Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

В. А. Залгаллер

КРАТЧАЙШИЕ ЛИНИИ ОСМОТРА СФЕРЫ

§1. Постановки задач

1.1. Начнем с планиметрических вопросов:

1) Какова на плоскости идущая вне открытого единичного круга кратчайшая линия, двигаясь по которой, можно осмотреть извне все точки граничной окружности S этого круга? (Если луч зрения касается окружности S, то точка касания тоже считается увиденной.)

2) Какой будет кратчайшая линия осмотра, если дополнительно потребовать, чтобы и ее начало и ее конец лежали на S?

3) Какова кратчайшая линия осмотра, если на S обязано лежать только ее начало?

Ответами на эти простые вопросы служат линии AF, изображенные соответственно на рис. 1,а,б,в.

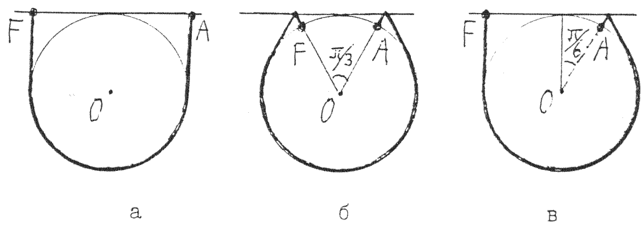

Рис. 1.

1.2. Если к искомой кривой AF добавить начальный радиус OA, то линия рис. 1,в послужит также ответом на следующий вопрос Беллмана [1].

3а) Вы находитесь в точке 0 внутри полуплоскости, ограниченной прямой p, на расстоянии 1 от границы, но не знаете, как по отношению к Вам расположена граница p. Двигаясь по какой наиболее короткой траектории, Вы заведомо выйдете на границу p?

Решение (рис. 1,в) указано Исбеллом [2], доказательство почти очевидно, его можно найти в работе [3], посвященной другому вопросу Беллмана.

1.3. Еще проще следующие вопросы.

4) Какова кратчайшая линия осмотра, идущая “на постоянной высоте” над окружностью S?

5) Как изменится эта линия, если к ее длине в начале добавлять “вертикальный” спуск на S?

6) Как изменится эта линия, если ”подъем” учитывать, а спуск не учитывать?

Ответами на вопросы 4)–5) служат линии AF, изображенные соответственно на рис. 2,а,б,в.

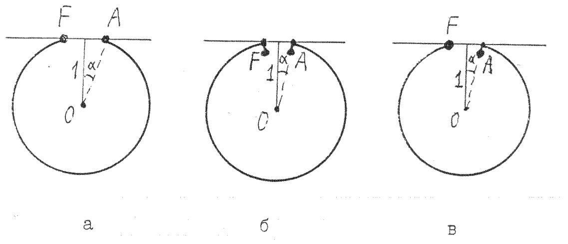

Рис. 2а. Рис. 2б. Рис. 2в.

$\alpha\approx 0.3432$ $(\alpha=\pi-\mathrm{ctg}\,\alpha)$

$\alpha\approx 0.25163$ $(\alpha=\pi+1-\mathrm{ctg}\,\alpha)$

$\alpha\approx 0.2900$ $(\alpha=\pi+\frac{1}{2}-\mathrm{ctg}\,\alpha)$

1.4. Цель настоящей работы – решить задачи, являющиеся пространственными аналогами вопросов 1)–6).[1]

Задача 1. *Какова в $\mathbb{R}^3$ наиболее короткая линия, идущая вне открытого единичного шара, ограниченного сферой S, если двигаясь по этой линии можно увидеть все точки сферы S?*

[1] Не следует думать, что задачи 1–6 связаны с осмотром Земли со спутника. Там играют роль инерционное движение спутника, вращение Земли, требуемый угол обзора.

Задача 2. *Какой будет кратчайшая линия осмотра, если дополнительно требовать, чтобы и ее начало и ее конец лежали на сфере S?*

Задача 3. *Какова кратчайшая линия осмотра, если на S обязано лежать только ее начало?*

Задача 4. *Какова кратчайшая из линий осмотра, идущих на постоянной высоте над S?*

Задача 5. *Как изменится идущая на постоянной высоте наиболее короткая линия осмотра, если в ее длину включать вертикальный подъем от S в начале и вертикальный спуск на S в конце?*

Задача 6. *Как изменится эта линия, если начальный подъем учитывать, а спуск – не учитывать?*

1.5. Если в задаче 3 к искомой линии AF добавить начальный радиус OA сферы S, то решение задачи 3 даст ответ на следующее обобщение вопроса Беллмана.

Задача 3а. *Вы находитесь в точке O внутри полупространства, ограниченного плоскостью P, На расстоянии 1 от границы, но не знаете, как по отношению к Вам расположена граница P. Двигаясь по какой наиболее короткой траектории, Вы заведомо выйдете на границу P?*

Поводом к написанию настоящей статьи послужило желание ответить на вопрос задачи 3а, заданный В. В. Макеевым при обсуждении работы [3].

§2. Задачи 1 и 2

2.1. Чтобы представить себе, в каком более узком классе кривых, зависящем от небольшого числа параметров, целесообразно искать решение задачи 1, мы воспользуемся не вполне строгими “правдоподобными” соображениями.

2.2. Начнем со вспомогательного замечания.

Пусть точка P находится вне шара, и пусть из P на сфере S виден геодезический круг, геодезического радиуса r. При этом точка P находится от центра O сферы на расстоянии $1/\cos r$. Если, оставаясь на той же высоте $1/\cos r - 1$ над S точка P сдвинется на малое расстояние ds, то круг видимости на S совершит поворот на угол $d\varphi = \cos r\, ds$ вокруг некоторой оси, проходящей через центр сферы. Обозначим $h = 2\sin r$ пространственный диаметр сферической шапочки, которой является круг видимости радиуса r. При повороте на $d\varphi$ дополнительная площадь $d\sigma$, покрываемая на S кругами видимости, будет равна $d\sigma = h d\varphi = \sin 2r\, ds$. Поэтому отношение $d\sigma/ds$ будет наибольшим при $r = \pi/4$.

Отсюда мы делаем вывод, что искомые линии осмотра проходят на не очень больших и не очень малых высотах над сферой S. Преимущественно – на высотах, по порядку сравнимых с $\sqrt{2}-1$.

2.3. В качестве следующего шага укажем довольно короткую линию осмотра, проходящую именно на постоянной высоте $\sqrt{2}-1$.

Рассмотрим куб с центром O такого размера, что его ребра касаются сферы S. Отсекаемые гранями этого куба шапочки – геодезические круги сферы будут иметь радиусы $\pi/4$. Занумеруем их центры A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 как указано на рис. 3.

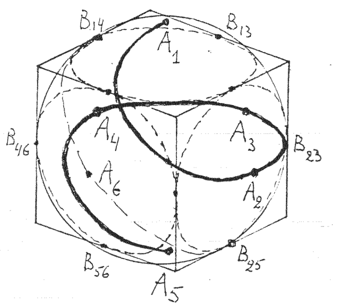

Рис. 3.

Опишем выбираемое движение круга видимости K. Первоначально его центр A разместим в точке A_1. Затем круг поворачивается на сфере вдоль полуокружности $\overset{\frown}{A_1A_2}$. Затем центр A круга K перемещаем по S “прямо”: вдоль большой полуокружности $A_2A_3A_4$. После чего круг K поворачивается вокруг точки B_{45}; при этом его центр A описывает полуокружность $\overset{\frown}{A_4A_5}$. Весь путь центра A изображен жирной линией на рис. 3.

Нетрудно проследить, что при таком движении круг K зачерчивает всю сферу.

Обратимся к строению соответствующей линии осмотра. Она состоит из двух равных частей, идущих над $A_1\overset{\frown}{A_2}A_3$ и над $A_3\overset{\frown}{A_4}A_5$. Рассмотрим только первую из этих частей. Точки линии осмотра, лежащие над A, будем обозначать P.

Когда круг K поворачивался вокруг B_{12}, огибающей проходимых положений круга K служит геодезическая дуга $C = B_{14}B_{25}$. Она изображена пунктиром на рис. 3. Рассмотрим цилиндр, касающийся сферы S вдоль C. При движении A из A_1 в A_2 соответствующий участок P_1P_2 линии осмотра расположен на этом цилиндре.

Рассмотрим еще конус, касающийся S по границе круга K с центром A_5. При движении центра A на участке A_2A_3 соответствующий участок P_2P_3 линии осмотра лежит на этом конусе.

На рис. 4 изображены развертка упомянутых цилиндра и конуса. На развертке указана линия осмотра $P_1P_2P_3$. Ее длина $\frac{1}{2}L = \pi + \pi/\sqrt{2}$. Общая длина линии осмотра $L = \pi(2+\sqrt{2}) \approx 10.726$.

2.4. *Для выбранной линии осмотра области, зачерчиваемые движением K, удобно разделить на следующие четыре части.* "Верхняя шапка" – так мы называем начальный круг видимости. "Пояс" – область, зачерчиваемая кругом (видимости при движении A вдоль $A_2A_3A_4$), когда он касается и верхней и нижней шапок. "Пряжка" – не покрытая предыдущими частями область на S, заключенная между кругами с центрами A_1, A_2, A_5, A_4.

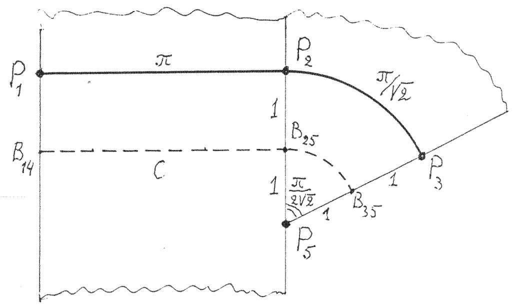

Рис. 4.

2.5. Выбранная в п. 2.3 линия осмотра конечно не является оптимальной для задачи 1. Отказавшись от движения на постоянной высоте над S, длину линии осмотра можно улучшить на следующем пути.

Во-первых, концы линии осмотра целесообразно приподнять над S. При этом радиусы верхней и нижней шапок увеличатся. Это позволит проходить пояс на меньших высотах.

Во-вторых, хотя по симметрии задачи естественно выбирать радиусы верхней и нижней шапок одинаковыми, нет необходимости располагать их центры A_1 и A_5 в диаметрально противоположных точках. (Более того, поскольку пояс стал у́же $\pi/2$ в связи с увеличением шапок, естественно A_1 и A_5 несколько сблизить, что сделает пояс снова шире, хотя и не постоянным по ширине.)

В-третьих, хотя по симметрии задачи естественно выбирать пояс симметричным относительно плоскости OA_1A_5, нет причин, чтобы геодезическая дуга $A_2A_3A_4$, служащая "длиной" пояса, была целой полуокружностью. (Скорее в оптимальном случае она будет значительно короче.)

2.6. Первая, достаточно естественная гипотеза, принимаемая в нашей работе, состоит в том, что для кратчайшей линии осмотра сохранится разбиение покрытия S кругами видимости на верхнюю шапку, нижнюю шапку, пояс и пряжку.

Строение последних можно задавать тремя параметрами r, u, v, указанными на рис. 5.

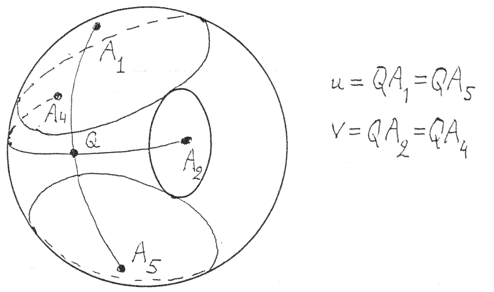

Рис. 5.

2.7. Пряжка, как правило, будет ограничена двумя большими, сравнительно близкими кругами видимости с центрами A_1, A_5 и меньшими кругами с центрами A_2, A_4 (рис. 6). Пусть $C_{14}C_{25}$ – общая касательная геодезическая к кругам с центрами A_1 и A_5.

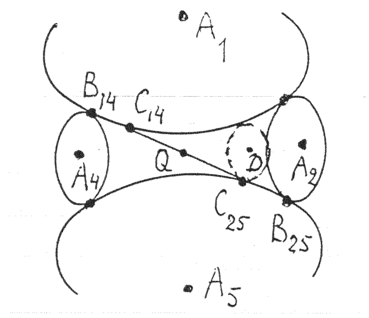

Рис. 6.

Вторая, также довольно естественная гипотеза, принимая в нашей работе, состоит в том, что для участка P_1P_2 линии осмотра круг видимости (центр которого перемещается из A_1 в A_2) изменяется так, что он все время касается сначала геодезической $C = C_{14}C_{25}$, а затем – нижней шапки на участке $C_{25}\overset{\frown}{}B_{35}$.

2.8. Пусть r, u фиксированы. При этом фиксировано и $T = |C_{14}C_{25}|$. Обсудим, где при этом целесообразно размещать точку A_2. Отметим вспомогательную точку D – центр круга на S, касающегося верхней и нижней шапок, причем нижней – именно в точке C_{25} (рис. 6). Обозначим δ геодезический радиус этого круга.

Рассмотрим цилиндр, касающийся сферы S по линии $C_{14}C_{25}$, и конус с вершиной P_5, касающийся S по участку $C_{25}\overset{\frown}{}B_{35}$ границы нижней шапки. Весь участок P_1P_3 линии осмотра обязан лежать на этом цилиндре и этом конусе. Их совместная развертка изображена на рис. 7. При этом из сферического треугольника QA_5C_{25} имеем

$$T = |C_{14}C_{25}| = 2\arccos\frac{\cos u}{\cos r},$$

$$\alpha = \angle QA_5C_{25} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} u},$$

$$|C_{25}\overset{\frown}{}B_{35}| = (\pi - \alpha)\sin r.$$

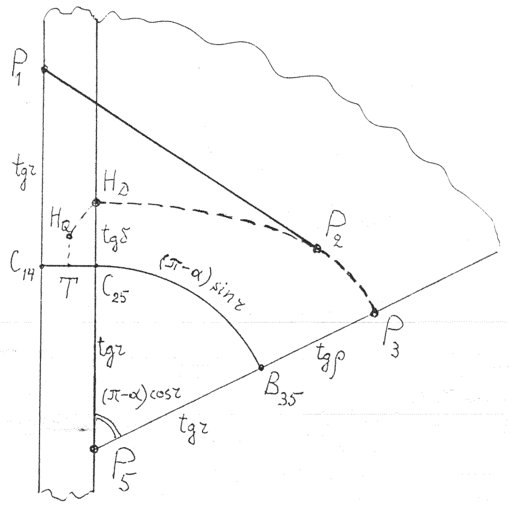

Рис. 7.

Положение точек P_1, P_5, P_3 на развертке фиксировано. На рис. 7 через ρ обозначен радиус круга видимости с центром A_3:

$$\rho = \pi - (u + r).$$

На рис. 7 отмечена также точка H_Q, лежащая над Q, и точка H_D, лежащая над D. Пунктирная линия на участке $H_Q H_D$ идет над центрами кругов, касающихся верхней шапки и кратчайшей QC_{25}, а на участке $H_D P_3$ – над центрами кругов, касающихся верхней и нижней шапок.

Линия осмотра на участке $P_1 P_3$ на развертке должна быть возможно короче. Ее круги видимости заведомо будут покрывать нужную часть пряжки и пояса, если на развертке эта линия не опустится ниже пунктирной линии $H_Q H_D P_3$.[2] Поэтому линию осмотра целесообразно составить из касательной $P_1 P_2$, проведенной из P_1 к пунктирной линии $H_D P_3$, и из участка $P_2 P_3$ этой пунктирной линии.

2.9. Выведем уравнение линии $H_D P_3$ в полярных координатах

[2]В п. 2.14 мы убедимся, что требование прохождения линии осмотра на развертке не ниже прилегающего к P_3 участка линии $H_D P_3$ не было напрасным, чтобы круги видимости покрывали сферу S без просветов.

(l, φ), отсчитывая полярный угол φ по часовой стрелке от оси $P_5 H_D$ (рис. 8).

Из треугольника QAA_5 (рис. 9) имеем

$$\gamma(\varphi) = \alpha + \frac{\varphi \operatorname{tg} r}{\sin r} = \alpha + \frac{\varphi}{\cos r},$$
$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg}(r + z(\varphi)) \cos \gamma(\varphi),$$
$$l(\varphi) = \operatorname{tg} r + \operatorname{tg} z(\varphi), \qquad \frac{dl}{dz} = \frac{1}{\cos^2 z(\varphi)}.$$

Для удобства вычислений введем $\theta(\varphi) = \gamma(\varphi) - \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\theta(\varphi) = \alpha - \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{\cos r}, \qquad \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1}{\cos r},$$
$$\operatorname{tg}(r + z(\varphi) - \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg}(r + z(\varphi)) = -\frac{\cos \gamma(\varphi)}{\operatorname{tg} u} = \frac{\sin \theta(\varphi)}{\operatorname{tg} u},$$
$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{\sin^2(r + z(\varphi)) \cos \theta(\varphi)}{\operatorname{tg} u},$$
$$z(\varphi) = \frac{\pi}{2} - r + \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \theta(\varphi)}{\operatorname{tg} u},$$
$$k(\varphi) = \frac{1}{l} \frac{dl}{d\varphi} = \frac{1}{l} \frac{dl}{dz} \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\sin^2(r + z(\varphi)) \cos \theta(\varphi)}{l(\varphi) \cos^2 z(\varphi) \operatorname{tg} u \cos r},$$
$$l(\varphi) = \operatorname{tg} r + \operatorname{tg} z(\varphi).$$

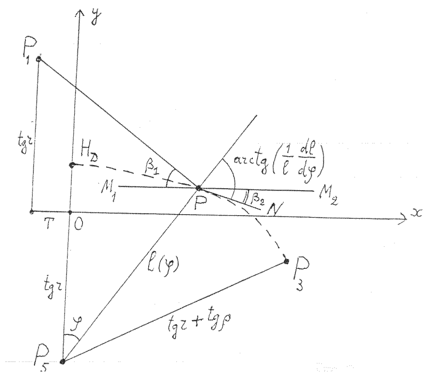

Рис. 8.

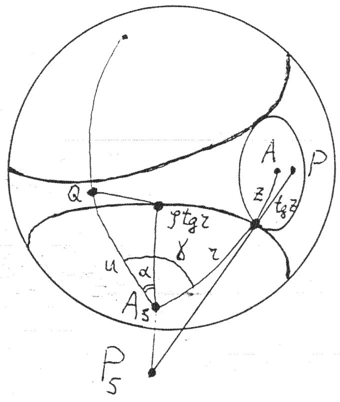

Рис. 9.

2.10. Пусть P – точка на линии $H_D P_3$ и прямая $M_1 P M_2$ перпендикулярна оси $P_5 O$, а PN – касательная к $H_D P_3$ (см. рис. 8). Тогда

$$\beta_1(\varphi) = \angle P_1 P M_1 = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\operatorname{tg} r - l(\varphi)\cos\varphi}{T + l(\varphi)\sin\varphi}\right),$$
$$\beta_2(\varphi) = \angle NPM_2 = \varphi - \operatorname{arc\,tg} k(\varphi).$$

В точке P_2 должно выполняться равенство

$$\beta_1(\varphi) = \beta_2(\varphi).$$

При фиксированных r, u корень φ_2 этого уравнения единственен, лежит в интервале $0 < \varphi_2 < q = (\pi - \alpha)\cos r$. Его численный поиск легко осуществляется методом дихотомии: пусть $\underline{\varphi} < \varphi < \overline{\varphi}$. Находим $\beta_1(\frac{1}{2}(\underline{\varphi} + \overline{\varphi}))$ и $\beta_2(\frac{1}{2}(\underline{\varphi} + \overline{\varphi}))$. Если $\beta_1 > \beta_2$, заменяем $\underline{\varphi}$ на $\frac{1}{2}(\underline{\varphi} + \overline{\varphi})$, а если $\beta_1 < \beta_2$, заменяем $\overline{\varphi}$ на $\frac{1}{2}(\underline{\varphi} + \overline{\varphi})$ и повторяем процесс.

2.11. Пусть корень φ_2 найден. Тогда для общей длины L линии осмотра имеем $L = 2(L_1 + L_2)$, где

$$L_1 = |P_1 P_2| = \sqrt{(2\operatorname{tg} r - l(\varphi_2)\cos\varphi_2)^2 + (T + l(\varphi_2)\sin\varphi_2)^2},$$

$$L = |\overset{\frown}{P_2 P_3}| = \int\limits_{\varphi_2}^{(\pi-\alpha)\cos r} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi = \int\limits_{\varphi_2}^{q} l(\varphi)\sqrt{1 + (k(\varphi_2))^2}\, d\varphi.$$

2.12. Компьютерный анализ функции $L(r, u)$ был проведен во всей области $\frac{\pi}{4} < r \leqslant u < \frac{\pi}{2}$. Значения интеграла L_2 определялись по формуле Гаусса с 6 узлами. Анализ показал, что функция $L(r, u)$ имеет единственную точку минимума: $r = u \approx 1.1421$. При этом $\varphi_2 \approx 1.0871768$, чему соответствует $v \approx 2.65558$. Минимальное значение $L \approx 9.576778$.

2.13. Таким образом, решением задачи 1 мы считаем линию осмотра, половина $P_1P_2P_3$ которой изображена на рис. 10. Вторая ее часть $P_3P_4P_5$ симметрична изображенной относительно прямой QOP_3.

2.14. Замечание. Была ли необходимость в том, чтобы линия видимости на развертке рис. 7 шла не ниже пунктирной линии $H_QH_DP_3$? Рассмотрим этот вопрос для конкретного случая выбранных значений $r = u \simeq 1.1421$, $\varphi_2 = 1.0871768$. В этом случае развертка имеет вид рис. 11. Угол

$$\lambda = \angle P_5P_1P_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{l(\varphi_2) \sin\varphi_2}{2 \operatorname{tg} r - l(\varphi_2)\cos\varphi_2} \approx 0.78243.$$

Пусть Π – плоскость, касательная к S в точке Q (рис. 12). При движении точки P по выбранной линии осмотра скорость V в начальной точке P_1 лежит в плоскости Π и направлена под углом λ к лучу P_1Q. При этом скорость W движения точки A по сфере S в начальной точке A_1

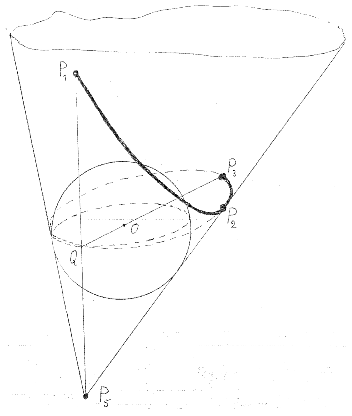

Рис. 10.

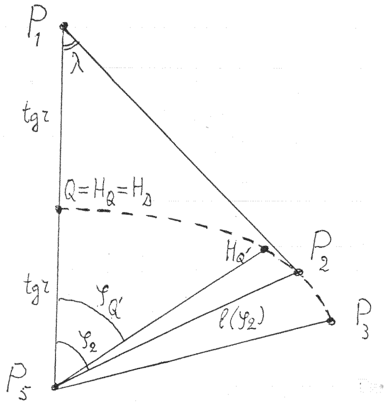

Рис. 11.

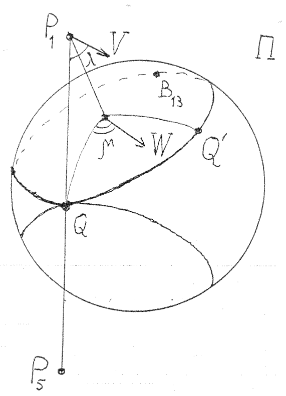

Рис. 12.

образует с геодезическим радиусом A_1Q некоторый угол μ. Найдем μ. В трехгранном угле, образованном лучами P_1Q, P_1V, P_1A_1 двугранный угол при ребре P_1Q равен $\pi/2$, при ребре P_1A_1 равен μ, а плоские углы: $\angle QP_1V = \lambda$, $\angle QP_1A_1 = \frac{\pi}{2} - r$. Отсюда

$$\operatorname{tg}\lambda = \sin(\frac{\pi}{2} - r)\operatorname{tg}\mu;$$

что дает

$$\mu = \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\lambda}{\cos r} \approx 1.17473.$$

При начальном движении круга видимости его центр сдвигается из A_1 в направлении W, а его радиус изменяется так, что одним краем круг видимости "вылезает" из верхней шапки в точке Q. Тогда другой край круга видимости "вылезает" из верхней шапки в точке Q' такой, что радиус A_1Q' симметричен радиусу A_1Q относительно направления W^1. При этом точка Q' отстоит от Q вдоль границы верхней шапки на длину $2\mu \sin r$. Все "внешние" точки края верхней шапки на его участке $Q'B_{13}$ остаются непокрытыми. Поэтому при всех

$$\varphi > \varphi_{Q'} = \frac{2\mu \sin r}{\operatorname{tg} r} \approx 0.9766$$

линия осмотра $P_1\widehat{P_2}P_3$ на развертке рис. 11 действительно обязана идти не ниже участка $H_{Q'}P_3$ пунктирной линии H_DP_3.

2.15. Обратимся теперь к задаче 2.

Пусть линия осмотра начинается в точке A_1 на S. Очевидно этой линии целесообразно сразу трансверсально подниматься над S. При этом малый начальный участок A_1P линии будет лежать внутри касательного к S конуса с вершиной P (рис. 13). До тех пор, пока это будет так, круг видимости из последней точки покрывает собою все круги видимости из предшествующих P точек линии осмотра. Радиус же круга видимости из самой точки P зависит только от ее высоты над S. Поэтому на некотором первоначальном участке A_1P_1 кратчайшая линия осмотра обязана представлять собой прямой вертикальный подъем из точки A_1.

Но в некоторой точке P_1 придется сделать поворот. При этом достаточно крутой: скорость V_1 дальнейшего движения из P_1 (рис. 13) будет направлена вне изображенного пунктиром на рис. 13 продолжения касательного конуса.

По аналогичным соображениям заканчиваться кратчайшая линия осмотра в условиях задачи 2 должна также вертикальным спуском на S.

Поэтому для решения задачи 2 можно пользоваться всеми формулами п. 11–16. Только на этот раз предстоит минимизировать функцию

$$L(r,u) = 2(L_1(r,y) + L_2(r,u) + \frac{1}{\cos r} - 1).$$

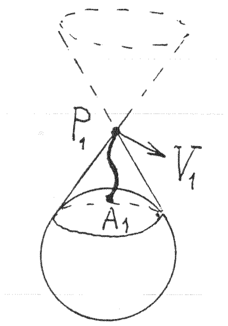

Рис. 13.

Здесь $2\left(\frac{1}{\cos r}-1\right)$ – длина участков вертикального подъема и спуска.

2.16. Компьютерный анализ показал, что новая функция $L(r,u)$ также имеет единственную точку минимума: $r \approx 0.8804$, $u \approx 1.4459$. При этом $\varphi_2 \approx 0.280546$. Последнему соответствует[3] $v \approx 1.86083$. Минимальное значение $L \approx 11.477734$.

Примерный вид не само́й кратчайшей линии осмотра, а проекции $A_1A_2A_3$ ее участка $P_1P_2P_3$ на сферу S изображен на рис. 14 жирной линией. Здесь $r = A_1B_1 = A_5B_5$, $u = QA_1 = QA_5$, точка $M = C_{14}$.

Рис. 8 при найденных r, u принимает вид рис. 15. На этой развертке цилиндра и конуса хорошо виден характер участка $P_1P_2P_3$ найденной кратчайшей линии осмотра $A_1P_1P_2P_3P_4P_5A_5$ для задачи 2.

2.17. Замечание. Проверим, аналогично п. 2.14, необходимость для линии P_1P_3 на развертке рис. 15 огибать сверху пунктирную линию H_DP_3. На этот раз роль точки Q (рис. 12) будет играть

[3] Значение v находится из прямоугольного сферического треугольника A_5QA_2 со сторонами u, $r + z(\varphi_2) \approx 1.60643$.

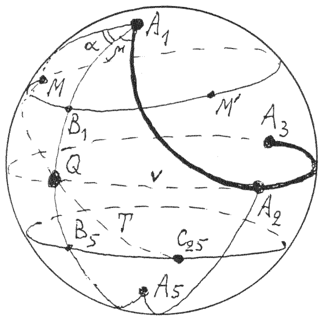

Рис. 14.

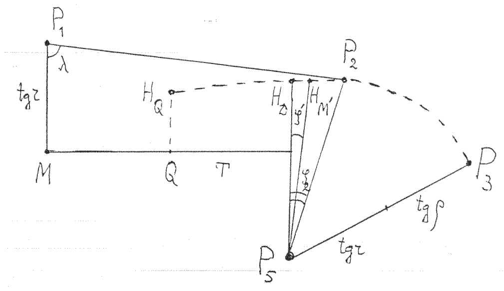

Рис. 15.

точка $M = C_{14}$,

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{T + l(\varphi_2)\sin\varphi_2}{2\operatorname{tg} r - l(\varphi_2)\cos\varphi_2} \approx 8.22165,$$

$$\mu = \operatorname{arg\,tg}\frac{\operatorname{tg}\lambda}{\cos r} \approx 1.49349,$$

$$\alpha = \arccos\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} u} \approx 1.4182.$$

Аналогом точки Q' служит точка M' (см. рис. 14). На рис. 15 через $H_{M'}$ обозначена точка, лежащая над центром круга, касающегося верхней и нижней шапок, причем верхней в точке M'. При всех

$$\varphi > \varphi' = \varphi_{M'} = \frac{(2\mu - 2\alpha)\sin r}{\operatorname{tg} r} \approx 0.096$$

линия осмотра $P_1P_2P_3$ на развертке рис. 15 действительно обязана идти не ниже участка $H_{M'}P_3$ пунктирной линии H_DP_3.

§3. Задачи 3 и 3а

3.1. Линию осмотра характеризуем тремя параметрами: радиусом r_1 верхней шапки, радиусом r_2 нижней шапки и углом w, который на сфере S общая (внутренняя) касательная этих шапок образует с кратчайшей A_1A_5, соединяющей центры этих шапок (рис. 16). Значения r_1, r_2, w должны лежать в пределах

$$\frac{\pi}{4} \leqslant r_1 \leqslant r_2 < w \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

При обозначениях, ясных из рис. 16, имеем

$$T_1 = \arcsin\frac{\operatorname{tg} r_1}{\operatorname{tg} w}, \quad T_2 = \arcsin\frac{\operatorname{tg} r_2}{\operatorname{tg} w},$$
$$u_1 = \arcsin\frac{\sin r_1}{\sin w}, \quad u_2 = \arcsin\frac{\sin r_2}{\sin w},$$
$$\alpha_1 = \arcsin\frac{\cos w}{\cos r_1}, \quad \alpha_2 = \arcsin\frac{\cos w}{\cos r_2}.$$

Обозначим

$$T = T_1 + T_2, \quad u = u_1 + u_2, \quad q_1 = (\pi - \alpha_1)\cos r_1,$$
$$q_2 = (\pi - \alpha_2)\cos r_2, \quad \rho = \pi - \frac{r_1 + r_2 + u}{2}.$$

Значение ρ – радиус круга, касающегося верхней и нижней шапок и имеющего центр A_3 на замкнутой геодезической A_1A_5, на той ее части, которая дополняет дугу A_1QA_5 (рис. 16).

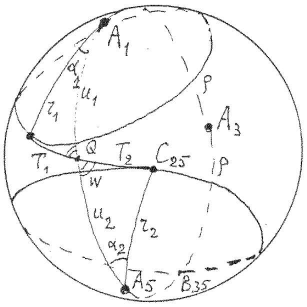

Рис. 16.

3.2. Линия осмотра на участке P_1P_3 должна идти сначала на цилиндре, касающемся сферы S по линии $C_{14}C_{25}$, а затем – на конусе с вершиной P_5, касающемся сферы по дуге $C_{23}B_{35}$ (рис. 16) края нижней шапки.

Рассмотрим на том же конусе (см. ниже на рис. 18 его развертку) линию, идущую над центрами Z тех кругов, которые касаются верхней и нижней шапок. Геодезические радиусы этих кругов обозначены z (рис. 17).

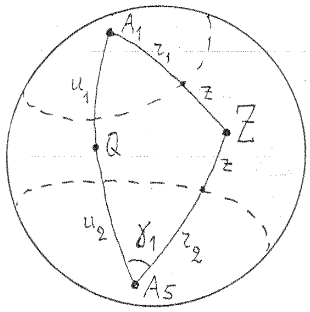

Рис. 17.

Из треугольника A_1ZA_5 легко выразить $\operatorname{tg} z$ как функцию угла γ_1. Имеем

$$\cos(r_1 + z) = \cos(r_2 + z)\cos u + \sin(r_2 + z)\sin u \cos\gamma_1,$$

откуда

$$\operatorname{tg} z = \frac{A_1}{B_1},$$

где

$$A_1 = \cos r_1 - \cos r_2 \cos u - \sin r_2 \sin u \cos\gamma_1,$$
$$B_1 = \sin r_1 - \sin r_2 \cos u + \cos r_2 \sin u \cos\gamma_1.$$

На совместной развертке цилиндра и конуса (рис. 18) идущая над точками Z линия (она изображена на рис. 18 пунктиром) в полярных координатах (l, φ) будет иметь уравнение

$$l_1(\varphi) = \operatorname{tg} r_2 + \operatorname{tg} z(\gamma_1), \quad \gamma_1 = \alpha_2 + \frac{\varphi}{\cos r_2}.$$

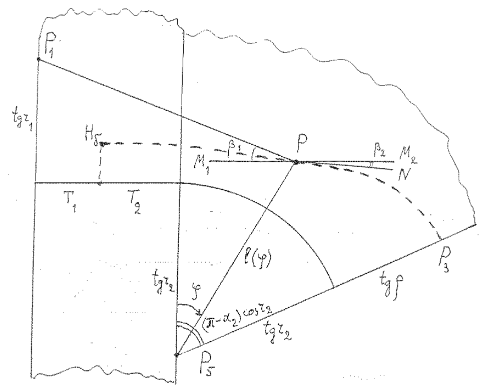

Рис. 18.

При этом

$$\frac{dA_1}{d\varphi} = \operatorname{tg} r_2 \sin u \sin \gamma_1, \qquad \frac{dB}{d\varphi} = -\sin u \sin \gamma_1.$$

Введем функцию

$$k_1(\varphi) = \frac{1}{l_1}\frac{dl_1}{d\varphi} = \frac{\sin u \sin \gamma_1}{B_1}.$$

На рис. 18, аналогичном рис. 8, обозначено $\delta = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(u - r_1 - r_2)$. Участок P_1P_3 линии осмотра должен на развертке идти не ниже пунктирной линии HP_3. Участок P_1P_3 будет наиболее коротким, если состоит из прямолинейного участка P_1P_2, касающегося в точке P_2 линии HP_3, и участка P_2P_3 самой линии HP_3. При этом точка P_2 соответствует такому значению φ_2 угла φ, при этом (см. рис. 18)

$$\beta_1(\varphi) = \beta_2(\varphi),$$

где

$$\beta_1(\varphi) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_2 - l_1(\varphi)\cos\varphi}{T + l_1(\varphi)\sin\varphi},$$
$$\beta_2(\varphi) = \varphi - \operatorname{arc\,tg} k_1(\varphi).$$

Пусть значение φ_2 корня уравнения $\beta_1(\varphi) = \beta_2(\varphi)$, $0 < \varphi < q_2$

найдено. Тогда длины участков

$$|P_1P_2| = \sqrt{(\operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_2 - l_1(\varphi_2)\cos\varphi_2)^2 + (T + l_1(\varphi_2)\sin\varphi_2)^2},$$

$$|P_2\overset{\frown}{}P_3| = \int\limits_{\varphi_2}^{q_2} l(\varphi)\sqrt{1+(k_1(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

3.3. Совершенно аналогично для вычисления длины участка линии осмотра P_5P_3 будем иметь формулы

$$l_2(\varphi) = \operatorname{tg} r_1 + \frac{A_2}{B_2}, \quad \gamma_2 = \alpha_1 + \frac{\varphi}{\cos r_1},$$
$$A_2 = \cos r_2 - \cos r_1 \cos u - \sin r_1 \sin u \cos\gamma_2,$$
$$B_2 = \sin r_2 - \sin r_1 \cos u + \cos r_1 \sin u \cos\gamma_2,$$
$$k_2(\varphi) = \frac{\sin u \sin\gamma_2}{B_2},$$
$$\beta_3(\varphi) = \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_2 - l_2(\varphi)\cos\varphi}{T + l_2(\varphi)\sin\varphi},$$
$$\beta_4(\varphi) = \varphi - \operatorname{arc\,tg} k_2(\varphi).$$

После нахождения корня φ_4 уравнения $\beta_3(\varphi) = \beta_4(\varphi)$, $0 < \varphi < q_1$ получаем положение точки P_4 и длины

$$|P_5P_4| = \sqrt{(\operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_2 - l_2(\varphi_4)\cos\varphi_4)^2 + (T + l_2(\varphi_4)\sin\varphi_4)^2},$$

$$|P_4\overset{\frown}{}P_3| = \int\limits_{\varphi_4}^{q_1} l_2(\varphi)\sqrt{1+(k_2(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

3.4. Программа вычисления на компьютере значений функции

$$L(r_1, r_2, w) = \Big(\frac{1}{\cos r_1} - 1\Big) + |P_1P_2| + |P_2\overset{\frown}{}P_3| + |P_3\overset{\frown}{}P_4| + |P_4P_5|,$$

минимизации которой требует задача 3, была составлена Т. В. Хачатуровой. Корни φ_2, φ_4, как и в п. 2.10, находились дихотомией. Интегралы вычислялись по формуле Гаусса с шестью узлами [4]. Компьютерный анализ показал, что эта функция во всей области

$$\frac{\pi}{4} \leqslant r_1 \leqslant r_2 < w \leqslant \frac{\pi}{2}$$

достигает минимума в единственной точке

$$r_1 \approx 0.9376, \quad r_2 \approx 1.360, \quad w = 1.740$$

(верность последнего знака ± 1). При этом

$$\varphi_2 \approx 0.533935, \quad \varphi_4 \approx 0.905008.$$

Наконец, минимальное значение $L \approx 10.605428$.

3.5. На рис. 19 сделана попытка изобразить примерный вид (на 1 более длинной ввиду присоединения начального радиуса OA_1) пространственной кривой, служащей решением задачи 3а. Через $P_{3/2}$ и $P_{9/2}$ обозначены места перехода линии с цилиндра на конусы.

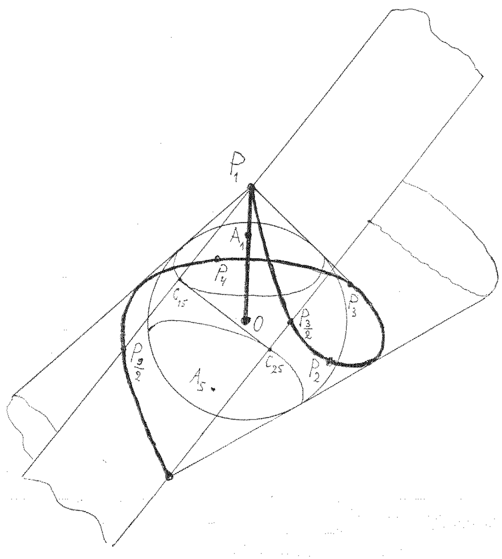

Рис. 19.

§4. Задачи 4, 5, 6

4.1. Для задачи 4 постоянное значение r геодезического радиуса круга видимости должно лежать в пределах $\pi/4 \leqslant r \leqslant \pi/3$. Только тогда линия осмотра будет иметь строение, отвечающее

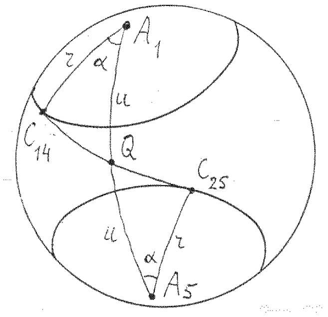

Рис. 20.

принятой в пункте 2.6 гипотезе. Для каждого из таких r будем иметь (рис. 20)

$$u = |QA_1| = |QA_5| = \pi - 2r, \quad T = |C_{14}C_{25}| = 2\operatorname{arc\,cos}\frac{\cos u}{\cos r},$$
$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} u}.$$

При этом длина идущей на постоянной высоте $\sec r - 1$ над S линии осмотра будет

$$L_4(r) = 2T + 4(\pi - \alpha)\sin r.$$

4.2. Компьютерный анализ показывает, что на участке $\pi/4 \leqslant r \leqslant \pi/3$ функция $L_4(r)$ достигает минимума в единственной точке $r \approx 0.9076$. При этом минимальное значение $L_4 \approx 10.642872$.

4.3. Для задач 5 и 6 соответственно

$$L_5(r) = 2T + 4(\pi - \alpha)\sin r + 4(\frac{1}{\cos r} - 1),$$
$$L_6(r) = 2T + 4(\pi - \alpha)\sin r + (\frac{1}{\cos r} - 1).$$

Обе эти функции возрастают на участке $\pi/4 \leqslant r \leqslant \pi/3$. Поэтому решением задач 5 и 6 оказывается отвечающая $r = \pi/4$ уже рассматривавшаяся в пункте 2.3 линия осмотра с присоединением к ней начального подъема и конечного спуска (задача 5) или только начального подъема (задача 6). При этом минимальные длины $L_5 \approx 11.5545$, $L_2 \approx 11.1403$.

4.4. Замечание. Можно подумать, что в задачах 5 и 6 целесообразно отказаться от гипотез п. 2.6 и допустить меньшие значения $\pi/5 \leqslant r < \pi/4$. Но линия движения по сфере S центра A круга видимости такого радиуса r будет вынуждена делать на сфере лишний "полувиток". Действительно, при таком r линия движения центра A будет иметь на сфере S следующее строение. Сначала – полуокружность $\overset{\frown}{A_1A_2}$ (геодезического) радиуса r с центром в некоторой точке B_{12} на границе начального положения круга. Затем – полуокружность $\overset{\frown}{A_2A_3}$ радиуса $2r$ с центром A_1. Затем – полуокружность $\overset{\frown}{A_3A_4}$ радиуса $3r$ снова с центром B_{12}. И наконец – полуокружность $\overset{\frown}{A_4A_5}$ радиуса $4r$ вновь с центром A_1. При этом, например, для задачи 5, будет

$$L_5(r) = \frac{\pi}{\cos r}(\sin r + \sin 2r + \sin 3r + \sin 4r) + 2(\frac{1}{\cos r} - 1).$$

Но эта функция убывает на $\pi/5 \leqslant r \leqslant \pi/4$, и мы вновь приходим к значению $r = \pi/4$. (Тем более это верно для задачи 6).

Литература

1. R. Bellman, *Minimisation problem.* — Bull. Amer. Math. Soc. **62** (1956), 270.
2. J. R. Isbell, *An optimal search pattern.* — Naval Research Logistics Quarterly **4** (1957), p. 357–359.
3. В. А. Залгаллер, *Обсуждение одного вопроса Беллмана.* — Деп. в ВИНИТИ. (1992), №849Б, 39 с.
4. А. С. Кронрод, *Узлы и веса квадратурных формул.* Наука, М. (1964).

Zalgaller V. A. Shortest inspection curves for a sphere.

What is the form of the shortest curve C going outside the unit sphere S in $\mathbb{R}^3$ such that passing along C we can see all points of S from outside? How will the form of C change if we require that C have one of its (or both) endpoints on S? A solution to the latter problem also answers the following question. You are in a half-space at a unit distance from the boundary plane P, but do not know where P is. What is the shortest space curve C such that going along C you certainly will come to P? Geometric arguments are given suggesting that the required curves should be looked for in certain classes depending on several parameters. A computer analysis yields the best curves in the classes. Some other questions are solved in a similar way.

E-mail: zalg@ wisdom.weizmann.ac.il

Поступило 25 декабря 2001 г.