Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 298, 2003 г.

**А. Н. Фролов**

# СИЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПРИРАЩЕНИЙ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

## 1. Введение и основные результаты

Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ – последовательность независимых невырожденных одинаково распределенных случайных величин, $X \geq 0$, $\mu = EX < \infty$. Обозначим

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad S_0 = 0,$$

и определим процесс восстановления следующим образом

$$N(t) = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Процессы восстановления играют важную роль в различных приложениях теории вероятностей. Например, в актуарной и финансовой математике точечные процессы, в частности, процессы восстановления, описывают количество страховых случаев или число операций на рынке ценных бумаг до момента времени $t$. Одним из важнейших частных случаев процессов восстановления является пуассоновский процесс, соответствующий экспоненциальному распределению $X$.

Настоящая работа посвящена изучению асимптотического (в смысле сходимости с вероятностью 1) поведения приращений процессов восстановления

$$u_T = \sup_{0 \leq t \leq T - a_T} (N(t + a_T) - N(t)),$$

где $a_T$ – неубывающая положительная функция, $a_T \leq T$, $a_T \to \infty$. (Отметим, что $u_T = N(T)$ при $a_T = T$.)

Имеющиеся в этом направлении работы посвящены отысканию условий, необходимых и/или достаточных для того, чтобы

$$\limsup \frac{u_T - a_T/\mu}{b_T} = 1 \quad \text{п.н.},$$

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Е02-1.0-56 Министерства Образования РФ и гранта ведущих научных школ НШ-2258.2003.1.

где $b_T$ – некоторая неубывающая положительная (не случайная) функция. (Всюду, где использованы символы $\limsup$, $\liminf$, $\lim$, O, o, $\to$ считаем, что $T \to \infty$, если не оговорено противное.) В зависимости от скорости роста $a_T$ все полученные ранее результаты делятся на два типа. Если $a_T = O(\log T)$, то нормировка $\{b_T\}$ существенно зависит от распределения $X$, а иногда даже однозначно определяет это распределение. Аналогичный эффект для сумм независимых случайных величин был открыт Эрдёшем и Реньи [1]. Поэтому результаты для малых ($a_T = O(\log T)$) приращений называются законами Эрдёша–Реньи для процессов восстановления. Им посвящены работы Штайнебаха [2], Девельса и Штайнебаха [3] и Штайнебаха [4] (см. также литературу в работах [4, 5]). Если $a_T/\log T \to \infty$ и $DX = \sigma^2 < \infty$, то $b_T = \sigma\mu^{-3/2}(2a_T(\log Ta_T^{-1} + \log\log T))^{1/2}$, т.е. нормирующая функция зависит только от первых двух моментов распределения $X$ и совпадает с нормировкой для пуассоновского процесса. Результаты такого типа для сумм независимых случайных величин были получены впервые Чёргё и Ревесом [6], и мы называем далее результаты этого типа для процессов восстановления законами Чёргё–Ревеса. Асимптотика длинных ($a_T/\log T \to \infty$) приращений исследована Девельсом и Штайнебахом [3] и Штайнебахом [5]. Отметим, что случай $a_T = T$ соответствует хорошо известному закону повторного логарифма для процессов восстановления.

В работах автора [7–10] найдена формула универсальной нормирующей последовательности в сильных предельных теоремах для приращений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. По этой формуле вычисляется нормирующая последовательность в законе больших чисел, законе Эрдёша–Реньи, законе Чёргё–Ревеса и законе повторного логарифма для сумм. Естественной задачей является получение подобной формулы и для процессов восстановления, чему и посвящена эта статья. В ней получена формула универсальной (единой для всех $a_T$) нормировки $b_T$. Это дает возможность охватить единой формулировкой следующие известные сильные предельные теоремы для приращений процессов восстановления: закон больших чисел, закон Эрдёша–Реньи, закон Чёргё–Ревеса, закон повторного логарифма. Кроме того, это позволяет получить новые результаты для случайных величин из областей притяжения нормального закона и асимметричных устойчивых законов с показателем $\alpha \in (1,2)$.

Вместе с $u_T$ мы будем рассматривать

$$U_T = \sup_{0\le t\le T-a_T} (N(t+a_T) - N(t)) - \frac{a_T}{\mu},$$
$$W_T = \sup_{0\le t\le T-a_T} \sup_{0\le s\le a_T} \Big( N(t+s) - N(t) - \frac{s}{\mu} \Big).$$

$U_T$ представляет собой вариант $u_T$, центрированный математическим ожиданием приращений. Соответствующий нецентрированный аналог для $W_T$ совпадает с $u_T$ в силу того, что $N(t)$ не убывает. Отметим, что ранее величина $W_T$ не рассматривалась.

Предположим, что выполнены следующие условия:

A) $\operatorname{ess\,inf} X = 0$;

B) $0 < EX = \mu < \infty$;

Обозначим $F(x) = P(\mu - X < x)$. Положим для $h > 0$

$$\varphi(h) = Ee^{h(\mu - X)}, \quad m(h) = \frac{\varphi'(h)}{\varphi(h)},$$
$$\sigma^2(h) = m'(h), \quad f(h) = hm(h) - \log\varphi(h).$$

Обозначим

$$\zeta(z) = \sup_{h\ge 0}\{zh - \log\varphi(h)\}, \quad \gamma(x) = \sup\{z : \zeta(z) \le x\}.$$

Свойства функций $m(h)$, $\sigma^2(h)$ и $\zeta(z)$ хорошо известны из теории больших уклонений и могут быть найдены, например, в [8, 9]. Мы приведем их с учетом того, что случайная величина $\mu - X$ ограничена сверху. Отметим, что

$$\lim_{h\nearrow\infty} m(h) = \mu, \quad \lim_{h\nearrow\infty} f(h) = \frac{1}{c_0}, \quad c_0 = -1/\log P(X=0).$$

Здесь мы полагаем $\log 0 = -\infty, 1/0 = \infty$. Функции $m(h)$, $f(h)$, $\zeta(z)$ и $\gamma(x)$ связаны следующими соотношениями:

$$\zeta(z) = f(m^{-1}(z)) \quad \text{при} \;\; z \in [0,\mu), \tag{1}$$
$$\gamma(x) = m(f^{-1}(x)) \quad \text{при} \;\; x \in [0, 1/c_0), \tag{2}$$

где $m^{-1}(z)$ и $f^{-1}(x)$ – это функции, обратные к $m(h)$ и $f(h)$ соответственно. Функция $\gamma(x)$ обладает следующими свойствами: $\gamma(0) = 0$, $\gamma(x) \to \mu$ при $x \to \infty$, $\gamma(x)$ выпукла вверх.

Предположим, что $c_T$ – неубывающая функция такая, что

$$c_T\Big(\mu-\gamma\Big(\frac{\log\frac{T}{c_T}+\log\log T}{c_T}\Big)\Big)=a_T \tag{3}$$

и $T/c_T$ не убывает для всех достаточно больших $T$. Нетрудно проверить, что, в силу свойств $\gamma(x)$, соотношение (3) однозначно определяет функцию $c_T$ по $a_T$ и, кроме того, $c_T>a_T/\mu$ для всех $T$. Положим

$$b_T=b_T(V_T)=\begin{cases} c_T-\frac{a_T}{\mu}, & \text{если}\quad V_T=U_T \quad \text{или}\ V_T=W_T,\\ c_T, & \text{если}\quad V_T=u_T.\end{cases} \tag{4}$$

Ясно, что $b_T>0$ для всех $T$. Так как $a_T\to\infty$, то $b_T\to\infty$. Если $V_T=u_T$, то последнее утверждение очевидно. В противном случае оно легко получается из свойств $\gamma(x)$ и того обстоятельства, что (3) можно переписать в виде

$$\mu b_T=c_T\gamma\Big(\frac{\log\frac{T}{c_T}+\log\log T}{c_T}\Big). \tag{5}$$

Всюду далее мы будем предполагать, что $b_T$ эквивалентна некоторой неубывающей функции.

Фактически, формула для $b_T$ является основным результатом этой работы. Позже мы покажем, что нормировки во всех упомянутых выше сильных предельных теоремах для процессов восстановления вычисляются именно по этой формуле. Кроме того, мы покажем, что в случае малых приращений, когда центрировка пренебрежимо мала по сравнению с нормировкой или имеет такой же порядок, обе части формулы для $b_T$ дают одни и те же результаты.

Сформулируем теперь наши результаты.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия* A, B *и*

$$\limsup_{\theta\searrow 1}\limsup_{T\to\infty}\frac{b_{\theta T}}{b_T}=1.$$

*Предположим, что для любого $\varepsilon>0$ существует $q\in(0,1)$ такое, что неравенство*

$$P(R_{[(1+\varepsilon)(1+3\varepsilon)c_T]}\geq-\varepsilon\mu b_T)\geq q \tag{6}$$

*выполнено при всех достаточно больших* $T$, *для которых* $\varepsilon c_T > \log T$. *Здесь и далее* $R_n = -S_n + n\mu$ *для всех* $n = 1, 2, \ldots,$ $[\cdot]$ *обозначает целую часть числа в скобках.*

*Тогда*

$$\limsup \frac{W_T}{b_T} \leq 1 \quad \textit{п.н.}$$

*В последнем соотношении* $W_T$ *можно заменить на* $u_T$.

Следует помнить, что при замене $W_T$ и $U_T$ на $u_T$ нормирующая последовательность $b_T$ меняется, т.к. формула для нее зависит от соответствующей статистики.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия* A *и* B.

*Предположим, что выполнен один из следующих наборов условий:*

1) $\log T/c_T < \min\{1/c_0 - \varepsilon_0, 1/\varepsilon_0\}$ *для всех достаточно больших* $T$ *и некоторого* $\varepsilon_0 > 0$. *Если* $a_T/T \to 1$, *то предположим дополнительно, что выполнено условие* (6).

2) $c_T/\log T \to 0$ *и* $P(X = 0) = 0$.

*Тогда*

$$\limsup \frac{U_T}{b_T} \geq 1 \quad \textit{п.н.}$$

*В последнем соотношении* $U_T$ *можно заменить на* $u_T$.

**Теорема 3.** *Пусть выполнены условия* A *и* B. *Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*

1) *выполнен набор условий* 1) *теоремы* 2 *и* $\log\log T = o(\log(T/c_T))$;

2) *выполнен набор условий* 2) *теоремы* 2 *и*

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\mu - \gamma(-\log P(X < x))}{x} = 1;$$

3) $c_T/\log T \to 0$ *и* $P(X = 0) > 0$.

*Тогда*

$$\liminf \frac{U_T}{b_T} \geq 1 \quad \textit{п.н.}$$

*В последнем соотношении* $U_T$ *можно заменить на* $u_T$.

Из теорем 1–3 и неравенства $U_n \leq W_n$ вытекает следующая теорема.

**Теорема 4.** *Если выполнены условия теорем* 1 *и* 2, *то*

$$\limsup \frac{W_T}{b_T} = \limsup \frac{U_T}{b_T} = \limsup \frac{u_T}{b_T} = 1 \quad \text{п.н.} \tag{7}$$

*Если выполнены условия теорем* 1 *и* 3, *то*

$$\lim \frac{W_T}{b_T} = \lim \frac{U_T}{b_T} = \lim \frac{u_T}{b_T} = 1 \quad \text{п.н.} \tag{8}$$

Теперь мы сформулируем ряд важных следствий из теоремы 4. Заметим, что ранее величина $W_T$ не рассматривалась.

Мы начнем со случая $a_T = O(\log T)$.

Нетрудно проверить, что (3) равносильно соотношению

$$c_T = a_T \beta\Big(\frac{\log \frac{T}{c_T} + \log\log T}{a_T}\Big), \tag{9}$$

где $\beta(x)$ – функция, обратная к функции $\kappa(u) = u\zeta(\mu - u^{-1})$, $u \geq \mu^{-1}$. Известно (см. Штайнебах [4]), что $\beta(0) = 1/\mu$, $\beta(x) \nearrow \infty$ при $x \to \infty$ и $\beta(x)$ выпукла вверх.

**Теорема 5** (УЗБЧ Эрдёша–Реньи). *Если* $a_T = c\log T$, $c > c_0$, *то*

$$\lim \frac{W_T}{(\beta(1/c) - 1/\mu)a_T} = \lim \frac{U_T}{(\beta(1/c) - 1/\mu)a_T} = \lim \frac{u_T}{\beta(1/c)a_T} = 1 \ \text{п.н.}$$

Теорема 5 может быть найдена в работе Штайнебаха [2].

Напомним, что нормирующие последовательности для $U_T$ и $u_T$ вычисляются по двум разным частям формулы (4). Простые вычисления естественно показывают, что соотношения для $U_T$ и $u_T$ в теореме 5 эквивалентны.

**Теорема 6.** *Если* $a_T = o(\log T)$ *и* $P(X = 0) = 0$, *то соотношение* (7) *выполнено с*

$$b_T = a_T \beta\Big(\frac{\log T}{a_T}\Big).$$

*Если выполнены условия* 2) *или* 3) *теоремы* 3, *то выполнено* (8).

Теорема 6 доказана Штайнебахом [4].

Отметим, что если выполнено условие 3) теоремы 3, то $b_T \sim c_0 \log T$.

В теореме 6 нормировка для $U_T$ и $u_T$ совпадает, так как центрирующая последовательность пренебрежимо мала по сравнению с нормировкой. Действительно, из (3) и (4) легко вытекает, что $a_T = o(b_T)$.

Пусть теперь $a_T / \log T \to \infty$. В этом случае поведение центрированных статистик $W_T$ и $U_T$ и нецентрированной статистики $u_T$ существенно различаются. Так например, если $EX^2 < \infty$ и $a_T = T$, то из результата для $U_T$ мы должны получить закон повторного логарифма для процессов восстановления, а из результата для $u_T$ – закон больших чисел. Поэтому в дальнейшем мы рассматриваем $W_T$ и $U_T$ отдельно от $u_T$.

**Теорема 7** (Закон Чёргё–Ревеса). *Если* $\sigma^2 = EX^2 < \infty$, *то*

$$\limsup \frac{W_T}{b_T} = \limsup \frac{U_T}{b_T} = 1 \quad \text{п.н.}, \tag{10}$$

*где*

$$b_T = \frac{\sigma}{\mu^{3/2}} \sqrt{2a_T(\log \frac{T}{a_T} + \log\log T)}.$$

*Если* $\log\log T = o(\log(T/a_T))$, *то*

$$\lim \frac{W_T}{b_T} = \lim \frac{U_T}{b_T} = 1 \quad \text{п.н.} \tag{11}$$

Результаты этого типа, а также оценки скорости сходимости в них, получены в работах Штайнебаха [2, 5] и Девельса и Штайнебаха [3].

Если $a_T$ удовлетворяет условию $\log(T/a_T)/\log\log T \to c \geq 0$, то мы получаем из (10) следующую форму закона повторного логарифма для приращений процессов восстановления

$$\limsup \frac{W_T}{\sqrt{2a_T \log\log T}} = \limsup \frac{U_T}{\sqrt{2a_T \log\log T}} = \sqrt{1+c}\,\frac{\sigma}{\mu^{3/2}} \quad \text{п.н.}$$

При $a_T = T$ последнее соотношение превращается в закон повторного логарифма для $N(T)$. При этом условие $EX^2 < \infty$ является необходимым (см., например, Фролов, Мартикайнен, Штайнебах [11]).

Отметим, что теорема 7 может быть получена с помощью результатов о сильной аппроксимации процессов восстановления винеровсим процессом (см. Мейсон и ван Цвет [12] и Чёргё, Хорват, Штайнебах [13]) и результатов Чёргё и Ревеса [6] для приращений винеровского процесса. Однако этот метод невозможно использовать для малых приращений и при $EX^2 = \infty$.

Пусть теперь $EX^2 = \infty$. Этот случай ранее не рассматривался.

Далее мы пишем $F \in DN(\alpha)$ $(F \in D(\alpha))$, $\alpha \in (1, 2]$, если $F$ принадлежит области нормального (ненормального соотв.) притяжения устойчивого закона с характеристической функцией (х.ф.)

$$\psi(t) = \exp\{-c|t|^\alpha(1 + i\frac{t}{|t|}\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}\alpha)\}, \tag{12}$$

где $c = \cos(\pi(2-\alpha)/2)/\alpha$, $1 < \alpha \le 2$. В случае нормального притяжения мы считаем, что нормирующие постоянные имеют вид $n^{1/\alpha}$. Иначе случайные величины $X_i$ нужно должным образом отнормировать.

Х.ф. (12) соответствует производящая функция моментов $\varphi(h) = \exp\{h^\alpha/\alpha\}$, $h > 0$. Отсюда следует, что $\gamma(x) = (\alpha x/(\alpha-1))^{(\alpha-1)/\alpha}$ для всех $x > 0$. Заметим, что для стандартного нормального закона $\alpha = 2$ и $\gamma(x) = \sqrt{2x}$.

Далее, если $g(x)$ – правильно меняющаяся функция, то $g^{-1}(x)$ обозначает асимптотически обратную к ней функцию, т.е.

$$g^{-1}(g(x)) \sim g(g^{-1}(x)) \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

**Теорема 8.** *Если* $EX^2 = \infty$ *и* $F \in D(2)$, *то* (10) *выполнено с*

$$b_T = a_T\hat{m}(\hat{f}^{-1}((\log(T/a_T) + \log\log T)/a_T)),$$

*где* $\hat{m}(h) = hG(1/h)$, $\hat{f}(h) = h^2G(1/h)/2$, $G(x) = \int_{-x}^0 u^2dF(u)$, $x > 0$. *($G(x)$ – медленно меняющаяся функция.)*

*Если, кроме того,* $\log\log T = o(\log(T/a_T))$, *то выполнено* (11).

Рассмотрим теперь случай $\alpha \in (1, 2)$.

**Теорема 9.** *Если* $EX^2 = \infty$ *и* $F \in DN(\alpha)$, $\alpha \in (1, 2)$, *то* (10) *выполнено с*

$$b_T = \mu^{-1-1/\alpha}(\alpha/(\alpha-1))^{(1-\alpha)/\alpha}a_T^{1/\alpha}(\log(T/a_T) + \log\log T)^{(\alpha-1)/\alpha}.$$

*Если, кроме того,* $\log\log T = o(\log(T/a_T))$, *то выполнено* (11).

**Теорема 10.** *Если* $EX^2 = \infty$ *и* $F \in D(\alpha)$, $\alpha \in (1,2)$, *то* (10) *выполнено с*

$$b_T = a_T \hat{m}(\hat{f}^{-1}((\log(T/a_T) + \log\log T)/a_T)),$$

*где* $\hat{m}(h) = h^{\alpha-1}G(1/h)\alpha\Gamma(2-\alpha)/(\alpha-1)$, $\hat{f}(h) = \Gamma(2-\alpha)h^\alpha G(1/h)$, $G(x) = x^\alpha F(-x)$, $x > 0$. *(*$G(x)$ *– медленно меняющаяся функция.)*

*Если, кроме того,* $\log\log T = o(\log(T/a_T))$, *то выполнено* (11).

Мы завершаем этот параграф результатами для нецентрированной статистики $u_T$.

**Теорема 11.** *Если* $a_T/\log T \to \infty$, *то*

$$\limsup \frac{u_T}{a_T} = \frac{1}{\mu} \quad \textit{п.н.}$$

*Если* $\log\log T = o(\log(T/a_T))$, *то в последнем соотношении* $\limsup$ *можно заменить на* $\lim$.

Если $a_T = T$, то из теоремы 11 мы получаем

$$\limsup \frac{N(T)}{T} = \frac{1}{\mu} \quad \text{п.н.}$$

Используя тот же метод доказательства, что и метод доказательства (8), можно показать, что в последнем соотношении можно заменить $\limsup$ на $\lim$. Это дает усиленный закон больших чисел для процессов восстановления.

## 2. Доказательства

Сначала мы докажем следующую лемму.

**Лемма 1.** *Имеют место следующие соотношения между событиями*

$$\{W_T \ge x+1\} \subset \{\max_{[x] \le j \le [x + \frac{a_T}{\mu}]+1} \max_{0 \le k \le N(T)-j} (R_{k+j} - R_k) \ge \mu x\}, \quad (13)$$

$$\{U_T \ge x-2\} \supset \{\max_{0 \le k \le N(T)-[x+\frac{a_T}{\mu}]+1} (R_{k+[x+\frac{a_T}{\mu}]} - R_k) \ge \mu x\}, \quad (14)$$

$$\{U_T \ge x-2\} \supset \{R_{[x+\frac{a_T}{\mu}]} \ge \mu x\}. \quad (15)$$

**Доказательство.** Если $W_T \ge x+1$, то $N(t+s) - (x+1+s\mu^{-1}) \ge N(t)$ для некоторых $s \in [0, a_T]$ и $t \in [0, T-a_T]$. Так как $N(t)$– целое число, а $S_n$ не убывает по $n$, то $S_{[N(t+s)-(x+1+s\mu^{-1})]+1} \ge S_{N(t)+1} >$

$t \geq S_{N(t+s)} - s$. В последних двух неравенствах мы использовали определение $N(t)$. Из последнего неравенства следует, что $R_{N(t+s)} - R_{[N(t+s)-(x+s\mu^{-1})]} \geq x\mu$. Положим $k = [N(t+s)-(x+s\mu^{-1})]$, $j = (x+s\mu^{-1}) + \{N(t+s)-(x+s\mu^{-1})\}$, где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа в скобках. Тогда $N(t+s) = k+j$, $[x] \leq j \leq [x+a_T\mu^{-1}]+1$ и $0 \leq k \leq N(T) - j$. Таким образом, мы показали, что для некоторых $k$ и $j$ таких, что $[x] \leq j \leq [x+a_T\mu^{-1}]+1$ и $0 \leq k \leq N(T) - j$ выполняется неравенство $R_{k+j} - R_k \geq x\mu$. Соотношение (13) доказано.

Если $U_T < x - 2$, то $N(t + a_T) - N(t) < [x + a_T\mu^{-1}] - 1$ для всех $t \in [0, T - a_T]$. Так как $S_n$ не убывает по $n$, то $S_{N(t+a_T)-[x+a_T\mu^{-1}]+1} < S_{N(t)} \leq t < S_{N(t+a_T)+1} - a_T$. В последних двух неравенствах мы снова использовали определение $N(t)$. Из последнего неравенства следует, что $R_{N(t+a_T)+1} - R_{N(t+a_T)-[x+a_T\mu^{-1}]+1} < \mu x$. Положим $k = N(t + a_T) - [x + a_T\mu^{-1}] + 1$. Мы показали, что для всех $k$ таких, что $0 \leq k \leq N(T) - [x + a_T\mu^{-1}] + 1$ выполняется неравенство $R_{k+[x+a_T\mu^{-1}]} - R_k < x\mu$. Поэтому

$$\{U_T < x - 2\}$$
$$\subset \{\max_{0 \leq k \leq N(T)-[x+\frac{a_T}{\mu}]+1} (R_{k+[x+\frac{a_T}{\mu}]} - R_k) < x\mu\} \subset \{R_{[x+\frac{a_T}{\mu}]} < \mu x\}.$$

Отсюда следуют (14) и (15).

Лемма 1 доказана.

Нам понадобится следующий результат.

**Лемма 2.** *Пусть выполнены условия* A *и* B.

*Тогда*

$$P(R_n \geq nm(h)) \leq \exp\{-nf(h)\} \tag{16}$$

*для любого $h > 0$ и всех $n$.*

*Пусть $\{h_n\}$ – последовательность положительных чисел такая, что $nf(h_n) \to \infty$.*

*Тогда*

$$P(R_n \geq (1-\varepsilon)nm(h_n)) \geq \exp\{-nf(h_n)(1+\delta)\} \tag{17}$$

*для любых $\varepsilon > 0, \delta > 0$ и всех достаточно больших $n$.*

**Доказательство.** Оценка (16) следует из неравенства Чебышева. Оценка (17) получена Феллером [14] при дополнительном предположении $h_n\sigma(h_n) = o(\sqrt{n}f(h_n))$. То, что последнее соотношение выполнено, следует из того факта, что $E(\mu - X)^2\exp\{\lambda(\mu - X)\} < \infty$ для всех $\lambda > 0$ и $\sup_{0<u\le\lambda} u^2\sigma^2(u)/f(u) < \infty$ (см. Розовский [15], стр. 213).

Мы будем использовать следующую известную лемму.

**Лемма 3.** *Пусть $r, s \ge 0$, $q > 0$. Если $P(R_i \ge -s) \ge q$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, то*

$$P(\max_{0\le i<j\le n}(R_j - R_i) \ge r) \le q^{-2}P(R_n \ge r - s).$$

**Доказательство теоремы 1.** Возьмем $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ и положим $K = [(1+\delta)T\mu^{-1}]$, $J = [(1+3\varepsilon)b_T + a_T\mu^{-1}]$. Так как $b_T \to \infty$, то, используя (13) с $x = (1+3\varepsilon)b_T$, мы получим

$$\begin{aligned}
&P(W_T \ge (1+4\varepsilon)b_T) \le P(W_T \ge (1+3\varepsilon)(b_T+1)) \\
&\le P(\max_{1\le j\le J+1}\max_{0\le k\le N(T)-j}(R_{k+j} - R_k) \ge (1+3\varepsilon)\mu b_T) \\
&\le P(\max_{1\le j\le J+1}\max_{0\le k\le K}(R_{k+j} - R_k) \ge (1+3\varepsilon)\mu b_T) + P(N(T) \ge K) \\
&= P_T + Q_T.
\end{aligned}$$

для всех достаточно больших $T$.

Оценим сначала $P_T$.

**Лемма 4.** *Если выполнены условия теоремы 1, то для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует $\tau > 0$ такое, что для всех достаточно больших $T$ выполняется неравенство*

$$P_T \le (\log T)^{-(1+\tau)}. \tag{18}$$

*Здесь $\varepsilon_0$ – абсолютная постоянная.*

**Доказательство.** Положим

$$d_T = \log\frac{T}{c_T} + \log\log T. \tag{19}$$

Пусть $\varepsilon c_T \le \log T$. Используя выпуклость вверх функции $\gamma(x)$ и (5), получим $(1+3\varepsilon)\mu b_T \ge j\gamma((1+3\varepsilon)d_T/j)$ при $1 \le j \le J_1 = [(1+3\varepsilon)c_T]$. С учетом (16) и (2) имеем при достаточно больших

$T$

$$P_T \le K\sum_{j=1}^{J+1} P(R_j \ge (1+3\varepsilon)\mu b_T) \le K\sum_{j=1}^{J_1} P(R_j \ge j\gamma((1+3\varepsilon)d_T/j))$$
$$\le K\sum_{j=1}^{J_1}\exp\{-(1+3\varepsilon)d_T\} \le KJ_1T^{-(1+3\varepsilon)}c_T^{1-3\varepsilon}(\log T)^{-(1+3\varepsilon)}.$$

Отсюда следует (18).

Пусть теперь $\varepsilon c_T > \log T$. Положим $m = [\varepsilon J]$, $L = [K/m]+1$, $J_2 = J+m+1$. Отметим, что $J_2 \sim (1+\varepsilon)(c_T+3\varepsilon b_T)$. Учитывая (5), $b_T = \mu^{-1}c_T\gamma(d_T/c_T) \le \mu^{-1}c_T\gamma(2\varepsilon)$ для всех достаточно больших $T$. Следовательно, при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ неравенства $(1+2\varepsilon)c_T \ge (1+2\varepsilon)\{(1+0.1\varepsilon)(1+\varepsilon)(1+3\varepsilon\mu^{-1}\gamma(2\varepsilon))\}^{-1}J_2 \ge J_2$ выполняются для всех достаточно больших $T$.

Используя лемму 3, условие (6) и (5), имеем

$$P_T \le \sum_{l=1}^{L} P(\max_{1\le j\le J+1}\max_{(l-1)m\le k\le lm}(R_{k+j}-R_k) \ge (1+3\varepsilon)\mu b_T)$$
$$\le LP(\max_{1\le j\le J+1}\max_{0\le k\le m}(R_{k+j}-R_k) \ge (1+3\varepsilon)\mu b_T)$$
$$\le \frac{L}{q^2}P(R_{J_2} \ge (1+2\varepsilon)\mu b_T) = \frac{L}{q^2}P(R_{J_2} \ge (1+2\varepsilon)c_T\gamma(d_T/c_T))$$
$$\le \frac{K+m}{mq^2}P(R_{J_2} \ge J_2\gamma(d_T/c_T))$$

для всех достаточно больших $T$.

Отсюда и из соотношений (16) и (2) следует (18).

Лемма 4 доказана и мы возвращаемся к доказательству теоремы 1.

Оценим теперь скорость убывания $Q_T$. Имеем

$$Q_T = P\Big(S_K \le \frac{K\mu}{1+\delta}\Big) = p_K.$$

Так как $EX = \mu < \infty$, то в силу известной оценки Каца (см., например, Петров [16], п. 30 стр. 246) скорости сходимости в усиленном законе больших чисел для сумм ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k/k$ сходится.

Возьмем $\theta > 1$. Положим $n_k = \min\{n : \theta^{k-1} < n \le \theta^k, p_n = \min_{\theta^{k-1}<m\le\theta^k} p_m\}$, $k = 1,2,\ldots$ Определим последовательность

$\{T_k\}$ так, чтобы $K(T_k) = n_k$ для всех $k = 1, 2, \dots$ Тогда $T_k \nearrow \infty$ при $k \to \infty$ и $T_k < T_{k+1} < \theta^3 T_k$ для всех достаточно больших $k$.

Имеем

$$\infty > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} p_{n_k} \sum_{\theta^{k-1} < n \leq \theta^k} \frac{1}{n}$$
$$\geq (1-\theta^{-1}) \sum_{k=1}^{\infty} p_{n_k} = (1-\theta^{-1}) \sum_{k=1}^{\infty} Q_{T_k}.$$

В силу (18) и определения $T_k$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(W_{T_k} \geq (1+4\varepsilon) b_{T_k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P_{T_k} + \sum_{k=1}^{\infty} Q_{T_k} < \infty.$$

Из леммы Бореля–Кантелли следует, что

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{W_{T_k}}{b_{T_k}} \leq 1 + 4\varepsilon \quad \text{п.н.} \tag{20}$$

Далее, $b_{T_k} \leq b_{T_{k+1}} \leq b_{\theta^3 T_k} \leq (1+\tau) b_{T_k}$ для всех $\tau > 0$, всех $\theta$ достаточно близких к 1 и всех достаточно больших $k$. Так как $W_T$ не убывает, то $W_T/b_T \leq (1+\tau) W_{T_{k+1}}/b_{T_{k+1}}$ при $T_k \leq T \leq T_{k+1}$. Из последних неравенств и (20) следует, что

$$\limsup \frac{W_T}{b_T} \leq (1+\tau)(1+4\varepsilon) \quad \text{п.н.}$$

Устремляя в последнем соотношении $\tau$ и $\varepsilon$ к нулю, мы получаем требуемое.

**Доказательство теоремы 2.**

Пусть выполнено условие 1).

Возьмем $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и положим $K = K(T) = [(1-\delta) T \mu^{-1}]$, $J = J(T) = [(1-\varepsilon) b_T + a_T \mu^{-1}]$.

Пусть сначала $a_T/T < 1 - \rho$ для всех достаточно больших $T$.

В силу (14) имеем для всех достаточно больших $T$

$$\{U_T \geq (1-2\varepsilon) b_T)\} \supset \{U_T \geq (1-\varepsilon) b_T - 2\}$$
$$\supset \{\max_{0 \leq k \leq N(T)-J+1} (R_{k+J} - R_k) \geq (1-\varepsilon)\mu b_T\}$$
$$\supset \{\max_{0 \leq k \leq K-J+1} (R_{k+J} - R_k) \geq (1-\varepsilon)\mu b_T), N(T) \geq K\} \supset A_T B_T,$$

где $A_T = \{R_{K+1} - R_{K-J+1} \geq (1-\varepsilon)\mu b_T\}$, $B_T = \{N(T) \geq K\}$.

Пусть $\{T_k\}$ – произвольная последовательность такая, что $T_k \nearrow \infty$ при $k \to \infty$. В силу усиленного закона больших чисел для сумм и $B_T = \{S_K \leq T\} = \{S_K \leq K\mu/(1-\delta)\}$, с вероятностью 1 происходят все события $B_{T_k}$, начиная с некоторого $k$. Поэтому нам достаточно доказать, что с вероятностью 1 события $A_{T_k}$ происходят бесконечно часто.

Пусть $d_T$ определено по формуле (19).

Используя (5) и условие 1), имеем $\mu b_T = c_T\gamma(d_T/c_T) \leq a\mu c_T$ для всех достаточно больших $T$. Здесь $a < 1$. Поэтому $J = [c_T - \varepsilon b_T] \geq [(1-\varepsilon a)c_T]$ и $(1-\varepsilon)c_T \leq (J+1)(1-\varepsilon)(1-\varepsilon a)^{-1} \leq J(1-\varepsilon_1)^2$ для всех достаточно больших $T$. Здесь $\varepsilon_1 > 0$.

Используя (17) и выпуклость $\gamma(x)$, получим

$$P(A_T) \geq P(R_J \geq (1-\varepsilon)\mu b_T) \geq P(R_J \geq (1-\varepsilon_1)^2 J\gamma(d_T/c_T))$$
$$\geq P(R_J \geq (1-\varepsilon_1)J\gamma((1-\varepsilon_1)d_T/c_T)) \geq \exp\{-(1-\varepsilon_2)d_T\}$$

для всех достаточно больших $T$.

Положим $T_1 = 1$, $T_{k+1} = \min\{T : T > T_k, K(T_{k+1}) - J(T_{k+1}) = K(T_k)\}$, $k = 2, 3, \ldots$ Так же, как в работе автора [7] (стр. 164) докажем, что ряд $\sum_k P(A(T_k))$ расходится. Так как события $\{A(T_k)\}$ независимы, то по лемме Бореля–Кантелли $P(A(T_k)\quad \text{б.ч.}) = 1$.

Пусть теперь $a_T/T \to 1$. Тогда $d_T/c_T \to 0$ и из (5) следует, что $b_T = o(c_T)$. Поэтому $c_T \sim a_T/\mu \sim T/\mu$.

В силу (15) имеем для всех достаточно больших $T$

$$\{U_T \geq (1-2\varepsilon)b_T)\} \supset \{R_J \geq (1-\varepsilon)\mu b_T\}.$$

Возьмем $\theta > 1$ и положим $T_k = \theta^k$, $J_k = J(T_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ Обозначим $C_k = \{R_{J_k} - R_{J_{k-1}} \geq (1-0.5\varepsilon)\mu b_{T_k}\}$, $D_k = \{R_{J_{k-1}} \geq -0.5\varepsilon\mu b_{T_k}\}$.

Так как $J_{k-1} \sim c_{T_{k-1}}$, то из условия (6) следует, что $P(D_k) \geq q$ при всех достаточно больших $k$.

Следующие пары событий независимы:

$$C_k \text{ и } D_k, \quad C_k \text{ и } D_k\overline{C_{k-1}D_{k-1}},$$
$$C_k \text{ и } D_k\overline{C_{k-1}D_{k-1}C_{k-2}D_{k-2}}, \ldots .$$

Так как $c_{T_k} \sim (J_k - J_{k-1})\theta/(\theta-1)$, то

$$P(C_k) \geq P(R_{J_k - J_{k-1}} > (1+\tau)(1-0.5\varepsilon)\frac{\theta}{\theta-1}(J_k - J_{k-1})\gamma(d_{T_k}/a_{n_k}))$$

для всех достаточно больших $k$. Выберем $\theta$ большим, а $\tau$ маленьким так, чтобы $(1+\tau)(1-0.5\varepsilon)\theta/(\theta-1)=(1-\rho)^2$, $\rho>0$. Используя выпуклость $\gamma(x)$ и соотношения (17) и (2) так же, как при доказательстве леммы 4, получим

$$P(C_k)\geq \exp\{-(1-\rho)(1+\eta)(J_k-J_{k-1})d_{T_k}/c_{T_k}\}\geq k^{-(1-\rho)(1+\eta)(1+\xi)}$$

для всех достаточно больших $k$. Выбирая $\eta$ и $\xi$ достаточно малыми, заключаем, что ряд $\sum_k P(C_k)$ расходится.

По лемме 5 на стр. 267 книги Петрова [16], $P(C_kD_k \quad \text{б.ч.})\geq q>0$. Следовательно, $P(R_{J_k}\geq(1-\varepsilon)\mu b_{T_k} \quad \text{б.ч.})>0$. В силу закона "нуля или единицы" Колмогорова последняя вероятность равна 1. Отсюда следует, что $P(U_{T_k}\geq(1-2\varepsilon)b_{T_k} \quad \text{б.ч.})=1$.

Теорема доказана, когда выполнено условие 1). Если выполнено условие 2), то теорема доказана Штайнебахом [4] с $b_T$ из теоремы 6. Ниже мы покажем, что последовательность из теоремы 6 и наша последовательность эквивалентны.

**Доказательство теоремы 3.**

Пусть выполнено условие 1).

Возьмем $\varepsilon>0$, $\delta>0$ и положим $K=K(T)=[(1-\delta)T\mu^{-1}]$, $J=J(T)=[(1-\varepsilon)b_T+a_T\mu^{-1}]$.

В силу (14) имеем для всех достаточно больших $T$

$$\begin{aligned}
&\{U_T<(1-2\varepsilon)b_T)\}\subset\{U_T\geq(1-\varepsilon)b_T-2\}\\
&\subset\{\max_{0\leq k\leq N(T)-J+1}(R_{k+J}-R_k)<(1-\varepsilon)\mu b_T\}\\
&\subset\{\max_{0\leq k\leq K-J+1}(R_{k+J}-R_k)<(1-\varepsilon)\mu b_T\}\cup\{N(T)<K\}\\
&=E_T\cup F_T.
\end{aligned}$$

В силу усиленного закона больших чисел для сумм и $F_T=\{S_K\geq T\}=\{S_K\geq K\mu/(1-\delta)\}$, с вероятностью 1 события $F_T$ не происходят, начиная с некоторого $T$. Поэтому нам достаточно доказать то же самое для событий $E_T$.

Имеем

$$\begin{aligned}
P(E_T)&\leq P(\bigcap_{m=0}^{[K/J]}(R_{(m+1)J}-R_{mJ})<(1-\varepsilon)\mu b_T)\\
&\leq(1-P(R_J\geq(1-\varepsilon)\mu b_T))^{[K/J]}\\
&\leq\exp\{-[K/J]P(R_J\geq(1-\varepsilon)\mu b_T)\}.
\end{aligned}$$

Используя оценку вероятности $P(R_J \geq (1-\varepsilon)\mu b_T)$, полученную при доказательстве теоремы 2, определения $K$ и $J$, а также условие $\log\log T = o(\log T/c_T)$, получим

$$P(E_T) \leq T^{-3} \tag{21}$$

для всех достаточно больших $T$.

Положим $T_n = \mu n/(1-\delta)$, $n = 1, 2, \ldots$ Для каждого $n$ такого, что $J(T_n) < J(T_{n+1})$, определим $T_n(j) = \inf\{T \in [T_n, T_{n+1}) : J(T) = j\}$, $j \in I_n = (J(T_n), J(T_{n+1})]$. Для $n$ таких, что $J(T_n) = J(T_{n+1})$, положим $T_n(j) = T_{n+1}$, $j \in I_n = \{J(T_{n+1})\}$. В силу определения $T_n(j)$, имеем $E_T \subset E_{T_n(j+1)}$ при $T \in (T_n(j), T_n(j+1)]$. Далее,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \sum_{j \in I_n} P(E_{T_n(j+1)}) \leq \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{j \in I_n} (T_n(j+1))^{-3}$$
$$\leq \sum_{n=N}^{\infty} (J(T_{n+1}) - J(T_n) + 1) T_n^{-3}$$

Здесь $N$ выбрано столь большим, чтобы было выполнено (21). Так же, как в доказательстве теоремы 2, $c_T \geq J(T) \geq [(1-a\varepsilon)c_T]$. Значит, $J(T_{n+1}) - J(T_n) \leq c_{T_{n+1}} - (1-a\varepsilon)c_{T_n} + 1$. Так как $c_{T_n}/c_{T_{n+1}} \leq T_{n+1}/T_n \to 1$ и $c_{T_n} = O(T_n)$ при $n \to \infty$, то $J(T_{n+1}) - J(T_n) = O(T_n)$ при $n \to \infty$. Поэтому ряд $\sum_{n=N}^{\infty} \sum_{j \in I_n} P(E_{T_n(j+1)})$ сходится. По лемме Бореля–Кантелли с вероятностью 1 происходит лишь конечное число событий $E_{T_n(j+1)}$. Следовательно, с вероятностью 1 события $E_T$ не происходят для всех достаточно больших $T$.

Теорема доказана, когда выполнено условие 1). Если выполнено условие 2) или 3), то теорема доказана Штайнебахом [4] с $b_T$ из теоремы 6. Ниже мы покажем, что последовательность из теоремы 6 и наша последовательность эквивалентны.

**Доказательство теоремы 5.** Рассмотрим случай центрированной статистики $U_T$. Определим $d_T$ по формуле (19). В силу условия теоремы $\gamma(d_T/c_T)$ отделено от нуля и от $\mu$ для всех достаточно больших $T$. Поэтому $c_T = (\mu - \gamma(d_T/c_T))^{-1} a_T = O(\log T)$. Используя (9) и выпуклость вверх $\beta(x)$, получим $c_T = a_T \beta((1 + o(1)) \log T/a_T) \sim a_T \beta(1/c)$. Значит, $b_T \sim a_T(\beta(1/c) - 1/\mu)$.

Случай $u_T$ получается из предыдущего, если положить $c_T = b_T$.

**Доказательство теоремы 6.** В силу результата Штайнебаха [4] нам достаточно показать, что

$$b_T \sim a_T \beta\Big(\frac{\log T}{a_T}\Big). \tag{22}$$

Определим $d_T$ по формуле (19). Покажем, что $\gamma(d_T/c_T) \to \mu$. Предположим, что существует последовательность $\{T_k\}$, $T_k \nearrow \infty$ при $k \to \infty$, такая, что $\mu - \gamma(d_{T_k}/c_{T_k}) > \rho > 0$. Тогда $d_{T_k}/c_{T_k} < a < \infty$. Значит, $\log T_k/c_{T_k} < 2a$ для всех достаточно больших $k$. Отсюда следует, что $a_{T_k} = (\mu - \gamma(d_{T_k}/c_{T_k}))c_{T_k} > \rho \log T_k/2a$ для всех достаточно больших $k$, а это противоречит тому, что $a_T = o(\log T)$.

Из (3) следует, что $a_T = o(c_T)$ и $c_T \sim b_T$.

Если $P(X = 0) = 0$, то $\gamma(d_T/c_T) \to \mu$ влечет $d_T/c_T \to \infty$. Тогда $c_T = o(\log T)$ и $b_T = o(\log T)$. В силу (9) и выпуклости вверх $\beta(x)$ имеем $c_T = a_T\beta((1 + o(1))\log T/a_T) \sim a_T\beta(\log T/a_T)$. Отсюда следует (22).

Если $P(X = 0) > 0$, то $\gamma(d_T/c_T) \to \mu$ влечет $d_T/c_T \to 1/c_0$. Тогда $c_T \sim c_0 \log T$ и $b_T \sim c_0 \log T$. Но левая часть соотношения (22) тоже эквивалентна $c_0 \log T$ (см. Штайнебах [4]).

**Доказательство теорем 7–10.** Так как $a_T/\log T \to \infty$, то $d_T/c_T \to 0$. В силу (3) имеем $c_T \sim a_T/\mu$, $b_T = o(a_T)$. Теперь результат каждой из этих теорем получается из (5) и результатов об асимптотике $\gamma(x)$ в нуле (см. Фролов [8, 9]).

**Доказательство теоремы 11.** Так как $a_T/\log T \to \infty$, то $d_T/c_T \to 0$. В силу (3) имеем $b_T = c_T \sim a_T/\mu$.

## Литература


1. P. Erdös, A. Rényi, *On a new law of large numbers.* — J. Analyse Math., **23** (1970), 103–111.
2. J. Steinebach, *Between invariance principles and Erdős–Rényi laws.* — Coll. Math. Soc. J. Bolyai., **36** (1982), 981–1005.
3. P. Deheuvels, J. Steinebach, *Sharp rates for increments of renewal processes.* — Ann. Probab., **17** (1989), 700–722.
4. Steinebach J. *Strong laws for small increments of renewal processes.* — Ann. Probab., **19** (1991), 1768–1776.
5. J. Steinebach, *Improved Erdős–Rényi and strong approximation laws for increments of renewal processes.* — Ann. Probab., **14** (1986), 547–559.
6. M. Csörgő, P. Révész, *Strong approximations in probability and statistics.* — Budapest, Akadémiai Kiadó (1981).

7. A. N. Frolov, *On one-sided strong laws for large increments of sums.* — Statist. and Probab. Letters, **37** (1998), 155–165.
8. А. Н. Фролов, *Об асимптотическом поведении приращений сумм независимых случайных величин.* — Доклады Академии Наук, **372**, No. 5 (2000), 596–599.
9. A. N. Frolov, *On one-sided strong laws for increments of sums of i.i.d. random variables.* — Studia Sci. Math. Hungar., **39** (2002), 333–359.
10. А. Н. Фролов, *Предельные теоремы для приращений сумм независимых случайных величин.* — Теор. вероятн. и ее примен., **48**, вып. 1 (2003), 104–121.
11. A. N. Frolov, A. I. Martikainen, J. Steinebach, *Limit theorems for maxima of sums and renewal processes.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **278** 2001, 261–274.
12. D. M. Mason, W. van Zwet, *A note on the strong approximation to the renewal processes.* — Publ. Inst. Statist. Uni Paris, **32** 1987, 81–93.
13. M. Csörgő, L. Horváth, J. Steinebach, *Invariance principles for renewal processes.* — Ann.Probab., **15** (1987), 1441–1460.
14. W. Feller, *Limit theorems for probabilities of large deviations.* — Z. Wahrsch. Verw. Geb., **14** (1969), 1–20.
15. Л. В. Розовский, *О нижней границе вероятностей больших уклонений для выборочного среднего при выполнениии условия Крамера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **278** (2001), 208 —224.
16. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — М.: Наука (1987).

Frolov A. N. Strong limit theorems for increments of renewal processes.

We study the almost surely behavior of increments of renewal processes. We derive a universal form of norming functions in strong limit theorems for increments of such processes. This unifies the following well known theorems for increments of renewal processes: the strong law of large numbers, the Erdős —Rényi law, the Csörgő-Révész law and the law of the iterated logarithm. New results are obtained for processes with distributions of renewal times from domains of attraction of a normal law and completely asymmetric stable laws with index $\alpha \in (1, 2)$.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 26 февраля 2003 г.