Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 298, 2003 г.

Е. Ю. Шмилева

ВЕРОЯТНОСТИ МАЛЫХ ШАРОВ ЦЕНТРИРОВАННОГО ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА ВЫСОКОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

1. Введение

Рассмотрим центрированный и нормированный пуассоновский процесс интенсивности ρ

$$\mathrm{Y}_\rho(t) = \frac{\Pi(\rho t) - \rho t}{\sqrt{\rho}}, \quad t \in [0,1].$$

Здесь $\Pi(\cdot)$ обозначает стандартный пуассоновский процесс, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Мы будем изучать вероятности попадания траекторий процесса Y_ρ в малые шары с удаляющимся центром, говоря конкретнее, вероятности вида

$$\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho - \lambda f \in r\mathrm{U}\} \quad \text{при} \quad \rho \to \infty,\ \lambda \to \infty,\ r \to 0.$$

Здесь U обозначает единичный шар в равномерной норме, т.е.

$$\mathrm{U} = \{\psi \in \mathrm{D}[0,1] : \sup_{s \in [0,1]} |\psi(s)| \leq 1\},$$

а функция сдвига f берется из $\overset{\circ}{W}{}_2^1([0,1])$ – подмножества абсолютно непрерывных функций ($AC[0,1]$), определяемого следующим образом:

$$\overset{\circ}{W}{}_2^1([0,1]) = \{\varphi \in AC[0,1] : \varphi' \in L^2([0,1]),\ \varphi(0) = 0\}.$$

Вероятности малых уклонений хорошо изучены для винеровского процесса (см. К. Л. Чжун [13], А. де Акоста [8], К. Грилл [16]).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ No. 02-01-00265 и гранта НШ-2258.2003.1.

Первой стоит упомянуть ставшую уже классической формулу Чжуна, дающую асимптотику для вероятностей несмещенных шаров винеровского процесса W:

$$\mathbf{P}\{\mathrm{W} \in r\mathrm{U}\} = \exp\left\{-(1+o(1))\frac{\pi^2}{8r^2}\right\} \quad \text{при} \quad r \to 0. \tag{1}$$

Для смещенных малых шаров винеровского процесса наиболее общие результаты были получены К. Гриллом. Прежде чем сформулировать результат Грилла, введем понятия энергии и экономии энергии.

Энергией функции f из $\overset{\circ}{W}{}_2^1([0,1])$ называется квадрат L^2-нормы производной, т.е.

$$\mathrm{E}(f) := |f|^2_{\mathrm{E}} = \int\limits_0^1 f'(t)^2\,dt. \tag{2}$$

Экономия энергии в шаре с центром в f и радиуса ε определяется следующей формулой:

$$\Delta_f(\varepsilon) := \mathrm{E}(f) - \inf_{h \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 :\, \|h-f\| \le \varepsilon} \mathrm{E}(h), \tag{3}$$

где $\|.\|$ означает равномерную норму. Об экономии энергии известно, что $\Delta_f(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Для параметров $r \to 0$, $\lambda \to \infty$ справедлива формула Грилла:

$$\mathbf{P}\{\mathrm{W} - \lambda f \in r\mathrm{U}\} = \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\,|f|^2_{\mathrm{E}} - \frac{\pi^2}{8r^2}(1+o(1)) + \mathrm{R}\right\}. \tag{4}$$

Остаточный член $\mathrm{R} = \mathrm{R}(r,\lambda,f)$ помимо r и λ зависит также от энергетических свойств функции f:

$$\frac{\lambda^2}{2}\,\Delta_f(\delta\, r/\lambda) - \frac{\delta(2-\delta)}{(1-\delta)^2}\cdot\frac{\pi^2}{8r^2}(1+o(1)) \ \le\ \mathrm{R}\ \le\ \frac{\lambda^2}{2}\,\Delta_f(r/\lambda). \tag{5}$$

Здесь δ выбирается произвольно из $[0,1)$, а $o(1)$ зависит только от r.

Исследование вероятностей малых уклонений пуассоновского процесса началось со статьи А. А. Могульского [6] (см. также А. А. Боровков, А. А. Могульский [2]). В этой работе исследованы вероятности для несмещенных малых шаров. Основной результат состоит в том, что если предположить, что $r \to 0$, $\rho r^2 \to \infty$, то

$$\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho \in r\mathrm{U}\} = \exp\left\{-(1+o(1))\frac{\pi^2}{8r^2}\right\}. \tag{6}$$

Отметим, что оценка в формуле Чжуна (1) и оценка в формуле Могульского (6) совпадают. Это естественно было ожидать, т.к. процесс Y_ρ в некотором роде близок процессу W (Y_ρ сходится по распределению к W) при $\rho \to \infty$ (см. подробнее, например, П. Биллингсли [10]).

В недавней работе П. Деовельса и М. А. Лифшица [3] изучены вероятности попадания пуассоновского процесса в смещенные малые шары. Однако был рассмотрен лишь частный случай той ситуации, которая исследована в этой статье. Результаты работы Деовельса и Лифшица ограничены случаем, когда центр шара удаляется со скоростью, обратно-пропорциональной скорости уменьшения радиуса ($r = c/\lambda$, $c > 0$).

Оптимальная область параметров в результате Деовельса, Лифшица имеет сложный вид. Несколько сузив эту область, результат можно сформулировать в следующем виде:

$$\mathbf{P}\left\{\mathrm{Y}_\rho - \lambda f \in \frac{c}{\lambda}\,\mathrm{U}\right\} = \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{4c^2} + |f|^2_{\mathrm{E}} + o(1)\right)\right\}, \tag{7}$$

когда $\lambda \to \infty$, $\rho(\log\lambda)^2/\lambda^6 \to \infty$.

Результаты, полученные в данной работе (см. теорему 2), полностью согласуются с формулой (7) и обобщают ее на случай произвольного соотношения параметров r и λ.

Нетрудно видеть, что оценка (7) опять же совпадает с оценкой (4) для винеровского процесса при $r = c/\lambda$, $c > 0$.

Забегая вперед, отметим, что эта ситуация отчасти повторяется и в общем случае, изученном в этой работе. А именно, когда на интенсивность ρ пуассоновского процесса наложены сильные ограничения (интенсивность увеличивается достаточно быстро относительно других параметров), оценка имеет такой же вид, как и в формуле (4) для винеровского процесса. В то же время в наиболее интересной “пограничной” зоне интенсивности асимптотики отличаются.

Наш интерес к такого рода оценкам обусловлен также важными статистическими приложениями. Как хорошо известно, пуассоновский процесс при определенных условиях совпадает по распределению с эмпирическим процессом. Это обстоятельство и оценка вероятности $\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho - \lambda f \in r\mathrm{U}\}$ использовались в работах П. Деовельса [14] и Ф. Берте [10, 11] при доказательстве функционального закона повторного логарифма (закона Штрассена) для хвостового эмпирического процесса. Полученная в этой работе формула позволяет обобщить их результаты. Это будет сделано в последующих публикациях.

2. Основные результаты

В этом разделе мы приведем оценки вероятности малых уклонений пуассоновского процесса, полученные двумя разными способами: стандартным методом Комлоша–Майора–Тушнади (КМТ) и новым методом, использующим формулу Скорохода для взаимной плотности распределений процессов Леви. Далее мы сравним эти результаты.

Оценку вероятности для малых шаров пуассоновского процесса достаточно просто получить из формулы Грилла (4). Для этого можно не вдаваться в детали самого оцениваемого выражения, а просто, следуя подходу работы П. Деовельса [14], воспользоваться близостью процессов Y_ρ и W (сильный принцип инвариантности КМТ). В результате этого асимптотика получается такая же как в фромуле (4) для винеровского процесса:

Теорема 1. *Для* $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^1([0,1])$ *при*

1. $\lambda \to \infty$, $\rho \to \infty$, $r/\lambda \to 0$,
2. $r^3\sqrt{\rho} \to \infty$,
3. $\rho^{1/2}\, r\, \lambda^{-2} \to \infty$ *выполнено*

$$\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho - \lambda f \in r\mathrm{U}\} = \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\,|f|^2_{\mathrm{E}} - \frac{\pi^2}{8r^2}(1+o(1)) + \mathrm{R}\right\}, \quad (8)$$

где $\mathrm{R} = \mathrm{R}(r,\lambda,f)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\frac{\lambda^2}{2}\,\Delta_f(\delta\, r/\lambda)(1+o(1)) - \frac{\delta(2-\delta)}{(1-\delta)^2}\cdot\frac{\pi^2}{8r^2}(1+o(1))$$

$$\le\ \mathrm{R}\ \le\ \frac{\lambda^2}{2}\,\Delta_f(r/\lambda)(1+o(1)),$$

здесь δ выбирается произвольно из $[0,1)$.

Доказательство этой теоремы полностью основано на неравенстве КМТ (см. подробнее [17, 18]), которое применительно к пуассоновскому процессу Y_ρ записывается следующим образом.

Факт 1. Существуют константы c_1, c_2, $c_3 > 0$ такие, что

$$\mathbf{P}\left\{||\mathrm{Y}_\rho - \mathrm{W}|| \geq \frac{c_1 \log \rho + x}{\sqrt{\rho}}\right\} \leq c_2 \exp\{-c_3 x\}$$

при всех $\rho \geq 1, x \in \mathbb{R}^+$.

Теорема 1 описывает поведение вероятностей $\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho - \lambda f \in r\mathrm{U}\}$ лишь в наиболее простом случае: если интенсивность процесса ρ увеличивается “достаточно быстро” в сравнении с параметрами λ и $1/r$. А именно, условия теоремы $\rho \gg \lambda^4/r^2$, $\rho \gg 1/r^6$ весьма существенны при доказательстве и не могут быть ослаблены. Без этих ограничений никакая аппроксимация вероятностей малых шаров не может быть получена методом КМТ.

При таком подходе за кадром остается поведение вероятностей в области меньшей интенсивности. Более сложный метод позволяет найти полное решение. Он непосредственно изучает структуру оцениваемого выражения, не опираясь на аналогичный результат для винеровского процесса.

В этой статье мы ограничимся лишь случаем, когда функции смещения имеют ограниченную вариацию производной. Случай функций бесконечной вариации производной требует дополнительной аппроксимационной процедуры.

Теорема 2. *Пусть f – функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1([0,1])$, для которой существует такая версия производной, что* $\mathrm{Var} f' < +\infty$.

Предположим, что:

1. $\lambda \to \infty$, $\rho \to \infty$, $r/\lambda \to 0$,
2. $\rho r^2 \to \infty$,
3. $\rho/\lambda^2 \to \infty$.

Тогда вероятность попадания процесса Y_ρ в шар радиуса r с центром в λf можно оценить следующим образом:

$$\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho - \lambda f \in r\mathrm{U}\} \leq \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\,|f|^2_{\mathrm{E}} - \frac{\pi^2}{8r^2}(1+o(1)) + \right.$$

$$+\lambda r\,(|f'(1)|+\mathrm{Var} f')\,(1+o(1))+\frac{\lambda^3}{6\,\rho^{1/2}}\,(\theta_f+o(1))\Big\}, \qquad (9)$$

$$\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho-\lambda f\in r\mathrm{U}\}\geq \exp\Big\{-\frac{\lambda^2}{2}\,|f|^2_{\mathrm{E}}-\frac{\pi^2}{8r^2(1-\delta)^2}(1+o(1))+$$

$$\lambda r(2\delta-1)\,(|f'(1)|+\mathrm{Var} f')\,(1+o(1))+\frac{\lambda^3}{6\,\rho^{1/2}}\,(\theta_f+o(1))\Big\}. \qquad (10)$$

Здесь δ произвольное число из интервала $[0,1)$, а $\theta_f=\int_0^1 f'^3(t)\,dt$.

Комментарии к теоремам 1 и 2:

1) Заметим, что в обеих теоремах вместо условия $r\to 0$ используется $r/\lambda\to 0$, которое помимо малых радиусов допускает случай радиусов, увеличивающихся медленнее λ. Это не особенно существенное дополнение в смысле оценивания вероятности $\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho-\lambda f\in r\mathrm{U}\}$, но этот случай будет важен при доказательстве закона Штрассена. Основное внимание в этой статье сосредоточено в области параметров $r\to 0$, $r\geq c/\lambda$, $c>0$.

2) Сравним результаты теорем 1 и 2. Несложно убедиться, что условия $\rho\gg 1/r^2$, $\rho\gg\lambda^2$ теоремы 2 значительно слабее условий $\rho\gg\lambda^4/r^2$, $\rho\gg 1/r^6$ теоремы 1.

Проиллюстрируем это рисунком 1, на котором приняты следующие обозначения:

- параметр p – это параметр, который показывает рост интенсивности ρ в сравнении с увеличением λ, он определен соотношением $\rho=\lambda^p$;
- параметр z устанавливает соответствие между убыванием радиуса r и скоростью удаления центра шара λ следующим образом $r=\lambda^{-z}$.

Ясно, что, предполагая лишь степенную зависимость между параметрами, мы упускаем некоторые детали, но для иллюстрации результатов этого достаточно.

Ограничения на изменение интенсивности в теореме 2 гораздо слабее ограничений теоремы 1 и область, в которой мы можем контролировать поведение вероятностей, шире.

Более того, можно утверждать, что за пределами этой области аппроксимацию вида (9), (10) получить невозможно, т.к. существуют "пустые" шары. А именно, если $\rho=O(\lambda^2)$, то существует функция $f:\mathrm{Var} f'<\infty$, для которой выполнено $\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho-\lambda f\in r\mathrm{U}\}=$

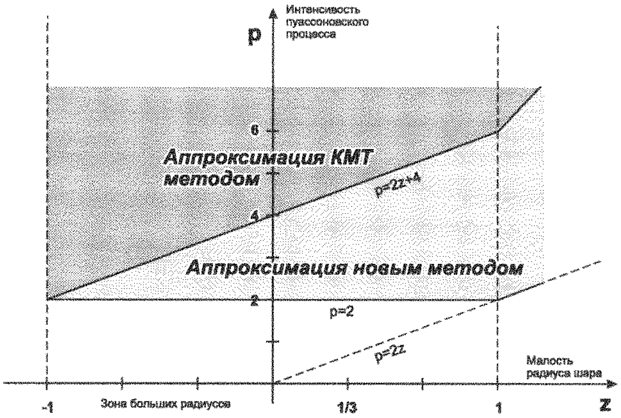

Рис. 1. Область действия нового метода (случай функций $f : \mathrm{Var} f' < +\infty$) и область действия КМТ. Обозначения: $\rho = \lambda^p$, $r = \lambda^{-z}$.

0. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть шар с центром в $f(t) = -ct$ (число c выбирается большим, чем $\sqrt{\rho}/\lambda$).

К тому же, можно утверждать, что при $\rho r^2 = o(1)$ вопрос о какой-либо асимптотике при любой функции смещения вообще не имеет смысла, т.к. в этом случае скачки нормированного пуассоновского процесса становятся больше радиуса шара, и соответствующая вероятность обращается в ноль.

3) Поясним взаимосвязь полученных результатов с формулой (4) для винеровского процесса.

Как уже отмечалось, оценка, полученая в теореме 1, совпадает с оценкой в формуле Грилла (4).

Асимптотическое выражение, полученное в теореме 2 устороено сложнее. Чтобы сравнить это выражение с оценкой Грилла (4), перепишем результат в более удобном виде.

Принимая во внимание то, что для функции с производной ограниченной вариации экономия энергии имеет вид (см. [16])

$$\Delta_f(\varepsilon) = 2\varepsilon(|f'(1)| + \mathrm{Var} f') + \mathrm{o}(\varepsilon), \tag{11}$$

можем переписать оценки (9), (10) так:

$$\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho - \lambda f \in r\mathrm{U}\} =$$

$$\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\,|f|^2_{\mathrm{E}} - \frac{\pi^2}{8r^2}(1 + o(1)) + +\mathrm{R} + \mathrm{R}^* + \frac{\lambda^3}{6\rho^{1/2}}(\theta_f + o(1))\right\}, \tag{12}$$

где $\mathrm{R} = \mathrm{R}(r, \lambda, \rho)$ такое, что

$$\frac{\lambda^2}{2}\,\Delta_f(\delta\, r/\lambda) - \frac{\delta(2-\delta)}{(1-\delta)^2}\cdot\frac{\pi^2}{8r^2}(1+o(1)) \;\le\; \mathrm{R} \;\le\; \frac{\lambda^2}{4}\,\Delta_f(r/\lambda),$$

а для $\mathrm{R}^* = \mathrm{R}^*(r, \lambda, \rho)$ выполнено

$$-\frac{1-\delta}{\delta}\cdot\frac{\lambda^2}{2}\,\Delta_f(\delta\, r/\lambda)(1+o(1)) \;\le\; \mathrm{R}^* \;\le\; \frac{\lambda^2}{4}\,\Delta_f(r/\lambda)(1+o(1)),$$

δ здесь, как и прежде, принадлежит интервалу $[0,1)$.

Видно, что в сравнении с винеровским случаем (4) диапазон значений остаточного члена $\mathrm{R} + \mathrm{R}^*$ несколько изменился, кроме того, в асимптотике появилось дополнительное слагаемое $\frac{1}{6}\,\lambda^3\rho^{-1/2}\int_0^1 f'^3(t)\,dt$.

Это дополнительное слагаемое весьма значимо. Оно делает поведение вероятностей малых шаров отличным от винеровского в той зоне параметров, где оно больше других второстепенных членов асимптотики, а именно, в зоне параметров $\lambda^3\rho^{-1/2} \gg 1/r^2$, $\lambda^3\rho^{-1/2} \gg \lambda r$. Если какое-то из этих условий не выполнено, то дополнительное слагаемое попадет в остаток, и асимптотика совпадет с винеровской.

Все это можно проиллюстрировать рисунком 2.

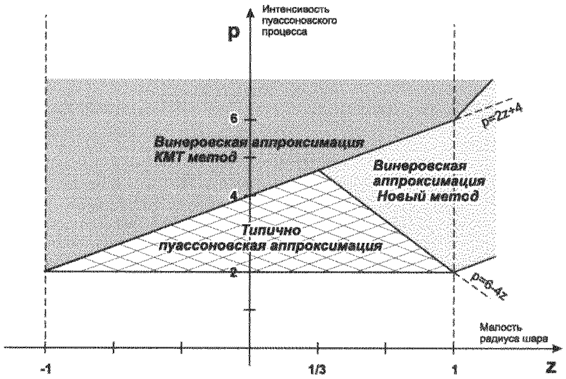

Рис. 2. Область типично пуассоновской асимптотики. Случай f: $\mathrm{Var} f' < +\infty$. Обозначения: $\rho = \lambda^p$, $r = \lambda^{-z}$.

4) Метод КМТ универсален в том смысле, что обеспечивает аппроксимацию (8) для любой функции смещения f из $\overset{\circ}{W}{}_2^1([0,1])$.

На самом деле, можно утверждать, что для такого широкого класса функций в особо интересующей нас зоне $r \geq c/\lambda$, $c > 0$ область, в которой выполнена аппроксимация вида (8) (или же (12)) существенно увеличить нельзя. В этой зоне будут появляться "пустые" шары. А именно, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Для любого малого* $\varepsilon > 0$ *существует такая функция* $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^1([0,1])$, *что при*

$$\lambda \to \infty,\ \rho \to \infty,\ r/\lambda \to 0,\ \rho \ll \lambda^{4-\varepsilon}/r^{2-\varepsilon}$$

выполнено

$$\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho - \lambda f \in r\mathrm{U}\} = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим функции $f_\gamma(t) = -t^{1/2+\gamma}$, принадлежащие $\overset{\circ}{W}{}_2^1([0,1])$ при любом $\gamma > 0$. Покажем, что при интенсивности ниже некоторой зависящей от γ границы процесс Y_ρ ц вероятностью 1 будет находиться вне удаляющегося шара с центром в $f_\gamma(t)$.

Для этого достаточно убедиться в том, что на интервале $(0,1)$ существует такое $t = t(r,\rho)$, что $\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho(t) < \lambda f_\gamma(t) + r\} = 0$ при достаточно больших λ, ρ, λ/r.

Мы знаем, что $\mathrm{Y}_\rho \geq -\sqrt{\rho}\,t$ с вероятностью 1, поэтому для нашей цели достаточно доказать неравенство $-\sqrt{\rho}\,t > \lambda\, f_\gamma(t) + r$, выполняющееся при каком-либо t и при достаточно больших λ, ρ, λ/r.

Пусть $t = r\rho^{-1/2}$, тогда неравенство принимает вид

$$2r < \lambda \left(\frac{r}{\sqrt{\rho}}\right)^{\gamma+1/2}$$

или же

$$\rho < (1/2)^{4/(1+2\gamma)} \frac{\lambda^{4-8\gamma/(1+2\gamma)}}{r^{2-8\gamma/(1+2\gamma)}}. \tag{13}$$

Для любого малого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое γ, что $\varepsilon = 8\gamma/(1+2\gamma)$. А значит из предполагаемого в утверждении условия следует неравенство (13) и заключение в целом. $\square$

Из утверждения 1 можно сделать вывод об оптимальности (в определенном смысле) результатов применения метода КМТ к нашей задаче. Чтобы пояснить это, удобнее снова предположить степенную зависимость меняющихся параметров: $\rho = \lambda^p$, $r = \lambda^{-z}$, $p > 0$, $z > -1$. Теперь условию $\rho \ll \lambda^{4-\varepsilon}/r^{2-\varepsilon}$ можно сопоставить область $\mathcal{D}_\varepsilon = \{p : p < (4-\varepsilon) + z(2-\varepsilon)\}$ на плоскости. В утверждении 1 установлено, что для скорости изменения интенсивности ρ, из какой бы области $\mathcal{D}_\varepsilon$ мы ее ни взяли, существует "пустой" шар (аппроксимация (12) не верна). Отсюда становится понятным, что область $\{p : p > 4 + 2z\}$, в которой аппроксимация установлена методом КМТ, не может быть значительно расширена при $-1 < z \le 1$. Точнее, если условие на параметр ρ и можно ослабить, то лишь на порядок, меньший любой степени. Так, к примеру, результат Деовельса–Лифшица (7) справедлив при $\rho \gg \lambda^6/(\log\lambda)^2$ (этому случаю соответствует $z = 1$, $p \ge 6$). Область расширена за счет сомножителя $(\log\lambda)^{-2}$.

При дополнительных предположениях на функцию f область действия асимптотики (12) увеличивается.

Так, например, теорема 2 утверждает, что для функций смещения $f : \mathrm{Var} f' < \infty$, асимптотика (12) верна в гораздо большей области. А именно (см. рис. 2), при p: $p > 6 - 4z$, она совпадает с винеровской, а при $p < 2z + 4$ и $p < 6 - 4z$ имеет место иная асимтотика, характерная лишь для пуассоновского процесса.

3. Доказательства

Доказательство теоремы 2 основано на простой идее: свести задачу для смещенных шаров к задаче для несмещенных шаров и воспользоваться формулой Могульского (6). Для этого нужно перейти к процессам, центрированным таким образом, чтобы искомая вероятность оказалась вероятностью попадания в несмещенный шар. В винеровском случае для этой цели использовалась формула Камерона–Мартина (см. [12]) для взаимной плотности смещенной и обычной винеровских мер. В нашем случае это формула Скорохода для взаимной плотности распределений пуассоновских процессов с различной интенсивностью (см. [4, 7, 19]). Аналогичный метод применялся в работе Деовельса, Лифшица [3].

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем δ из интервала $(-1, 1)$.

Обозначим через $\varphi = \varphi(f, r, \lambda, t)$ функцию, энергия (см. (2))

которой в шаре радиуса $|\delta|\, r\lambda^{-1}$ минимальна, т.е.

$$\varphi := \operatorname{argmin}_{\{\phi\in \overset{\circ}{W}{}_2^1:\ \phi\in|\delta|\, r\lambda^{-1}\,\mathrm{U}+f\}} \int\limits_0^1 \phi'(t)^2\, dt.$$

Существование такой функции, также как и некоторые ее свойства, доказывается в следующем вспомогательном утверждении.

Лемма 1. *Пусть* $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^1([0,1])$ *такая, что существует версия производной* f' *с ограниченной вариацией* $\mathrm{Var} f' < \infty$. *Тогда в шаре* $B_q = \{\phi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1([0,1]) : \phi \in q\mathrm{U}+f\}$ *радиуса* $q > 0$ *существует функция* φ_q *такая, что*

$$\int\limits_0^1 \varphi_q'(t)^2\, dt = \inf_{\phi\in B_q} \int\limits_0^1 \phi'(t)^2\, dt.$$

При этом для φ_q *справедливы утверждения:*

(a) $\operatorname{essup} |\varphi_q'| \le \operatorname{essup} |f'|$;

(b) $\mathrm{Var}\, \varphi_q' \le \mathrm{Var}\, f'$;

(c) ${\varphi_q}'(1)$ *и* $f'(1)$ *существуют, при этом* $|{\varphi_q}'(1)| \le |f'(1)|$;

(d) $\int_0^1 \varphi_q'(t)^3\, dt \to \int_0^1 f'(t)^3\, dt$ *при* $q \to 0$.

Доказательство леммы 1 см. в конце статьи.

Продолжая доказательство теоремы, рассмотрим шар $\{\eta \in D[0,1] : \eta \in \lambda\varphi + (1+\delta) r\mathrm{U}\}$. Заметим, что при $\delta \in (0,1)$ этот шар содержит в себе шар $\{\eta \in D[0,1] : \eta \in \lambda f + r\mathrm{U}\}$, вероятность попадания в который пуассоновского процесса мы исследуем, и, наоборот, содержится в нем при $\delta \in (-1,0)$. Поэтому можем записать для любого δ из интервала $(0,1)$

$$\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho - \lambda\varphi \in (1+\delta) r\,\mathrm{U}\} \ge \mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho - \lambda f \in r\mathrm{U}\} \ge$$

$$\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho - \lambda\varphi \in (1-\delta) r\,\mathrm{U}\}.$$

В дальнейшем мы будем иметь дело лишь с вероятностями вида $\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho - \lambda\varphi \in (1-\delta) r\,\mathrm{U}\}$. Этот переход позволяет получить более точную и гибкую оценку для вероятности малых шаров. Аналогичный способ применялся и для оценки вероятностей малых шаров винеровского процесса в работе Грилла [16].

Далее рассмотрим два пуассоновских процесса: Π_{μ_1} с постоянной интенсивностью μ_1 и Π_{μ_2} с переменной интенсивностью $\mu_2(t)$. Интенсивности здесь определяются выражениями

$$\mu_1 = \rho,$$
$$\mu_2(t) = \rho \left(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{\rho}} \varphi'(t)\right), \ t \in [0,1].$$

Заметим, что для корректного определения процесса Π_{μ_2} необходимо чтобы $\mu_2(t) \geq 0$ п.в. Это выполнено за счет неравенства

$$\lambda\rho^{-1/2} \operatorname{essup} |\varphi'| \leq \lambda\rho^{-1/2} \operatorname{essup} |f'| < 1,$$

справедливого при достаточно больших значениях дроби ρ/λ^2. Здесь мы использовали условие 3) теоремы и утверждение (a) леммы 1.

Введем обозначение

$$\mathrm{B} = \{\eta \in D[0,1] : \eta \in \rho\,\mathbf{Id} + \lambda\sqrt{\rho}\ \varphi + (1-\delta) r\sqrt{\rho}\ \mathrm{U}\},$$

где $\mathbf{Id}$ – тождественное преобразование отрезка $[0,1]$. Учитывая тождество $\Pi_{\mu_1}(\cdot) = \rho^{1/2}\mathrm{Y}_\rho(\cdot) + \rho\,\mathbf{Id}$, можем записать

$$\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho - \lambda\varphi \in (1-\delta)r\mathrm{U}\} = P_{\Pi_{\mu_1}}\{\mathrm{B}\} = \int\limits_{\mathrm{B}} \frac{dP_{\Pi_{\mu_1}}}{dP_{\Pi_{\mu_2}}}(\eta)\, dP_{\Pi_{\mu_2}}(\eta).$$

Теперь применим формулу Скорохода (см. [4, 7, 19]). В нашем случае она имеет вид

$$\frac{dP_{\Pi_{\mu_1}}}{dP_{\Pi_{\mu_2}}}(\eta) = \exp\left\{\int\limits_0^1 (\mu_2(t) - \mu_1(t))\, dt - \int\limits_0^1 \log\left(\frac{\mu_2(t)}{\mu_1(t)}\right)\, d\eta(t)\right\}.$$

При подстановке получаем

$$\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho - \lambda\varphi \in (1-\delta)r\,\mathrm{U}\} =$$

$$\int\limits_B \exp\left\{\int\limits_0^1 \lambda\sqrt{\rho}\, \varphi'(t)\, dt - \int\limits_0^1 \log\left(1 + \lambda\rho^{-1/2}\, \varphi'(t)\right)\, d\eta(t)\right\} dP_{\Pi_{\mu_2}}(\eta) =$$

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{\Pi_{\mu_2} \in B\}} \exp\left\{\int\limits_0^1 \lambda\sqrt{\rho}\, \varphi'(t)\, dt - \int\limits_0^1 \log\left(1 + \lambda\rho^{-1/2}\varphi'(t)\right)\, d\Pi_{\mu_2}\right\}\right)$$

$$= \exp\left\{ \int\limits_0^1 \lambda\sqrt{\rho}\,\varphi'(t)\,dt - \int\limits_0^1 \log\Big(1+\lambda\rho^{-1/2}\varphi'(t)\Big)\,\mu_2(t)\,dt \right\} \times$$

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\left\{\overline{\Pi}_{\mu_2}\in(1-\delta)r\sqrt{\rho}\,\mathrm{U}\right\}} \exp\left\{ -\int\limits_0^1 \log\Big(1+\lambda\rho^{-1/2}\varphi'(t)\Big)\; d\overline{\Pi}_{\mu_2} \right\} \right) =$$

$$= \exp\{D_\varphi\} \times E_\varphi. \tag{14}$$

Здесь $\overline{\Pi}_{\mu_2}$ означает центрированный пуассоновский процесс, т.е.

$$\overline{\Pi}_{\mu_2} = \Pi_{\mu_2} - \int\limits_0^1 \mu_2(t)\,dt.$$

Формулой (14) мы добились того, что в выражении для вероятности малых шаров остаются лишь несмещенные шары. Если мы оценим детерминированный сомножитель $\exp\{D_\varphi\}$ и интеграл по центрированному пуассоновскому процессу, то останется лишь применить формулу Могульского (6) для вероятности несмещенных шаров пуассоновского процесса.

Для того чтобы оценить детерминированный сомножитель, запишем его в виде

$$D_\varphi = -\rho \int\limits_0^1 \Psi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\rho}}\,\varphi'(t)\right)\,dt,$$

где $\Psi(u) = (1+u)\log(1+u) - u$. При $u \to 0$ функция Ψ может быть представлена в виде

$$\Psi(u) = u^2/2 - u^3/6 + \mathrm{o}(u^3).$$

Это разложение справедливо и в нашем случае, поскольку аргумент функции Ψ близок к нулю при достаточно большом значении дроби ρ/λ^2, точнее $\lambda\,\rho^{-1/2}\,\varphi'(t) \to 0$ для п.в. $t \in [0,1]$. Здесь мы использовали то, что φ' п.в. равномерно ограничена по утверждению (a) леммы 1.

В результате разложения имеем

$$D_\varphi = -\frac{\lambda^2}{2}|\varphi|^2_{\mathrm{E}} + \frac{\lambda^3}{6\sqrt{\rho}} \int\limits_0^1 \varphi'(t)^3\,dt + o\left(\frac{\lambda^3}{\sqrt{\rho}}\right). \tag{15}$$

Перейдем к оценке стохастического множителя E_φ. Для начала оценим интеграл по центрированному пуассоновскому процессу. С помощью формулы интегрирования по частям получаем (вопрос существования $\varphi'(1)$ обсуждается в пункте (c) леммы 1)

$$\left|\int_0^1 \log\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{\rho}}\varphi'(t)\right)\,d\overline{\Pi}_{\mu_2}\right| \le$$

$$\left|\overline{\Pi}_{\mu_2}(1)\right|\left|\log\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{\rho}}\varphi'(1)\right)\right| + \left|\int_0^1 \overline{\Pi}_{\mu_2}(t)\,d\log\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{\rho}}\varphi'(t)\right)\right| \le$$

$$\|\overline{\Pi}_{\mu_2}\|\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\rho}}\left(|\varphi'(1)|+o(1)\right)+\mathrm{Var}\log\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{\rho}}\varphi'(t)\right)\right) \le$$

$$\|\overline{\Pi}_{\mu_2}\|\frac{\lambda}{\sqrt{\rho}}\left(|\varphi'(1)|+\mathrm{Var}\,\varphi'\right)(1+o(1)).$$

Это неравенство позволяет нам оценить весь стохастический сомножитель

$$E_\varphi \le \exp\left\{r\lambda\,(1+\delta)\left(|\varphi'(1)|+\mathrm{Var}\,\varphi'\right)(1+o(1))\right\}\times$$
$$\times\,\mathbf{E1}_{\left\{\overline{\Pi}_{\mu_2}\in(1+\delta)\sqrt{\rho}r\mathrm{U}\right\}}, \qquad (16)$$

а также

$$E_\varphi \ge \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\left\{\overline{\Pi}_{\mu_2}\in(1-\delta)\sqrt{\rho}rU\right\}}\exp\left\{-\left|\int_0^1 \log\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{\rho}}\varphi'(t)\right)\,d\overline{\Pi}_{\mu_2}\right|\right\}\right) \ge$$

$$\exp\left\{-r\lambda\,(1-\delta)\left(|\varphi'(1)|+\mathrm{Var}\varphi'\right)(1+o(1))\right\}\cdot\mathbf{E1}_{\left\{\overline{\Pi}_{\mu_2}\in(1-\delta)\sqrt{\rho}r\mathrm{U}\right\}}. \quad (17)$$

В обеих формулах считаем $\delta\in[0,1)$.

Остается оценить выражение

$$\mathbf{E1}_{\left\{\overline{\Pi}_{\mu_2}\in(1-\delta)\sqrt{\rho}r\mathrm{U}\right\}} = \mathbf{P}\{\overline{\Pi}_{\mu_2}\in(1-\delta)\sqrt{\rho}r\mathrm{U}\}.$$

Введем обозначение для среднего числа скачков процесса Π_{μ_2}

$$m_\varphi = \int_0^1 \mu_2(t)\,dt = \rho+\lambda\rho^{1/2}\varphi(1).$$

Несложно установить, что для любого $q > 0$

$$\mathbf{P}\Big\{\overline{\Pi}_{\mu_2} \in q\mathrm{U}\Big\} = \mathbf{P}\Big\{\overline{\Pi}_{m_\varphi} \in q\mathrm{U}\Big\}.$$

Это выполнено за счет тождества по распределению

$$\overline{\Pi}_{\mu_2}(t) = \overline{\Pi}\bigg(\int\limits_0^t \mu_2(s)ds\bigg) = \overline{\Pi}_{\mu_\varphi}\left(\frac{\int_0^t \mu_2(s)ds}{m_\varphi}\right), \quad t \in [0,1].$$

Учитывая это обстоятельство и используя формулу Могульского (6), получим

$$\mathbf{P}\{\overline{\Pi}_{\mu_2} \in (1-\delta)\sqrt{\rho}r\mathrm{U}\} = \mathbf{P}\{Y_{m_\varphi} \in (1-\delta)r\rho^{1/2}{m_\varphi}^{-1/2}\mathrm{U}\} =$$

$$\exp\left\{-\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{\rho}}\varphi(1)\right)\frac{\pi^2}{8(1-\delta)^2r^2}(1+o(1))\right\}.$$

Для применения формулы Могульского (6) нам требовалось условие $r^2\rho \to \infty$, которое является условием 2) теоремы. Далее заметим, что

$$|\varphi(1)| = \left|\int\limits_0^1 \varphi'(t)\,dt\right| \le \left(\int\limits_0^1 \varphi'(t)^2\,dt\right)^{1/2} = |\varphi|_{\mathrm{E}} < \infty.$$

Как и раньше, используя условие 3) теоремы, получаем

$$\mathbf{P}\{\overline{\Pi}_{\mu_2} \in (1-\delta)\sqrt{\rho}r\mathrm{U}\} = \exp\left\{-(1+o(1))\frac{\pi^2}{8(1-\delta)^2r^2}\right\}. \qquad (18)$$

В итоге, обьединив оценки (15), (16) и (18), имеем для любого $\delta \in [0,1)$

$$\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho - \lambda\varphi \in (1+\delta)r\,\mathrm{U}\} \le$$

$$\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}|\varphi|^2_{\mathrm{E}} - \frac{\pi^2}{8(1+\delta)^2r^2}(1+o(1)) + \right.$$

$$\left. +(1+\delta)r\lambda\left(|\varphi'(1)| + \mathrm{Var}\varphi'\right)(1+o(1)) + \frac{\lambda^3}{6\sqrt{\rho}}\left(\int\limits_0^1 \varphi'(t)^3\,dt + o(1)\right)\right\}.$$

Аналогично с помощью формул (15), (17), (18) выводим нижнюю оценку

$$\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho - \lambda\varphi \in (1-\delta)r\,\mathrm{U}\} \ge$$

$$\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}|\varphi|^2_{\mathrm{E}} - \frac{\pi^2}{8(1-\delta)^2 r^2}(1+o(1)) - \right.$$

$$\left. -(1-\delta)r\lambda\left(|\varphi'(1)| + \mathrm{Var}\varphi'\right)(1+o(1)) + \frac{\lambda^3}{6\sqrt{\rho}}\left(\int\limits_0^1 \varphi\,'(t)^3\,dt + o(1)\right)\right\}.$$

Остается лишь перейти от функции φ, минимизирующей энергию в шаре $\{\phi \in \overset{\circ}{W}{}^1_2 : \phi \in \delta\, r\lambda^{-1}\,\mathrm{U} + f\}$, к изначальной функции f. Это можно сделать, используя пункты (b), (c) и (d) леммы 1, а также формулу

$$|\varphi|^2_{\mathrm{E}} = |f|^2_{\mathrm{E}} - \Delta_f\,(\delta\, r/\lambda)\,,$$

где экономия энергии Δ_f подчиняется соотношению (см. [16] и формулу (11))

$$\Delta_f\,(\delta\, r/\lambda) = 2\delta r\lambda^{-1}\left(|f'(1)| + \mathrm{Var}f'\right)(1+o(1)).$$

Остается заметить, что верхняя оценка для $\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_\rho - \lambda f \in r\mathrm{U}\}$ оптимальна при $\delta = 0$. $\square$

Доказательство леммы 1. Докажем, что функция, на которой реализуется минимум энергии в шаре B_q, существует.

Введем обозначение

$$I_q = \inf_{B_q}\int\limits_0^1 \phi'(t)^2\,dt$$

и рассмотрим множества $\Phi_n = \{\phi \in \overset{\circ}{W}{}^1_2 : \int_0^1 \phi'(t)^2\,dt \le I_q + 1/n\}$. По лемме Арцела-Асколи известно, что каждое из Φ_n компактно в C. Поскольку шар B_q – замкнутое множество, то $\{\Phi_n \bigcap B_q\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность сужающихся компактных непустых множеств. Известно, что пересечение всех множеств этой последовательности непусто. А, следовательно, в шаре B_q существует функция, обозначим ее φ_q, такая, что

$$\int\limits_0^1 \varphi_q'(t)^2\,dt \le I_q.$$

Поскольку $\varphi_q \in B_q$, имеем

$$\int_0^1 \varphi_q'(t)^2\,dt \geq I_q.$$

В итоге получаем равенство, и можем утверждать, что на φ_q реализуется минимум энергии.

(a) Предположим, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\operatorname{essup}|{\varphi_q}'| > \operatorname{essup}|f'| + \varepsilon.$$

Значит, найдется $s_0 \in (0,1)$ такое, что ${\varphi_q}'(s_0)$ существует и

$$|{\varphi_q}'(s_0)| > \operatorname{essup}|f'| + \varepsilon. \tag{19}$$

Будем считать, что ${\varphi_q}'(s_0) > 0$. Случай ${\varphi_q}'(s_0) < 0$ аналогичен. Если же ${\varphi_q}'(s_0) = 0$, то противоречие получается сразу же.

Рассмотрим прямую $y(s) = (\operatorname{essup}|f'| + \varepsilon)(s - s_0) + \varphi_q(s_0)$.

Из предположения ясно, что график этой прямой находится ниже графика φ_q на некотором интервале $(s_0, s_0 + \delta)$, где $\delta > 0$. Ясно также, что на этом интервале прямая расположена ниже $f(\cdot) + q$ (верхней границы полосы).

Покажем также, что график $y(\cdot)$ на отрезке $(s_0, 1]$ расположен выше графика функции $f(\cdot) - q$ (нижней границы полосы).

Для произвольного $\Delta > 0$ можно записать

$$y(s_0 + \Delta) = (\operatorname{essup}|f'| + \varepsilon)\cdot\Delta + \varphi_q(s_0) > \operatorname{essup}|f'|\cdot\Delta + f(s_0) - q \geq$$

$$\frac{f(s_0 + \Delta) - f(s_0)}{\Delta}\cdot\Delta + f(s_0) - q = f(s_0 + \Delta) - q.$$

Итак, мы установили, что существует некий невырожденный интервал такой, что прямая y на нем расположена внутри полосы и ниже графика функции φ_q, к тому же эта прямая не пересекает нижнюю границу полосы вплоть до точки 1.

Исходя из этого, есть две возможности: либо прямая y пересекает график функции φ_q, т.е. существует точка s_2 такая, что $\varphi_q(s) > y(s)$ для любого $s \in (s_0, s_2)$ и $\varphi_q(s_2) = y(s_2)$, либо прямая находится в полосе на всем интервале $[s_0, 1]$, и графики функций φ_q и y не пересекаются, т.е. $\varphi_q(s) > y(s)$ для любого $s \in (s_0, 1]$. Во втором случае положим s_2 равным 1.

В результате можем утверждать, что линеаризация функции φ_q прямой y

$$\varphi_q^*(t) = \varphi_q(t)1_{\{t\notin[s_0,s_2]\}} + y(t)1_{\{t\in[s_0,s_2]\}} \quad t\in[0,1]$$

содержится в полосе и принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^1([0,1])$.

Используя неравенство Коши, установим, что энергия у спрямляющей функции меньше, чем у самой функции φ_q:

$$\int_0^1 {\varphi_q'}^2(t)\,dt > \left(\int_{s_0}^{s_2} \varphi_q'(t)\,dt\right)^2 (s_2-s_0)^{-1} + \int_{\{t\notin[s_0,s_2]\}} {\varphi_q'}^2(t)\,dt \geq$$

$$(\varphi_q(s_2)-\varphi_q(s_0))^2(s_2-s_0)^{-1} + \int_{\{t\notin[s_0,s_2]\}} {\varphi_q'}^2(t)\,dt \geq$$

$$(y(s_2)-\varphi_q(s_0))^2(s_2-s_0)^{-1} + \int_{\{t\notin[s_0,s_2]\}} {\varphi_q'}^2(t)\,dt = \int_0^1 ({\varphi_q^*}')^2(t)\,dt.$$

В результате получаем противоречие с определением φ_q, чем доказываем утверждение (a).

(b). Докажем неравенство $\operatorname{Var}{\varphi_q}' \leq \operatorname{Var} f'$. Сначала сделаем некоторые пояснения насчет вида графика функции φ_q.

Очевидно, что внутри полосы $\{\phi : \phi(t) \in [f(t)-q, f(t)+q], t \in [0,1]\}$ график функции φ_q, минимизирующей энергию, не может быть ничем иным как прямой. Иначе мы бы смогли произвести линеаризацию функции φ_q, не выходя при этом за границы полосы. А, как известно из пункта (a), линеаризация всегда имеет энергию меньшую, чем у самой функции. Таким образом получаем, что непрерывная функция φ_q может состоять лишь из прямых и частей границы полосы.

Что касается вариации $\operatorname{Var}\varphi_q'$, то она равна нулю на интервалах, где φ_q – прямая, а на интервалах, где функции φ_q и f совпадают, вариация производных этих функций одинаковая. Остается лишь рассмотреть точки скачков функции φ_q' (изломов φ_q) и доказать, что в них имеет место неравенство

$$|f_-'(s) - f_+'(s)| \geq |(\varphi_q)_-'(s) - (\varphi_q)_+'(s)|. \tag{20}$$

Изломы функции φ_q могут происходить только в точках соприкосновения этой функции с границей полосы, поскольку, как обсуждалось в начале доказательства, внутри полосы график функции φ_q – прямая.

Предположим, что излом происходит в точке s при соприкосновении φ_q с нижней границей, т.е. $\varphi_q(s) = f(s) - q$.

Рассмотрим все варианты взаимного расположения функций φ_q и $f - q$ в малой окрестности точки s. При этом будем учитывать два обстоятельства: во-первых, φ_q не может выходить за границу полосы и, следовательно,

$$f'_-(s) \geq (\varphi_q)'_-(s) \quad \text{и} \quad f'_+(s) \leq (\varphi_q)'_+(s); \tag{21}$$

во-вторых, угол, образованный касательными φ_q в точке s и обращенный внутрь полосы, должен быть больше π, иначе можно произвести линеаризацию функции φ_q так, чтобы спрямляющая функция оставалась внутри полосы (это противоречит тому, что энергия φ_q минимальна). Иными словами, должно быть

$$(\varphi_q)'_+(s) \leq (\varphi_q)'_-(s). \tag{22}$$

Пусть для начала $f'_-(s) \leq f'_+(s)$. С учетом (21) получаем $(\varphi_q)'_-(s) < (\varphi_q)'_+(s)$, а это противоречит (22).

Если же мы предположим, что $f'_-(s) \geq f'_+(s)$, то, используя (21), получим

$$f'_-(s) - (\varphi_q)'_-(s) \geq f'_+(s) - (\varphi_q)'_+(s).$$

Что нам и требовалось.

Со скачками φ'_q, получающимися при соприкосновении с верхней границей, все происходит аналогично.

(c) Поскольку $\mathrm{Var} f' < \infty$, то предел f' в 1 существует. Введем обозначение

$$L := \lim_{s\to 1} f'(s). \tag{23}$$

Докажем, что следующий предел также существует

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(1) - f(1-t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int\limits_{1-t}^{1} f'(s)\,ds.$$

В силу (23) имеем $\frac{1}{t}\int_{1-t}^{1} f'(s)\,ds \to L$, а, значит, производная f в точке 1 равна L.

Существование ${\varphi_q}'(1)$ доказывается аналогично.

Доказательство второй части утверждения будем проводить от противного. Предположим, что выполнено $|\varphi_q'(1)| > |f'(1)|$.

Пусть найдется такое $\delta > 0$, что для любого $t \in (1-\delta, 1]$ выполняются одновременно следующие два условия:

1°. $\varphi_q(1-\delta) < f(t) + q$,

2°. $\varphi_q(1-\delta) > f(t) - q$.

После этого рассмотрим функцию

$$\varphi_q^*(t) = \mathbf{1}_{\{t \in (1-\delta,1)\}} \varphi_q(1-\delta) + \mathbf{1}_{\{t \notin (1-\delta,1)\}} \varphi_q(t).$$

Понятно, что эта функция есть функция φ_q, "остановленная" в момент времени $1-\delta$, и что, благодаря подходящему выбору δ, она не выходит за границы полосы $\{\phi : \phi(t) \in [f(t)-q, f(t)+q], t \in [0,1]\}$. К тому же $\varphi_q^* \in \overset{\circ}{W}{}_2^1([0,1])$. Ясно, что "остановленная" функция всегда имеет меньшую энергию, чем сама функция. Отсюда вытекает противоречие с определением φ_q.

Остается недоказанным то, что δ, удовлетворяющее условиям 1° и 2°, существует.

Для доказательства рассмотрим $b > 0$ такое, что $|\varphi_q'(1)| > b > |f'(1)|$. Далее можем утверждать, что найдется такое $\delta_1 > 0$, что при $\tau \in (0, \delta_1]$

$$|\varphi_q(1) - \varphi_q(1-\tau)| > b\,\tau > |f(1) - f(1-\tau)|. \tag{24}$$

Откуда получаем следующее неравенство

$$f(1) - b\,\tau < f(1-\tau) < f(1) + b\,\tau,$$

а также $\varphi_q(1-\tau) < \varphi_q(1) - b\,\tau$ при $\varphi_q' > 0$ и $\varphi_q(1-\tau) > \varphi_q(1) + b\,\tau$ при $\varphi_q' < 0$.

Далее для определенности предположим $\varphi_q' > 0$. Случай $\varphi_q' < 0$ рассматривается аналогично.

Используя это предположение, можем записать

$$\varphi_q(1-\delta_1) < \varphi_q(1) - b\delta_1 \le \varphi_q(1) - b\tau \le f(1) + q - b\tau < f(1-\tau) + q$$

для каждого $\tau \in (0, \delta_1]$. Таким образом получаем первое из требуемых неравенств. Причем заметим, что оно выполнено и при любом $\delta \in (0, \delta_1]$.

Для второго неравенства нам потребуется соотношение

$$\varphi_q(1) > f(1) - q, \tag{25}$$

которое в свою очередь вытекает из того, что при $\tau < \delta_1$

$$f(1) - q < \varphi_q(1) - \varphi_q(1-\tau) + f(1-\tau) - q \le \varphi_q(1),$$

где использовалось неравенство $|f(1)-f(1-\tau)| < \varphi_q(1)-\varphi_q(1-\tau)$.

Основываясь на (25), можем утверждать, что существует такое $\delta_2 > 0$, что $\varphi_q(1) > f(1)-q+b\,\tau$ при $\tau \in (0, \delta_2]$ и далее, используя непрерывность функции φ_q, что существует такое δ_3 ($\delta_2 > \delta_3 > 0$), что при $\tau \in (0, \delta_3]$ выполняется $\varphi_q(1-\delta_3) > f(1) - q + b\,\tau$. Используя неравенство (24), получаем $\varphi_q(1-\delta_3) > f(1-\tau) - q$. Понятно также, что это же неравенство выполняется для любого $\delta \in (0, \delta_3]$.

Выбрав $\delta = \min\{\delta_1, \delta_3\}$, получаем, что оба требуемые неравенства выполняются одновременно.

(d) Сначала установим, что $\varphi_q' \xrightarrow{L^2} f'$ при $q \to 0$. Для этого проделаем следующую оценку

$$|\varphi_q - f|_{\mathrm{E}}^2 = |\varphi_q|_{\mathrm{E}}^2 + |f|_{\mathrm{E}}^2 - 2\int\limits_0^1 f'\varphi_q' \le 2\left(|f|_{\mathrm{E}}^2 - \int\limits_0^1 f'\varphi_q'\right)$$

и докажем, что $\int_0^1 f'\varphi_q' \to |f|_{\mathrm{E}}^2$ при $q \to 0$.

На самом деле верно даже большее. А именно,

$$\int\limits_0^1 g\varphi_q' \to \int\limits_0^1 gf', \quad q \to 0 \tag{26}$$

для любой функции g из L^2. Множество ступенчатых функций плотно в L^2, т.е. для произвольной $g \in L^2$ существует $\{g_n\}$ последовательность ступенчатых функций такая, что $g_n \xrightarrow{L^2} g$. С учетом следующей оценки

$$\left|\int\limits_0^1 g\varphi_q' - \int\limits_0^1 gf'\right| \le \left|\int\limits_0^1 g\varphi_q' - \int\limits_0^1 g_n\varphi_q'\right| +$$

$$\left|\int\limits_0^1 g_n\varphi_q' - \int\limits_0^1 g_nf'\right| + \left|\int\limits_0^1 gf' - \int\limits_0^1 g_nf'\right| \le$$

$$\left(\int_0^1 (g-g_n)^2\right)^{1/2} (|f|_{\mathrm{E}} + |\varphi_q|_{\mathrm{E}}) + \left|\int_0^1 g_n\varphi_q' - \int_0^1 g_n f'\right|$$

соотношение (26) достаточно доказать лишь для ступенчатых функций. Рассмотрим произвольную ступенчатую функцию

$$\widetilde{g}(t) = \sum_i \widetilde{g}_i \mathbf{1}_{\{t\in(t_i,t_{i+1})\}}(t).$$

Здесь $\{t_i\}$ – разбиение отрезка (0,1), а $\{\widetilde{g}_i\}$ – последовательность вещественных чисел. Сходимость

$$\int \widetilde{g}\varphi_q' = \sum_i \widetilde{g}_i(\varphi_q(t_{i+1}) - \varphi_q(t_i)) \to \sum_i \widetilde{g}_i(f(t_{i+1}) - f(t_i)) = \int \widetilde{g} f'$$

следует из того, что $\varphi_q(t) \to f(t)$ для любого $t \in [0,1]$. Это в свою очередь верно в силу определения функции φ_q.

Итак, мы получили, что $\varphi_q' \xrightarrow{L^2} f'$ при $q \to 0$. Откуда следует, что для любой последовательности $\{q_n\}$, $q_n \to 0$ при $n \to \infty$, найдется такая подпоследовательность $\{q_{n_k}\}$, что $\varphi_{q_{n_k}}' \to f'$ п.в. При этом по пункту (a) мы знаем, что $|\varphi_{q_{n_k}}'(t)| \le \mathrm{ess\,sup} f'$ п.в. и, следовательно, по теореме Лебега получаем $\int_0^1 {\varphi_{q_{n_k}}'}^3 \to \int_0^1 {f'}^3$ при $k \to \infty$.

Предположим, что заключение леммы не выполнено, т.е. существует последовательность, обозначим ее $\{q_n\}$, такая, что

$$\left|\int_0^1 {\varphi_{q_n}'}^3 - \int_0^1 {f'}^3\right| > c,$$

для любого n. Здесь $c > 0$. Очевидно, что это соотношение и предыдущее противоречат друг другу. Откуда следует заключение пункта (d) леммы. □

Автор благодарит профессора М. А. Лифшица за помощь и поддержку при написании этой работы, а также Е. Беляева, принимавшего участие в графическом оформлении работы.

Литература

1. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*. Наука, М. (1977).

2. А. А. Боровков, А. А. Могульский, *О вероятностях малых уклонений для случайных процессов.* Труды Инст. Матем. СОАН СССР **13** (1989), 147–168.
3. П. Деовельс, М. А. Лифшиц, *Вероятности попадания центрированного пуассоновского процесса в смещенные малые шары.* Зап. научн. семин. ПОМИ **278** (2001), 63–85.
4. Й. Керстан, М. Маттес, Й. Мекке, *Безгранично делимые точечные процессы*, Наука, Москва (1982).
5. М. А. Лифшиц, Е. Ю. Шмилева, *Пуассоновские меры, квазиинвариантные относительно мультипликативных преобразований.* Теория вероятностей и ее применения **46**, вып. 4 (2002), 697–712.
6. А. А. Могульский, *Малые уклонения в пространстве траекторий.* Теория вероятн. и ее примен. **19** (1974), 755-765.
7. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями.* Наука, М. (1964).
8. A. de Acosta, *Small deviations in the functional central limit theorem with applications to functional laws of the iterated logarithm.* Ann. Probab. **11** (1983), 78–101.
9. P. Bártfai, *Die Bestimmung der zu einem wiederkehrenden Prozess gehörenden Verteilungfunction aus den mit Fehlern behafteten Daten einer einzigen Realisation.* Studia Sci. Math. Hungar. **1** (1966), 161–168.
10. Ph. Berthet, *On the rate of clustering to the Strassen set for increments of the uniform empirical process.* J. Theor. Prob. **10** (1997), 557–579.
11. Ph. Berthet, *Vitesses de recouvrement dans les lois fonctionnelles du logarithme itéré pour les incréments du processus empirique uniforme avec applications statistiques.* Thése du doctorat de l'Université Paris VI-(1996).
12. R. Cameron, W. T. Martin, *Transformation of Wiener integrals under translation.* Ann. Math. **45** (1944), 386–396.
13. K. L. Chung, *On the maximum partial sums of sequences of independent random variables.* Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 205–233.
14. P. Deheuvels, *Chung-type functional laws of the iterated logarithm for tail empirical processes.* Ann. Inst. Henri Poincaré **36**, Но. 5 (2000), 583–616.
15. P. Deheuvels, D. M. Mason, *Nonstandart functional laws of the iterated logarithm for tail empirical and quantile processes.* Ann. Probab. **18** (1990), 1693–1722.
16. K. Grill, *A lim inf result in Strassen's law of the iterated logarithm.* Probab. Theor. Rel. Fields **89** (1991), 149–157.
17. J. Kolmós, P. Major, G. Tusnády, *An approximation of partial sums of independent RV'-s and the sample* DF.I, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **32** (1975), 111–131.
18. J. Komlós, P. Major, G. Tusnády, *An approximation of partial sums of independent RV'-s and the sample* DF.II, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **34** (1976), 34–58.
19. K. Sato, *Levi processes and infinitely divisible distributions.* Cambridge University Press. (1999).

Shmileva E. Yu. Small ball probability for centered Poisson process of high intensity.

We study the behavior of the probability of a small ball receding unlimitedly, with respect to the measure defined by a centred Poisson process of high intensity. Th results of this article are restricted to the simplest case, where the variation of the shift function (center of the ball) is finite. The evalution is obtained under the optimal conditions for the intensity of the process.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: shmill@mail.ru

Поступило 29 сентября 2003 г.