Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 298, 2003 г.

В. Н. Судаков

ГАУССОВСКИЕ УСЛОВНЫЕ МЕРЫ И ФАКТОРМЕРЫ НА КОНИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВАХ

Пусть H — гильбертово пространство (евклидовы векторные пространства мы также будем называть гильбертовыми), и пусть γ — некоторая центрированная гауссовская мера на этом пространстве. Пусть, как обычно, $H_\gamma \subset H$ обозначает ядро этой меры, т.е. гильбертово в собственной топологии векторное подпространство пространства H, канонически изоморфное (в смысле изоморфизма гильбертовой структуры) гильбертову пространству H'_γ классов эквивалентности линейных измеримых функционалов на гауссовском пространстве с мерой (H, γ) (см., например, [1]; в дальнейшем ссылки на эту работу не делаются). Напомним, что любое продолжение линейного измеримого функционала, заданного первоначально на некотором измеримом векторном подпространстве полной меры, измеримо; такие продолжения входят в один класс эквивалентности, и существование таких продолжений гарантируется леммой Цорна. По запасу элементов H_γ — это множество всех квазиинвариантных сдвигов в (H, γ). Тем самым гильбертовы пространства H_γ и H'_γ находятся в естественной двойственности.

Нас будут интересовать выпуклые конические подмножества пространства H и понимаемые с точностью до эквивалентности измеримые разбиения ξ, состоящие из таких подмножеств — конические разбиения. Пространство (H, γ) — это пространство Лебега–Рохлина, поэтому на элементах измеримого разбиения возникают условные вероятностные меры. Кроме того, пусть $\eta_{\|\cdot\|}$ — разбиение гильбертова пространства на сферы. Если $\gamma = \gamma_0$, где γ_0 — стандартная гауссовская мера в конечномерном гильбертовом пространстве, то коническое разбиение ξ и разбиение $\eta_{\|\cdot\|}$ независимы, и поэтому фактормеры каждой из условных мер

Работа поддержана грантом РФФИ 02-01-00263, грантом МШ-2258.2003.1 и Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

по следу на соответствующем элементе разбиения ξ разбиения $\eta_{\|\cdot\|}$ канонически изоморфны мере $\gamma_0/\eta_{\|\cdot\|}$.

В настоящей заметке нас будут интересовать свойства условных гауссовских мер на элементах некоторых конических разбиений, прежде всего — параметры распределений координатных функционалов по этим условным разбиениям. Нас также будет интересовать „феномен концентрирования", который может проявляться или не проявляться в зависимости от характера разбиения. Полученные ответы относятся к простым ситуациям, но некоторые вопросы новы, и автор надеется продолжить работу в этом направлении.

Условимся в терминологии. Назовем центрированную гауссовскую меру γ в гильбертовом пространстве H гауссовской субстандартной, если единичный шар пространства H_γ является подмножеством единичного шара пространства H. Назовем образ стандартной гауссовской меры γ_0^d, заданной в евклидовом d-мереном пространстве, при отображении в прямую $\mathbb{R}$ с помощью функции f, удовлетворяющей условию Липшица с константой единица ($f \in \mathrm{Lip}1$), сублапласовской мерой, и так же назовем образ произвольной гауссовской меры γ в числовую прямую $\mathbb{R}$ при отображении, удовлетворяющем условию Липшица с константой единица относительно нормы пространства H_γ. Как известно [2], эти классы совпадают.

Как хорошо известно, в определенном смысле многомерное стандартное гауссовское распределение γ_0^d в евклидовом d-мерном пространстве при больших размерностях d похоже по многим своим свойствам на равномерное распределение на поверхности шара (на сфере) радиуса $d^{\frac{1}{2}}$. Это качественное утверждение, вероятно, проще всего пояснить с помощью следствия изопериметрического неравенства (см. [2]), утверждающего, что образ гауссовской меры, заданной в гильбертовом пространстве, при липшицевом с константой единица относительно нормы пространства H_γ отображении $H \to \mathbb{R}$ является (в принятых нами терминах) сублапласовской. Гильбертова норма в пространстве H является, очевидно, липшицевой с константой единица функцией на H, следовательно, по независимости разбиений $\eta_{\|\cdot\|}$ и (конического) разбиения ξ_0 конечномерного пространства H со стандартной мерой γ_0 на лучи все одинаково устроенные условные меры на элементах разбиения суть распределения нормы

$\mathcal{L}(\|\cdot\|;\gamma_0)$ и, стало быть, являются одинаковыми сублапласовскими распределениями, каждое из которых сконцентрировано (в частности, имеет дисперсию, не превосходящую единицы) вблизи точки на луче с координатой $d^{\frac{1}{2}}$. С ростом размерности распределение нормы уходит на бесконечность, при этом не „расплываясь“. Имея ввиду такое сохранение свойства сублапласовости, мы будем говорить, что стандартные гауссовские условные меры на элементах разбиений ξ_0 обладают свойством концентрации (равномерно относительно размерности d конечномерного гильбертова пространства H).

Только что описанное свойство концентрации проявляется и для бесконечномерного гильбертова пространства H. В бесконечномерном H не может быть определена стандартная гауссовская мера, и ее роль играет стандартное слабое гауссовское распределение (белый шум), т.е. на другом языке согласованная система конечномерных распределений на элементах гильбертова пространства H'_γ, сопряженного с H. Можно пополнять пространство H по достаточно более слабой (пред)гильбертовой норме, при которой белый шум переходит в настоящую гауссовскую меру на пополнении $\widehat{H}$, для которой исходное пространство H является ядром. Условные меры гауссовского распределения γ на элементах разбиения ξ_0 на лучи — это одноточечные нагрузки (конечно, как всегда, определенные на почти всех по фактормере γ/ξ_0 лучах, и на лучах, содержащихся в H, условные меры определяются произвольно). Очевидно, как бы мы не определяли свойство концентрации для рассматриваемого разбиения ξ на лучи пространства $(\widehat{H},\gamma)$, т.е. как бы мы ни задавали масштаб на элементах разбиения ξ_0, как бы ни выбирали гильбертово надпространство $\widehat{H}\supset H$ полной γ-меры, это свойство оказывается в наличии.

Нетрудно привести примеры гауссовских вероятностных пространств и таких конических разбиений, которые не обладают свойством концентрации. Без всяких подсчетов можно показать это для тривиального разбиения ν, содержащего единственный класс эквивалентности — все H. Если бы нашелся такой радиус R и такое положительное число a, что для каждого d в d-мерном евклидовом пространстве H найдется шар V радиуса R, для которого $\gamma_0^d(V)\geqslant a$, то для каждого d с вероятностью, не меньшей a^2 норма разности двух независимым образом выбранных случайных элементов H была бы не меньше $2R$, поскольку такова вероятность того, что оба они попадут в наш шар. Но, с другой стороны, если d достаточно велико, то с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, скалярное произведение двух независимых нормированных векторов как угодно близко к нулю, следовательно, норма разности самих векторов сколь угодно велика. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Рассмотрим семейство координатных евклидовых пространств $\{\mathbb{R}^n\}$, на каждом из которых заданы стандартная для этого пространства гауссовская мера γ_0^d и коническое разбиение ξ на „ортанты“, т.е. на 2^d „телесных“ конусов, каждый из которых определяется следующим соотношением эквивалентности: ξ-эквивалентность двух точек x и y означает совпадение знаков их координат в каждой паре их координат x_k и y_k: $\operatorname{sign} x_k = \operatorname{sign} y_k$. Условные меры на каждом из конечного числа элементов C разбиения ξ имеют по мере Лебега плотности, кратные плотности стандартного нормального распределения:

$$p(x) = 2^d (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}, \quad x \in C, \quad p(x) = 0, \quad x \notin C,$$

принимающего максимальное значение при $x = 0$. Поскольку d-мерный объем шара V_R радиуса R в d-мерном евклидовом пространстве равен $\operatorname{Vol}_d V_R = \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2}+1) R^d$, приходим к выводу, что для любого R и любого C супремум множества значений $\gamma(V_R|C)$ по всевозможным V_R стремится к нулю.

Можно показать, что и для бесконечномерного гауссовского распределения как тривиальное разбиение ν, так и разбиение на „ортанты“, порождаемое выбором какого-нибудь ортонормированного базиса в пространстве H_γ, не обладают свойством концентрации: условные гауссовские распределения на элементах разбиения — это бесконечные произведения распределений $N(0,1)$ или распределений модуля стандартной нормально распределенной случайной величины. В первом случае почти очевидно, что любой сдвиг любого шара ядра гауссовской меры имеет нулевую меру. Во втором случае аналогичное заключение выводится с помощью конечномерной аппроксимации, когда рассматриваются проекции шара, предположительно имеющего положительную условную гауссовскую меру, на конечномерные координатные пространства и используются заключения, сделанные для конечномерного случая. Таким образом, можно сформулировать

Предложение. *Семейство разбиений* ξ_0^d *евклидовых пространств со стандартной гауссовской мерой на лучи обладает свойством концентрации, как и разбиение на лучи произвольного гауссовского вероятностного пространства. Напротив, семейство тривиальных разбиений конечномерных евклидовых пространств со стандартной гауссовской мерой, как и семейство разбиений таких пространств на ортанты и аналогичное разбиение бесконечномерного гауссовского пространства таким свойством не обладают.*

Эти простые примеры говорят о содержательности задачи выяснения наличия или отсутствия свойства концентрации для тех или иных измеримых конических разбиений гауссовского вероятностного пространства. Такого рода трудные вопросы возникают в задачах, связанных с исследованием типичных распределений и будут рассматриваться в дальнейшем.

Литература

1. V. Sudakov, *Gaussian measures. A brief survey.* — Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Univ. di Trieste **26** (1994, supplemento), 289–325.
2. B. S. Cirel'son, I. A. Ibragimov and V. N. Sudakov, *Norms of Gaussian sample functions.* — Lecture Notes in Math. **550** (1976), 20–41.

Sudakov V. N. Gaussian conditional and quotient distributions on conic subsets.

A notion of property of concentration is introduced for conic measurasble partitions of Gaussian probability spaces. Simple examples are considered.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 01 декабря 2003 г.