Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 298, 2003 г.

А. Н. Фролов

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ПРИРАЩЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

1. Введение

Пусть $\{X_i, i \in Z_+^d\}$ – поле независимых одинаково распределенных невырожденных случайных величин, $S_B = \sum_{i \in B} X_i$, $B \subset R_+^d$, $\{a_n\}$ – неубывающая последовательность натуральных чисел, $1 \leq a_n \leq n$.

Обозначим через R_n' множество параллелепипедов $(i, j]$, i, $j \in Z_+^d$, таких, что $(i, j] \subset (0, n^{1/d}]^d$ и $\mu((i, j]) = a_n$, где $\mu(\cdot)$ – мера Лебега.

Мы будем изучать п.н. (почти наверное) асимптотическое поведение максимумов

$$U_n = \max_{r \in R_n'} S_r.$$

Наша цель состоит в том, чтобы описать класс последовательностей положительных постоянных $\{b_n\}$ таких, что либо

$$\limsup \frac{U_n}{b_n} = 1 \quad \text{п.н.},$$

либо последнее соотношение выполнено с заменой $\limsup$ на $\lim$, если это возможно. (В дальнейшем мы считаем, что все предельные переходы $\lim$, $\limsup$, $\liminf$, $\sim$, O, o, $\to$ осуществляются при $n \to \infty$, если явно не указано иное.)

Отметим, что в случае $d = 1$ максимум U_n превращается в известную статистику Эрдёша–Реньи

$$\max_{0 \leq k \leq n - a_n} (S_{k+a_n} - S_k),$$

где $S_k = X_1 + \cdots + X_k$. Отметим также, что $U_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ при $a_n = 1$ и $U_n = S_n$ при $a_n = n$.

Работа выполнена при частичной поддержке Минобразования РФ, грант Е00-1.0-82, и гранта ведущих научных школ НШ-2258.2003.1.

Предельное поведение U_n в случае $d = 1$ исследовалось в различных контекстах многими авторами. Решению поставленной выше задачи посвящены работы Эрдёша и Реньи [1], Шеппа [2], Ш. Чёргё [3], Девельса и Девроя [4], Мэйсона [5], М. Чёргё и Ревеса [6], Зинченко [7], Фролова [8–10]. (Подробное обсуждение содержится в статьях [9, 10].) Следующее универсальное решение поставленной задачи было найденно в [9] для случайных величин с конечным экспоненциальным моментом и в [10] для случайных величин без экспоненциального момента.

Если $E\exp\{hX_1\} < \infty$, $0 \le h < h_0$, и $EX_1 \ge 0$, то

$$b_n = a_n \gamma(a_n^{-1}(\log n a_n^{-1} + \log\log n)),$$

где $\gamma(x)$ – функция обратная к функции больших уклонений. Хотя $\gamma(x)$ хорошо известна, ее вычисление представляет собой сложную задачу, а выписать ее в явном виде можно лишь для некоторых распределений. Например, когда X_1 имеет стандартное нормальное распределение, $\gamma(x) = \sqrt{2x}$ и $b_n = \sqrt{2a_n(\log n a_n^{-1} + \log\log n)}$. Если же предположить лишь $EX_1 = 0$ и $EX_1^2 = 1$, то можно найти асимптотику $\gamma(x)$ в нуле, которая совпадает с асимптотикой в гауссовском случае. Это приводит к тому, что b_n совпадает с нормировкой в нормальном случае, если $a_n/\log n \to \infty$. Соответствующий результат был получен в [6]. Мы называем его законом Чёргё–Ревеса. В частности, при $a_n = n$, получим закон повторного логарифма (ЗПЛ) с обычной нормировкой $b_n = \sqrt{2n\log\log n}$. Если $X_1 \ge 0$ п.н. и $a_n = n$, то $b_n \sim n\gamma(0) = nEX_1$. Это дает усиленный закон больших чисел (УЗБЧ) для неотрицательных случайных величин, из которого легко вытекает УЗБЧ в общем случае.

Функцию $\gamma(x)$ можно выписать также для асимметричных устойчивых законов с показателем $\alpha \in (1,2)$, а ее асимптотику в нуле можно найти для распределений, притягивающихся к этим законам или к нормальному закону. Соответствующие результаты получены в [7] для устойчивых законов и в [9] для областей притяжения. В [9], в частности, доказаны аналоги законов Чёргё–Ревеса. Как и раньше, здесь также получаются УЗБЧ и ЗПЛ.

При $a_n = O(\log n)$ получается УЗБЧ Эрдёша–Реньи, установленный в [1–5].

Когда X_1 не имеет экспоненциального момента, функция $\gamma(x)$ в формуле для b_n заменяется на аналогичную функцию, построенную по усеченной случайной величине. При этом удается рассматривать только достаточно быстро возрастающие последовательности a_n, как минимум $a_n/\log n \to \infty$. Минимальная скорость роста a_n определяется моментными условиями, накладываемыми на правый хвост распределения X_1. Чем жестче моментные условия, тем ниже эта минимальная скорость роста. Здесь удается получить законы типа законов Чёргё–Ревеса, а также УЗБЧ и ЗПЛ. М. Чёргё и Ревес [6] получили свои результаты при двусторонних моментных условиях. Универсальные теоремы доказаны Фроловым в [9, 10] при односторонних моментных условиях, что существенно расширило область применимости результатов. Например, это позволило рассматривать величины из областей притяжения нормального закона и устойчивых асимметричных законов с показателем $\alpha \in (1, 2)$.

Перейдем к случаю $d > 1$. Чан [11] и М. Чёргё и Ревес [6, 12] исследовали асимптотическое поведение приращений многопараметрического винеровского процесса. Зинченко [13] рассматривала случай устойчивых случайных полей. В этих работах были доказаны УЗБЧ Эрдёша–Реньи и законы Чёргё–Ревеса в гауссовском случае и в случае асимметричных устойчивых законов с показателем $\alpha \in (1, 2)$. Для случайного поля с $EX_i = 0$, $EX_i^2 = 1$ и $\varphi(h) = E\exp\{hX_i\} < \infty$, $0 \le h < h_0$, Штайнебах [14] получил закон Эрдёша–Реньи и законы Чёргё–Ревеса при дополнительном предположении $a_n = o(n^\delta)$ для всех $\delta > 0$. Для $a_n = o(\log n)$ он также доказал закон Эрдёша–Реньи для распределений таких, что $h_0 = \infty$ и $(\log \varphi(h))'' \to c > 0$ при $h \to \infty$. Для $a_n = [c \log n]$ Девельс [15] получил закон Эрдёша–Реньи с оценкой скорости сходимости в нем. Щербакова [16] получила результаты аналогичные результатам Штайнебаха для иного максимума, и, кроме того, расширила его результаты о законе Чёргё–Ревеса на случай $a_n = O(n^\delta)$, где δ– некоторая положительная постоянная. Моментные условия в работах [15] и [16] были теми же, что и в [14].

Фролов [17] распространил результаты работы [9] на случайные поля. В предположении, что $\varphi(h) < \infty$, $0 \le h < h_0$, и $EX_i \ge 0$, в [17] найдена формула нормирующей последовательности в сильных предельных теоремах для приращений случайных полей. Это позволило, аналогично случаю $d = 1$, объединить следующие результаты: УЗБЧ, ЗПЛ, закон Чёргё–Ревеса и УЗБЧ Эрдёша–Реньи. Кроме того, были получены новые результаты для случайных величин из областей притяжения нормального закона и устойчивых асимметричных законов с показателем $\alpha \in (1, 2)$.

В настоящей работе мы обобщим результаты работ [10] и [17] на случай случайных полей независимых одинаково распределенных случайных величин без экспоненциального момента. Таким образом, задача описания b_n для случайных полей решена в той же степени, что и для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин.

2. Результаты

Пусть $\{X_i, i \in Z_+^d\}$ – поле независимых невырожденных случайных величин с общей функцией распределения (ф.р.) $F(x)$, X – случайная величина с той же ф.р. $F(x)$. Обозначим

$$S_B = \sum_{i \in B} X_i, \quad B \subset R_+^d, \quad S_\emptyset = 0.$$

Пусть $a(x)$ – неубывающая непрерывная функция такая, что $1 \le a(x) \le x$ и $x/a(x)$ не убывают. Положим $a_n = [a(n)]$, где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа в скобках.

Для любых $i = (i_1, \ldots, i_d)$ и $j = (j_1, \ldots, j_d)$ таких, что $i_s \le j_s$ $(s = \overline{1, d})$, обозначим $(i, j] = (i_1, j_1] \times \cdots \times (i_d, j_d]$ и $\mu_{ij} = \mu((i, j]) = \prod_{s=1}^d (j_s - i_s)$. Введем в рассмотрение следующие два множества параллелепипедов

$$R_n = \Big\{(i, j] \colon i, j \in Z_+^d,\ j_s \le n^{1/d}\ (s = \overline{1, d}),\ \mu_{ij} \le a_n\Big\},$$
$$R_n' = \Big\{(i, j] \in R_n \colon \mu_{ij} = a_n\Big\},$$

так, что R_n и R_n' состоят из параллелепипедов с вершинами, лежащими на целочисленной решетке в R_+^d, с ребрами, параллельными осям координат, и с объемом не более a_n и равным a_n соответственно.

Положим

$$W_n = \max_{r \in R_n} S_r, \quad U_n = \max_{r \in R_n'} S_r.$$

Предположим, что $EX \geq 0$. Обозначим

$$h_0 = \sup\{h : Ee^{hX} < \infty\}.$$

Пусть сначала $h_0 > 0$. Для $0 < h < h_0$ обозначим

$$\varphi(h) = \varphi_X(h) = Ee^{hX}, \quad m(h) = m_X(h) = \frac{\varphi'(h)}{\varphi(h)}, \tag{1}$$

$$\sigma^2(h) = \sigma_X^2(h) = m'(h), \quad f(h) = f_X(h) = hm(h) - \log\varphi(h). \tag{2}$$

Положим $\omega = \operatorname{ess\,sup} X$,

$$A = \lim_{h \nearrow h_0} m(h), \quad \frac{1}{c_0} = \lim_{h \nearrow h_0} f(h),$$
$$\zeta(z) = \zeta_X(z) = \sup\{zh - \log\varphi(h) : h \geq 0, \varphi(h) < \infty\}, \tag{3}$$

$$\gamma(x) = \gamma_X(x) = \sup\{z : \zeta(z) \leq x\}, \quad \gamma_n(x) = \gamma(x) \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Следующие свойства $m(h)$, $\sigma^2(h)$, $f(h)$, функции больших уклонений $\zeta(z)$ и $\gamma(x)$ хорошо известны из теории больших уклонений: $m(0) = EX$, $m(h) \nearrow$, $\sigma^2(0) = DX$ (если $DX = E(X - EX)^2 < \infty$), $\sigma^2(h) > 0$, $f(0) = 0$, $f(h) \nearrow$, $\zeta(EX) = 0$, $\zeta(z) = +\infty$ при $z > A$ (если $A < \infty$), $\zeta(z) \nearrow$, $\zeta(z)$ выпукла вниз, $\gamma(0) = EX$, $\gamma(x) = \omega$ при $x > 1/c_0$ (если $c_0 > 0$), $\gamma(x) \to \omega$ при $x \to \infty$ (если $c_0 = 0$), $\gamma(x) \nearrow$ при $x < 1/c_0$, $\gamma(x)$ выпукла вверх,

$$\zeta(z) = f(m^{-1}(z)) \quad \text{при} \quad z \in [EX, A),$$
$$\gamma(x) = m(f^{-1}(x)) \quad \text{при} \quad x \in [0, 1/c_0),$$

где $m^{-1}(\cdot)$ и $f^{-1}(\cdot)$ – функции, обратные к $m(\cdot)$ и $f(\cdot)$ соответственно.

Пусть теперь $h_0 = 0$. Отметим, что в этом случае $\omega = \infty$.

Пусть $\{y_n\}$ – последовательность положительных чисел такя, что $y_n \nearrow \infty$. Для $n = 1, 2, \ldots$ положим

$$Y_n = \min\{X, y_n\},$$

и

$$Z_n = \begin{cases} Y_n - EY_n, & \text{если} \quad EX = 0, \\ Y_n, & \text{если} \quad EX > 0. \end{cases}$$

Случайные величины Z_n ограничены и, следовательно, имеют экспоненциальный момент. Поэтому для них мы можем определить функции $\varphi_n(h) = \varphi_{Z_n}(h)$, $m_n(h) = m_{Z_n}(h)$, $\sigma_n^2(h) = \sigma_{Z_n}^2(h)$, $f_n(h) = f_{Z_n}(h)$, $\zeta_n(z) = \zeta_{Z_n}(z)$ и

$$\gamma_n(x) = \gamma_{Z_n}(x),$$

$n = 1, 2, \ldots$, по формулам (1)–(4) с формальной заменой X на Z_n. Отметим, что при этом случай $h_0 > 0$ соответствует предельному случаю $y_n = \infty$ для всех n.

Положим

$$b_n = a_n \gamma_n(\frac{\beta_n}{a_n}), \quad \text{где} \quad \beta_n = \log \frac{n}{a_n} + \log\log n.$$

Наш первый результат – это следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\{b_n\}$ эквивалентна некоторой неубывающей последовательности и*

$$\lim_{\theta \searrow 1} \lim_{k \to \infty} \frac{b_{[\theta^{k+1}]}}{b_{[\theta^k]}} = 1. \tag{5}$$

Предположим, что выполнены следующие три условия:

1) $\sum_n (1 + \log(n/a_n))^{d-1} P(X \geq b_n) < \infty$.
2) *Для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\tau > 0$, некоторых положительных H_1, H_2 и всех достаточно больших n выполняется неравенство*
$$P(S_{r(n)} \geq (1+\varepsilon) b_n) \leq H_1 e^{-(1+\tau)\beta_n} + H_2 a_n P(X \geq b_n), \tag{6}$$
где $r(n) = (0, [((1+\varepsilon)a_n)^{1/d}]]^d$.
3) *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $q \in (0,1)$ такое, что*
$$P(S_{r(n)} \geq -\varepsilon b_n) \geq q \tag{7}$$
для всех достаточно больших n, где $r(n)$ – параллелепипед из условия 2).

Тогда

$$\limsup \frac{W_n}{b_n} \leq 1 \qquad \text{п.н.} \tag{8}$$

Условие 1) показывает, что при $d > 1$ требуются более жесткие моментные ограничения на распределение X, чем при $d = 1$. Иногда этого все же удается избежать.

Замечание 1. Если (6) выполнено с $H_2 = 0$, то условие 1) можно отбросить.

Перейдем теперь к оценкам снизу.

Теорема 2. *Предположим, что*

$$P(S_{r(n)} \geq (1-\varepsilon)b_n) \geq H_3 e^{-(1-\tau)\beta_n}, \tag{9}$$

для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ *и* $\delta > 0$, *некоторых положительных* τ *и* H_3 *и всех достаточно больших* n, *где* $r(n) = (0, [((1-\delta)a_n)^{1/d}]]^d$.

Если $a_n/n \to 1$, *то дополнительно предположим, что выполнено* (7).

Тогда

$$\limsup \frac{U_n}{b_n} \geq 1 \qquad \textit{п.н.} \tag{10}$$

Следующий результат показывает, что (10) можно улучшить для медленно возрастающих a_n.

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы* 2 *и* $\log\log n = o(\log(n/a_n))$, *то*

$$\liminf \frac{U_n}{b_n} \geq 1 \qquad \textit{п.н.} \tag{11}$$

Из теорем 1, 2 и 3 вытекает следующий результат.

Теорема 4. *Если выполнены условия теорем* 1 *и* 2, *то*

$$\limsup \frac{W_n}{b_n} = \limsup \frac{U_n}{b_n} = 1 \qquad \textit{п.н.} \tag{12}$$

Если, кроме того, $\log\log n = o(\log(n/a_n))$, *то*

$$\lim \frac{W_n}{b_n} = \lim \frac{U_n}{b_n} = 1 \qquad \textit{п.н.} \tag{13}$$

Условия теоремы 4 носят очень общий характер. Сформулируем ряд важных следствий из нее. Напомним, что соответствующие универсальные результаты в случае $h_0 > 0$ были получены автором в [17], а ряд важных частных случаев, перечисленных выше, был рассмотрен в [6, 11–16].

Теорема 5 (УЗБЧ Эрдёша–Реньи). *Если* $h_0 > 0$ *и* $a_n = [c \log n]$, $c > c_0$, *то*

$$\lim \frac{W_n}{a_n} = \lim \frac{U_n}{a_n} = \gamma(1/c) \qquad \text{п.н.}$$

Отметим, что из теоремы 4 вытекает более общий результат, содержащий как следствие так называемую полную форму закона Эрдёша–Реньи, т.е. случаи $c < c_0$ (см. Девельс и Деврой [4]) и $a_n = o(\log n)$ (см. Мэйсон [5]). Их мы рассмотрим в другой работе.

Перейдем теперь к случаю $a_n/\log n \to \infty$.

Введем в рассмотрение следующие два класса функций $\mathcal{E}$ и $\mathcal{M}_p$ из [10].

Мы считаем, что $H(x) \in \mathcal{E}$, если $H(x) \nearrow$, $H(x)/x \searrow$ и $\liminf\limits_{x\to\infty} H(cx)/H(x) > 1$ для некоторого $c > 1$. Отметим, что, если $H(x) \in \mathcal{E}$, то $\log x = o(H(x))$ при $x \to \infty$ и $(H^{-1}(x))^2/x$ не убывает. (Здесь и далее $H^{-1}(x)$ обозначает обратную функцию.)

Мы пишем $H(x) \in \mathcal{M}_p$, если $H(x) \nearrow$, $\limsup_{x\to\infty} H(cx)/H(x) < \infty$ для всех $c > 0$, $H(x)/x^p$ не убывает и $\lim_{x\to\infty} \log H(x)/\log x = p$ для некоторого $p > 0$.

Например, $H(x) = x^p$ принадлежит классу $\mathcal{E}$ при $p \in (0,1)$ и классу $\mathcal{M}_p$ при $p > 0$. Другие примеры можно получить умножением x^p на медленно меняющуюся функцию.

Теорема 6. *Пусть* $EX = 0$, $EX^2 = 1$.

Предположим, что выполнено одно из следующих трех условий:

1) $h_0 > 0$ *и* $a_n/\log n \to \infty$;
2) $E\exp\{H(X^+)\}(H(X^+))^\tau < \infty$, $H(x) \in \mathcal{E}$, $\tau > d$ *при* $d > 1$ *и* $\tau = 0$ *при* $d = 1$, $a_n \geq C(H^{-1}(\log n))^2/\log n$, *где* $C = C(H)$ – *абсолютная положительная постоянная;*
3) $EH(X^+)(\log X^+)^\tau < \infty$, $H(x) \in \mathcal{M}_p$, $p > 2$, $\tau > d$ *при* $d > 1$ *и* $\tau = 0$ *при* $d = 1$, $a_n \geq C(H^{-1}(n))^2/\log n$, *где* C – *произвольная положительная постоянная.*

Тогда (12) *выполнено с*

$$b_n = \sqrt{2a_n(\log(n/a_n) + \log\log n)}.$$

Если, кроме того, $\log\log n = o(\log(n/a_n))$, *то выполнено* (13).

Здесь мы не уточняем, какова постоянная C из условия 2). Способ ее нахождения можно извлечь из работы [10].

Перейдем к случаю $EX^2 = \infty$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения: $F \in DN(\alpha)$ $(F \in D(\alpha))$, $\alpha \in (1, 2]$, если F принадлежит области нормального (ненормального соотв.) притяжения устойчивого закона с характеристической функцией (х.ф.)

$$\psi(t) = \exp\{-c|t|^\alpha (1 + i\frac{t}{|t|}\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}\alpha)\}, \tag{14}$$

где $c = \cos(\pi(2-\alpha)/2)/\alpha$, $1 < \alpha \leq 2$. В случае нормального притяжения мы считаем, что нормирующие постоянные имеют вид $Bn^{1/\alpha}$ с $B = 1$. Если $B \neq 1$, то нужно соответствующим образом отнормировать слагаемые X_i.

Х.ф. (14) соответствует производящая функция моментов $\varphi(h) = \exp\{h^\alpha/\alpha\}$, $h > 0$. Отсюда следует, что $\gamma(x) = (\alpha x/(\alpha-1))^{(\alpha-1)/\alpha}$ для всех $x > 0$. Заметим, что $\alpha = 2$ соответствует стандартному нормальному закону. В этом случае $\gamma(x) = \sqrt{2x}$.

Отметим, что в условиях теоремы 6 $F \in DN(2)$, а b_n совпадает с нормировкой в гауссовском случае. Далее мы убедимся в том, что аналогично обстоит дело и в случае $\alpha \in (1, 2)$, т.е. если $F \in DN(\alpha)$, то b_n совпадает с нормировкой в случае соответствующего устойчивого закона. Если же $F \in D(\alpha)$, то в нормировке появляется медленно меняющийся множитель, который зависит от усеченной дисперсии в случае $\alpha = 2$ и от медленно меняющейся части хвоста $F(x)$ в случае $\alpha \in (1, 2)$.

Далее, если $g(x)$ – правильно меняющаяся функция, то $g^{-1}(x)$ – асимптотически обратная к ней функция, т.е. $g^{-1}(g(x)) \sim g(g^{-1}(x)) \sim x$ при $x \to 0$.

Теорема 7. *Пусть $EX = 0$, $EX^2 = \infty$, $F \in D(2)$ и выполнено одно из условий $1) - 3)$ теоремы 6.*

Тогда (12) выполнено с

$$b_n = a_n \widehat{m}(\widehat{f}^{-1}(\beta_n/a_n)),$$

где $\widehat{m}(h) = hG(1/h)$, $\widehat{f}(h) = h^2G(1/h)/2$, $G(x) = \int_{-x}^0 u^2 dF(u)$, $x > 0$. ($G(x)$ – медленно меняющаяся функция.)

Если, кроме того, $\log\log n = o(\log(n/a_n))$, то выполнено (13).

Перейдем к случаю $\alpha \in (1, 2)$.

Теорема 8. *Пусть* $EX = 0$, $EX^2 = \infty$ *и* $F \in DN(\alpha)$, $\alpha \in (1,2)$.

Предположим, что выполнено одно из следующих трех условий:

1) $h_0 > 0$ *и* $a_n/\log n \to \infty$;
2) $E\exp\{H(X^+)\}(H(X^+))^\tau < \infty$, $H(x) \in \mathcal{E}$, $\tau > d$ *при* $d > 1$ *и* $\tau = 0$ *при* $d = 1$, $a_n \geq C(H^{-1}(\log n))^\alpha/(\log n)^{\alpha-1}$, *где* $C = C(H)$ – *абсолютная положительная постоянная;*
3) $EH(X^+)(\log X^+)^\tau < \infty$, $H(x) \in \mathcal{M}_p$, $p > \alpha$, $\tau > d$ *при* $d > 1$ *и* $\tau = 0$ *при* $d = 1$, $a_n \geq C(H^{-1}(n))^\alpha/(\log n)^{\alpha-1}$, *где* C – *произвольная положительная постоянная.*

Тогда (12) *выполнено с*

$$b_n = \Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big)^{(\alpha-1)/\alpha} a_n^{1/\alpha}\Big(\log\frac{n}{a_n} + \log\log n\Big)^{(\alpha-1)/\alpha}.$$

Если, кроме того, $\log\log n = o(\log(n/a_n))$, *то выполнено* (13).

Теорема 9. *Пусть* $EX = 0$, $EX^2 = \infty$ *и* $F \in D(\alpha)$, $\alpha \in (1,2)$. *Положим*

$$b_n = a_n\widehat{m}(\widehat{f}^{-1}(\beta_n/a_n)),$$

где $\widehat{m}(h) = h^{\alpha-1}G(1/h)\alpha\Gamma(2-\alpha)/(\alpha-1)$, $\widehat{f}(h) = \Gamma(2-\alpha)h^\alpha G(1/h)$, $G(x) = x^\alpha F(-x)$, $x > 0$. *($G(x)$ – медленно меняющаяся функция.)*

Предположим, что выполнено одно из следующих трех условий:

1) $h_0 > 0$ *и* $a_n/\log n \to \infty$;
2) $E\exp\{H(X^+)\}(H(X^+))^\tau < \infty$, $H(x) \in \mathcal{E}$, $\tau > d$ *при* $d > 1$ *и* $\tau = 0$ *при* $d = 1$, *и* a_n *такое, что* $b_n \geq CH^{-1}(\log n)$, *где* $C = C(H)$ – *абсолютная положительная постоянная;*
3) $EH(X^+)(\log X^+)^\tau < \infty$, $H(x) \in \mathcal{M}_p$, $p > \alpha$, $\tau > d$ *при* $d > 1$ *и* $\tau = 0$ *при* $d = 1$, *и* a_n *такое, что* $b_n \geq CH^{-1}(n)$, *где* C – *произвольная положительная постоянная.*

Тогда выполнено (12).

Если, кроме того, $\log\log n = o(\log(n/a_n))$, *то выполнено* (13).

Отметим, что если выполнено условие 2) или 3) теоремы 8 и $G(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то выполнено соответственно условие 2) или 3) теоремы 9.

При $a_n = n$ из теорем 6–9 мы получаем ЗПЛ. Если $d = 1$ и $EX^2 < \infty$, то мы не получим теорему Хартмана–Винтнера о ЗПЛ, а в случае $EX^2 = \infty$, мы не получим ее обобщений. Преимущество теорем 6–9 состоит в том, что мы имеем результат для приращений, а в нем a_n может меняться в некотором диапазоне. Кроме того, моментные предположения этих теорем оптимальны в случае $d = 1$ (см. [8]) и близки к оптимальным при $d > 1$.

Если $a_n = n$, $X \geq 0$ п.н. и выполнено условие 3) теоремы 6 или 8, то можно показать (см. [10]), что $b_n \sim nEX$. Теорема 4 влечет

$$\limsup \frac{S_{(0,n^{1/d}]^d}}{n} = EX \qquad \text{п.н.}$$

Применяя этот результат к $-X + 2EX$, получим последнее соотношение с $\liminf$ вместо $\limsup$. Это дает УЗБЧ для неотрицательных величин. Из него и из $X = X^+ - X^-$ следует УЗБЧ для произвольных величин.

3. Доказательства

Нам потребуется следующая лемма, доказанная в [17].

Лемма 1. *Пусть $\{X_i, i = (i_1, \ldots, i_d), i_s = 1, 2, \ldots, m_s, s = \overline{1,d}\}$ – множество независимых одинаково распределенных случайных величин, $m = (m_1, \ldots, m_d)$. Если $P(S_{(i,j]} \geq -C) \geq q > 0$ для всех $(i,j] \subset (0,m]$, то для любого $x \geq 0$,*

$$P(\max_{(i,j]\subset(0,m]} S_{(i,j]} \geq x) \leq q^{-2d} P(S_{(0,m]} \geq x - 2dC).$$

Доказательство теоремы 1. Не умаляя общности можно считать, что b_n не убывает.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и обозначим $A_n(\varepsilon) = \{W_n \geq (1+\varepsilon)b_n\}$.

Пусть $a_n/n < a$ для всех достаточно больших n, где $a \in (0,1)$.

Пусть $\rho > 1$, $\delta = (1-\rho)^d$. Для $j = (j_1, \ldots, j_d)$ и $k = (k_1, \ldots, k_d)$ такого, что $\sum_{s=1}^d k_s = 0$, положим

$$\begin{aligned} R_n(k,j) = \{(i, i+l] \in R_n \colon\ & l_s \in ((a_n\rho^{k_s})^{1/d}, (a_n\rho^{k_s+1})^{1/d}], \\ & i_s \in ((\delta a_n \rho^{k_s+1})^{1/d} j_s, (\delta a_n\rho^{k_s+1})^{1/d}(j_s+1)], \\ & 0 \leq j_s \leq (n/\delta a_n \rho^{k_s+1})^{1/d}, \quad s = \overline{1,d}\}. \end{aligned}$$

Обозначим через K_n число значений k и через $J_n(k)$ число значений j (для фиксированного k) таких, что $R_n(k,j) \neq \emptyset$. Ясно, что $J_n(k) \leq n/\delta a_n \rho$ для всех k. Нетрудно проверить, что $K_n \leq (1 + \log(n/a_n)/\log\rho)^{d-1}$.

Имеем

$$P_n = P(A_n(2\varepsilon)) \le \sum_{k,j} P\Big(\max_{r\in R_n(k,j)} S_r \ge (1+2\varepsilon)b_n\Big)$$
$$= \sum_{k,j} P\Big(\max_{r\in R_n(k,0)} S_r \ge (1+2\varepsilon)b_n\Big)$$
$$\le \sum_{k,j} P\Big(\max_{r\subset r_n(k,0)} S_r \ge (1+2\varepsilon)b_n\Big),$$

где $r_n(k,0) = (0,(a_n\rho^{k_1+1})^{1/d}\rho] \times \cdots \times (0,(a_n\rho^{k_1+1})^{1/d}\rho]$. По лемме 1 и (7),

$$P_n \le q^{-2d} \sum_{k,j} P(S_{r_n(k,0)} \ge (1+\varepsilon)b_n)$$

$$= \frac{n}{q^{2d}\delta a_n \rho}\Big(1+\frac{\log(n/a_n)}{\log\rho}\Big)^{d-1} P(S_{r(n)} \ge (1+\varepsilon)b_n),$$

для всех достаточно больших n, если ρ было выбрано так, что $1+\varepsilon = \rho^{d+1}$. В силу условия 2),

$$P_n \le \frac{n}{q^{2d}\delta a_n \rho}\Big(1+\frac{\log(n/a_n)}{\log\rho}\Big)^{d-1}(H_1 e^{-(1+\tau)\beta_n} + H_2 a_n P(X \ge b_n)),$$

$$\le C(\log n)^{-(1+\tau)} + C\Big(1+\frac{\log(n/a_n)}{\log\rho}\Big)^{d-1} nP(X\ge b_n) = P_n^1 + P_n^2,$$

для всех достаточно больших n. Здесь $C>0$.

Пусть $\theta > 1$. Положим

$$n_k = \min\{n : \theta^{k-1} < n \le \theta^k, nP(X\ge b_n) = \min_{\theta^{k-1}<m\le\theta^k} mP(X\ge b_m)\}.$$

Тогда

$$\sum_{\theta^{k-1}<n\le\theta^k} \Big(1+\log\frac{n}{a_n}\Big)^{d-1} P(X\ge b_n)$$

$$\ge (1+\log\frac{n_{k-1}}{a_{n_{k-1}}})^{d-1} n_k P(X\ge b_{n_k}) \sum_{\theta^{k-1}<n\le\theta^k} \frac{1}{n}$$

$$\ge \Big(\frac{1}{2}+\log\frac{n_k}{a_{n_k}}\Big)^{d-1} n_k P(X\ge b_{n_k})(1-\theta^{-1}),$$

для всех достаточно больших k. Поэтому

$$\begin{aligned}(1-\theta^{-1})\sum_k \left(\frac{1}{2}+\log\frac{n_k}{a_{n_k}}\right)^{d-1} n_k P(X\geq b_{n_k}) \\ \leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\theta^{k-1}<n\leq\theta^k}(1+\log\frac{n}{a_n})^{d-1}P(X\geq b_n) \\ =\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\log\frac{n}{a_n}\right)^{d-1}P(X\geq b_n).\end{aligned}$$

В силу 1) ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1+\log(n_k/a_{n_k}))^{d-1}n_kP(X\geq b_{n_k})$ сходится. Отсюда следует, что ряд $\sum_k P^2_{n_k}$ сходится. По определению n_k сходится ряд $\sum_k P^1_{n_k}$. Значит и $\sum_k P_{n_k}$ сходится. По лемме Бореля–Кантелли

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{W_{n_k}}{b_{n_k}}\leq 1 \qquad \text{п.н.}$$

Неравенство (8) вытекает из последнего неравенства, неравенств

$$\frac{W_n}{b_n}\leq\frac{W_{n_k}}{b_{n_{k-1}}}=\frac{W_{n_k}}{b_{n_k}}\frac{b_{n_k}}{b_{n_{k-1}}}\leq\frac{W_{n_k}}{b_{n_k}}\frac{b_{[\theta^k]}}{b_{[\theta^{k-2}]}}, \qquad n_{k-1}<n\leq n_k,$$

и (5).

Пусть теперь $a_n/n\to 1$. Обозначим $W'_n=\max\limits_{r\subset(0,n^{1/d}]}S_r$, где r – параллелепипеды с вершинами в Z^d_+ и ребрами, параллельными осям координат. Имеем

$$P(A_n(3\varepsilon))\leq P(W'_n\geq(1+3\varepsilon)b_n).$$

В силу (7) и леммы 1,

$$\begin{aligned}P(A_n(3\varepsilon))&\leq q^{-2d}P(S_{r(n)}\geq(1+2\varepsilon)a_n\gamma_n(\beta_n/a_n))\\ &\leq q^{-2d}P(S_{r(n)}\geq(1+\varepsilon)n\gamma_n(\beta_n/a_n))\\ &\leq q^{-2d}P(S_{r(n)}\geq n\gamma_n((1+\varepsilon)\beta_n/a_n))\\ &\leq q^{-2d}P(S_{r(n)}\geq n\gamma_n((1+\varepsilon)\beta_n/n))\end{aligned}$$

для всех достаточно больших n. Здесь мы использовали то, что $\gamma_n(x)$ выпукла вверх. Остальная часть доказательства не отличается от доказательства в рассмотренном выше случае. Детали мы опускаем.

Доказательство теоремы 2. Пусть сначала $a_n/n \to \rho \in [0,1)$.

Пусть $r^*(n)$ – куб со стороной $a_n^{1/d} - a$, $r^*(n) \subset (n^{1/d} - a_n^{1/d}, n^{1/d}]^d$, где целочисленная постоянная a выбрана так, что $([a_n^{1/d}] - a + 1)^d \le a_n$. Тогда число точек с целочисленными координатами, содержащихся в $r^*(n)$, совпадает с $\mu_n = \mu(r^*(n))$. Из определения $r^*(n)$ следует, что $\mu_n \sim a_n$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и положим $A_n = \{S_{r^*(n)} \ge (1-\varepsilon)^6 b_n\}$. В силу определения b_n, выпуклости вверх $\gamma_n(x)$ и (9) имеем

$$P_n = P(A_n) \ge P(S_{r^*(n)} \ge (1-\varepsilon)^5 \mu_n \gamma_n(\beta_n/a_n))$$

$$\ge P(S_{r^*(n)} \ge (1-\varepsilon)\mu_n \gamma_n((1-\varepsilon)^4 \beta_n/a_n))$$

$$\ge H_3 \exp\Big\{ -(1+\delta)\mu_n (1-\varepsilon)^4 \frac{\beta_n}{a_n} \Big\} \ge \exp\{-(1-\varepsilon)\beta_n\}, \qquad (15)$$

для всех достаточно больших n, если $\delta = 1 - (1-\varepsilon)^{-1}$.

Выберем $\tau_0 \in (0,\rho)$ ($\tau_0 = 0$ при $\rho = 0$), $\tau \in (\rho, 1)$, $c \in (\tau, 1)$ и натуральное N такими, что $A = (1-\tau)(1-\tau/c)^{-1} > 1$, $B = (1-\tau^{1/d})(1-\tau)^{1/d}(1-\tau/c)^{-1/d}(1-\tau_0)^{-1/d} > 1$ и для всех $n > N$ выполняются неравенства $\tau_0 \le (a_n+1)/n < \tau$ и (15). Положим $n_1 = N$, $n_k = \min\{n : n > n_{k-1}, n - a_n \ge A n_{k-1}\}$, $k = 2, 3, \dots$

Используя неравенство $a_n/n \ge (a_n+1)/(2n)$, получим

$$\sum_{k=2}^m P_{n_k} \ge \frac{1}{2} (\log n_m)^{-1+\delta} \sum_{k=2}^m \frac{a_{n_k}+1}{n_k}.$$

В силу неравенств $n_k - a_{n_k} - 1 \le n_k - a_{n_{k-1}} - 1 < A n_{k-1}$ и определения постоянных A, c и τ, $n_k < A n_{k-1}/(1-\tau)$ и $c n_k/(c n_k - a_{n_k} - 1) \ge c n_k/((c-1)n_k + A n_{k-1}) \ge n_k/n_{k-1}$. Так как $-\log(1-x) \le C_\tau x$ при $x \in (0,\tau)$, имеем

$$C_\tau \sum_{k=2}^m \frac{a_{n_k}+1}{n_k} \ge \sum_{k=2}^m \log \frac{c n_k}{c n_k - a_{n_k} - 1} \ge \sum_{k=2}^m \log \frac{n_k}{n_{k-1}} = \log \frac{n_m}{n_1}.$$

Следовательно, ряд $\sum_k P_{n_k}$ расходится.

Из определения n_k следует, что

$$\Big(\frac{n_k}{n_{k-1}}\Big)^{1/d} \Big(1 + \Big(\frac{a_{n_k}}{n_k}\Big)^{1/d}\Big) \ge B > 1.$$

Отсюда получаем, что $n_k^{1/d} - a_{n_k}^{1/d} > n_{k-1}^{1/d}$. Поэтому события A_{n_k} независимы, а заключение теоремы следует из леммы Бореля–Кантелли.

Пусть теперь $a_n/n \to 1$. Положим $n_k = [\theta^k]$, $\theta > 1$. Определим кубы $r_k^* = ([n_k^{1/d} - a_{n_k}^{1/d}] + b, [n_k^{1/d}]]^d$ и $r_k' = ([n_k^{1/d} - a_{n_k}^{1/d}] + b, [n_{k-1}^{1/d}]]^d$, где целочисленная постоянная b выбрана так, что число точек $\mu_k^* = \mu(r_k^*)$ с целочисленными координатами, содержащихся в r_k^*, не превосходит a_{n_k}. При этом $\mu_k^* \sim n_k$ при $k \to \infty$. Положим $\mu_k' = \mu(r_k')$. Нетрудно проверить, что $\mu_k' \sim n_{k-1}$ при $k \to \infty$.

Покажем, что соотношение

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{S_{r_k^*}}{b_{n_k}} \le a < 1 \qquad \text{п.н.} \tag{16}$$

не выполнено. Обозначим $T_k = S_{r_k^* \setminus r'_{n_k}}$, $A_k = \{T_k > (1+2\varepsilon)ab_{n_k}\}$, $D_k = \{S_{r_k'} > -\varepsilon a b_{n_k}\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть $N_k = \mu_k^* - \mu_k'$. Нетрудно показать, что $N_k \sim n_k(\theta-1)/\theta$, при $k \to \infty$. Имеем

$$P(A_k) = P(T_k \ge (1+2\varepsilon)b_{n_k}) \ge P(T_k > (1+\varepsilon)aN_k \frac{\theta}{\theta-1}\gamma_{n_k}(\beta_{n_k}/a_{n_k}))$$

для всех достаточно больших k.

Выберем θ большим, а ε маленьким, так, что $(1+\varepsilon)a\theta/(\theta-1) = (1-\tau)^2$, $\tau > 0$. Ввиду выпуклости $\gamma_{n_k}(x)$ и (9),

$$P(A_k) \ge P(T_k \ge (1-\tau)N_k\gamma_{n_k}((1-\tau)\beta_{n_k}/a_{n_k}))$$
$$\ge \exp\{-(1-\tau)(1+\delta)N_k\beta_{n_k}/a_{n_k}\} \ge \exp\{-\mu \log\log n_k\},$$

для всех достаточно больших k, где $\mu = (1-\tau)(1+\delta)^2(\theta-1)/\theta = ((1+\varepsilon)a(1-\theta^{-1}))^{1/2}(1+\delta)^2$. Ясно, что ε, θ и δ можно выбрать так, что $\mu < 1$. Тогда $\sum_k P(A_k) = \infty$.

Из (7) следует, что, $P(D_k) \ge q$ для всех k. Для всех k независимы следующие пары событий: A_k и D_k, A_k и $D_k\overline{A_{k-1}D_{k-1}}$, A_k и $D_k\overline{A_{k-1}D_{k-1}A_{k-2}D_{k-2}}, \ldots$

Мы показали, что $\sum_k P(A_k) = \infty$. По лемме 7.5 (см. [18, с. 251]), мы заключаем, что $P(A_kD_k$ б.ч.$) \ge q > 0$. Это противоречит (16), так как из него следует $P(A_kD_k$ б.ч.$) = 0$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть R_n'' – множество кубов с вершинами в точках вида $([n^{1/d}] - j_1[a_n^{1/d}], \ldots, [n^{1/d}] - j_d[a_n^{1/d}])$,

$0 \le j_s \le [(n/a_n)^{1/d}] - 1$, $s = \overline{1,d}$. Пусть M_n – число таких кубов. Ясно, что $M_n \le n/a_n$, а кубы из R_n'' не пересекаются. Обозначим $r_0(n) = ([n^{1/d}] - [a_n^{1/d}], [n^{1/d}]]^d$.

Положим $A_n = \{U_n \le (1-2\varepsilon)b_n\}$, $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\begin{aligned}
P_n = P(A_n) &\le P(\max_{r \in R_n''} S_r \le (1-2\varepsilon)b_n) \\
&\le (1 - P(S_{r_0(n)} \ge (1-2\varepsilon)b_n))^{M_n} \\
&\le \exp\{-M_n P(S_{r_0(n)} \ge (1-2\varepsilon)b_n)\} \\
&\le \exp\{-\frac{n}{a_n}\exp\{-(1-\varepsilon)\beta_n)\}\} \le n^{-2},
\end{aligned}$$

для всех достаточно больших n. При получении последнего неравенства мы воспользовались тем, что $\log\log n = o(\log(n/a_n))$. Следовательно, ряд $\sum_n P_n$ сходится. Для завершения доказательства теоремы 3 остается применить лемму Бореля–Кантелли.

Теоремы 6–9 следуют из теоремы 4 и результатов о больших уклонениях и об асимптотике $\gamma_n(x)$ из работы автора [10]. Отметим, что в [10] $d = 1$, а моментные условия слабее, чем в случае $d > 1$. Дело в том, что в последнем случае нужно компенсировать логарифмический множитель в условии 1). Для этого мы накладываем более жесткие ограничения на распределение X. Это приводит к тому, что по сравнению с вычислениями в [10] нам нужно лишь проверить сходимость ряда в 1). Покажем как это сделать в случае 2) теоремы 6. В остальных случаях это делается аналогично.

Пусть выполнено условие 2) теоремы 6 и $d > 1$. Отметим, что $P(X \ge b_n) = P(X \ge H^{-1}(\log n))$. По неравенству Чебышева $P(X \ge H^{-1}(\log n)) \le Dn^{-1}(\log n)^{-\tau}$, что влечет сходимость ряда в 1).

Литература

1. P. Erdős, A. Rényi, *On a new law of large numbers.* — J. Anal. Math. **23** (1970), 103–111.
2. L. A. Shepp, *A limit law concerning moving averages.* — Ann. Math. Stat. **35** (1964), 424–428.
3. S. Csörgő, *Erdős–Rényi laws.* Ann. Stat. **7** (1979), 772–787.
4. P. Deheuvels, L. Devroye, *Limit laws of Erdős–Rényi–Shepp type.* — Ann. Probab. **15** (1987), 1363–1386.
5. D. M. Mason, *An extended version of the Erdős–Rényi strong law of large numbers.* — Ann. Probab. **17** 1989, 257–265.
6. M. Csörgő, P. Révész, *Strong Approximations in Probability and Statistics.* Budapest, Akadémiai Kiadó (1981).

7. Н. М. Зинченко *Асимптотика приращений устойчивых случайных процессов со скачками одного знака.* — Теория вероятн. и ее примен. **32**, в. 4 (1987), 793–796.
8. A. N. Frolov, *On one-sided strong laws for large increments of sums.* — Statist. Probab. Lett. **37** (1998), 155–165.
9. А. Н. Фролов, *Об асимптотическом поведении приращений сумм независимых случайных величин.* — ДАН РАН **372**, No. 5 (2000), 596–599.
10. A. N. Frolov, *On one-sided strong laws for increments of sums of i.i.d. random variables.* — Studia Sci. Math. Hungar. **39** (2002), 333–359.
11. A. H. C. Chan, *Erdős–Rényi type modulus of continuity theorems for Brownian sheets.* — Studia Sci. Math. Hungar. **11** (1976), 59–68.
12. M. Csörgő, P. Révész, *How big are the increments of a multiparameter Wiener process?* — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **42** (1978), 1–12.
13. N. M. Zinchenko, *On the asymptotic behavior of increments of certain classes of random fields.* — Theor. Probab. Math. Stat. **48** (1994), 7–11.
14. J. Steinebach, *On the increments of partial sum processes with multidimensional indices.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **63** (1983), 59–70.
15. P. Deheuvels, *On the Erdős–Rényi theorem for random fields and sequences and its relationships with the theory of runs and spacings.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **70** (1985), 91–115.
16. O. E. Scherbakova, *The asymptotic behaviour of random fields increment.*– Abstracts Intern. Gnedenko Conf. (Kyiv, June 3–7, 2002) (2002), p. 26.
17. A. N. Frolov, *Strong limit theorems for increments of random fields.* — Theory Stoch. Processes **8(24)**, No. 1–2 (2002), 89–97.
18. V. V. Petrov, *Limit Theorems of Probability Theory.* – New York, Oxford University Press (1995).

Frolov A. N. On asymptotic behaviour of increments of random fields.

We derive universal strong laws for increments of sums of i.i.d. random variables with multidimensional indices where an exponential moment does not exist. Our theorems yield the strong law of large numbers, the law of the iterated logarithm and the Csörgő-Révész laws for random fields. New results are obtained for distributions from domains of attraction of a normal law and completely asymmetric stable laws with index $\alpha \in (1,2)$.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 15 ноября 2002 г.