Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 299, 2003 г.

П. Д. Андреев

ВОССТАНОВЛЕНИЕ МЕТРИКИ $CAT(0)$-ПРОСТРАНСТВА ПО ДИАГОНАЛЬНОЙ ТРУБКЕ

Введение

0.1. Постановка задачи и формулировка результата. В. Н. Берестовский в [3] доказал следующую характеризацию изометрий пространств А. Д. Александрова отрицательной кривизны.

Теорема 1. *Пусть X – локально компактное, геодезически полное $CAT(\kappa)$-пространство, $\kappa < 0$, все сферы которого линейно связны. Тогда всякая биекция $f\colon X \to X$, для которой f и f^{-1} отображают всякий шар фиксированного радиуса r на шар радиуса r, есть изометрия.*

Основу доказательства составляет следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть X – локально компактное, геодезически полное, связное на бесконечности $CAT(\kappa)$-пространство, $\kappa < 0$, и пусть $V \subset X \times X$ – диагональная трубка, соответствующая числу $r > 0$. Тогда метрика пространства X однозначно восстанавливается по V.*

Здесь
$$V := \{(x, y) \in X \times X \colon |xy| \leqslant r\} \subset X \times X,$$
где $|xy|$ – расстояние между точками x, $y \in X$.

В [3] поставлен вопрос о возможности обобщения указанных теорем на случай пространств А. Д. Александрова неположительной кривизны. В настоящей статье дается частичный положительный ответ на поставленный вопрос. Иначе говоря, в работе доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть (X, d) – локально компактное, геодезически полное $CAT(0)$-пространство топологической размерности > 1. Если всякий геодезический отрезок в X допускает единственное* *продолжение до полной геодезической, то метрика d восстанавливается по диагональной трубке $V \subset X \times X$, соответствующей числу $r > 0$.*

Локально компактное полное пространство с внутренней метрикой, подчиненной условиям неналегания и локальной продолжимости кратчайших, называется *G-пространством Буземана.* В [4] показано, что $CAT(0)$-пространство, являющееся пространством Буземана, есть риманово многообразие с непрерывными относительно дистанционных координат компонентами метрического тензора. Поэтому условие связности на бесконечности пространства X эквивалентно ограничению $n > 1$ на его топологическую размерность $n := \mathrm{TopDim}(X)$.

Задачи, решаемые в статье, тесно связаны с вопросом, поставленным А. Д. Александровым в 1960-х годах:

- При каких условиях отображение метрического пространства в себя, сохраняющее фиксированное расстояние, к примеру расстояние 1, есть изометрия этого метрического пространства?

Этот и ряд аналогичных вопросов частично решаются в работах самого А. Д. Александрова. Так в [1] доказывается цикл теорем, дающих достаточные условия, при которых отображение классических пространств постоянной кривизны, сохраняющее конгруэнтность фигур, является изометрией. Для евклидова пространства поставленная выше задача решена Ф. С. Бэкманом и Д. А. Куарлесом [2], для пространства Лобачевского – А. В. Кузьминых [8].

Структура работы.

Настоящая статья содержит вводную и две основных части в соответствии с типом рассматриваемых геодезических. Во вводной части представлены основные понятия и факты, которыми пользуется автор (п. 0.2), и определяется отношение параллельной эквивалентности r-последовательностей. Первая основная часть посвящена восстановлению метрики на геодезической высшего ранга, т. е. геодезической, которая служит границей некоторой плоской полосы; вторая – на геодезической ранга 1. В каждом случае вводится подходящий инструмент: в случае геодезической высшего ранга – “тесемки”, в случае ранга 1 – “ножницы”. Метод использования ножниц во многом сходен с методом восстановления метрики гиперболического пространства, предложенным в [3].

Благодарности. Автор выражает глубочайшую признательность В. Н. Берестовскому за оказанную поддержку и ценные замечания, высказанные в ходе работы над статьей. Автор также благодарен коллективу геометрического семинара ПОМИ РАН за внимание к настоящей работе и полезную дискуссию. Особая благодарность С. В. Буяло, подсказавшему автору простой и короткий способ доказательства существования "ножниц".

0.2. Предварительные понятия и факты. Здесь и в дальнейшем X – локально компактное, геодезически полное $CAT(0)$-пространство (пространство Адамара). Расстояние между точками x, $y \in X$ обозначается через $|xy|$. Геодезический отрезок, соединяющий точки x, $y \in X$, будет обозначаться через $[xy]$, а луч, выходящий из точки x в направлении бесконечно удаленной точки $\xi \in \partial_\infty X$, через $[x\xi\rangle$. Через $\mathbb{U}_{x,\rho}$ будем обозначать открытый шар радиуса ρ с центром в $x \in X$, а через $\mathbb{B}_{x,\rho}$ – соответствующий замкнутый шар.

Основные факты, касающиеся геометрии так называемых $CAT(\kappa)$-*пространств*, достаточно известны (см., например, [5, 6]). Ниже приводятся некоторые понятия, введенные В. Н. Берестовским [3], и основные их свойства.

Прежде всего отметим, что диагональная трубка V определяет при всех $n \in \mathbb{N}$ отношения

$$nV := \{(x,y) \in X \times X : \quad |xy| \leqslant nr\},$$

$$\partial(nV) := \{(x,y) \in X \times X : |xy| = nr\}$$

и

$$\mathrm{Int}(nV) := nV \setminus \partial(nV).$$

С их помощью определяется основной инструмент, использованный в [3], – r-*последовательности*. Инвариантное определение r-последовательности можно дать следующим образом: r-*последовательностью* в пространстве X называется гомотетия $\mathbb{Z} \to X$ с коэффициентом r, т.е. занумерованная целыми числами последовательность $\{x_z\}_{z\in\mathbb{Z}} \subset X$, для которой при любых z_1, $z_2 \in \mathbb{Z}$ выполнено равенство $|x_{z_1}x_{z_2}| = r|z_2 - z_1|$. Из геометрических свойств пространства X немедленно следует, что:

- всякая r-последовательность однозначно определяет содержащую ее геодезическую в X,
- свойство последовательности $\{x_z\}$ быть r-последовательностью проверяется по V, и
- V позволяет определить, являются ли асимптотическими в каком-нибудь из направлений геодезические, содержащие две заданные r-последовательности $\{x_z\}$ и $\{y_z\}$.

Отрезок r-последовательности $\{x_z\} \subset X$, заключенный между точками x_z и x_{z+k}, будем обозначать $[x_z, \dots, x_{z+k}]_r$. Бесконечно удаленные точки, задаваемые r-последовательностью $\{x_z\}$, обозначаются через $x_{+\infty}$ и $x_{-\infty}$.

Наконец, важный прием, предложенный в [3] и используемый в моей работе, – отображение $R_{\gamma_1\gamma_2}$ геодезической на асимптотическую с ней геодезическую при помощи функций Буземана. Пусть $\gamma_1,\ \gamma_2 \colon \mathbb{R} \to X$ – две асимптотические геодезические с $\gamma_1(+\infty) = \gamma_2(+\infty)$. Пусть b – функция Буземана, соответствующая идеальной точке $\gamma_i(+\infty)$:

$$b(x) := \lim_{t\to\infty}(|x\,\gamma(t)| - t).$$

Тогда существуют натуральные параметризации геодезических γ_i, при которых

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad b(\gamma_1(t)) = b(\gamma_2(t)). \tag{0.1}$$

В этом случае положим $R_{\gamma_1\gamma_2}(\gamma_1(t)) := \gamma_2(t)$. Так определенное отображение $R_{\gamma_1\gamma_2}$ не зависит от выбора функции Буземана b и параметризаций, удовлетворяющих условию (0.1). В [3] показано, что если определено отношение принадлежности точек геодезическим γ_i, то отображение $R_{\gamma_1\gamma_2}$ определяется отношением V.

0.3. Параллельная эквивалентность. Пусть $(\{x_z\}, \{y_z\})$ – пара r-последовательностей в пространстве X. Будем говорить, что они *параллельно-эквивалентны*, если расстояние Хаусдорфа между множествами $\{x_z\}$ и $\{y_z\}$ конечно:

$$\mathrm{Hd}\,(\{x_z\}, \{y_z\}) < +\infty.$$

Для такого отношения будем использовать обозначение $\{x_z\} \parallel \{y_z\}$. Отношение “быть параллельно-эквивалентными”, очевидно, действительно является отношением эквивалентности на множестве всех r-последовательностей в X. Фактически, $\{x_z\} \ \parallel \{y_z\}$

в том и только в том случае, когда геодезические, содержащие $\{x_z\}$ и $\{y_z\}$, совпадают или параллельны.

Лемма 0.2. *Отношение параллельной эквивалентности определяется отношением V на X.*

Доказательство. $\{x_z\} \parallel \{y_z\}$ тогда и только тогда, когда

$$\exists\, k \in \mathbb{N} \quad \forall\, z \in \mathbb{Z} \quad (x_z,\, y_z) \in kV.$$

Это вполне доказывает лемму. □

r-последовательность называется r-последовательностью *ранга* 1, если существует единственная геодезическая γ в X, содержащая все r-последовательности, параллельно эквивалентные ей. В этом случае γ не имеет параллельных ей геодезических в X и является *геодезической ранга* 1. В противном случае будем говорить, что r-последовательность и содержащая ее геодезическая γ имеют *ранг* > 1 или *высший ранг*. Свойство произвольной r-последовательности $\{x_z\}$ иметь ранг 1 или > 1 определяется отношением V: $\{x_z\}$ имеет ранг > 1 тогда и только тогда, когда существует такая r-последовательность $\{y_z\}$, параллельно эквивалентная ей и отличная от $\{x_{z\pm 1}\}$, что $|\,x_0\, y_0\,| = r$.

Дальнейшее исследование сводится к отдельному рассмотрению геодезических в соответствии с их рангом. Будет показано, что метрика пространства X восстанавливается на каждой такой геодезической. Сначала рассмотрим случай высшего ранга.

§1. Геодезические высшего ранга

1.1. Расщепление класса параллельной эквивалентности. Для геодезической $c : (-\infty, +\infty) \to X$, соединяющей идеальные точки $\xi_+ := c(+\infty)$ и $\xi_- := c(-\infty)$ и содержащей точку $x_0 = c(0)$, обозначим через $\mathrm{hs}\,(\xi_\pm, x_0)$ орисферы с центрами $\xi_\pm$, проходящие через x_0, и $\mathrm{hb}\,(\xi_\pm)$ – оришары с центрами в $\xi_\pm$, имеющие своими границами орисферы $\mathrm{hs}\,(\xi_\pm, x_0)$. Для точек $x \in X$ и $\xi, \eta \in \partial_\infty X$ угол в точке x между лучами $[x\,\xi\rangle$ и $[x\,\eta\rangle$ обозначается через $\angle_x(\xi,\, \eta)$.

Следующая простая лемма – результат достаточно известный, см., например, [7, лемма 5].

Лемма 1.1. *Пусть*

$$C := \{y \in X \mid \angle_y(\xi_-,\, \xi_+) = \pi\}.$$

Тогда

$$\mathrm{hs}\,(\xi_-,\,x_0)\cap\mathrm{hs}\,(\xi_+,\,x_0)=\mathrm{hb}\,(\xi_-,\,x_0)\cap\mathrm{hb}\,(\xi_+,\,x_0),$$

C есть объединение всех геодезических, параллельных c, C – замкнутое выпуклое множество в X, и C расщепляется в произведение

$$C=C'\times c,$$

где $C':=\mathrm{hs}\,(\xi_-,\,x_0)\cap\mathrm{hs}\,(\xi_+,\,x_0)$ – замкнутое выпуклое подмножество X.

Таким образом, множество C, включающее все точки всех r-последовательностей, параллельно-эквивалентных данной r-последовательности $\{x_z\}\subset X$, имеет расщепление вида $C=C'\times c$, определенное леммой 1.1. C' имеет больше одной точки тогда и только тогда, когда r-последовательность $\{x_z\}\subset X$ имеет высший ранг.

Замечание. Пусть r-последовательность $\{x'_z\}$ параллельно эквивалентна r-последовательности $\{x_z\}\subset X$. Обозначим через $C'(x'_z)$ слой произведения $C=C'\times c$, содержащий точку x'_z. Из того, что орисферы $\mathrm{hs}\,(\xi_\pm,\,x_0)$ восстанавливаются по V, немедленно следует, что по V определяется и *горизонтальная структура* расщепления. Иначе говоря, по V определяются слои вида $C'(x)$, которые мы будем называть *горизонтальными сечениями C*.

По отношению V на множестве горизонтальных сечений C следующим образом восстанавливается отношение порядка. Мы будем говорить, что сечение $C'(x)$ множества C *лежит ниже* сечения $C'(y)$, если луч $[x\xi_+\rangle$ пересекает $C'(y)$. В этом случае $\mathrm{hb}\,(\xi_-,\,x)\cap\mathrm{hb}\,(\xi_+,\,y)=\varnothing$. Для завершения рассмотрения случая геодезической c ранга >1 достаточно восстановить расстояния между горизонтальными сечениями C и отношение принадлежности точек c.

1.2. Тесемки.

Определение. *Будем говорить, что $4p$ ($p\in\mathbb{N}$) попарно параллельно-эквивалентных r-последовательностей*

$$\{x_{ij;z}\},\quad i=\overline{0,3},\quad j=\overline{1,p}$$

образуют p-тесемку, если следующие $4p+4$ точки

$$
\begin{aligned}
&x_{i10}, \ldots, x_{ip0},\ i=\overline{0,\,3},\\
&x_{0,\,1,\,2p-1},\ x_{2,\,p,\,1-2p},\ x_{3,\,p-1,\,1-2p}, x_{3,\,p,\,1-2p}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

дополнительно удовлетворяют следующей системе из $2p$ соотношений, задающих отрезки r-последовательностей:

$$
\begin{cases}
[x_{010},\ x_{110},\ x_{210},\ x_{310}]_r,\\
\ldots\\
[x_{0p0},\ x_{1p0},\ x_{2p0},\ x_{3p0}]_r\ ,\\
[x_{020},\ x_{110},\ x_{2,p,1-2p},\ x_{3,p-1,1-2p}]_r\ ,\\
[x_{030},\ x_{120},\ x_{210},\ x_{3,p-1,1-2p}]_r\ ,\\
[x_{040},\ x_{130},\ x_{220},\ x_{310}]_r\ ,\\
\ldots\\
[x_{0p0},\ x_{1,p-1,0},\ x_{2,p-2,0},\ x_{3,p-3,0}]_r\ ,\\
[x_{0,1,2p-1},\ x_{1p0},\ x_{2,p-1,0},\ x_{3,p-2,0}]_r\ .
\end{cases}
$$

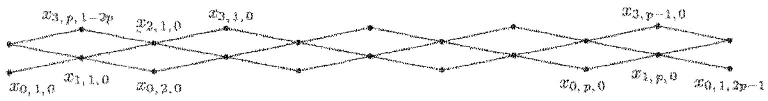


Рис. 1. p-тесемка.

Поскольку r-последовательности определяются отношением V, то и p-тесемка также определяется отношением V. На рис. 1 показан фрагмент p-тесемки. Здесь выделена лишь часть точек r-последовательностей, формирующих p-тесемку. Основная идея заключается в том, что на промежутке между точками x_{010} и $x_{0,1,2p-1}$, принадлежащими одной и той же r-последовательности, расположены $2(p-1)$ точек этой r-последовательности, которые делят отрезок соответствующей геодезической на $2p-1$ равных отрезков, и в то же время на этом же отрезке указанной геодезической расположены $p-1$ точек вида x_{0j0}, $j=\overline{2,\,p}$, которые делят его на p равных отрезков. Таким образом, все точки r-последовательностей $\{x_{0jz}\}$, попадающие на отрезок

$[x_{010}\, x_{0,1,2p-1}]$, делят его на $p(2p-1)$ равных отрезка, и, в частности, отрезок $[x_{010}\, x_{011}]$ делится точками

$$x_{0,p,3-2p},\ x_{0,p-1,5-2p}\,,\ \ldots,\ x_{0,\,2,\,-1}$$

на p равных отрезков.

Теперь план восстановления метрики геодезической высшего ранга сводится к следующему. Если выбранная r-последовательность $\{x_z\}$ имеет ранг > 1, то содержащая ее геодезическая $c :\ (-\infty, +\infty) \to\ X$ включается как граница в некоторую плоскую полосу (вообще говоря, не в единственную). Для достаточно большого P при всех $p > P$ существует p-тесемка, определенная семейством r-последовательностей вида (1.2), для которой $x_z = x_{01z}$ при всех $z \in \mathbb{Z}$. Точки r-последовательностей x_{0jz} для всевозможных таких p-тесемок при всех $p > P$ заполняют множество r-рациональных точек на рассматриваемой геодезической.

Далее, как уже отмечено, орисферы и оришары $CAT(0)$-пространства X определяют горизонтальные сечения множества C. Тем самым, для расщепления $C = \mathbb{R} \times C'$ метрика сомножителя $\mathbb{R}$ восстанавливается по отношению V.

После этого остается лишь показать, что принадлежность точек геодезической c восстанавливается по V. Для r-рациональных точек это следует немедленно из построения тесемок, для иррациональных точек оказывается возможным предельный переход, осуществляемый при помощи шаров.

1.2. Восстановление метрики геодезической высшего ранга.

Лемма 1.4. *Всякая p-тесемка в пространстве X содержится в некоторой плоской полосе.*

Доказательство. Пусть p-тесемка определена r-последовательностями (1.2). Рассмотрим плоскую полосу F, заключенную между параллельными геодезическими c и c', содержащими, соответственно, r-последовательности $\{x_{01z}\}$ и $\{x_{31z}\}$. Тогда в этой же плоской полосе содержатся r-последовательности $\{x_{11z}\}$ и $\{x_{21z}\}$.

Покажем, что плоская полоса F в действительности содержит все r-последовательности в (1.2). Рассмотрим точки

$$x_{020}, \quad x_{110}, \quad x_{210}, \quad x_{310}, \quad x_{220}, \quad x_{120}. \tag{1.5}$$

Для них из (1.3) имеем соотношения:

$$[x_{020},\, x_{120},\, x_{220}]_r \quad \text{и} \quad [x_{1,\,p,\,1-2p},\, x_{2,\,p,\,1-2p},\, x_{3,\,p,\,1-2p}]_r.$$

В силу выпуклости метрической функции в пространстве неположительной кривизны функция

$$d_{2,\,1}(t) := |\, x_{t20}\, x_{t+1,\,1,\,0}\,|,$$

где $x_{tj\,0} = c_j(t)$, а $c_j : [0, 2r] \to X, \quad j = \overline{1,2},$ – геодезические отрезки, соединяющие $x_{0j\,0}$ и $x_{1j\,0}$, является выпуклой функцией. Но

$$d_{2,\,1}(0) = d_{2,\,1}(1) = d_{2,\,1}(2) = r,$$

а значит $d_{2,\,1}(t) = r$ при всех $t \in [0,\, 2]$, и точки (1.5) принадлежат изометрически вложенному в X плоскому параллелограмму

$$x_{020}\, x_{110}\, x_{310}\, x_{220}. \tag{1.6}$$

Аналогично, шестерка точек

$$x_{210}, \quad x_{310}, \quad x_{220}, \quad x_{130}, \quad x_{030}, \quad x_{120}$$

принадлежит изометрически вложенному в X плоскому параллелограмму

$$x_{210}\, x_{310}\, x_{130}\, x_{030}. \tag{1.7}$$

Параллелограммы (1.6) и (1.7) имеют общую часть – параллелограмм

$$x_{210}\, x_{310}\, x_{220}\, x_{120},$$

и поэтому их объединение есть невыпуклый плоский шестиугольник

$$x_{020}\, x_{110}\, x_{310}\, x_{130}\, x_{030}\, x_{120}.$$

Он изометричен невыпуклому шестиугольнику на плоскости, составленному из двух равных параллелограммов, метрика которого индуцирована метрикой плоскости. Продолжая присоединять к этому шестиугольнику параллелограммы (см. рис. 1), получим плоский многоугольник

$$\begin{gathered} P := x_{020}\, x_{110}\, x_{310}\, x_{220}\, x_{320}\, \ldots \\ \ldots x_{3p-10}\, x_{2p0}\, x_{3p0}\, x_{2,1,2p-1}\, x_{0,1,2p-1}\, x_{0p0}\, x_{1,p-1,0}\, \ldots \\ \ldots x_{130}\, x_{030}\, x_{120}, \end{gathered} \tag{1.8}$$

изометричный невыпуклому плоскому $(4p-2)$-угольнику, составленному из $2p-3$ последовательно перекрывающих друг друга параллелограммов.

Геодезические отрезки $x_{110}\,x_{1,1,2p-1}$ и $x_{210}\,x_{2,1,2p-1}$ содержатся в P целиком. Таким образом, пересечение P с плоской полосой F содержит параллелограмм

$$x_{110}\,x_{210}\,x_{2,\,1,\,2p-1}\,x_{1,\,1,\,2p-1}.$$

Более того, P содержится в параллелограмме $x_{010}\,x_{310}\,x_{3,1,2p-1}$ $x_{0,1,2p-1}$, и, следовательно, в F. Поскольку в P имеются точки всех r-последовательностей (1.2), делаем вывод, что вся тесемка содержится в F. □

Под *шириной* p-тесемки (1.3) в $CAT(0)$-пространстве X будем понимать расстояние между параллельными геодезическими, содержащими r-последовательности $\{x_{0jz}\}$ и $\{x_{3jz}\}$.

Лемма 1.9. *Ширина $s(p)$ произвольной p-тесемки в $CAT(0)$-пространстве равна*

$$s(p) = \frac{3\sqrt{4p-1}}{2p}\cdot r.$$

Доказательство. Поскольку любая плоская полоса в $CAT(0)$-пространстве изометрична полосе на евклидовой плоскости, достаточно найти ширину произвольной плоской евклидовой p-тесемки. Эта задача решается непосредственным вычислением. □

Следствие 1.10. *Для любой плоской полосы Π, содержащей геодезическую c в X, существует такое $P>0$, что при всех $p>P$ полоса Π содержит p-тесемку, порожденную семейством r-последовательностей вида (1.2), так что $\{x_{0jz}\}\subset c$.*

Лемма 1.11. *Пусть геодезическая $c:(-\infty,+\infty)\to X$ в $CAT(0)$-пространстве X содержит r-последовательность $\{x_z\}$, $x_0=c(0)$, ранга >1. Тогда для любого рационального числа $q:=m/n$ и для p, кратного n, всякая p-тесемка с $x_z=x_{01z}$ содержит точку $c(qr)=x_{0jz'}$ при*

$$j := n+1-m'$$

и

$$z' := q'+1-2k(n-m'),$$

где $q' := [q]$ – *целая часть и* $m'/n := \{q\}$ – *дробная часть числа* q.

Доказательство. Получается вычислением для стандартной плоской p-тесемки. □

Таким образом, при всех p, кратных n, всякая p-тесемка, построенная на точках x_z заданной r-последовательности $\{x_z\}$, содержит точки $c(\frac{m}{n}r)$ как точки с определенным по числу p мультииндексом. Теперь мы готовы окончательно доказать основную теорему в рассматриваемом случае.

Теорема 1.12. *Пусть* $c : (-\infty, +\infty) \to X$ – *геодезическая высшего ранга в пространстве* X, *содержащая* r-*последовательность* $\{x_z\}$. *Тогда ее метрика восстанавливается по диагональной трубке* V.

Доказательство. Как уже отмечено, отношение V определяет свойство r-последовательности $\{x_z\}$ иметь ранг > 1. Более того, V определяет множество C, определенное леммой 1.1. Далее, вследствие п. 1.1 по V восстанавливается расщепление $C = C' \times c$, а в силу леммы 1.1 на c отношением V определены все r-рациональные точки, т.е. точки вида $c(qr)$, где $q \in \mathbb{Q}$.

Пусть число t иррационально и $\{t_n, t'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность его рациональных приближений с недостатком и с избытком соответственно. Тогда

$$c(tr) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{B}_{c((t'_n-1)r),\, r} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{B}_{c((t_n+1)r),\, r},$$

и точку $c(tr)$ можно найти с помощью V. □

Будем говорить, что геодезическая a (или принадлежащая ей r-последовательность $\{x_z\}$) *виртуально имеет высший ранг*, если существует геодезическая b ранга > 1 и такая конечная последовательность геодезических $a := a_0, a_1, \ldots, a_n := b$, что при всех $i = \overline{1,n}$ геодезические a_{i-1} и a_i асимптотичны друг другу в одном из направлений. В частности, геодезическая ранга > 1 сама виртуально имеет высший ранг. Если геодезическая a не является геодезической виртуально высшего ранга, то будем говорить, что для нее самой и для всякой определяющей ее r-последовательности свойство иметь ранг 1 является *строгим*, т.е. *a строго имеет ранг* 1.

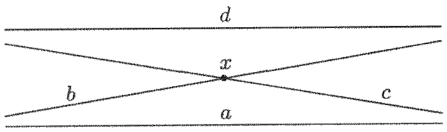
Следствие 1.13. *Пусть a – геодезическая в X, виртуально высшего ранга. Тогда отношение V однозначно восстанавливает метрику на a.*

Доказательство. Доказывается повторным применением переноса метрики с геодезической на асимптотическую с ней геодезическую при помощи орисфер. □

§2. Геодезические ранга 1

2.1. Ножницы. В дальнейшем пространство X – это $CAT(0)$-пространство, являющееся G-пространством Буземана. В этом случае пространство X является римановым многообразием размерности $n \geqslant 1$ с непрерывным относительно дистанционных координат метрическим тензором. Экспоненциальное отображение в любой точке пространства X является гомеоморфизмом, и все метрические сферы в X гомеоморфны стандартным сферам $\mathbb{S}^{n-1}$.

Будем говорить, что 4 полных геодезических $a, b, c, d : (-\infty, +\infty) \to X$ образуют *ножницы* с *центром* $x \in X$, если:



Ножницы $\langle a, b, c, d; x\rangle$.

- $a(-\infty) = b(-\infty)$, $a(+\infty) = c(+\infty)$, $c(-\infty) = d(-\infty)$, $b(+\infty) = d(+\infty)$ и
- $b \cap c = \{x\}$.

Такую конфигурацию будем обозначать $\langle a, b, c, d; x\rangle$ (см. рис. 2). В указанных обозначениях геодезические a и d будем называть *основаниями* ножниц. При этом, одну из них, например a, будем выделять как *нижнее основание*. В написании $\langle a, b, c, d; x\rangle$ нижнее основание ставится на первое место. В общем случае одно или оба основания могут также проходить через центр ножниц, но если X имеет свойство неналегания геодезических, это исключено.

Заметим, что ножницы определяются выбором их нижнего основания a и центра x, вообще говоря, неоднозначно, но с точностью до параллельности верхних оснований: для ножниц $\langle a, b, c, d_1, x\rangle$ и $\langle a, b, c, d_2, x\rangle$ геодезические d_1 и d_2 параллельны. Однако в случае, когда a строго имеет ранг 1, это влечет однозначную определенность ножниц по нижнему основанию a и центру x.

Основное преимущество, которое дают ножницы, заключается в *преобразовании сдвига* T, которое они порождают на нижнем основании. Опишем его подробно. Пусть R_{ac} – отображение геодезической a на геодезическую c, порожденное функцией Буземана $b_{a(+\infty),x}$: всякая точка $m \in a$ переходит в единственную точку $m' = R_{ac}(m) \in c$, для которой $b_{a(+\infty),x}(m') = b_{a(+\infty),x}(m)$. Аналогично определяются отображения R_{cd}, R_{db} и R_{ba} как отображения, сохраняющие на соответствующих прямых функции Буземана $b_{d(+\infty),x}$, $b_{d(-\infty),x}$ и $b_{a(-\infty),x}$, соответственно. Сдвиг T есть композиция

$$T := R_{ba} \circ R_{db} \circ R_{cd} \circ R_{ac} : a \to a.$$

Поскольку все отображения, участвующие в определении сдвига T, являются изометрическими отображениями, то T – изометрия геодезической a, сохраняющая ее направление. *Величина сдвига* T, т.е. разность $b_{a(-\infty),x}(T(m)) - b_{a(-\infty),x}(m)$, не зависит от выбора точки $m \in a$. Будем обозначать эту величину δT.

Эта величина δT допускает и иную интерпретацию. Пусть b_{a-}, b_{a+}, b_{d-} и b_{d+} – четыре функции Буземана, такие, что существуют точки $p \in a$ и $q \in d$ с $b_{a-}(p) = b_{a+}(p) = b_{d-}(q) = b_{d+}(q) = 0$.

Теорема 2.1.

$$\delta T = b_{a-}(x) + b_{a+}(x) + b_{d-}(x) + b_{d+}(x) > 0, \tag{2.2}$$

где x – центр ножниц $\langle a, b, c, d; x\rangle$, определяющих сдвиг T.

Доказательство. Заметим, во-первых, что суммы $b_{a-}(x)+b_{a+}(x)$ и $b_{d-}(x) + b_{d+}(x)$ не зависят от выбора точек $p \in a$ и $q \in d$, так как, скажем, при переходе от точки p к точке $p' \in a$ функции b_{a-} и b_{a+} меняются, соответственно, на константы, равные $b_{a-}(p')$ и $b_{a+}(p')$, причем $b_{a-}(p') = -b_{a+}(p')$. Имеем:

$$\delta T = t' - t,$$

где
$$a(t') = T(a(t)).$$

Заметим, что если $d(s) = R_{cd} \circ R_{ac}(a(0))$, то и при всех $t \in \mathbb{R}$
$$d(s+t) = R_{cd} \circ R_{ac}(a(t)).$$
Аналогично, если $a(t) = R_{ba} \circ R_{db}(d(0))$, то и для всех $s \in \mathbb{R}$
$$a(t+s) = R_{ba} \circ R_{db}(d(s)).$$

Пусть $p := a(0) = R_{ac}^{-1}(x)$ и $q := d(0) = R_{db}^{-1}(x)$. Тогда
$$b_{a+}(x) = b_{a+}(p) = b_{d+}(x) = b_{d+}(q) = 0$$
и
$$T(p) = R_{ba} \circ R_{db} \circ R_{cd}(x) = R_{ba} \circ R_{db}(d(s)),$$
где $s := b_{d-}(x)$. Далее, имеем:
$$T(p) = a(b_{d-}(x) + t),$$
где $t := b_{a-}(x)$. Таким образом, сдвиг точки $p \in a$, а следовательно и всякой точки геодезической a, равен
$$\delta T = b_{a-}(x) + b_{d-}(x) - 0 = b_{a-}(x) + b_{a+}(x) + b_{d-}(x) + b_{d+}(x).$$

Величина δT положительна, так как пересечения оришаров
$$\mathrm{hb}\,(a(+\infty), x) \cap \mathrm{hb}\,(a(-\infty), x) \quad \text{и} \quad \mathrm{hb}\,(d(+\infty), x) \cap \mathrm{hb}\,(d(-\infty), x)$$
имеют непустые внутренности, откуда $b_{a-}(x) > 0$ и $b_{d-}(x) > 0$. $\square$

2.2. Геометрия идеальной границы $CAT(0)$-пространства. Пусть $a : \mathbb{R} \to X$ – полная геодезическая ранга 1 в X. Пусть $Z \subset X$ – множество тех точек $x \in X$, которые являются центрами ножниц с нижним основанием a. Тогда сдвиги вдоль a, порождаемые ножницами с центрами в Z, задают функцию
$$\delta : Z \to \mathbb{R}_+ \delta(x) = \delta T_x,$$
где T_x – преобразование сдвига геодезической a, порожденное ножницами с центром x. Функция $\delta(x)$ удовлетворяет условию (2.2). Наша следующая цель – показать, что $Z \neq \varnothing$. (См. теорему 2.8.)

Для этого нам понадобятся некоторые сведения из геометрии идеальной границы $\partial_\infty X$ пространства X. По условию пространство X имеет свойство неналегания геодезических, поэтому *коническая* топология в $\partial_\infty X$ определяется топологией его произвольной сферы. В частности, для произвольной точки $y_0 \in X$, идеальной точки $\xi \in \partial_\infty X$ и произвольного числа $t > 0$ семейство множеств

$$\mathcal{B}_{y_0,\,\xi,\,t} := \{\mathcal{U}_\delta(y_0,\,\xi) \mid \delta > 0,\ \xi \in \partial_\infty X\} \tag{2.3}$$

образует базу окрестностей точки ξ в конической топологии на $\partial_\infty X$. Здесь

$$\mathcal{U}_\delta(y_0,\,\xi) := \{\eta \in \partial_\infty X \mid |c(t)d(t)| < \delta\},$$

и $c, d : [0, +\infty) \to X$ – геодезические лучи, выходящие из y_0 в направлении точек $\xi, \eta \in \partial_\infty X$ соответственно.

Помимо конической топологии идеальная граница пространства X обладает также топологией, которая индуцируется на $\partial_\infty X$ так называемой *угловой метрикой*. Для $\xi, \eta \in \partial_\infty X$ угловая метрика определяется равенством

$$\angle(\xi, \eta) := \sup\{\angle_x(\xi, \eta) \mid x \in X\}.$$

Внутренняя метрика на $\partial_\infty X$, порожденная угловой метрикой, называется *метрикой Титса*. Она обозначается Td. Угловая метрика и метрика Титса на $\partial_\infty X$ эквивалентны (т.е. индуцируют на $\partial_\infty X$ одну и ту же топологию). Для идеальной границы X с метрикой Титса на ней будем использовать обозначение $\partial_T X$.

Предложение 2.4 [5, предложение 9.5]. *Угловая метрика как функция $(\xi, \eta) \to \angle(\xi, \eta)$ полунепрерывна снизу относительно конической топологии. Иначе говоря, для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие окрестности $\mathcal{U}$ точки ξ и $\mathcal{V}$ точки η, что для любых $\xi' \in \mathcal{U}$ и $\eta' \in \mathcal{V}$ выполняется неравенство*

$$\angle(\xi', \eta') > \angle(\xi, \eta) - \varepsilon.$$

Как следствие, метрика Титса также полунепрерывна снизу относительно конической топологии.

Предложение 2.5 [5, предложение 9.21]. *Пусть X – конечно компактное $CAT(0)$-пространство и пусть $\xi_0,\ \xi_1 \in \partial_\infty X$ – две различные точки.*

1. *Если* $\operatorname{Td}(\xi_0, \xi_1) > \pi$, *то существует геодезическая* $c : \mathbb{R} \to X$ *с* $c(+\infty) = \xi_0$ *и* $c(-\infty) = \xi_1$;
2. *если не существует геодезической* $c : \mathbb{R} \to X$ *с* $c(+\infty) = \xi_0$ *и* $c(-\infty) = \xi_1$, *то* $\operatorname{Td}(\xi_0, \xi_1) = \angle(\xi_0, \xi_1)$ *и* ξ_0 *и* ξ_1 *соединяются в* $\partial_T X$ *геодезическим сегментом;*
3. *если* $c : \mathbb{R} \to X$ *– геодезическая, то* $\operatorname{Td}(c(-\infty), c(+\infty)) \geqslant \pi$, *и равенство достигается в том и только в том случае, когда* c *ограничивает изометрически вложенную в* X *евклидову полуплоскость;*
4. *если* $\operatorname{diam}(\partial_T X) = \pi$, *то всякая геодезическая линия в* X *ограничивает изометрически вложенную евклидову полуплоскость.*

2.3. Существование ножниц.

Лемма 2.6. *Пусть* $a : \mathbb{R} \to X$ *– геодезическая ранга* 1 *в пространстве* X *и* $x_0 \in a$ *– произвольная точка. Тогда для любой окрестности* $\mathcal{U}^+ \subset \partial_\infty X$ *точки* $a(+\infty)$ *существует окрестность* $N(x_0)$ *точки* x_0, *удовлетворяющая следующему условию: для всякой* $x \in N(x_0)$, *если* $b : \mathbb{R} \to X$ *– геодезическая в* X, *причем* $b(-\infty) = a(-\infty)$ *и* $x \in b$, *то* $b(+\infty) \in \mathcal{U}^+$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не выполняется, т.е. существует окрестность $\mathcal{U}^+$ точки $a(+\infty)$, такая, что в любом открытом шаре $\mathbb{U}(x_0, \delta)$ найдется точка x_δ, для которой геодезическая $b_\delta \ni x_\delta$, асимптотическая с a в направлении $a(-\infty)$, не идет в направлении $\mathcal{U}^+$: $b(+\infty) \notin \mathcal{U}^+$. Будем считать, что для всякой такой геодезической b_δ имеем $x_\delta = b_\delta(0)$. Пусть также $x_0 := a(0)$ и $y_0 := a(-1)$. Тогда для произвольного $\delta > 0$

$$|y_0 b_\delta(-1)| < \delta.$$

Рассмотрим геодезическую $b_{\delta/2}$ и луч $b'_{\delta/2} := [y_0 b_{\delta/2}(+\infty)\rangle$:

$$|x_0\, b'_{\delta/2}(1)| \leqslant |x_0\, b_{\delta/2}(0)| + |b_{\delta/2}(0) b'_{\delta/2}(1)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

т.е. при любом $\delta > 0$ идеальная точка $b'_{\delta/2}(+\infty)$ принадлежит множеству $\mathcal{U}_\delta(y_0, a(+\infty))$, но не принадлежит $\mathcal{U}^+$. Это противоречит тому, что семейство (2.3) образует базу окрестностей идеальной точки $a(+\infty)$. $\square$

Лемма 2.7. *Пусть a – геодезическая ранга 1 в пространстве X. Тогда точки $a(-\infty)$ и $a(+\infty)$, обладают окрестностями $\mathcal{U}^-$ и $\mathcal{U}^+$, соответственно, такими, что выполняется следующее свойство:*

Пусть $b, c : \mathbb{R} \to X$ – геодезические в X такие, что

- $b(-\infty) = a(-\infty)$,
- $b(+\infty) \in \mathcal{U}^+$,
- $c(-\infty) \in \mathcal{U}^-$ *и*
- $c(+\infty) = a(+\infty)$.

Тогда $\mathrm{Td}\,(c(-\infty), b(+\infty)) > \pi$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не выполняется, т.е. в любых окрестностях $\mathcal{U}^-$ и $\mathcal{U}^+$ точек $a(-\infty)$ и $a(+\infty)$ найдутся точки $\xi \in \mathcal{U}^-$ и $\eta \in \mathcal{U}^+$, для которых $\mathrm{Td}\,(\xi, \eta) \leqslant \pi$. Тогда по полунепрерывности снизу метрики Титса $\mathrm{Td}\,(a(-\infty), a(+\infty)) = \pi$, и геодезическая a ограничивает полуплоскость. Противоречие. $\square$

Будем говорить, что точка $x \notin a$ *проектируется* в точку $x_0 \in a$, если x_0 – единственная ближайшая к x точка геодезической a. Точка x_0 в свою очередь называется *проекцией* точки x. Условие на топологическую размерность $\mathrm{TopDim}(X) > 1$ и геодезическая полнота пространства X влекут, что для каждой точки $x_0 \in a$ множество $\pi_a^{-1}(x_0)$ точек X, проектирующихся в x_0, – непустое звездное множество. Здесь $\pi_a : X \to a$ – *отображение проектирования*, сопоставляющее с каждой точкой $x \in X$ ее проекцию на a.

Теорема 2.8. *Пусть X – геодезически полное $CAT(0)$-пространство без налегания геодезических, пусть $\mathrm{TopDim}(X) > 1$, и $a : (-\infty, +\infty) \to X$ – геодезическая ранга 1. Тогда $Z \neq \varnothing$. Более того, для любой точки $x_0 \in a$ существует такая ее окрестность $N(x_0)$, что всякая ее точка $x \in N(x_0) \setminus a$, проектирующаяся в x_0, принадлежит Z.*

Доказательство. Выберем окрестности $\mathcal{U}^-$ и $\mathcal{U}^+$ точек $a(-\infty)$ и $a(+\infty)$ соответственно, как в лемме 2.7. Для них в силу леммы 2.6 существуют окрестности $N^-(x_0)$ и $N^+(x_0)$ такие, что всякая геодезическая b, для которой $b(-\infty) = a(-\infty)$ и $b(0) \in N^-(x_0)$ имеет положительный конец $b(+\infty) \in \mathcal{U}^+$, а всякая геодезическая c, для которой $c(+\infty) = a(+\infty)$ и $c(0) \in N^-(x_0)$ имеет отрицательный конец $c(-\infty) \in \mathcal{U}^-$. Пусть

$$N(x_0) = N^+(x_0) \cap N^-(x_0).$$

Тогда для произвольной точки $x \in N(x_0)$ и для геодезических b и c таких, что $b(0) = c(0) = x$ и выполнены условия леммы 2.7, справедливо неравенство $\mathrm{Td}\,(c(-\infty), b(+\infty)) > \pi$. Это значит, что точки $c(-\infty)$ и $b(+\infty)$ можно соединить геодезической в X. $\square$

2.4. Непрерывность функции сдвига.

Теорема 2.9. *Пусть $\gamma : (-\infty, +\infty) \to X$ – геодезическая строго ранга 1, $x \notin \gamma$ – произвольная точка в X и x_1 – ее проекция на γ. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ точки $\xi = \gamma(+\infty)$ и $\eta = \gamma(-\infty) \in \partial_\infty X$ обладают такими окрестностями $\mathcal{U}_+$ и $\mathcal{U}_-$ соответственно, что если геодезическая γ' удовлетворяет условиям $\gamma'(+\infty) \in \mathcal{U}_+$ и $\gamma'(-\infty) \in \mathcal{U}_-$, а $x_1' \in \gamma'$ – проекция точки x на γ', то $|x_1 x_1'| < \varepsilon$.*

Для доказательства понадобится следующее простое техническое утверждение.

Лемма 2.10. *Пусть d – геодезическая в $CAT(0)$-пространстве X, $x \notin d$ и x' – проекция точки x на d. Тогда для любой точки $y \in d$*

$$|\,x'y| \leqslant \sqrt{|\,xy|^2 - |\,xx'|^2}.$$

Доказательство. Предположим противное: пусть $|\,x'y| > \sqrt{|\,xy|^2 - |\,xx'|^2}$. Рассмотрим треугольник сравнения $\overline{x}\overline{x}'\overline{y}$ для треугольника $xx'y$. В силу предположения $\angle_{\overline{x}'}\overline{x}\,\overline{y} < \frac{\pi}{2}$, и существует точка $\overline{m} \in \overline{x}'\overline{y}$, для которой $|\,\overline{x}\,\overline{m}| < |\,\overline{x}\,\overline{x}'|$. Тогда для соответствующей ей точки $m \in \triangle xx'y$ выполнена оценка $|\,xm| \leqslant |\,\overline{x}\,\overline{m}| < |\,xx'|$. Противоречие. $\square$

Доказательство теоремы 2.9. Пусть $\gamma : (-\infty, +\infty) \to X$ – заданная геодезическая и $\sigma > 0$ – произвольное число. Для точки $\xi \in \partial_\infty X$ положим

$$\mathrm{HS}_\xi(t, \rho) \colon = \mathrm{hs}\,(\xi, d(t)) \cap \mathbb{B}_{\gamma(t),\,\rho}.$$

Нам понадобится тот факт, что коническая топология идеальной границы произвольного $CAT(0)$-пространства X обладает базой из множеств вида

$$\mathcal{U}(\xi, x_0, K, \delta) := \{\eta \in \partial_\infty X : |\,c(K)d(K)| < \delta, \quad c = [x_0, \xi\rangle; d = [x_0, \eta\rangle\}.$$

Выберем произвольное достаточно большое число $K > 0$. Например, достаточно, чтобы для K выполнялось следующее требование:

если $y \in \mathbb{U}_{\gamma(-K),\sigma}$, то $[y\gamma(+\infty)\rangle \cap \mathrm{HS}_{\gamma(+\infty)}(K, \frac{\sigma}{4}) \neq \varnothing$,

и

если $z \in \mathbb{U}_{\gamma(K),\sigma}$, то $[z\gamma(-\infty)\rangle \cap \mathrm{HS}_{\gamma(-\infty)}(-K, \frac{\sigma}{4}) \neq \varnothing$.

Это требование может быть выполнено в силу условия на ранг геодезической γ.

Рассмотрим множества

$$\mathcal{U}_{+\infty}(K,\sigma) := \Big\{\xi \in \partial_\infty X \mid \forall y \in \mathbb{B}_{\gamma(-K),\,\sigma}:\ [y\xi\rangle \cap \mathrm{HS}_+\Big(K, \frac{\sigma}{2}\Big) \neq \varnothing\Big\}$$

и

$$\mathcal{U}_{-\infty}(K,\sigma) := \Big\{\eta \in \partial_\infty X \mid \forall z \in \mathbb{B}_{\gamma(K),\,\sigma}:\ [z\eta\rangle \cap \mathrm{HS}_-\Big(-K, \frac{\sigma}{2}\Big) \neq \varnothing\Big\},$$

– это множества тех бесконечно удаленных точек, которые являются центрами проектирований на соответствующие орисферы, при которых шар $\mathbb{B}_{\gamma(-K),\,\sigma}$ отображается внутрь $\mathbb{U}_{\gamma(K),\sigma/2}$, а $\mathbb{B}_{\gamma(K),\,\sigma}$ – внутрь шара $\mathbb{U}_{\gamma(-K),\sigma/2}$. Множества $\mathcal{U}_{\pm\infty}(K,\sigma)$ непусты, так как

$$\gamma(+\infty) \in \mathcal{U}_{+\infty}(K,\sigma) \quad \text{и} \quad \gamma(-\infty) \in \mathcal{U}_{-\infty}(K,\sigma).$$

Более того, точки $\gamma(\pm\infty)$ являются для множеств $\mathcal{U}_{\pm\infty}(K,\sigma)$ внутренними точками, это следует из определения стандартной топологии на $\partial_\infty X$ и локальной компактности X.

Пусть теперь $x \notin \gamma$ – произвольная точка, x_1 – ее проекция на γ, и $\varepsilon > 0$. Мы можем также считать, что $\varepsilon < \min\{|\,x\,x_1|, 1\}$, так как все рассмотрения достаточно проводить для сколь угодно малых ε. Положим

$$\sigma := \frac{\varepsilon^2}{9|\,x\,x_1|}.$$

Для числа K, определенного описанными выше условиями, обозначим через $\mathcal{U}_\pm \subset \mathcal{U}_{\pm\infty}(K,\sigma)$ окрестности точек $\gamma(\pm\infty)$, содержащиеся соответственно в $\mathcal{U}_{\pm\infty}(K,\sigma)$.

Подробнее, для произвольной точки $y \in \mathbb{B}_{\gamma(-K),\sigma}$ пусть

$$U_{+,\,y} := \mathcal{U}\Big(\gamma(+\infty),\, y,\, 3K,\, \frac{\sigma}{4}\Big)$$

и пусть
$$V_{+,\,y} := \{z \in X \mid \exists \xi \in U_{+,\,y} : z \in [y\,\xi\rangle\}$$
– конус над $U_{+,\,y}$. Тогда множества $V_{+,\,y}$ образуют открытое покрытие замыкания $\overline{\mathrm{HS}}_+(K, \sigma/2)$. Выберем его конечное подпокрытие $\{V_{+,y_i}\}_{i=1}^N$. Тогда в качестве $\mathcal{U}_+$ можно взять пересечение
$$\mathcal{U}_+ := \bigcap_{i=1}^{N} U_{+,\,y_i}.$$
Аналогично строится окрестность $\mathcal{U}_-$. По полунепрерывности снизу метрики Титса можно считать, что всякая геодезическая γ' с концами в $\mathcal{U}_\pm$ имеет ранг 1.

Покажем, что окрестности $\mathcal{U}_\pm$ удовлетворяют утверждению теоремы: если геодезическая γ' такова, что $\gamma'(\pm\infty) \in \mathcal{U}_\pm$, а $x_1' \in \gamma'$ – проекция точки x на γ', то $|x_1\, x_1'| < \varepsilon$. Для этого сначала покажем, что
$$\gamma' \cap \overline{\mathrm{HS}}_+(K, \frac{\sigma}{2}) \neq \varnothing \quad \text{и} \quad \gamma' \cap \overline{\mathrm{HS}}_-(-K, \frac{\sigma}{2}) \neq \varnothing.$$

Действительно, пусть
$$\pi_+ : \mathrm{HS}_-(-K,\, \sigma) \to \mathrm{HS}_+(K,\, \frac{\sigma}{2})$$
– проекция из $\gamma'(+\infty)$ и
$$\pi_- : \mathrm{HS}_+(K,\, \sigma) \to \mathrm{HS}_-(-K,\, \frac{\sigma}{2})$$
– аналогичная проекция из $\gamma'(-\infty)$. Тогда в силу условия на ранг γ', композиция
$$\pi_- \circ \pi_+ : \mathrm{HS}_-(-K, \sigma) \to \mathrm{HS}_-(-K, \frac{\sigma}{2})$$
– непрерывное отображение, являющееся оператором сжатия на $\mathrm{HS}_-(-K, \sigma)$. Из компактности замыкания $\overline{\mathrm{HS}}_-(-K,\, \sigma/2)$ следует, что оператор сжатия $\pi_- \circ \pi_+$ имеет единственную неподвижную точку в $\overline{\mathrm{HS}}_-(-K,\, \sigma/2)$. Пусть эта точка z имеет образ $y = \pi_+(z)$. Тогда $y \in [z\,\gamma'(+\infty)\rangle$ и $z \in [y\,\gamma'(-\infty)\rangle$, и объединение лучей $[z\,\gamma'(+\infty)\rangle \ni y$ и $[y\,d'(-\infty\rangle \ni z$ даст в точности геодезическую γ'.

Для завершения доказательства оценим расстояние $|x_1'\, x_1|$. Поскольку γ' проходит через внутренние точки шаров $\mathbb{U}(-K, \sigma)$

и $\mathbb{U}(K,\sigma)$, то существует точка $m\in\gamma'$, для которой $|\,m\,x_1| < \sigma$. Теперь имеем:

$$|\,x_1'\,x_1| \leqslant |\,x_1'\,m| + |m\,x_1| \leqslant \sqrt{|\,x\,m|^2 - |\,x\,x_1'|^2} + \sigma. \tag{2.11}$$

Далее, для точки m в силу неравенства треугольника

$$|\,x\,m| < |\,x\,x_1| + \sigma, \tag{2.12}$$

а поскольку x_1 – ближайшая к x точка геодезической γ, а расстояние от x_1' до γ меньше σ, то

$$|\,x\,x_1'| > |\,x\,x_1| - \sigma. \tag{2.13}$$

Подставляя неравенства (2.12) и (2.13) в (2.11), получаем

$$|\,x_1'\,x_1| < \sqrt{(|\,x\,x_1| + \sigma)^2 - (|\,x\,x_1| - \sigma)^2} + \sigma = 2\sqrt{\sigma|\,x\,x_1|} + \sigma$$
$$= \sqrt{\sigma}(2\sqrt{|\,x\,x_1|} + \sqrt{\sigma}) < 3\sqrt{\sigma|\,xx_1|} = \varepsilon. \qquad \square$$

Теорема 2.14. *Пусть X – геодезически полное $CAT(0)$-пространство без налегания геодезических, топологическая размерность которого* $\mathrm{TopDim}(X) > 1$, *$a:(-\infty,+\infty)\to X$ – геодезическая строго ранга* 1. *Тогда функция сдвига δ непрерывна на множестве Z, определсннoм в §2.*

Доказательство. Для доказательства непрерывности δ воспользуемся равенством (2.2). Пусть точка x определяет ножницы $\langle a,b,c,d;x\rangle$. Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Тогда, во-первых, в силу непрерывности функций Буземана b_{a-} и b_{a+} существует такое σ_1, что если для точки $x'\in X$ выполняется неравенство $|\,xx'| < \sigma_1$, то

$$|\,b_{a+}(x') + b_{a-}(x') - b_{a+}(x) - b_{a-}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.15}$$

Во-вторых, воспользовавшись теоремой 2.9, выберем окрестности $\mathcal{U}_+$ и $\mathcal{U}_-$ точек $d(+\infty)$ и $d(-\infty)\in\partial_\infty X$ так, чтобы было выполнено условие: если геодезическая d' такова, что $d'(-\infty)\in\mathcal{U}_-$, $d'(+\infty)\in\mathcal{U}_+$, то для проекции x_1 точки x на d и проекции x_1' точки x на d' справедливо неравенство $|\,x_1x_1'| < \varepsilon/4$. Для этих окрестностей существует такое σ_2, что если точка x' удовлетворяет условиям:

(a) луч $[x'y\rangle$, обратный к лучу $[x'a(-\infty)\rangle$, идет в направлении точки $d'(+\infty)\in\mathcal{U}_+$, (б) луч $[x'z\rangle$, обратный к лучу $[x'a(+\infty)\rangle$, идет в направлении точки $d'(-\infty) \in \mathcal{U}_-$,

(в) $d' : (-\infty, +\infty) \to X$ – геодезическая, соединяющая точки $d'(-\infty)$ и $d'(+\infty)$, и

(г) если $|xx'| < \sigma_2$, то

$$|b_{d'-}(x') - b_{d-}(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

и

$$|b_{d'+}(x') - b_{d+}(x)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Здесь $b_{d'-}$ и $b_{d'+}$ – функции Буземана, соответствующие точкам $d'(-\infty)$ и $d'(+\infty)$, соответственно, и удовлетворяющие условию $b_{d'-}(x_1') = b_{d'+}(x_1') = 0$, а b_{d-}, b_{d+} – аналогичные функции Буземана для геодезической d. В итоге для $\sigma := \min\{\sigma_1, \sigma_2\}$ и для всех x' таких, что $|xx'| < \sigma$ и выполнены условия (а), (б) и (в), имеем оценку:

$$|b_{d'-}(x') + b_{d'+}(x') - b_{d-}(x) - b_{d+}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.16}$$

Сопоставляя неравенства (2.15) и (2.16) с определением (2.2), получаем условие непрерывности функции δ. $\square$

Теорема 2.17. *Пусть $x_0 \in a$ – произвольная точка геодезической a строго ранга 1. Тогда при $x \to x_0$ величина функции сдвига $\delta(x)$ стремится к нулю.*

Доказательство. Определим “закрытые” ножницы $\langle a, a, a, a; x_0\rangle$ как конфигурацию из четырех экземпляров геодезической a и центра x_0. Для них, аналогично предыдущему, имеется преобразование сдвига $T := \mathrm{id}_a$, для которого $\delta T = 0$, и функция δ остается непрерывной, будучи продолженной на $Z \cup a$ равенством $\delta(x) := 0$ для $x \in a$. $\square$

Следующее очевидное следствие будет ключевым в оставшейся части доказательства.

Следствие 2.18. *Пусть геодезическая a удовлетворяет условиям теоремы 2.8. Тогда существует такое $\Delta > 0$, что для для любого $\varepsilon \in (0, \Delta)$ существуют ножницы $\langle a, b, c, d, x\rangle$, сдвиг T вдоль которых которых имеет величину $\delta T = \varepsilon$.*

2.5. Восстановление метрики геодезической строго ранга 1. Цель настоящего пункта – показать, что метрика произвольной геодезической строго ранга 1 восстанавливается по диагональной трубке V.

Лемма 2.19. *Пусть $x \notin a$. Тогда отношение V позволяет определить, принадлежит ли x множеству Z.*

Доказательство. $x \in Z$ тогда и только тогда, когда существуют r-последовательности $\{u_z\}$, $\{v_z\}$ и $\{w_z\}$, для которых $u_0 = v_0 = x$ и для их предельных точек в $\partial_\infty X$ выполняются равенства

$$u_{-\infty} = x_{-\infty},\ v_{+\infty} = x_{+\infty},\ w_{-\infty} = v_{-\infty} \quad \text{и} \quad w_{+\infty} = u_{+\infty}.$$

Для произвольных четырех r-последовательностей $\{x_z\}$, $\{u_z\}$, $\{v_z\}$ и $\{w_z\}$ отношение V позволяет определить, выполняются указанные соотношения или нет. Если такая четверка r-последовательностей существует, отношение V позволяет выявить ее. □

Лемма 2.20. *Отношение V позволяет восстановить отношение принадлежности точек заданной геодезической a ранга 1 и порядок точек на ней.*

Доказательство. В случае геодезической ранга 1 параллельная эквивалентность r-последовательностей совпадает с линейной эквивалентностью, определенной в [3]. Поэтому возможность восстановления принадлежности следует из того, что V определяет параллельную эквивалентность. После этого отношение порядка восстанавливается аналогично тому, как это сделано в п. 1.1 для горизонтальных сечений множества C.

Лемма 2.21. *Пусть заданы ножницы $\langle a, b, c, d; x\rangle$. Тогда для любой точки $m \in a$ отношением V определена точка $T(m) \in a$, где T – преобразование сдвига, определенное ими.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что орисферы определяются отношением V как множества уровня функций Буземана. Таким образом, V определяет точку $m_1 := R_{ac}(m)$, как $\mathrm{hs}\,(a(+\infty), m) \cap c$, точку $m_2 := R_{cd}(m_1)$, как $\mathrm{hs}\,(d(-\infty), m_1) \cap d$, точку $m_3 := R_{db}(m_2)$ – как $\mathrm{hs}\,(d(+\infty), m_2) \cap b$ и, наконец, точку $T(m) := m_4 := R_{ba}(m_3)$ – как $\mathrm{hs}\,(a(-\infty), m_3) \cap a$. □

Лемма 2.22. *Пусть* $\langle a, b, c, d; x\rangle$ *– ножницы с величиной сдвига* δT. *Тогда отношение* V *позволяет определить величину* δT.

Доказательство. Имеем:

$$\delta T = \frac{r}{n}d(\, x_0T^n(x_0)\,) = \lim_{n\to+\infty}\frac{r}{n}d(\, x_0T^n(x_0)\,) = \\ = \lim_{n\to+\infty}\frac{r}{n}[d(\, x_0T^n(x_0)\,)], \qquad (2.23)$$

где $[t]$ – целая часть числа t. Поскольку каждый член последовательности $a_n := [d(\, x_0T^n(x_0)\,)]$ определяется отношением V, им определяется и величина (2.23). □

Теперь мы готовы доказать следующую теорему.

Теорема 2.24. *Метрика на геодезической* a *однозначно определяется диагональной трубкой* V *пространства* X.

Доказательство. Пусть Δ – константа, определенная следствием 2.18. Для любого $p \in \mathbb{N}$, такого, что $r/p < \Delta$, существуют ножницы $\langle a, b, c, d; x\rangle$, для которых функция сдвига $\delta T = r/p$. В силу леммы 2.22 отношение V позволяет для произвольных ножниц определить, равна ли для них величина сдвига r/p, и выбрать ножницы с указанной величиной сдвига. Тем самым диагональная трубка V определяет на a все точки вида $a(tr)$ при $t \in \mathbb{Q}$. Для $t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ воспользуемся тем, что V определяет отношение принадлежности и порядок точек на a. □

Объединяя теорему 2.24 с теоремой 1.12, получаем окончательное доказательство теоремы 3. Как следствие – ответ и на второй вопрос, поставленный в [3]:

Теорема 2.24. *Пусть* X *– локально-компактное, геодезически полное* $CAT(0)$*-пространство, являющееся* G*-пространством Буземана топологической размерности* $n > 1$. *Тогда всякая биекция* $f : X \to X$ *пространства* X *на себя, такая что как при* f, *так и при* f^{-1}, *замкнутые шары некоторого фиксированного радиуса* r *переходят в шары того же радиуса* r, *есть изометрия* X. □

Литература

1. А. Д. Александров, *Об отображениях, сохраняющих конгруэнтность.* — Докл. АН СССР **211** (1973), 1257–1260.
2. F. S. Beckman, D. A. Quarles, Jr., *On isometries of Euclidean spaces.* — Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 810–815.

3. V. N. Berestovskiĭ, *Isometries in Aleksandrov spaces of curvature bounded above.* — Illinois J. Math. **46** (2002), 645–656.
4. В. Н. Берестовский, *Пространства Буземана ограниченной сверху кривизны по Александрову.* — Алгебра и анализ **14**, No. 5 (2002), 3–180.
5. M. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces of nonpositive curvature,* Grundlehren Math. Wiss. **319**, Springer-Verlag, Berlin (1999).
6. S. V. Buyalo, *Lectures on spaces of curvature bounded above*, Spring semester 1994/95 a.y. University of Illinois at Urbana-Champaign. `http://www.pdmi.ras.ru/~buyalo/add.html`.
7. M. V. Davis, B. Okun, and W. Zheng, *Piecewise Euclidean structures and Eberlein's Rigidity theorem in the singular case.* — Geometry & Topology **3** (1999), 303–330.
8. А. В. Кузьминых *Об отображениях, сохраняющих расстояние* 1. — Сиб. мат. ж. **20** (1979), 597–602.

Andreev P. D. Recovering the metric of a CAT(0)-space by a diagonal tube.

Let (x, d) be a locally compact geodesically complete CAT(0)-space of topological dimension > 1. It is proved that if each geodesic segment in X admits a unique continuation to a complete geodesic, then the metric d is recovered by the diagonal tube $V \subset X \times X$ corresponding to an arbitrary $r > 0$. This partly generalizes V. N. Berestovskii's results on A. D. Aleksandrov spaces of negative curvature.

Поморский государственный университет, г. Архангельск

E-mail: andreev@math.pomorsu.ru

Поступило 25 сентября 2003 г.