^{r-1}$.

Доказательство. Пусть плоскость $\mathcal{P}_\omega$ направления $\omega \in \mathcal{V}(\mathbf{d})$, проходящая через $\mathbf{d}$, не является опорной к C. Поскольку C лежит в неотрицательном ортанте координатной системы в $\mathbf{R}^r$, то имеется параллельная ей опорная к C плоскость $\mathcal{P}'_\omega$. Эта плоскость прилегает к C в некоторой точке $\mathbf{d}' \neq \mathbf{d}$. Точка $\mathbf{d}'$ имеет единственный прообраз при рычажном отображении – паутинный шарнирник $\mathbf{p}' \neq \mathbf{p}$, допускающий в силу утверждения 7 внутреннее напряжение ω. Но это напряжение допускает и $\mathbf{p}$. Последнее противоречит тому, что напряжение ω является восстанавливающим.

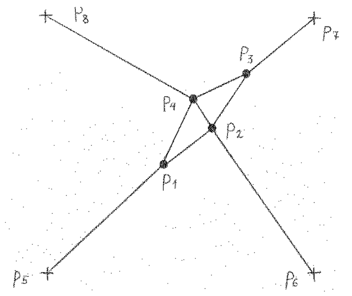


Рис. 3.

На рис. 3 изображена ЗШС на плоскости, полученная добавлением одного рычага к ЗШС рис. 1б). Пусть закрепленные шарниры изображенной ЗШС лежат в точках

$$p_5 = (0,0), \quad p_6 = (1,0), \quad p_7 = (1,1), \quad p_8 = (0,1).$$

Зададим внутреннее напряжение

$$\omega = (\omega_5; \omega_6; \omega_7; \omega_8; \omega_{12}; \omega_{14}; \omega_{23}; \omega_{24}; \omega_{34}) = (1;1;3;1;2;1;1;4;3),$$

где для напряжений рычагов, исходящих из закрепленных шарниров, мы использовали обозначение с одним индексом. Расчёт на компьютере координат свободных шарниров паутинного шарнирника, допускающего это внутреннее напряжение, дает:

$$p_1 \approx (0,4635; 0,4342), \quad p_2 \approx (0,6321; 0,5378),$$

$$p_3 \approx (0,7716; 0,7888), \quad p_4 \approx (0,5896; 0,6614).$$

Величина определителя, полученного отбрасыванием последней строки матрицы $dF(\mathbf{p})$, в точке $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ равна $\frac{-490155008}{107166402027}$.

Таким образом, $\operatorname{Rg} dF(\mathbf{p}) = 8$. С другой стороны, шарнирник $\mathbf{p}'$ с

$$p'_1 = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), \quad p'_2 = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right), \quad p'_3 = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right), \quad p'_4 = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

также является паутинным, но для него $\operatorname{Rg} dF(\mathbf{p}') = 7$. Для этого шарнирника пространство $\mathbf{W}(\mathbf{p}')$ двумерно и состоит из векторов $\omega' = x\omega^1 + y\omega^2$, где

$$\omega^1 = (0; 1; 0; 1; 0; 0; 0; 1; 0), \quad \text{а} \quad \omega^2 = (1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 0; 1).$$

Подсчет определителя матрицы $\Omega(\omega')$ дает

$$\det \Omega(x\omega^1 + y\omega^2) = 9y^2(y + x)(5y + 3x).$$

Напряжения $\omega'_1 = \omega^1$, $\omega'_2 = \omega^1 - \omega^2$ и $\omega'_3 = -5\omega^1 + 3\omega^2$ не являются восстанавливающими для $\mathbf{p}'$. Каждая из плоскостей $\mathcal{P}_i$ с нормальным вектором ω'_i, проведенных через $\mathbf{d}' = F(\mathbf{p}')$, имеет с C пересечение, содержащее неограниченную связную компоненту, проходящую через $\mathbf{d}'$. Из этих трех плоскостей плоскости $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ опорны к C. Это устанавливается на основе анализа квадратичных форм, представляющих собой вторые дифференциалы функций $\sum_{(i,j)\in E} \omega_{ij} d_{ij}$, где ω_{ij} – координаты нормального вектора плоскости. Например, для плоскости $\mathcal{P}_2$ с нормальным вектором ω'_2 имеем неотрицательную форму

$$-2y_1y_4 - 2y_2y_3 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 2y_1y_2 - 2x_1x_4 + x_4^2 + {y_2}^2 + 3x_1^2 + 3y_1^2 -$$
$$-2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2y_2y_4 + 3x_3^2 + 3y_3^2 - 2y_3y_4 - 2x_3x_4 + y_4^2,$$

а для плоскости $\mathcal{P}_3$ получаем неопределённую форму

$$-6y_1y_4 - 6y_2y_3 - 6x_1x_2 - x_2^2 - 6y_1y_2 - 6x_1x_4 - x_4^2 + 9y_2^2 + 9x_1^2 +$$
$$+9y_1^2 - 6x_2x_3 + 10x_2x_4 - 10y_2y_4 + 9x_3^2 + 9y_3^2 - 6y_3y_4 - 6x_3x_4 + 9y_4^2.$$

Таким образом, $\mathbf{d}' = F(\mathbf{p}')$ является угловой точкой множества $\operatorname{conv} C$. В данном случае $\dim F(P) = 8 = r - 1$, однако минимум Парето не гомеоморфен открытому $(r-1)$-мерному шару. Действительно, точка $\mathbf{d}' \in F(P)$ и $\mathbf{d}' \in \partial F(P)$, и, как легко видеть, не обладает в $F(P)$ окрестностью, гомеоморфной $(r-1)$-мерному шару.

Для произвольно выбранной ЗШС рассмотрим множество P паутинных шарнирников. Пусть $\mathcal{U} = U \cap P$, где $U \subset \mathbf{R}^{dm}$, есть некоторая окрестность точки $\mathbf{p}^0 \in P$.

Лемма 6. *Если* $\operatorname{Rg} dF(\mathbf{p}) = k$ *на* $\mathcal{U}$, *то у* $\mathbf{p}^0$ *найдется окрестность в* P, *гомеоморфная открытому* k*-мерному шару.*

Доказательство. Рассмотрим линейное отображение $A\colon \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^{dm}$ с матрицей, транспонированной к $dF(\mathbf{p})$. Размерность его образа равна $\operatorname{Rg} dF(\mathbf{p})$, а между его ядром $W(\mathbf{p}) \subset \mathbf{R}^r$ и подпространством внутренних напряжений $\mathbf{W}(\mathbf{p}) \subset \mathbf{W}^r$ имеется естественный координатный изоморфизм. По известной теореме линейной алгебры $\dim W(\mathbf{p}) + \operatorname{Rg} dF(\mathbf{p}) = r$, и, значит, $\dim \mathbf{W}(\mathbf{p}) = \dim W(\mathbf{p}) = r - k$ для $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$. Вследствие леммы 5, $F(\mathcal{U})$ состоит из угловых точек $\mathbf{d}$ множества $\operatorname{conv} C$, сферические изображения которых пересекаются с $S^{r-1}_{-} \subset S^{r-1}$ по $(r-k-1)$-мерным “дугам” $\mathcal{V}(\mathbf{d})$. Поскольку внутреннее напряжение $\omega \in S^{r-1}_{-}$ является восстанавливающим, то для различных точек $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2 \in F(P)$ имеем $\mathcal{V}(\mathbf{d}_1) \cap \mathcal{V}(\mathbf{d}_2) = \varnothing$. Кроме того, так как $\operatorname{Rg} dF(\mathbf{p}) = \mathrm{const}$ на $\mathcal{U}$, то подпространство $\mathbf{W}(\mathbf{p})$ непрерывно зависит от точки $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$, а следовательно, и множество $\mathcal{V}(\mathbf{d})$ непрерывно зависит от точки $\mathbf{d} \in F(\mathcal{U})$.

Пусть $\mathbf{d}_0 = F(\mathbf{p}^0)$, выберем точку $\omega_0 \in \mathcal{V}(\mathbf{d}_0)$ и проведем через нее на сфере S^{r-1} открытый k-мерный шар D, содержащийся в подпространстве, ортогональном пространству $W(\mathbf{p}^0)$. Радиус шара D выберем настолько малым, чтобы опорная к C плоскость направления $\omega \in D$ прилегала к C в точке $\mathbf{d} \in F(\mathcal{U})$. Это можно сделать потому, что любая опорная к C плоскость близкого к ω направления прилегает к C лишь в одной точке, и эта точка прилегания непрерывно зависит от направления плоскости. Таким образом, каждому $\omega \in D$ сопоставлена единственная точка $\mathbf{d} = f(\omega) \in F(\mathcal{U})$. Если нужно, уменьшим D настолько, чтобы для всех точек $\mathbf{d} \in f(D)$ “дуги” $\mathcal{V}(\mathbf{d})$ были трансверсальны подпространству, в котором лежит D. На таком уменьшенном шаре D отображение f является, как легко видеть, взаимно-однозначным. Нетрудно удостовериться и в том, что как отображение f, так и обратное к нему непрерывны на D и $f(D)$ соответственно. Отсюда следует, что $f(D)$ гомеоморфно открытому k-мерному шару. Гомеоморфизм $F^{-1}(f(D)) \approx f(D)$ доказывается подобно тому, как это делалось в теореме 6. □

Теорема 8. *Для произвольной ЗШС имеет место равенство* $\dim P = \max_{\mathbf{p} \in P} \operatorname{Rg} dF(\mathbf{p})$.

Доказательство. Неравенство $\dim F(P) \leqslant \max_{\mathbf{p} \in P} \operatorname{Rg} dF(\mathbf{p})$ очевидно. В силу гомеоморфности P и $F(P)$ имеем $\dim P \leqslant \max_{\mathbf{p}\in P} \mathrm{Rg}\; dF(\mathbf{p})$. С другой стороны, если

$$\mathrm{Rg}\; dF(\mathbf{p}^0) = \max_{\mathbf{p}\in P} \mathrm{Rg}\; dF(\mathbf{p}) = k$$

в точке $\mathbf{p}^0 \in P$, то имеется такая окрестность $U \subset \mathbf{R}^{dm}$ точки $\mathbf{p}^0$, что это равенство справедливо для всех точек $\mathbf{p} \in U \cap P$. И, вследствие леммы 6, $\dim P \geqslant \max_{\mathbf{p}\in P} \mathrm{Rg}\; dF(\mathbf{p})$. Теорема доказана. □

Следствие. *Для произвольной ЗШС с r рычагами справедливо равенство*

$$\dim P + \min_{\mathbf{p}\in P} \dim \mathbf{W}(\mathbf{p}) = r.$$

Этот факт вытекает из равенства

$$\min_{\mathbf{p}\in P} \dim \mathbf{W}(\mathbf{p}) = r - \max_{\mathbf{p}\in P} \mathrm{Rg}\; dF(\mathbf{p}). \qquad \square$$

Обозначим μ_s множество в $\mathbf{R}^{dm}$, на котором $\mathrm{Rg}\; dF = s$. Отнюдь не всегда справедливо равенство $\dim \mu_s = s$. Для ЗШС рис. 1а) множество μ_4 имеет размерность 3. Оно содержит несократимые шарнирники со свободными шарнирами p_1,p_2,p_3, лежащими на прямой, соединяющей пару закрепленных шарниров, а также сократимые шарнирники. В этом примере шарнирники из μ_4 не являются паутинными. ЗШС рис. 3, в отличие от предыдущего примера, показывает возможность неравенства $\dim \mu_s < s$ и в случае, когда $\mu_s \cap P \neq \emptyset$. Множество μ_6 в этом случае содержит несократимые шарнирники, у которых шарниры p_2, p_4 лежат на прямой p_6p_8, и кроме того, если удалить рычаг p_2p_4, то получившийся шарнирник допускает внутреннее напряжение. Первое из этих условий накладывает 2, а второе – еще 1 связь на координаты свободных шарниров. Поскольку число последних – 8, то $\dim \mu_6 = 5$.

В заключение приведу несколько открытых вопросов.

Вопрос 1. Если множество $\mu_k \subset \mathbf{R}^{dm}$, на котором $\mathrm{Rg}\; dF(\mathbf{p}) = k$, имеет положительную размерность, то непременно ли оно неограниченно?

Вопрос 2. Пусть $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}^{dm}$ – множество шарнирников, восстановимых по своему подпространству внутренних напряжений, а P

– множество паутинных шарнирников с данной ЗШС. Очевидно, $\dim P \leqslant \dim \mathbf{B}$. Всегда ли имеет место равенство $\dim P = \dim \mathbf{B}$?

Вопрос 3. Пусть ЗШС – правильная (т.е. $\max \mathrm{Rg}\, dF(\mathbf{p}) = r$), и множество $\mathbf{B}$ состоит более чем из одной точки, а значит, неограниченно. Верно ли, что в этом случае и $F(\mathbf{B}) \cap \partial C$ также неограниченно?

Вопрос 4. Рассмотрим ЗШС на плоскости с $n > 2$ закрепленными шарнирами $p_{n+1}, \dots, p_{2n}$ и n свободными шарнирами $v_1, \dots, v_n$, соединенными между собой рычагами $v_1 v_2$, $,v_2 v_3, \dots, v_n v_1$ и с закрепленными шарнирами – рычагами $v_1 p_{n+1}, \dots, v_n p_{2n}$, обобщающие ЗШС рис. 1. Условия существования внутренних напряжений в шарнирниках с такими ЗШС рассматривались Крапо [7]. Пусть закрепленные шарниры лежат в вершинах выпуклого многоугольника. Любой ли паутинный шарнирник с такой ЗШС имеет одномерное пространство внутренних напряжений?

Литература

1. М. Д. Ковалев, *Геометрическая теория шарнирных устройств*. — Изв. РАН, Сер. мат. **58**, No. 1 (1994), 45–70.
2. М. Д. Ковалев, *О восстановимости шарнирников по внутренним напряжениям*. — Изв. РАН, Сер. мат. **61**, No. 4 (1994), 337–377.
3. N. White, W. Whiteley, *The algebraic geometry of stresses in frameworks*. — SIAM J. Alg. Discrete Math. **4** (1983), 481–511.
4. R. Connelly, *Rigidity and energy*. — Invent. Math. **66** (1982), 11–33.
5. С. Смейл, *Глобальный анализ и экономика* 1, *оптимум Парето и обобщение теоремы Морса*. — УМН **27**, вып. 3 (1972), 177–187.
6. А. И. Кострикин, *Введение в алгебру*. Наука, М. (1977).
7. H. Crapo, *Invariant-theoretic methods in scene analysis and structural mechanics*. — J. Symbolic Computation **11** (1991), 523–548.

Kovalev M. D. About frameworks restorable by one stress.

Hinged constructions with pinned joints admitting integral stresses in $\mathbf{R}^d$ are studied. A conjecture about the existence of restoring stress for a framework in $\mathbf{R}^1$ restorable by its internal stress space is proved. A sufficient condition for the existence of a restoring stress in the case of arbitrary dimension is given. Properties of the set of frameworks restorable by an internal stress are established. New problems are formulated.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 31 декабря 2001 г.

E-mail: kovalev.math@mtu-net.ru