Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

В. А. Залгаллер

ОБСУЖДЕНИЕ ОДНОГО ВОПРОСА БЕЛЛМАНА

§1. Введение

1.1. В книге "Динамическое программирование" в качестве проблемы 7 к главе IV (см. [1, с. 162]) Р. Беллман, со ссылкой на О. Гросса, ставит вопрос, который он более полно сформулировал в совсем короткой заметке [2]. Приведем ее перевод, чуть изменив перевод в РЖМат. 1960, No. 2, 2023.

"Даны область ω и случайная точка O внутри нее. Определить форму траектории движения из O, которая: а) минимизирует среднюю длину пути, проходимого до достижения границы (при разных положениях O и разном выборе начального направления движения) или б) минимизирует максимальную длину пути до достижения границы. Рассмотреть частные случаи: а) Ω – полоса между двумя параллельными прямыми с известным расстоянием 1 между ними, б) Ω – полуплоскость, и известно расстояние 1 до точки O до граничной прямой."

1.2. Для случая полуплоскости кратчайшая траектория, гарантирующая выход на край при любом начальном направлении движения, указана Исбеллом [3]. Как написал Беллман в реферате Math. Rev. 1958, 19-820, Исбелл решает задачу на инженерном уровне.

Для случая полосы кратчайшая траектория, гарантирующая выход на край при любом положении точки O в полосе и любом начальном направлении, найдена В. А. Залгаллером [4]. Это же решение независимо, через много лет получено Адхикари и Питменом.

В [6, с. 24] упоминается как нерешенный вопрос о кратчайшей траектории, гарантирующей выход на границу, когда Ω – прямоугольник ширины 1. Однако, как заметил В. В. Макеев, можно доказать, что такая кривая будет прямолинейным отрезком, равным по длине диагонали прямоугольника, пока длина этой диагонали меньше, чем у найденной в [4] лучшей траектории для полосы.

В. В. Макеев задал автору более интересный вопрос: какова кратчайшая пространственная траектория, гарантирующая выход на границу, если Ω – полупространство, а точка O находится на расстоянии 1 от граничной плоскости? Ответ на этот вопрос получен. Он изложен в работе [9].

1.3. Цель настоящей работы: 1) Указать для случая полуплоскости траекторию, минимизирующую математическое ожидание длины пути, пройденного до выхода на край. 2) Хотя бы с не вполне строгой аргументацией указать траекторию, которая в случае полосы минимизирует математическое ожидание длины пути до выхода на край при равномерном распределении возможных положений точки O на поперечнике полосы и равновероятности начальных направлений движения. В п. 2.4 и §10 обсуждена еще одна тактика.

§2. Случай полуплоскости

2.1. Когда мы находимся в точке O, то роль края полосы могут играть все касательные прямые этой окружности (с равномерным распределением точки касания по длине дуги единичной окружности S с центром O). Будем искать кратчайшую траекторию, гарантирующую встречу со всеми этими касательными. Естественно начать с движения по некоторому радиусу OA. Следовать затем примитивной тактике – обходить всю окружность S (рис. 1,а) очевидно невыгодно. Явно лучше траектория (рис. 1,б), также обеспечивающая встречу со всеми касательными к S. Но, как легко заметить, целесообразнее, пройдя OA, продолжить движение и несколько выйти за пределы окружности. Если мы осуществим такой выход, продолжив радиус OA до отрезка OB, то, как легко проверить, путь, изображенный на рис. 1,в, будет при малых α короче, чем путь на рис. 1,б.
Длина $L(\alpha)$ пусти рис. 1,в:

$$L(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\,\alpha + \left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right) + 1.$$

Из уравнения $dL/d\alpha = 0$ находим, что минимум $L(\alpha)$ достигается при $\alpha = \pi/6$. Это и есть решение Исбелла. При этом “прямой ход” $|OB| = 2/\sqrt{3} \approx 1.1547$; общая длина кратчайшей траектории $L \approx 6.92$.

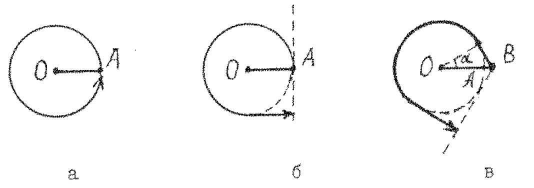

Рис. 1.

2.2. Почему вне окружности S целесообразно сначала удаляться, притом именно прямо от центра, а затем, сделав кругой перелом, вернуться по касательной к окружности?

Если при движении точки X по выбранному пути она после точки A отрывается от S трансверсально, то первоначально путь AX не выходит за пределы угла $P_X X Q_X$ между двумя касательными к S, проведенными из точки X^X (рис. 2.а)

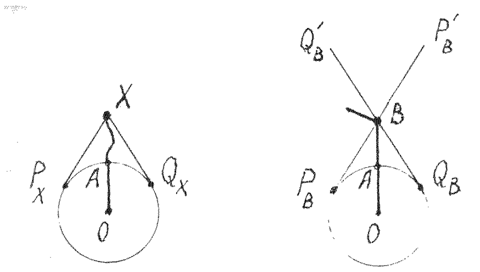

Рис. 2.

Но мера множества касательных к S прямых, пересеченных путем AX, равна дуге $P_X Q_X$ и зависит только от высоты $h = |OX| - |OA|$ "подъема" точки X над окружностью S. Поэтому, во-первых, путь AX на этом участке целесообразно взять прямо продолжающим радиус OA и, во-вторых, если в некоторой точке B делать поворот (а рано или поздно это необходимо), то его надо делать столь круто, чтобы после точки B оказаться в угле $P_B B Q_B'$ (рис. 2,б). (Мы для определенности считаем, что поворот производится влево.)

Затем (и это мы строго не обосновываем) естественно обходить окружность S по пути, вдоль которого радиус-вектор OX движущейся точки X поворачивается монотонно, и закончить путь, выйдя на луч BQ_B.

Теперь вступают в силу соображения классического вариационного исчисления. Из них следует: что вне S участки должны быть прямолинейными отрезками, что поворот пути возможен только на окружности S, что подход к окружности S и сход с нее должны быть по касательным, и что подход к лучу BQ_B должен быть ортогональным к этому лучу. Это однозначно ведет к пути рис. 1,в. Остается, как это было сделано в п. 2.1, выбрать параметр α.

2.3. При поиске траектории, которая минимизирует математическое ожидание длины пути, проходимого до выхода на край полуплоскости, остаются в силе все соображения п. 2.2. Остается выбрать соответствующее значение α для траекторий рис. 1,в.

На участке OA вероятность $P(X)$ выйти на край на отрезке OX равна нулю.

На участке AB примем за параметр угол β (рис. 3.а); β изменяется от 0 до α. При этом $P(\beta) = \beta/\pi$, $\pi dP = d\beta$; пройденный путь $l(\beta) = 1/\cos\beta$. Поэтому для математического ожидания $M(AB)$ имеем

$$2\pi M(AB) = \int\limits_0^\alpha \frac{2d\beta}{\cos\beta} = 2\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right).$$

На участке BP_B вероятность выйти на край равна нулю.

На участке P_BY^B, рис. 3,б, за параметр примем угол γ; он изменяется от 0 до $3/2\pi - 2\alpha$. На этот раз $2\pi dP = d\gamma$;

$$l(\gamma) = \frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\,\alpha + \gamma;$$

$$2\pi M(P_BY) = \int\limits_0^{3/2\pi - 2\alpha} \left(\frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\,\alpha + \gamma\right) d\gamma =$$
$$= \left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right)\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right)^2.$$

На участке YZ (см. рис. 3,б), за параметр примем угол λ; он изменяется от O до $\pi/4$. На этот раз

$$\pi dP = d\lambda; \quad l(\gamma) = \frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\,\alpha + \frac{3}{2}\pi - \alpha + \operatorname{tg}\,\lambda;$$

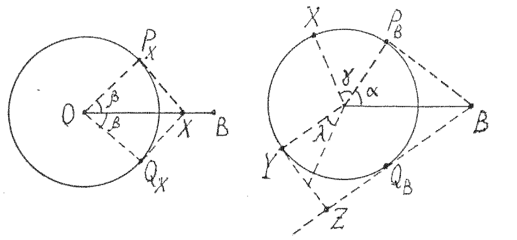

Рис. 3.

$$2\pi M(YZ) = \int\limits_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos\alpha} + \text{tg } \alpha + \frac{3}{2}\pi - \alpha + \text{tg } \lambda\right) d\lambda =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right) + \ln 2.$$

Общее значение $M(\alpha) = M(AB) + M(P_BY) + M(YZ)$ достигает минимума при α, удовлетворяющее уравнению $dM/d\alpha = 0$, которое имеет вид

$$2\alpha - \text{tg } \alpha + \frac{(\pi-\alpha)(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha} - \frac{5}{2}\pi = 0.$$

Откуда $\alpha \approx 0.7337$. Траектория (рис. 1,в) при таком угле α минимизирует математическое ожидание длины пути до выхода на край полуплоскости. При этом “прямой ход” $|OB| \approx 1.346$, а $M \approx 4.55$.

2.4. Рассмотрим еще “тактику нетерпения”. Под ней мы понимаем выбор траектории, при которой в каждом уже достигнутом положении направление дальнейшего движения выбирается таким, чтобы максимизировать dP/dl, где $P(l)$ – вероятность выхода на край, а l – длина проходимого пути. Иными словами, направление $\overline{dl}$ берется таким, чтобы на ближайший элемент пути dl пересечь возможно большую меру ранее не пересеченных касательных к S. Нетрудно проверить, что при такой тактике “прямой ход” будет еще увеличен до $|OB| = \sqrt{2} \approx 1.4142$, а дальнейшее движение будет вестись по эвольвенте окружности S, рис. 4. Эта тактика очевидно плоха.

§3. Случай полосы

3.1. Кратчайшая траектория, гарантирующая выход на край по-

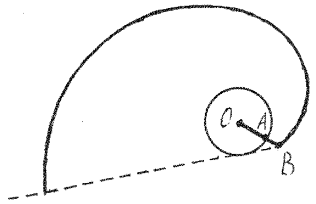

Рис. 4.

лосы при любом начале O внутри полосы и любом начальном направлении движения имеет, согласно [4] или [5], вид $OABDE_1E_2F$, изображенный на рис. 5. Здесь OA, BD, DE_1, E_2F – отрезки; $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{E_1E_2}$ – дуги радиуса 1, соответственно с центрами F и O; перелом только в точке D.

3.2. Форма траекторий такого типа вполне определяется значениями двух параметров $a = |OA|$, $\varphi = \angle AFB$ и требованием, чирбы точка F имела координаты $(a, 1)$, а расстояние от точки D до прямой OF равнялось 1.

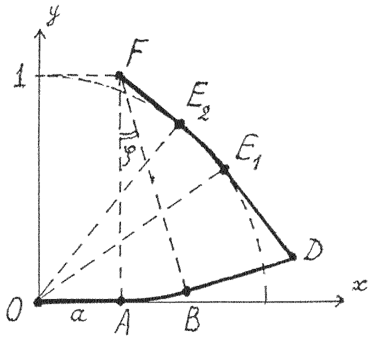

Рис. 5.

В случае кратчайшей траектории $a \approx 0.2985$, $\varphi \approx 0.3188$; при этих значениях траектория симметрична: не только $OA = E_2F$, но и $\angle AFB = \angle E_1OB$, $BD = DE_1$. При других a, φ такая симметрия может исчезать.

3.3. Перейдем к вопросу о траектории, минимизирующей математическое ожидание длины пути до выхода на край.

Допустим, что мы уже совершили "прямой ход" $OD = l \geqslant 2/\sqrt{3}$ и пусть прямая DH – касательная к единичной окружности S с центром O (рис. 6,а). Тогда дальнейшее движение, минимизирующее математическое ожидание, однозначно определяется из соображений вариационного исчисления: надо из D идти прямо и финишировать в точке F, где F – пересечение прямой $y = 1$ с прямой OF, параллельной DH. Свойство таких траекторий мы назовем класс 1. Он зависит от одного параметра $l \geqslant 2/\sqrt{3}$.

Если прямой ход OD несколько короче: $|OD| = l \in [1, 2/\sqrt{3}]$, то дальнейший пусть из D в F целесообразно "натянуть" на окружность S, т.е. придать ему вид DE_1E_2F (рис. 6,б). Семейство таких траекторий мы назовем класс 2. Он также зависит от одного параметра l.

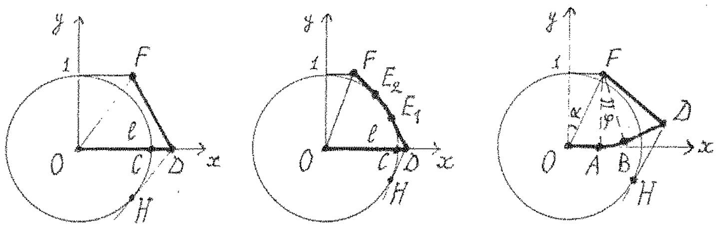

Рис. 6.

Если мы решим сократить прямой ход до $|OA| = a < 1$ (рис. 6,в), то дальнейшее движение целесообразно, по нашему мнению, вести по дуге окружности радиуса 1 с центром в точке $F = (a, 1)$, проходя по дуге $\overset{\frown}{AB}$[1] некоторый угол φ, а затем – идти по касательной, продолжающей эту дугу, до точки D, лежащей на касательной (к окружности S), параллельной OF. Если после этого прямой путь DF не задевает окружность (рис. 6,в), то мы назовем семейство таких траекторий класс 3. Он зависит от двух параметров a, φ. Наконец, если путь $\overset{\frown}{DF} = DE_1E_2F$ "натягивается" на окружность S (см. рис. 5), то мы назовем семейство таких траекторий класс 4. Он также зависит от двух параметров a, φ.

[1]По нашему мнению, дуга $\overset{\frown}{AB}$ должна быть небольшой: точка B не должна выходить за пределы окружности S.

3.4. Основная гипотеза настоящей работы состоит в предположении, что в случае полосы траекторию, минимизирующую математическое ожидание длины пути, проходимого до выхода на край, достаточно искать среди траекторий классов 1–4. Дальнейшее в основном посвящено поиску минимума в этих классах.

§4. Класс 1

4.1. На участке OC (рис. 6,а) примем за параметр расстояние ρ от 0; $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Вероятность $P(\rho)$ выйти на край на участке $OX(\rho)$ легко находится из рис. 7, где изображен поперечник полосы.

$$P(\rho) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\rho \arccos\frac{x}{\rho}dx = \frac{2}{\pi}\rho; \quad \pi dP = 2d\rho.$$

Откуда для математического ожидания на участке OX имеем

$$\pi M(OX) = \pi\int\limits_0^\rho \rho dP(\rho) = \rho^2, \quad \pi M(OC) = 1.$$

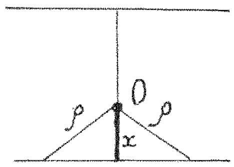

Рис. 7

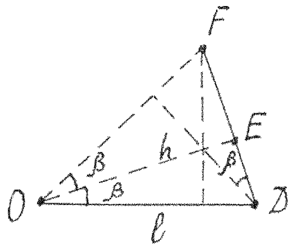

Рис. 8.

4.2. Для траектории класса 1 (рис. 8) в треугольнике ODF высоты из вершин F и D имеют длину 1, поэтому $OF = OD$. Нам удобно характеризовать траекторию не значением $l = |OD| > 1$, а углом β, рис. 8. При этом $l = 1/\sin 2\beta$, а длина третьей высоты треугольника ODF равна $h = |OE| = 1/2\sin\beta$.

4.3. На участке CD имеем $1 \leqslant \rho \leqslant l$,

$$P(\rho) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\rho} \arccos\frac{x}{\rho}dx = \frac{2}{\pi}\rho\Big(\arccos\frac{1}{\rho} + \rho - \sqrt{\rho^2-1}\Big),$$

$$\pi dP = 2\left(1 - \frac{\sqrt{\rho^2-1}}{\rho}\right)d\rho,$$

$$\pi M(CD) = \pi\int\limits_1^{l} \rho dP(\rho) = l^2 - l\sqrt{l^2-1} + \ln(l+\sqrt{l^2-1}) - 1 =$$
$$= \frac{1}{2\cos^2\beta} - \ln\operatorname{tg}\beta - 1.$$

4.4. Если после точки D траектория движения точки X такова, что ее “полярный угол” $\theta = \angle XOD$ монотонно возрастает, то на таком участке $\pi dP(\theta) = d\theta$. Это следует из того факта, что согласно рис. 9 при $l \geqslant 1$

$$P(\theta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{1}\left(2\arccos\frac{x}{l} + \theta\right)dx.$$

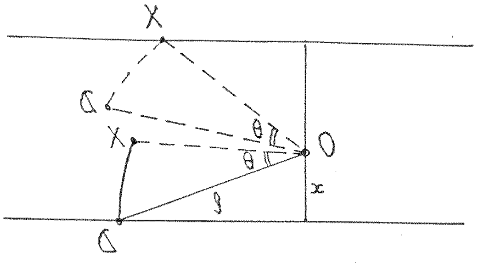

Рис. 9.

Мы неоднократно будем пользоваться тем, что в таких ситуациях $\pi dP = d\theta$.

4.5. На участке DE (см. рис. 8) за параметр примем угол $\gamma = \angle EOX$, убывающий от β до 0. При этом $\pi dP = -d\gamma$, а длина траектории до X равна

$$l(\gamma) = l + h\,\mathrm{tg}\,\beta - h\,\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{1+\sin\beta}{\sin 2\beta} - \frac{1}{2\sin\beta}\,\mathrm{tg}\,\gamma,$$

$$\pi M(DE) = \pi\int\limits_{\beta}^{0} k(\gamma)dP(\gamma) = \beta\frac{1+\sin\beta}{\sin 2\beta} - \frac{1}{2\sin\beta}\int\limits_{0}^{\beta}\mathrm{tg}\,\gamma\,d\gamma.$$

4.6. На участке EF (см. рис. 8) снова берем $\gamma = \angle EOX$. На этот раз γ растет от 0 до β, $\pi dP = d\gamma$, $l(\gamma) = l + h\,\mathrm{tg}\,\beta + h\,\mathrm{tg}\,\gamma$,

$$\pi M(EF) = \beta\frac{1+\sin\beta}{\sin 2\beta} + \frac{1}{2\sin\beta}\,\mathrm{tg}\,\gamma\,d\gamma,$$

так что

$$\pi M(DF) = 2\beta\frac{1+\sin\beta}{\sin 2\beta}.$$

4.7. Общее значение

$$\pi M(\beta) = \pi\big(M(OC) + M(CD) + M(DF)\big) = \\ = \frac{1}{2\cos^2\beta} - \ln\mathrm{tg}\,\beta + 2\beta\frac{1+\sin\beta}{\sin 2\beta}.$$

4.8. Счет на компьютере (табулирование) позволяет найти минимум $M(\beta)$. Он достигается при $\beta \approx 0,4379$. При этом $M \approx 0.95246$. При таком β абсцисса точки F равна $a \approx 0.8338$.

4.9. Попутно отметим, что длина $L(l) = l + 2h\,\mathrm{tg}\,\beta$ траектории класса 1 растет с ростом $l \geqslant 2/\sqrt{3}$.

§5. Класс 2

5.1. Траектории класса 2 будем характеризовать значением угла α, рис. 10

Как и в п. 4.1 значение $\pi M(OC) = 1$. На участке CD, аналогично п. 4.3,

$$\pi M(CD) = l^2 - l - \sqrt{l^2-1} + \ln\big(l + \sqrt{l^2-1}\big) - 1 = \\ = \frac{1-\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \ln\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} - 1.$$

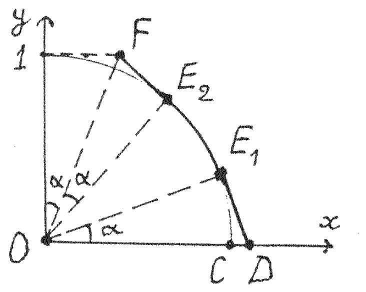

Рис. 10.

5.2. На участке DE за параметр принимаем $\gamma = \angle E_1OX$, γ убывает от α до 0, $l(\gamma) = l + \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\gamma$, $\pi dP = -d\gamma$,

$$\pi M(DE_1) = \alpha\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} - \int\limits_0^\alpha \operatorname{tg}\gamma d\gamma.$$

Аналогично на участке E_2F, где $l(\gamma) = l + \operatorname{tg}\alpha + \pi/2 - 3\alpha + \operatorname{tg}\gamma$, $\pi dP = d\gamma$,

$$\pi M(E_2F) = \alpha\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} - \int\limits_0^\alpha \operatorname{tg}\gamma d\gamma + \alpha(\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right).$$

5.3. На участке E_1E_2 за параметр принимаем полярный угол θ, он растет от α до $\pi/2 - 2\alpha$; $l(\theta) = l + \operatorname{tg}\alpha + \theta - \alpha$, $\pi dP = d\theta$,

$$\pi M(E_1E_2) = \int\limits_\alpha^{\pi/2-2\alpha} \left(\frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\alpha + \theta - \alpha\right)d\theta =$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right)\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right)^2.$$

5.4. Общее значение

$$\pi M(\alpha) = \pi\big(M(OC) + M(CD) + M(DE_1) + M(E_1E_2) + M(E_2F)\big) =$$

$$= \frac{1+\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \ln\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right)\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Счет на компьютере показывает, что значение $M(\alpha)$ убывает с ростом α на всем промежутке $o \leqslant \alpha \leqslant \pi/6$.

5.5. Заметим, что длина $L(\alpha) = 1/\cos\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha + \pi/2 - 3\alpha$ имеет в промежутке $0 \leqslant \alpha\pi/6$ локальный минимум. Он достигается при $\alpha \approx 0.4492$. При этом $L = 2.297$, а у точки F абсцисса $\alpha \approx 0.4821$.

§6. Границы a, φ в классах 3 и 4

6.1. В классах 3 и 4 всегда $0 < a < 1$. Кроме того, мы считали $|OB| \leqslant 1$, поэтому при фиксированном a максимум φ соответствует попаданию точки B на окружность S (рис. 11,а). При этом из $\triangle OBF$ со сторонами $\sqrt{1+a^2}$, 1, 1 находим

$$\cos(\alpha + \varphi) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{2},$$

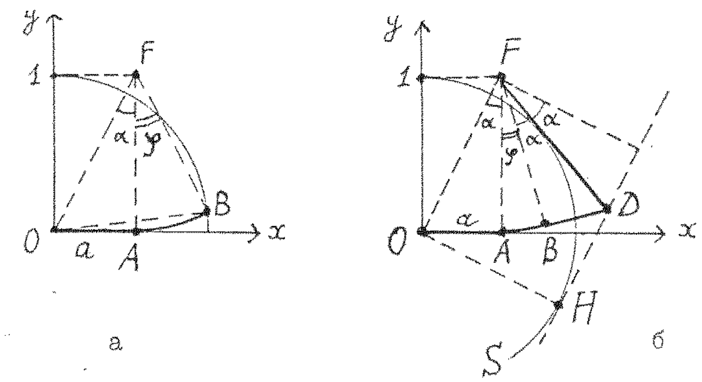

Рис. 11.

откуда

$$\varphi_{\max} = \arccos\frac{\sqrt{1+a^2}}{2} - \arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}. \qquad (1)$$

6.2. При фиксированном $a \leqslant 1/\sqrt{3}$ минимум φ в классе 3 соответствует касанию отрезка FD с окружностью S, рис. 11,б. При этом $\varphi_{\min} = \frac{\pi}{2} - 3\alpha$. А при фиксированном $a \geqslant 1/\sqrt{3}$ минимум φ равен нулю. То есть:

$$\varphi_{\min} = \begin{cases} \pi/2 - 3\arccos 1/\sqrt{1+a^2} & \text{при} \quad 0 \leqslant a \leqslant 1/\sqrt{3}, \\ 0 & \text{при} \quad 1/\sqrt{3} \leqslant a \leqslant 1. \end{cases} \qquad (2)$$

6.3. При $a \leqslant 1/\sqrt{3}$ требование $\varphi_{\min} \leqslant \varphi_{\max}$ налагает на a ограничение снизу. Действительно, из

$$\frac{\pi}{2} - 2\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \leqslant \arccos\frac{\sqrt{1+a^2}}{2}$$

имеем

$$\frac{2a}{1+a^2} \geqslant \frac{\sqrt{1+a^2}}{2},$$

откуда в классе 3 обязательно $a \geqslant a_0 \approx 0.27996$.

6.4. Областью изменения параметров a, φ для класса 3 служит криволинейный треугольник, заштрихованный на графике рис. 12. Левее лежит область параметров класса 4. Классу 1 на рис. 12 соответствует луч $\varphi = 0$, $a \geqslant 1/\sqrt{3}$, а классу 2 – отрезок $\varphi = 0$, $0 \leqslant a \leqslant 1/\sqrt{3}$.

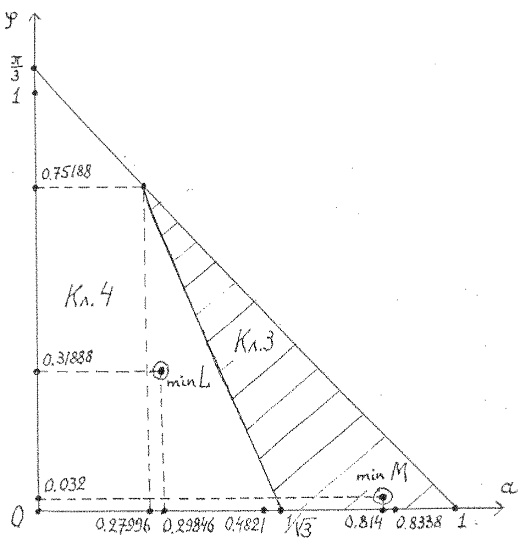

Рис. 12.

§7. Еще раз о кратчайшей траектории

7.1. Для тректории класса 4 с параметрами a, φ рис. 13, координаты точки $B(a + \sin\varphi, 1 - \cos\varphi)$. Из уравнения прямой BD :

$(x-a)\sin\varphi - (y-1)\cos\varphi = 1$ заключаем, что расстояние этой прямой от начала

$$h = |OH_1| = a\sin\varphi + 1 - \cos\varphi, \tag{1}$$

откуда $H_1 = (h\sin\varphi, -h\cos\varphi)$,

$$b = |H_1 B| = a\cos\varphi + \sin\varphi. \tag{2}$$

Уравнение прямой H_2D: $x - ay = \sqrt{1+a^2}$. Пересекая ее с прямой BD, находим координаты точки D и длину $|BD|$:

$$D = \left(a + \frac{\cos\varphi\sqrt{1+a^2} - a}{\cos\varphi - a\sin\varphi}, 1 - \frac{1 - \sin\varphi\sqrt{1+a^2}}{\cos\varphi - a\sin\varphi}\right),$$

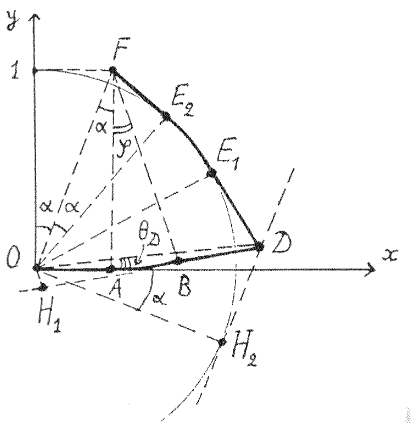

Рис. 13.

$$d = |BD| = \frac{\sqrt{1+a^2} - b}{\cos\varphi - a\sin\varphi}. \tag{3}$$

Из $b + d = h\,\mathrm{tg}\,(\pi/2 - \varphi + \theta_D)$ находим

$$\theta_D - \mathrm{arctg}\,\frac{b+d}{h} + \varphi - \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Наконец,

$$\angle DOE_1 = \angle DOH_2 = \alpha + \theta_D,$$

$$\angle E_1OE_2 = \frac{\pi}{2} - 2\alpha - \theta_D - \angle DOE_1 = \frac{\pi}{2} - 3\alpha - 2\theta_D,$$

где

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}. \tag{5}$$

Полная длина траектории

$$L(a,\varphi) = a + \varphi + d + \operatorname{tg}(\alpha + \theta_D) + \Big(\frac{\pi}{2} - 3\alpha - 2\theta_D) + a. \tag{6}$$

7.2. Имея формулу (6), можно, зафиксировав a, найти $\min\limits_{\varphi} L(a,\varphi)$ и значение $\varphi(a)$, при котором этот минимум достигается. Существенно, что значение $\varphi(a)$ единственно.

Для функции $\varphi(a)$ можно дать явное выражение. Действительно, при фиксированном a определена прямая H_2D (рис. 13) и с изменением φ точка D лишь скользит по этой прямой. При этом $\min\limits_{\varphi} L(a,\varphi)$ достигается в положении, когда $OD = FD$. В этом положении ордината точки D равна $1/2 - a/\sqrt{1+a^2}$. Приравнивая

$$\frac{1}{2} - \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = 1 - \frac{1 - \sin\varphi\sqrt{1+a^2}}{\cos\varphi - a\sin\varphi},$$

находим, что

$$\varphi(a) = \arccos \frac{2}{\sqrt{5+a^2}} - \arcsin \frac{1 + \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}}{\sqrt{5+a^2}}.$$

После чего, исследуя на компьютере функцию одной переменной $L(a,\varphi(a))$, убеждаемся, что она на участке $0 \leqslant a \leqslant 1/\sqrt{3}$ сначала убывает, а затем возрастает, достигая минимума в известной (см. [4, 5]) точке $a \approx 0.29846$. При этом $\varphi \approx 0.31888$.

7.3. Нашей целью является на сходном пути найти значения a, φ траектории класса 3 или 4, для которой будет достигнут абсолютный минимум математического ожидания $M(a,\varphi)$ длины пути до выхода на край полосы. Чтобы осуществить такой план, требуется сначала вывести формулы для $M(a,\varphi)$, отдельно для классов 3 и 4. К этому мы и переходим.

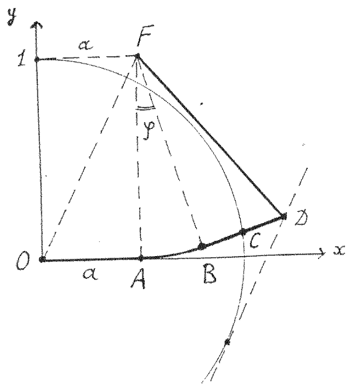

Рис. 14.

§8. Класс 3

8.1. Приступим к вычислению математического ожидания длины пути для траектории класса 3 (рис. 14).

На участке OA, согласно п. 4.1 имеем

$$\pi M(OA) = a^2.$$

8.2. На участке AB естественный параметр $t = \angle AFX$ (рис. 16) $0 \leqslant t \leqslant \varphi$, $l = a + t$. Но через t сложнее выражается dP. Поэтому мы в ходе вычислений перейдем к параметру $h = |OH|$, геометрический смысл которого ясен из рис. 15.

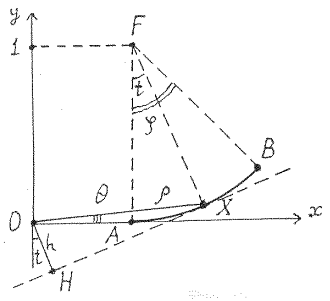

Рис. 15.

Значение P (вероятность выйти на край на участке траектории OX) слагается из двух частей: P_1 вызвано теми пересечениями, при которых имеет место также пересечение с краем отрезка OX длины $\rho < 1$.

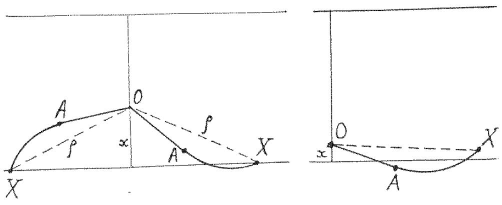

Рис. 16.

Как ясно из рис. 16,а

$$P_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\rho} 2\arccos\frac{x}{\rho}dx = \frac{2}{\pi}\rho.$$

Вторая часть P_2 вызвана теми пересечениями, при которых отрезок OX не пересекает край полосы. Такие пересечения существуют при $x \in (O, h)$ (см. рис. 16.б). Для нахождения P_2 найдем значение угла $\Delta(x)$ (рис. 17,а), в пределах которого при данном расстоянии x точки O от края полосы имеют место такие пересечения. Для нахождения $\Delta(x)$ воспользуемся рис. 17,б.

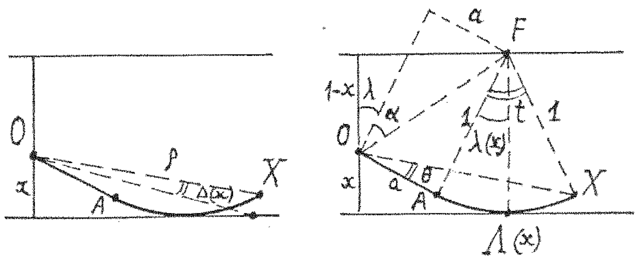

Рис. 17.

Имеем

$$\lambda(x) = \arccos\frac{1-x}{\sqrt{1+a^2}} - \alpha,$$

$$\Delta(x) = \frac{\pi}{2} - \lambda(x) + \theta - \arccos\frac{x}{\rho},$$

$$P_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^h \Delta(x)dx.$$

8.3. Поскольку $\Delta(h) = 0$, то для $P = P_1 + P_2$ имеем

$$\pi\frac{dP}{dh} = 2\rho' + \int\limits_0^h \frac{\partial\Delta(x)}{\partial h}dx =$$

$$= 2\rho' + \int\limits_0^h \left(\theta' - \frac{\rho'}{\rho}\,\frac{x}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}\right)dx = \rho' + h\theta' + \frac{\rho'}{\rho}\sqrt{\rho^2 - h^2},$$

где штрихами обозначены производные по параметру h.

8.4. Параметры h и t связаны соотношением

$$h = a\sin t + 1\cos t = 1 - \sqrt{1 + a^2}\,\cos(t + \alpha). \qquad (1)$$

Поэтому

$$\rho^2 = (a + \sin t)^2 + (1 - \cos t)^2 = a^2 + 2h, \quad \rho' = \frac{1}{\rho}. \qquad (2)$$

Из (1)

$$t = \arccos\frac{1 - h}{\sqrt{1 + a^2}} - \alpha,$$

из $\triangle OXH$ (см. рис. 15)

$$\theta = \arccos\frac{h}{\rho} - \left(\frac{\pi}{2} - t\right),$$

$$\theta' = \frac{h\rho' - \rho}{\rho\sqrt{\rho^2 - h^2}} + t' = \frac{h - \rho^2}{\rho^2\sqrt{\rho^2 - h^2}} + \frac{1}{\sqrt{2h + a^2 - h^2}}.$$

Теперь из п. 8.3 имеем

$$\pi\frac{dP}{dh} = \frac{1}{\rho} + \frac{1 - h}{\sqrt{\rho^2 - h^2}} + \frac{h}{\sqrt{2h + a^2 - h^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2h}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2h - h^2}}$$

8.5. Наконец,

$$l(h) = a + t = a + \arccos \frac{1-h}{\sqrt{1+a^2}} - \alpha,$$

$$\pi M(AB) = \pi \int\limits_0^{h(\varphi)} l(h) dP(h) =$$

$$= \int\limits_0^{a\sin\varphi+1-\cos\varphi} \left(a-\alpha+\arccos \frac{1-h}{\sqrt{1+a^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+2h}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+2h-h^2}}\right) dh.$$

8.6. На участке BD за параметр примем угол θ (рис. 18)

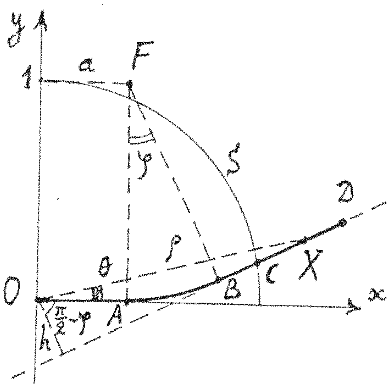

Рис. 18.

Обозначим $t(\theta) = |BX|$, $\rho(\theta) = |OX|$. Из п. 7.1 имеем

$$h = |OH| = a\sin\varphi + 1 - \cos\varphi,$$

$$b = |HB| = a\cos\varphi + \sin\varphi,$$

$$d = |BD| = \frac{\sqrt{1+a^2} - b}{\cos\varphi - a\sin\varphi}.$$

Из $\triangle OHC$:

$$|BC| = |CH| - |HB| = \sqrt{1-h^2} - b.$$

Из $\triangle ONX$:

$$b+t=h\operatorname{tg}\left(\theta+\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

$$\varphi-\theta=\operatorname{arctg}\frac{h}{b+t},\quad \varphi-\theta_B=\operatorname{arctg}\frac{h}{b},$$

$$\varphi-\theta_C=\operatorname{arctg}\frac{h}{\sqrt{1-h^2}},\quad \varphi-\theta_D=\operatorname{arctg}\frac{h}{b+d},$$

$$\rho(\theta)=\frac{h}{\sin(\varphi-\theta)},\quad \rho'(\theta)=h\frac{\cos(\varphi-\theta)}{\sin^2(\varphi-\theta).}$$

8.7. Перейдем к нахождению $P(\theta)$ на участке BD.

При каждом расстоянии x точки O от края полосы угол сектора начальных направлений, при которых есть пересечение участка OX траектории с этим краем, слагается из двух частей. 1) Когда пересечение есть уже на участке OB траектории. Эта часть сектора не зависит от положения точки X на BD. Поэтому для соответствующей части P_1 вероятности P будет $dP_1=0$. 2) Когда пересечения на участке OB нет, а на BX есть. Величина σ сектора таких направлений выражается различно на участках $0\leqslant x\leqslant h$, $h\leqslant x\leqslant \rho_B$, $\rho_B\leqslant x\leqslant \min\{\rho,1\}$, $\min\{\rho,1\}\leqslant x\leqslant 1$.

При $0\leqslant x\leqslant h$ (рис. 19,а)

$$\sigma_1(x)=\arccos\frac{x}{\rho}-\arccos\frac{x}{\rho_B}+(\theta-\theta_B).$$

При $h\leqslant x\leqslant \rho_B$ (рис. 19,б)

$$\sigma_2(x)=\left(\arccos\frac{x}{\rho}-\arccos\frac{x}{\rho_B}+\theta-\theta_B\right)+$$
$$+\left(\arccos\frac{x}{\rho}-\arccos\frac{x}{\rho_B}-\theta+\theta_B\right)=$$
$$=2\arccos\frac{x}{\rho}-2\arccos\frac{x}{\rho_B}.$$

При $\rho_B\leqslant x\leqslant \min\{\rho,1\}$ (рис. 19,в)

$$\sigma_3(x)=2\arccos\frac{x}{\rho}.$$

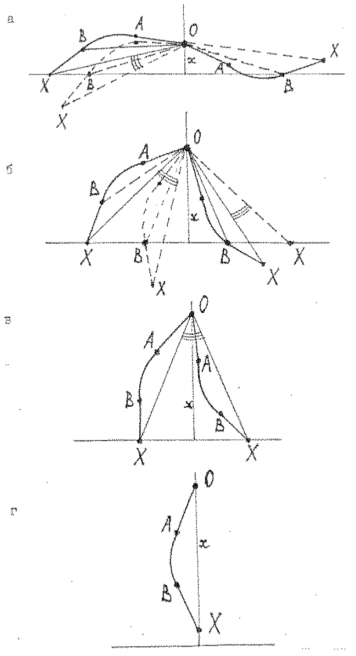

Рис. 19.

При $\min\{\rho, 1\} \leqslant x \leqslant 1$ (рис. 19,г) $\sigma_4(x) = 0$. Поэтому

$$\pi \frac{dP}{d\theta_1} = J_1 + J_2 + J_3,$$

где

$$J_1 = \int\limits_0^h \frac{d\sigma_1}{\partial\theta} dx, \quad J_2 = \int\limits_h^{\rho_b} \frac{\partial\sigma_2}{\partial\theta} dx,$$

а J_3 различно при $X \in BC$ и $X \in CD$. В первом случае

$$\overline{J}_3 = \frac{\partial}{\partial\theta} \int\limits_{\rho_B}^{\rho} \sigma_3 dx, \quad \text{во втором} \quad \overline{\overline{J}}_3 \int\limits_{\rho_b}^{1} \frac{\partial\sigma_3}{\partial\theta} dx.$$

$$J_1 = \int\limits_0^h \left(\frac{\rho'}{\rho} \, \frac{x}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} + 1 \right) dx = \frac{\rho'}{\rho} \Big(\rho - \sqrt{\rho^2 - h^2} \Big) + h,$$

$$J_2 = 2\int\limits_h^{\rho_B} \frac{\rho'}{\rho}\,\frac{x\,dx}{\sqrt{\rho^2-x^2}} = \frac{2\rho'}{\rho}\Big(\sqrt{\rho^2-h^2}-\sqrt{\rho^2-\rho_B^2}\Big),$$

$$\overline{J}_3 = \sigma_3(\rho)\rho' + 2\int\limits_{\rho_B}^{\rho} \frac{\rho'}{\rho}\,\frac{x\,dx}{\sqrt{\rho^2-x^2}} = O + \frac{2\rho'}{\rho}\sqrt{\rho^2-\rho_B^2},$$

$$\overline{\overline{J_3}} = 2\int\limits_{\rho_B}^{1} \frac{\rho'}{\rho}\,\frac{x\,dx}{\sqrt{\rho^2-x^2}} = \frac{2\rho'}{\rho}\Big(\sqrt{\rho^2-\rho_B^2}-\sqrt{\rho^2-1}\Big),$$

$$J_1+J_2+\overline{J}_3 = \frac{\rho'}{\rho}\Big(\rho+\sqrt{\rho^2-h^2}\Big) = h\frac{1+\cos(\varphi-\theta)}{\sin^2(\varphi-\theta)},$$

$$J_1+J_2+\overline{\overline{J_3}} = \frac{\rho'}{\rho}\Big(\rho+\sqrt{\rho^2-h^2}-2\sqrt{\rho^2-1}\Big)+h=$$

$$= h\left(\frac{1+\cos(\varphi-\theta)}{\sin^2(\varphi-\theta)} - 2\frac{\cos(\varphi-\theta)}{\sin^2(\varphi-\theta)}\sqrt{1-\frac{1}{h^2}\sin^2(\varphi-\theta)}\right).$$

8.8. Теперь найдем математическое ожидание $M(BD)$. Имеем

$$l(\theta) = a+\varphi+h+\operatorname{ctg}(\varphi-\theta)-b,$$

$$\pi M(BC) = \int\limits_{\theta_B}^{\theta_C} l\cdot(J_1+J_2+\overline{J}_3)\,d\theta,$$

$$\pi M(CD) = \int\limits_{\theta_C}^{\theta_D} l\cdot(J_1+J_2+\overline{\overline{J_3}})\,d\theta,$$

откуда после перехода к параметру $x=\varphi-\theta$

$$\pi M(BD) = h\int\limits_{\varphi-\theta_D}^{\varphi-\theta_B}\left(a+\varphi-b+h\frac{\cos x}{\sin x}\right)\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\,dx-$$

$$-2h\int\limits_{\varphi-\theta_D}^{\varphi-\theta_C}\left(a+\varphi-b+h\frac{\cos x}{\sin x}\right)\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\sqrt{1-\frac{1}{h^2}\sin^2 x}\,dx.$$

8.9. На участке DF (рис. 20) за параметр принимаем длину $t = |DX|$, $0 \leqslant t \leqslant |DF|$. Зная координаты F и D, находим

$$q = |DF| = \frac{\sigma}{\cos\varphi - \sin\varphi},$$

где

$$\sigma = \sqrt{2\sqrt{1+a^2}(\sqrt{1+a^2} - (a\cos\varphi + \sin\varphi))}.$$

Из уравнения прямой DF

$$x\Big(1 - \sin\varphi\sqrt{1+a^2}\Big) + y\Big(\cos\varphi\sqrt{1+a^2} - a\Big) = \sqrt{1+a^2}(\cos\varphi - a\sin\varphi)$$

находим расстояние $|OE|$ от O до этой прямой и угол β наклона OE к оси x

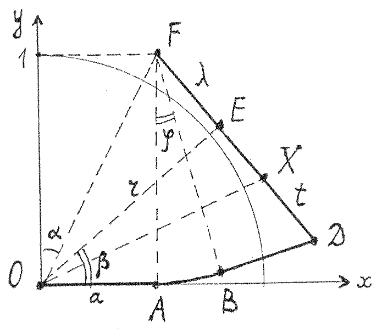

Рис. 20.

$$r = |OE| = \frac{\sqrt{1+a^2}(\cos\varphi - a\sin\varphi)}{\sigma},$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{\cos\varphi\sqrt{1+a^2} - a}{1 - \sin\sqrt{1+a^2}}.$$

Наконец,

$$\lambda = |EF| = r\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right),$$

$$\theta(t) = \beta - \operatorname{arctg}\frac{q - \lambda - t}{r}, \quad \theta' = \frac{r}{r^2 + (q - \lambda - t)^2},$$

$$l(t) = a + \varphi + d + t,$$

$$\pi dP(t) = d\theta = \theta' dt,$$

$$\pi M(DF) = r \int_0^q \frac{a + \varphi + d + t}{r^2 + (q - \lambda - t)^2} dt.$$

8.10. Окончательно для вычисления $\pi M(a, \varphi)$ имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
b &= a\cos\varphi + \sin\varphi, & p_1 &= \operatorname{arctg}\frac{h}{b},\\
c &= \sqrt{1 + a^2}, & p_2 &= \operatorname{arctg}\frac{h}{\sqrt{1 - h^2}},\\
e &= \cos\varphi - a\sin\varphi, & p_3 &= \operatorname{arctg}\frac{h}{b + d},\\
d &= \frac{c - b}{e}, & \sigma &= \sqrt{2c(c - b)},\\
h &= 1 - e, & r &= \frac{c}{q},\\
q &= \frac{\sigma}{e}, & \alpha &= \arccos\frac{1}{c}.
\end{aligned}$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{c\cdot\cos\varphi - a}{1 - c\cdot\sin\varphi}, \quad \lambda = r\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right),$$

$$I_1 = \int_0^h \left(a - \alpha + \arccos\frac{1 - x}{c}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + 2x}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2x - x^2}}\right) dx,$$

$$I_2 = \int_{p_3}^{p_1} \left(a + \varphi - b + h\frac{\cos x}{\sin x}\right)\left(\frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}\right) dx,$$

$$I_3 = \int_{p_3}^{p_2} \left(a + \varphi - b + h\frac{\cos x}{\sin x}\right)\frac{\cos x}{\sin^2 x}\sqrt{1 - \frac{1}{h^2}\sin^2 x}\; dx,$$

$$I_4 = \int_0^q \frac{a + \varphi + d + x}{r^2 + (q - \lambda - x)^2} dx,$$

$$\pi M(a, \varphi) = a^2 + I_1 + hI_2 - 2hI_3 + rI_4.$$

8.11. Программа счета по формулам пункта 8.10 была составлена с вычислением интегралов I_1, I_2, I_3, I_4 по формуле Гаусса с шестью точками и использованием коэффициентов и весов [7]. Компьютерный счет показал, что функция $\pi M(a,\varphi)$ в области значений a, φ, допустимых для класса 3, является выпуклой и достигает минимума в единственной точке

$$a \approx 0.814, \quad \varphi \approx 0.032.$$

(Верность последних значащих цифр не гарантируется.) Приведем таблицу значений $\pi M(a,\varphi)$ вблизи этой точки:

φ/a	0.810	0.812	0.814	0.816	0.818
0.028	2.991783	2.991773	2.991766	2.991763	2.991764
0.030	2.991772	2.991764	2.991760	2.991759	2.991762
0.032	2.991765	2.991759	2.991758	2.991759	2.991764
0.034	2.991762	2.991759	2.991759	2.991763	2.991770
0.036	2.991764	2.991763	2.991766	2.991771	2.991781

§9. Класс 4

9.1. Для кривой класса 4 по сравнению с классом 3 изменения касаются лишь участка DF, который заменяется состоящим из трех частей участка DE_1E_2F (см. рис. 13). При этом согласно п. 7.1

$$\theta_D = \operatorname{arctg}\frac{b+d}{h} + \varphi - \frac{\pi}{2},$$

$$q:\ = |DE_1| = |DH_2| = \operatorname{tg}(\alpha + \theta_D),$$

$$\beta:\ = \angle E_1OA = \alpha + 2\theta_D,$$

$$\gamma = \angle E_1OE_2 = \frac{\pi}{2} - 3\alpha - 2\theta_D, \quad |E_2F| = a.$$

На участке DE_1 за параметр принимаем длину t. Тогда

$$\theta(t) = \beta - \operatorname{arctg}(q-t),$$

$$\theta'(t) = \frac{1}{1+(q-t)^2},$$

$$\pi M(DE_1) = \int_0^q \frac{a+\varphi+d+t}{1+(q-t)^2}dt.$$

На дуге E_1E_2 за параметр t также принимаем длину

$$\pi M(E_1E_2) = \int_0^{\gamma} (a + \varphi + d + q + t)dt.$$

Наконец, на участке E_2F

$$\pi M(E_2F) = \int_0^{a} (a + \varphi + d + q + \gamma + t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

9.2. Аналогичный п. 8.11 численный анализ функции

$$\pi M(a,\varphi) = \pi M(OA) + \pi M(AB) + \pi M(BD) + \\ + \pi M(DE_1) + \pi M(E_1E_2) + \pi M(E_2F)$$

показывает, что в зоне значений a, φ для кривых класса 4 величина $\pi M(a,\varphi)$ при фиксированных φ убывает с ростом a.

Таким образом, минимальное значение M достигается для кривой $OABDF$ класса 3 (см. рис. 14) при $a \approx 0.814$, $\varphi \approx 0.032$.

§10. Тактика нетерпения

10.1. В этом параграфе мы выясним, каким будет путь, если в каждый момент направления движения выбирается таким, чтобы dP/dl было максимальным. О такой "тактике нетерпения" мы уже говорили в п. 2.4 применительно к полуплоскости. В случае полосы такая тактика приводит к движению по кривой, состоящей из следующих четырех участков.

10.2. Участок 1. Пусть начало декартовых координат совпадает с исходной точкой, а направление оси x с начальным направлением движения. Тогда для краев полосы

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0 \tag{1}$$

значения p равномерно распределены в [0,1], а значения φ – равномерно распределены в $[0, 2\pi]$. Как известно, (см. [8]), на семействе всех прямых (1), $0 \leqslant p < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, существует инвариантная относительно движений мера $dpd\varphi$. В нашем случае семейство (1) ограничено дополнительным условием

$$0 \leqslant p \leqslant 1. \tag{2}$$

На начальном участке длины 1 искомая кривая является прямолинейным отрезком, идущим вдоль оси x.

Действительно, пусть это уже доказано для участка длины l. Продолжим его произвольно направленным элементом длины dl (рис. 21)

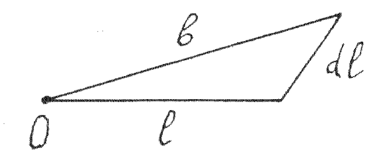

Рис. 21.

Как известно из интегральной геометрии, мера множества прямых семейства (1), пересекающих элемент dl, пропорциональна длине dl. (Ограничение (2) ввиду l, $l + dl < 1$ здесь еще роли не играет.) Но, поскольку на участке l выхода на край не было, то из меры прямых, пересекающих dl, надо исключить меру прямых, пересекавших и l, и dl. Последняя мера (см. [8]), пропорциональна $l + dl = b$ (значение b ясно из рис. 21). Эта мера будет минимальной, равной нулю, только если dl продолжает l.

10.3. Участок 2. Вплоть до длины $2/\sqrt{3}$ искомая кривая остается прямолинейным отрезком.

Действительно, пусть это доказано для длины l, и кривая продолжена элементом dl, причем $1 \leqslant l$, $l + dl < 2/\sqrt{3}$. Направление элемента dl характеризуем его углом λ с осью y (рис. 22). По симметрии считаем dl направленным в верхнюю (замкнутую) полуплоскость.

Множество прямых семейства (1), пересекающих dl, состоит из двух "потоков". К первому мы относим прямые, пересекающие ось y выше, чем ее пересекает продолжение элемента dl, а ко второму – те, что пересекают ось y ниже, чем продолжение dl.

Зафиксируем значение p. Тогда в первый поток попадут прямые семейства (1) со значениями φ в пределах от φ_1 до φ_2, причем

$$(l + dl \sin\varphi)\cos\varphi_2 + (dl\cos\varphi)\sin\varphi_2 - p = 0, \quad l\cos\varphi_1 = p.$$

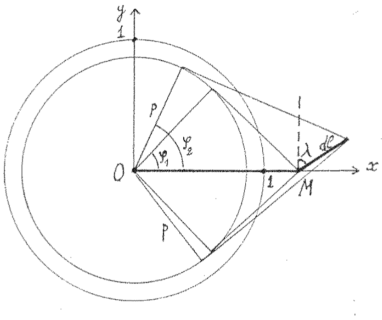

Рис. 22.

Отсюда следует

$$2l\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}=\sin(\lambda+\varphi_2)dl,$$

что, ввиду малости dl и малости $\delta_p\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ дает

$$\delta_p\varphi=\frac{\sin(\lambda+\arccos p/l)}{\sqrt{l^2-p^2}}dl. \tag{3}$$

Второй поток при $p<l\cos\lambda$ пуст. А при $p=\mathrm{const}\geqslant l\cos\lambda$ находим, вполне аналогично (3). что для второго потока:

$$\delta_p\widetilde{\varphi}=\frac{\sin(\lambda-\arccos p/l)}{\sqrt{l^2-p^2}}dl. \tag{4}$$

Из (3) и (4) заключаем, что вероятность выйти на край полосы на участке dl пропорциональна величине

$$I(\lambda)=\int\limits_0^1\frac{\sin(\lambda+\arccos p/l)}{\sqrt{l^2-p^2}}dp+\int\limits_{l\cos\lambda}^1\frac{\sin(\lambda-\arccos p/l)}{\sqrt{l^2-p^2}}dp. \tag{5}$$

Прямым вычислением находим, что

$$\frac{dI}{d\lambda}=\frac{l-2\sqrt{l^2-1}}{l}\cos\lambda. \tag{6}$$

Поскольку $l<2/\sqrt{3}$, то $l-2\sqrt{l^2-1}>0$, а $\cos\lambda\geqslant 0$, так как элемент dl направлен в верхнюю полуплоскость. Поэтому для увеличения $I(\lambda)$ следует придать λ максимальное значение $\pi/2$, чему соответствует продолжение элементом dl отрезка OM.

10.4. На дальнейших участках удобно описывать кривую в полярных координатах ρ, θ. По симметрии будем считать, что кривая впервые отклоняется от прямой в сторону увеличения θ.

Участок 3. Мы утверждаем, что, начиная с точки $\rho = 2/\sqrt{3}$, $\theta = 0$ вплоть до точки, для которой $\rho \sin\theta = 1$, искомая кривая имеет уравнение

$$\theta = \rho + \sqrt{\rho^2 - 1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\rho^2 - 1} + \frac{\pi}{6} - \sqrt{3}. \tag{7}$$

Уравнение (7) задает кривую, вдоль которой

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho}{\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}}, \tag{8}$$

поэтому ρ строго возрастает с ростом θ. Кривая выпукла и имеет вид участка обращенной выпуклостью наружу спирали.

В начальной точке $\rho = 2/\sqrt{3}$, $\theta = 0$ элемент dl касательной образует с осью y угол $\pi/6$. Эта точка оказывается угловой для кривой в целом. Здесь кривая, ранее направленная вдоль оси x, поворачивает на угол $\pi/3$. Поясним, как это согласуется с формулой (6). Когда l становится чуть больше $2/\sqrt{3}$, значение $l - 2\sqrt{l^2 - 1}$ становится отрицательным, и для уравнения $I(\lambda)$ следует уменьшать λ. Это целесообразно до тех пор, пока $\lambda \geqslant \pi/6$. При $\lambda = \pi/6$ полностью исчезает второй из интегралов (5) и мы оказываемся в качественно иных условиях.

Перейдем к доказательству. Допустим, что утверждение (7) верно для участка кривой вплоть до точки M с координатами ρ, θ, и участок продолжен элементом dl, направление которого охарактеризовано углом λ (рис. 23). Для общности с рис. 22 на этот раз ось $\widetilde{x}$ направлена вдоль OM.

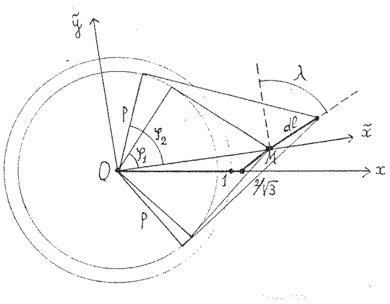

Рис. 23.

Если при этом $\rho\cos\lambda < 1$, то вероятность выйти на край полосы элементом dl оценивается сверху величиной, пропорциональной $I(\lambda)$, где $I(\lambda)$ задается формулой (5), в которой только l заменено на ρ. (Мы говорим "оценивается сверху", т.к. при больших λ часть прямых "второго потока" могла пересекать предшествующую часть кривой.) Поэтому, аналогично (3)

$$\frac{dI}{d\lambda} = \frac{p - 2\sqrt{p^2-1}}{p} < 0$$

и λ целесообразно уменьшать до значений $\rho\cos\lambda \geqslant 1$, при которых "второй поток" исчезает.

При таких λ вероятность выхода на край элементом dl пропорциональна величине

$$I(\lambda) = \int\limits_0^1 \frac{\sin(\lambda + \arccos\frac{p}{\rho})}{\sqrt{\rho^2 - p^2}} dp.$$

При этом $\max I(\lambda)$ достигается при

$$0 = \frac{dI}{d\lambda} = \frac{\cos\lambda}{\rho} \int\limits_0^1 \frac{pdp}{\sqrt{\rho^2-p^2}} - \frac{\sin\lambda}{\rho},$$

т.е. при $\operatorname{tg}\lambda = \rho - \sqrt{\rho^2-1}$, что, ввиду $\operatorname{tg}\lambda = \frac{d\rho}{\rho d\theta}$, дает уравнение (8), из которого следует (7).

Кривая (7) выходит на уровень $\rho\sin\theta = 1$ в точке

$$\rho \approx 1.56953, \quad \theta \approx 0.69077. \tag{9}$$

10.5. Участок 4. Начиная с точки (9), искомая кривая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{m\rho}{\rho + \sqrt{\rho^2 - m^2}}, \tag{10}$$

$$m = \frac{3\rho^2 - 2\sqrt{3}\,\rho\cos\theta - 2\rho\sin\theta\sqrt{3\rho^2 - 4\sqrt{3}\,\rho\cos\theta + 1}}{3\rho^2 - 4\sqrt{3}\,\rho\cos\theta + 4} \tag{11}$$

и заканчивается в точке, при которой $\theta = \pi/3$.

Доказательство. Будем считать, что утверждение об уравнении (10) верно вплоть до точки M с координатами ρ, θ, причем

$\rho \sin\theta \geqslant 1$ и $0.69077 \leqslant \theta < \pi/3$. Рассмотрим окружность радиуса 1 с центром в точке $A(2/\sqrt{3}, 0)$, и пусть касательная MN к этой окружности образует с осью x угол α (рис. 24). Обозначим m расстояние начала O от прямой MN. Тогда

$$ON = AN - AO = \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$MB = \rho\sin\theta = (OB + ON)\operatorname{tg}\alpha = \left(\rho\cos\theta + \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\operatorname{tg}\alpha.$$

Откуда

$$\rho\sin\theta\cos\alpha = \left(\rho\cos\theta - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sin\alpha + 1.$$

Кроме того, $m = 1 - 2/\sqrt{3}\sin\alpha$.

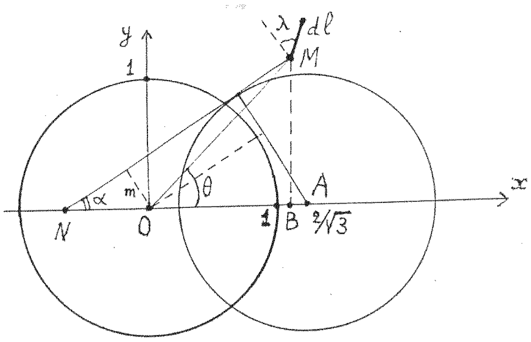

Рис. 24.

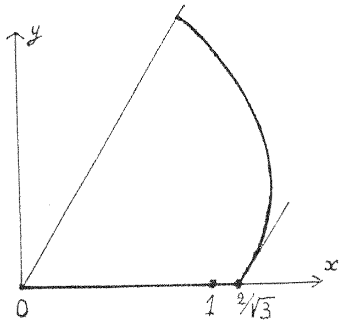

Рис. 25.

Исключая α из последних двух уравнений, получаем уравнение

$$\rho \sin\theta \sqrt{1+6m-3m^2} = \left(\rho\cos\theta - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}(1-m)+2,$$

из которого, учитывая, что $0 \leqslant m \leqslant 1$, находим значение (11) для m.

Пусть теперь кривая продолжена элементом dl, образующим угол λ с перпендикуляром к лучу $\theta = \mathrm{const}$ (рис. 24). При этом вероятность выйти элементом dl на край полосы пропорциональна величине

$$Ila) = \int_0^m \frac{\sin(\lambda + \arccos\frac{p}{\rho})}{\sqrt{\rho^2-p^2}}dp,$$

и поиск $\max I$ из $dI/d\lambda = 0$ приводит к уравнению (10).

10.6. Участки 1–4 составляют в совокупности кривую ширины 1, поэтому она гарантирует выход на край полосы. Общий вид кривой изображен на рис. 25.

Как видим, эта кривая далека от лучшей по длине (см. рис. 5) и лучшей по математическому ожиданию длины пути (см. рис. 13). Поэтому "тактика нетерпения" очевидно плоха.

Литература

1. Р. Беллман, *Динамическое программирование.* ИЛ., М. (1980).
2. R. Bellman, *Minimisation problem.* — Bull. Amer. Math. Soc. **62** (1956), 270.
3. J. R. Isbell, *An optimal search pattern.* — Naval Research Logistics Quarterly **4** (1957), 357–359.
4. В. А. Залгаллер, *Как выйти из леса? (об одной задаче Беллмана).* — Матем. просвещение вып. 6 (1961), 191–195.
5. A. Adhikari, J. Pitman, *The shortest planar arc of width* 1. — Amer. Math. Mon. **96** (1989), 309–327.
6. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, *Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум.* Наука, М. (1970).
7. А. С. Кронрод, *Узлы и веса квадратурных формул.* Наука, М. (1964).
8. В. Бляшке, *Лекции по интегральной геометрии.* — Успехи мат. наук вып. 5 (1938), 97–149.
9. В. А. Залгаллер, *Кратчайшие линии осмотра сферы.* Деп. в ВИНИТИ No. 2844-1392 от 24.09.1992.

Zalgaller V. A. On a question of Bellman.

From a random point O in an infinite strip of width 1 we move in a randomly chosen direction along a curve Γ. What shape of Γ gives the minimum value to the expectation of the length of the path that reaches the boundary of the strip? After certain arguments in support that the desired curve belongs to one of four classes, it is proved that the best curve in those classes consists of four parts: an interval OA of length a, its smooth continuation, an arc AB of radius 1 and small length φ, an interval BD that is smooth continuation of the arc, and an interval DF (with a corner at the point D). If we take O as the origin and OA as the x axis of a system of coordinates, then the coordinates of the above-mentioned points will be: $A(a, 0)$, $B(a + \sin\varphi, 1 - \cos\varphi)$, $F(a, 1)$,

$$D\left(a + \frac{\cos\varphi\sqrt{1+a^2} - a}{\cos\varphi - a\sin\varphi}, 1 - \frac{\sin\varphi\sqrt{1+a^2}}{\cos\varphi - a\sin\varphi}\right).$$

For the best curve we have: $a \approx 0.814$, $\varphi \approx 0.032$. Related questions are discussed.

E-mail: zalg@ wisdom.weizmann.ac.il

Поступило 25 декабря 2001 г.