Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 298, 2003 г.

М. С. Ермаков

О ВЕРОЯТНОСТЯХ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ОШИБОК ВТОРОГО РОДА КРИТЕРИЕВ ТИПА КОЛМОГОРОВА И ОМЕГА КВАДРАТ

1. Введение. В работах [5–7, 10] была доказана асимптотическая минимаксность критериев типа Колмогорова и омега–квадрат при естественных непараметрических множествах альтернатив. Асимптотическая минимаксность рассматривалась для эффективности критериев, основанной на логарифмической асимптотике вероятностей больших уклонений ошибок первого и второго рода. В настоящей публикации мы вычисляем точную асимптотику максимума вероятностей больших уклонений ошибок второго рода для данной постановки задачи.

Насколько нам известно, ранее задача о точной асимптотике вероятностей больших уклонений ошибок второго рода критериев Колмогорова и омега-квадрат не исследовалась даже для конкретных альтернатив. Изучалась только логарифмическая асимптотика вероятностей ошибок первого и второго рода (см. Абрахамсон [1], Боровков и Сычева [4], Могульский [17] и др.) или точная асимптотика вероятностей ошибок первого рода (см. Осипов [19], Несенко и Тюрин [18]). По-видимому это вызвано тем, что только недавно были развиты соответствующие методы теории вероятностей больших уклонений, а также, во многом, необозримостью задачи. Рассматриваемая минимаксная постановка в определенном смысле устраняет последнюю трудность, давая верхнюю границу для вероятностей ошибок второго рода.

Пусть Λ – множество всех вероятностных мер, заданных на σ – алгебре борелевских множеств B интервала (0,1). Пусть $X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины имеющие вероятностную меру P и пусть $\widehat{P}_n$ их эмпирическая мера. Обозначим P_0 вероятностную меру равномерного распределения на (0,1) и предположим, что задан функцио-

Работа поддержана грантами РФФИ 02-01-00262, "Ведущие научные школы" 2258.2003.1 и РФФИ ННИО 021-01-04001.

нал $T : \Lambda \to R^1$ такой, что $T(P) = 0$ только, если $P = P_0$. Рассмотрим задачу проверки гипотезы согласия $P = P_0$ против непараметрического множества альтернатив $P \in \Phi(T, a_n) = \{P : T(P) > a_n > 0, P \in \Lambda\}$, с заданной последовательностью чисел $a_n > 0$. В частности для функционала T тестовой статистики критерия Колмогорова множество альтернатив есть $\Phi(T, a_n) = \{P : \max\{|F(x) - x| : x \in (0,1)\} > a_n$, где F функция распределения $P \in \Lambda\}$. В [5] (см. также [6, 10]) для этой задачи была доказана асимптотическая минимаксность критериев, построенных по тестовым статистикам $T(\widehat{P}_n)$ для широкого класса функционалов T. В данной статье для этой же постановки нами будет вычислена точная асимптотика для супремумов вероятностей больших уклонений ошибок второго рода несколько более узкого класса функционалов, включающего в себя функционалы тестовых статистик Колмогорова и омега-квадрат. Аналогичные результаты получены также и для задач проверки гипотез об однородности.

2. Основные результаты. Обозначим Λ_0 – множество всех зарядов G на пространстве $((0,1), B)$, имеющих ограниченную вариацию и таких, что $G((0,1)) = 0$. Скажем, что последовательность $G_n \in \Lambda_0$ сходится к $G \in \Lambda_0$ в τ – топологии слабой сходимости, если для любой ограниченной измеримой функции $f : (0,1) \to R^1$ имеет место $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f\, dG_n = \int_0^1 f\, dG$.

Мы будем предполагать, что функционал T имеет вид $T(P) = N(P - P_0)$, где $N : \Lambda_0 \to R^1$ является выпуклым, неотрицательным, непрерывным в τ – топологии функционалом таким, что $N(\lambda G) = |\lambda| N(G)$ для любых $\lambda \in R^1$, $G \in \Lambda_0$. Вместе с условием $T(P) = 0$, только если $P = P_0$, отсюда следует, что N является непрерывной нормой в Λ_0 и Λ_0 является сепарабельным банаховым пространством относительно N. Именно для таких функционалов в [5] (см. также [10]) была доказана асимптотическая минимаксность критериев с тестовыми статистиками $T(\widehat{P}_n)$. Асимптотическая минимаксность рассматривалась в смысле новой асимптотической эффективности для логарифмической асимптотики вероятностей умеренно больших уклонений статистических оценок и критериев (см. [3, 5–7]).

Для любого критерия $K_n = K_n(X_1, \dots, X_n)$ обозначим $\alpha(K_n)$ вероятность его ошибки первого рода и $\beta(K_n, P)$ – вероятность его ошибки второго рода при альтернативе $P \in \Phi(T, a_n)$. Положим $\beta(K_n, a_n) = \sup\{\beta(K_n, P) : P \in \Phi(T, a_n)\}$.

В [5] тестовая статистика $T(\widehat{P}_n)$ называлась асимптотически минимаксной, если порожденные ею критерии K_n такие, что $\beta(K_n, a_n) \to 0$ при $n \to \infty$ и $\alpha(K_n) \leqslant c < 1$, удовлетворяли условию $\limsup_{n\to\infty} \log \beta(K_n, a_n)/\log \beta(L_n, a_n) \geqslant 1$ для любого критерия L_n, $\alpha(L_n) \leqslant \alpha(K_n)$.

При проверке гипотезы согласия обычно считается, что альтернативами являются все функции распределения $F \neq F_0$. С этой точки зрения предлагаемый подход с выделением отделенных от F_0 множеств альтернатив может вызвать определенные вопросы. Однако результаты [5] могут быть интерпретированы и для постановки, когда рассматриваются множества альтернатив из всех $F \neq F_0$.

Пусть множество альтернатив неизвестно точно статистику, и он имеет представление только о потерях $\rho_n(P)$ от принятия гипотезы, когда справедлива альтернатива P и пусть $\rho_n(P)$ допускает представление $\rho_n(P) = \rho_{nT}(T(P))$. Пусть потери статистика от принятия альтеративы, когда верна гипотеза, равны κ_n, $0 < c_1 < \kappa_n < c_2 < 1$. Риск равен соответственно $R_{0n}(K_n) = \kappa_n \alpha(K_n)$ при справедливости гипотезы и $R_n(K_n, P) = \rho_{nT}(T(P))\beta(K_n, P)$ при справедливости альтернативы. Обозначим $R_n(K_n) = \sup\{R_n(K_n, P) : P \in \Lambda, T(P) \neq 0\}$.

Скажем, что тестовая статистика $T(\widehat{P}_n)$ сильно асимптотически минимаксна, если для построенных по ней критериев K_n таких, что $R_n(K_n) \to 0$, $\kappa_n^{-1} R_{0n}(K_n) < c < 1$, имеет место $\limsup_{n\to\infty} \log R_n(K_n)/\log R_n(L_n) \geqslant 1$ для любой последовательности критериев L_n такой, что $R_0(L_n) \leqslant R_0(K_n)$.

Предположим, что функция $\rho_{Tn}(t)\beta(K_n, t)$ достигает максимума на последовательности $t_n \to 0$, $nt_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда из асимптотической минимаксности статистик $T(\widehat{P}_n)$ в смысле [5] следует их сильная асимптотическая минимаксность. Данное утверждение непосредственно следует из того, что $\log R_n(L_n) \geqslant \log\{\beta(L_n, a_n)\rho_{Tn}(a_n)\}(1 + o(1))$ для критериев L_n асимптотически минимаксных на множествах альтернатив $\Phi(T, a_n)$ для любых последовательностей a_n, $a_n \to 0$, $na_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. и того что критерии основанные на тестовой статистике $T(\widehat{P}_n)$ асимптотически минимаксны также для любых последовательностей a_n, $a_n \to 0$, $na_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Аналогичные результаты справедливы и для постановок задач, рассмотренных нами в [8, 9].

С точки зрения приложений представляется естественной следующая интерпретация данного подхода. В задачах непараметрической проверки гипотез множество альтернатив обычно неизвестно. В тоже время можно предположить, что имеется по крайней мере грубое представление о потерях, которые можно понести от принятия гипотезы при справедливости альтернативы, даже когда альтернатива лежит близко к рассматриваемой гипотезе. Как в свете такого подхода выбирать непараметрический критерий ? По видимому ответ на этот вопрос кроется в самом анализе действий, которые предпринимаются после проверки гипотезы. Обычно эти действия можно описать как некоторый вывод $S(P)$, зависящий от вероятностной меры P в соответствии с которой распределены наблюдения в выборке (например, после проверки гипотезы о нормальности оценкой $S(P)$ параметра сдвига берется выборочное среднее). Понятно, что $S(P)$ должно быть по крайней мере непрерывно относительно нормы (или полунормы) $T(P)$, входящей в функцию риска ρ_{nT}, иначе потери будут несоизмеримыми. Таким образом выбор функционала $T(P)$ должен быть напрямую обусловлен классом возможных статистических выводов $S(P)$. Нормы $N(P - P_0)$ порожденные тестовыми статистиками критериев Колмогорова и омега-квадрат являются общепринятыми для задания модулей непрерывности функционалов. Поэтому с этой точки зрения представляет интерес и оценка асимптотики максимума вероятностей ошибок второго рода на рассматриваемых множествах альтернатив.

Обозначим F, F_0 функции распределения вероятностных мер P, P_0 соответственно.

Нами будет вычислена точная асимптотика $\beta(K_n, a_n)$, когда $na_n^2 \to \infty$, $na_n^3 \to 0$ при $n \to \infty$. При этом по сравнению с [5] класс функционалов T будет существенно сужен. Это будут или функционалы, соответствующие критериям типа Колмогорова

$$T_K(P) = \max\{|F(x) - x|q(x) : x \in (0,1)\} \tag{1}$$

(здесь q – весовая функция) или функционалы, представляющие собой некоторые квадратичные формы вида:

$$T^2(P) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \left(\int_0^1 \phi_j \, dP \right)^2, \tag{2}$$

где $\phi_0(x) = 1, \phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ - полная ортонормированная система функций в $L_2(P_0)$ и $E_0\phi_j(X) = 0$ для всех $1 \leqslant j < \infty$. В частности такими функционалами являются функционалы критериев типа омега-квадрат

$$T_q^2(P) = \int_0^1 (F(x) - x)^2 q(x) dx \tag{3}$$

(здесь q – также весовая функция).

Приведем асимптотики вероятностей ошибок второго рода для критериев типа Колмогорова и омега – квадрат. Они найдены, когда весовая функция q удовлетворяет следующим условиям.

A1. Функция q непрерывно дифференцируема и ограничена на $(0, 1)$.

A2. У функции $q^2(x)x(1-x)$, $0 < x < 1$, существует единственный максимум в некоторой точке $s \in (0, 1)$.

Положим $d = (s - s^2)^{1/2} q(s)$.

A3. При $t \to s$ имеет место

$$(\min(s,t) - st)d^{-2}q(t)q(s) = 1 - D|t-s|(1 + o(1)),$$

$$q(t)(t - t^2)^{1/2} = d - A|t-s|^2(1 + o(1)),$$

где $A > 0$, $D > 0$.

В дальнейшем условимся обозначать буквами C, c постоянные, которые иногда могут зависеть от некоторых из параметров задачи. Часто одной и той же буквой C будет удобно обозначать различные постоянные даже в пределах одной строки. Обозначим $\chi(A)$ – индикатор события A. Будем опускать знаки пределов интегрирования, когда интегрирование проводится по всему интервалу $(0, 1)$. Иногда будет удобно формулировать результаты не в терминах вероятностной меры P, а в терминах ее функции распределения F. В этом случае будем использовать обозначения $T_1(F) = N_1(F - F_0) = T(P) = N(P - P_0)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* A1–A3. *Пусть* $r_n < a_n < 2r_n$, $n(a_n - r_n)^2 \to \infty$, $n(r_n^2 - (a_n - r_n)^2) \to \infty$, $na_n^3 \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда для критериев типа Колмогорова* $L_n = \chi(T_K(\widehat{P}_n) > r_n)$ *при* $n \to \infty$ *имеет место*

$$\alpha(L_n) = D(2d/A)^{1/2} \exp\{-nr_n^2/(2d^2)\}(1 + o(1)), \tag{4}$$

$$\beta(L_n, a_n) =$$
$$= (2\pi)^{-1/2} d n^{-1/2} (a_n - r_n)^{-1} \exp\{-n(a_n - r_n)^2/(2d^2)\}(1 + o(1)). \quad (5)$$

Укажем асимптотику максимыма вероятностей ошибок второго рода для критериев типа омега – квадрат. Обозначим λ_j, $j = 1, 2, \dots$ расположенные в порядке возрастания собственные значения дифференциального уравнения $h''(x) + \lambda q(x) h(x) = 0$, $h(0) = h(1) = 0$ и пусть $\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \lambda_4 \leqslant \dots$. Положим $d = \lambda_1 \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1}$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* A1 *и множества альтернатив имеют вид* $\Phi(T_q, a_n) = \{P : T_q^2((P) > \lambda_1 a_n^2\}$. *Пусть* $na_n^2 \to \infty$, $na_n^3 \to 0$, *при* $n \to \infty$. *Пусть*

$$1 < \lim\inf_{n\to\infty} \frac{a_n}{r_n} \leqslant \lim\sup_{n\to\infty} \frac{a_n}{r_n} < \infty, \quad (6)$$

Тогда для критериев типа омега-квадрат $L_n = \chi(T_q^2(\widehat{P}_n) > \lambda_1 r_n^2)$ *при* $n \to \infty$ *имеет место*

$$\alpha(L_n) =$$
$$= 2^{1/2}\pi^{-1/2} n^{-1/2} r_n^{-1} \prod_{j=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_j}\right)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{n}{2} r_n^2\right\}(1 + o(1)), \quad (7)$$

$$\beta(L_n, a_n) = (2\pi)^{-1/2} n^{-1/2} (a_n - r_n)^{-1} \prod_{j=2}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_1(a_n - r_n)}{\lambda_j r_n}\right)^{-1/2} \times$$
$$\exp\left\{-\frac{n}{2}(a_n - r_n)^2\right\}(1 + o(1)). \quad (8)$$

Отметим, что асимптотика (7) хорошо известна и получена даже для более широких зон больших уклонений (см. Осипов [19], Несенко и Тюрин [18]).

В частном случае критерия омега – квадрат, $q(x) = 1$, $x \in (0, 1)$, получаем

$$\beta(L_n, a_n) = \sup\{P(T_q^2(\widehat{P}_n) > 2r_n^2\pi^{-2}) : T_q^2(P) > 2a_n^2\pi^{-2}, P \in \Lambda\} =$$

$$(2\pi)^{-1/2} n^{-1/2} (a_n - r_n)^{-1} \prod_{j=2}^{\infty} \left(1 + \frac{a_n - r_n}{j^2 r_n}\right)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{n}{2}(a_n - r_n)^2\right\} =$$

$$n^{-1/2}a_n^{1/2}(a_n-r_n)^{-3/4}r_n^{-1/4}\left(\exp\left\{\pi\left(\frac{a_n-r_n}{r_n}\right)^{1/2}\right\}-\right.$$

$$\left.-\exp\left\{-\pi\left(\frac{a_n-r_n}{r_n}\right)^{1/2}\right\}\right)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{n}{2}(a_n-r_n)^2\right\}(1+o(1)). \quad (9)$$

Здесь собственные числа $\lambda_j = 2\pi^{-2}j^{-2}$, $1 \leqslant j < \infty$ (см. [16]).

Теорема 2 представляет собой частный случай теоремы 3, полученной в несколько более общей постановке. А именно, пусть функционал $T^2(P)$ является квадратичной формой вида (2) и $1 = b_1 > b_2 \geqslant b_3 \geqslant \dots,\ b_j > 0$

Предположим, что выполнено следующее условие.

Б1. Функции $\phi_1, \phi_2, \dots$ непрерывны на $[0,1]$ и

$$\sup_{x\in[0,1]}\sup_{1\leqslant j<\infty}|\phi_j(x)| < \infty, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} b_j < \infty. \quad (10)$$

Определим последовательность критериев $K_n = \chi(T(\widehat{P}_n) > r_n)$.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* B1. *Пусть* $na_n^2 \to \infty$, $na_n^3 \to 0$ *при* $n \to \infty$ *и пусть имеет место* (6). *Тогда*

$$\alpha(K_n) =$$

$$= 2^{1/2}\pi^{-1/2}n^{-1/2}r_n^{-1}\prod_{j=2}^{\infty}(1-b_j)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{n}{2}r_n^2\right\}(1+o(1)), \quad (11)$$

$$\beta(K_n, a_n) = \gamma_n n^{-1/2}(a_n - r_n)^{-1}\exp\left\{-\frac{n}{2}(a_n-r_n)^2\right\}(1+o(1)), \quad (12)$$

где

$$\gamma_n = (2\pi)^{-1/2}\prod_{j=2}^{\infty}\left(1 + b_j\frac{a_n-r_n}{r_n}\right)^{-1/2}.$$

Ацимптотика (11) следует из теоремы о вероятностях больших уклонений для сумм случайных величин в гильбертовом пространстве (см. [12]) и непосредственного вычисления соответствующей вероятности больших уклонений для гауссовской меры (см. [21]).

Замечание. 1. Результаты теорем 1–3 переносятся также и на задачу проверки гипотезы об однородности. Пусть $X_{11}, \dots, X_{1n_1}$ и

$X_{21}, \dots, X_{2n_2}$ две совокупности независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих непрерывные функции распределения $F_1(x)$, $F_2(x)$, $x \in [0,1]$ соответственно и пусть $\widehat{F}_{1n_1}$, $\widehat{F}_{2n_2}$ – их эмпирические функции распределения. Обозначим $n = n_1 + n_2$ и предположим, что $n_1/n \to \nu_1 > 0$, $n_2/n \to \nu_2 = 1 - \nu_1 > 0$ при $n \to \infty$. Определим также функции $H_n(t) = \frac{n_1}{n} F_1(t) + \frac{n_2}{n} F_2(t)$, $\widehat{H}_n(t) = \frac{n_1}{n} \widehat{F}_{1n_1}(t) + \frac{n_2}{n} \widehat{F}_{2n_2}(t)$, $S_n = S_n(t) = (\frac{n_1 n_2}{n})^{1/2} (\widehat{F}_{1n_1}(\widehat{H}_n^{-1}(t)) - \widehat{F}_{2n_2}(\widehat{H}_n^{-1}(t)))$, $\zeta_n(t) = (\frac{n_1 n_2}{n})^{1/2} (\widehat{F}_{1n_1}(H_n^{-1}(t)) - \widehat{F}_{2n_2}(H_n^{-1}(t)))$, $t \in (0,1)$, где $G^{-1}(t) = \inf\{s : G(s) > t, s \in (0,1)\}$ обозначает обратную функцию для произвольной монотонной функции G. Зададим функционал $T_1(F_1, F_2) = N_1(F_1(H_n^{-1}(t)) - F_2(H_n^{-1}(t)))$. Рассмотрим задачу проверки гипотезы $F_1 = F_2$ против множества альтернатив $(F_1, F_2) \in \Delta(T, a_n) = \{(F_1, F_2) : T_1(F_1, F_2) > a_n;\ F_1,\ F_2$ – непрерывные функции распределения $\}$. Именно для такой постановки задачи справедливы аналоги теорем 1–3 при тех же условиях, что и в случае гипотезы согласия.

В [5] для данной постановки задачи нами доказана асимптотическая минимаксность критериев с тестовыми статистиками $T_1(\widehat{F}_{1n_1},\ \widehat{F}_{2n_2})$. Осуществить перенос результатов теорем 1–3 на задачу проверки гипотезы однородности позволяет переход от рассмотрения вероятностей больших уклонений $P(N_1(S_n) > n^{1/2} r_n)$ к рассмотрению вероятностей больших уклонений $P(N_1(\zeta_n) > n^{1/2} r_n)$. Этот переход осуществляется на основе следующей оценки

$$
\begin{aligned}
&|N_1(S_n) - N_1(\zeta_n)| \leqslant N_1(S_n - \zeta_n) \leqslant \\
&\leqslant C \max\{|S_n(t) - \zeta_n(t)| : t \in (0,1)\}. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Из приводимого ниже результата Колмоша, Майора и Тушнади [16] (см. оценку (26)) следует, что вероятность того, что правая часть (13) больше $x_n = o(n^{-1/3})$ имеет меньший порядок, чем правые части (4), (5), (11), (12), что и позволяет вычислить точные асимптотики вероятностей больших уклонений ошибок второго рода для рассматриваемой постановки задачи проверки гипотезы однородности.

Основной принцип вычисления асимптотики $\beta(K_n, a_n)$ в доказательстве теорем 1–3 заключается в следующем. Задача сводится к соответствующей задаче проверки гипотез для гауссовских случайных процессов или гауссовских случайных элементов банахова пространства B. После этого соответствующие вычисления проводятся на основе теорем о вероятностях больших уклонений квадратичной формы от гауссовских случайных величин (см. Золотарев [22], Грегори [13], Хуанг [14]) или максимума гауссовского случайного процесса (см. Питербарг [21]). Переход к соответствующей задаче в гауссовской постановке осуществляется на основе теорем о вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных элементов в банаховом пространстве (см. [12]) или аппроксимации эмпирической функции распределения броуновским мостом (см. Колмош, Майор и Тушнади [16]). Отметим, что нам приходится модифицировать указанные выше результаты на случай не нулевого математического ожидания случайных элементов или процессов. Нам также приходится решать определенную экстремальную задачу по выбору наименее благоприятных мер P, проводя одновременно оценки вероятностей ошибок второго рода и для не наименее благоприятных мер P из множеств альтернатив.

Приведем аналог (см [12]) теоремы Бенткуса [2] о вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных элементов в банаховом пространстве, используемый при доказательстве теоремы 3.

Пусть E и B, $E \subset B$ вещественные сепарабельные банаховы пространства ц нормами $\|\cdot\|_E$ и $\|\cdot\|_B$ соответственно такими, что $\|x\|_E \geqslant \|x\|_B$, $x \in E$. Пусть $Z, Z_1, \ldots, Z_n$ независимые одинаково распределенные случайные элементы в B, $EZ = 0$, $S_n = n^{-1/2}(Z_1 + \ldots + Z_n)$. Пусть $Y \in B$ такой гауссовский случайный элемент, что $EY = 0$ и $E[W(Z,Z)] = E[W(Y,Y)]$ для любой билинейной формы W непрерывной в E.

Обозначим $V_r(u)$ - шар в B радиуса $r > 0$ с центром в точке $u \in B$. Для $0 \leqslant \epsilon < r$ определим $K_{\epsilon,r}(u) = V_{r+\epsilon}(u) \setminus V_{r-\epsilon}(u)$.

Пусть v фиксированный вектор из B, $\|v\|_B = 1$. Предположим, что существуют такие постоянные $C_1, C_2, C_3 > 0, \delta > 0$, что для всех $\epsilon > 0$, $0 < \delta < r \leqslant a$ выполнено

$$P(Y \in V_r(av)) > C_2 \exp\{-C_1(a-r)^2\}, \tag{14}$$

$$P(Y \in K_{\epsilon,r}(av)) < C_3\, \epsilon\, (a - r + 1)\, P(Y \in V_{r+\epsilon}(av)), \tag{15}$$

$$P(Y \in V_{r+\epsilon}(av)) < C_3 \exp\{C_1 \epsilon (a - r + 1)\} P(Y \in V_r(av)). \tag{16}$$

Введем условие: Для некоторой постоянной $C_4 > 0$ для всех $\epsilon > 0$ и $r > 0$ цуществует такая функция $\varphi = \varphi_\epsilon : B \to R^1$, что $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$,

$\varphi(x) = 1$ при $||x||_B < r$ и $\varphi(x) = 0$ при $||x||_B > r + \epsilon$, функция φ – трижды непрерывно дифференцируема в B по направлениям из E (см. [2, 12]) и для $j = 1, 2, 3$ для всех h_1, h_2, $h_3 \in E$ выполнено

$$|\varphi^{(j)}(x)h_1 \dots h_j| < C_4\, \epsilon^{-j}\, ||h_1||_E \dots ||h_j||_E, \tag{17}$$

где $\varphi^{(j)}$ – производная порядка j от φ.

Предположим что для некоторого $t > 0$

$$\begin{aligned} &E||Y||_E^6 + E||Z||_E^6 < C_5 < \infty, \\ &E\exp\{t||Y||_B\} + E\exp\{t||Z||_B\} < C_6 < \infty. \end{aligned} \tag{18}$$

Условимся обозначать через θ вещественные числа такие, что $|\theta| < 1$.

Теорема 4. *Пусть* $||v||_B = 1$. *Пусть выполнены условия* (14)–(18). *Тогда найдутся такие вещественные постоянные* M_1, M_2 *и натуральное число* n_0, *что для* $|a - r| < M_1 n^{1/6}$, $r > \delta > 0$, *при* $n > n_0$, *выполнено*

$$P(S_n \in V_r(av)) = P(Y \in V_r(av))(1 + \theta M_2(|a - r| + 1)n^{-1/6}), \tag{19}$$

причем M_2 *зависит от выбора вектора* v *только через постоянные* δ, $S_1 - S_5$.

Если $a = 0$, $0 < r < M_1 n^{1/6}$ *и вместо* (14)–(16) *выполнено* (2)–(4) *из* [2], *то при* $n \to \infty$ *справедливо*

$$P(||S_n||_B > r) = P(||Y||_B > r)(1 + \theta M_2(r + 1)n^{-1/6}). \tag{20}$$

Соотношение (20) является просто утверждением теоремы 2 в [2], а равенство (19) представляет собой собой упрощенный вид соотношения (3.5) теоремы 3.3 в [12].

Применительно к постановке задачи теоремы 3 обозначения теоремы 4 принимают следующий вид $S_n = n^{1/2}(\widehat{F}_n - F_n)$, $n^{-1/2}||S_n||_B = T_1(\widehat{F}_n - F_n + F_0) = N_1(\widehat{F}_n - F_n) = N(\widehat{P}_n - P_0)$, $a_n v = n^{1/2}(F_n - F_0)$, где F_n функция распределения $X_1, \dots, X_n$ для рассматриваемой последовательности альтернатив, P_n – вероятностная мера F_n. Норма N_1 определена на множестве функций $\Im_0 = \{G : G(x) = R((0, x)), x \in (0, 1), R \in \Lambda_0\}$ и $\Im_0$ является искомым банаховым пространством B относительно N_1, при этом $B = E = \Im_0$ и $||\cdot||_B = ||\cdot||_E$.

Естественно в качестве S_n можно взять и вектор $S_n = \{S_{jn}\}_{j=0}^{\infty}$, где $S_{jn} = n^{1/2}\int \phi_j d\widehat{F}_n$. Тогда $\|\cdot\|_B$ может рассматриваться, как норма в гильбертовом пространстве, т.е.

$$\|F - F_n\|_B^2 = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \left(\int \phi_j d(F - F_n)\right)^2$$

для любого $F \in \Im$ и любой последовательности альтернатив F_n.

Таким образом после предельного перехода постановка задачи теоремы 3 может быть сведена к вычислению асимптотик вероятностей ошибок первого и второго рода для проверки гипотез о математическом ожидании гауссовского случайного процесса. По существу это задача о больших уклонениях гауссовской случайной меры в гильбертовом пространстве. Поскольку подобные результаты представляют независимый интерес сформулируем один из них. Пусть H – гильбертово пространство, $Y = \{Y_j\}_1^{\infty}$ – гауссовский случайный вектор с единичным ковариационным оператором, $EY_j = 0$ для $1 \leqslant j < \infty$. Вложим H в еще одно гильбертово пространство H_B ц нормой

$$\|x - y\|_B = \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j (x_j - y_j)^2\right)^{1/2}$$

где $x = \{x_j\}_1^{\infty}$, $y = \{y_j\}_1^{\infty}$- элементы H_B.

Лемма 1. *Пусть $nr_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда при $n \to \infty$ имеет место*

$$P(\|Y\|_B > n^{1/2} r_n) =$$
$$= 2^{1/2}(\pi)^{-1/2} n^{-1/2} r_n^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2} n r_n^2\right\} \prod_{j=2}^{\infty} (1 - b_j)^{-1/2} (1 + o(1)). \quad (21)$$

Пусть $a_n > (1+c) r_n$. Тогда для любой последовательности $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по всем $u = u^{(n)} \in V_n = \{u : \sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2 < \delta_n n^{-1/2} r_n,\ \sum_{j=1}^{\infty} b_j u_{jn}^2 = a_n^2, u = \{u_{jn}\}_{j=1}^{\infty}\}$ выполнено

$$P(\|Y - n^{1/2} u^{(n)}\|_B < n^{1/2} r_n) =$$
$$= \gamma_n(u^{(n)}) n^{-1/2} (a_n - r_n)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2} n (a_n - r_n)^2\right\} (1 + o(1)), \quad (22)$$

где

$$\gamma_n(u^{(n)}) = (2\pi)^{-1/2} \prod_{j=2}^{\infty} \left(1 + b_j \frac{a_n - r_n}{r_n}\right)^{-1/2} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2} n \sum_{j=2}^{\infty} u_{jn}^2 b_j \frac{a_n - r_n}{r_n + b_j(a_n - r_n)} \right\}. \tag{23}$$

Асимптотика (21) для гильбертовых пространств была доказана Золотаревым [22], асимптотика типа (22) для $n^{1/2}a_n =$ конст получена Грегори [13] и Хуангом [14]. В данной форме она может рассматриваться как обобщение результатов [13] и [14].

3. Доказательство теоремы 1 сравнительно просто. Асимптотика (4) вероятностей больших уклонений ошибок первого рода критериев типа Колмогорова следует из сходимости распределений нормированных эмпирических функций распределения к броуновскому мосту (см. (26) ниже) и стандартной асимптотики вероятностей больших уклонений максимума соответствующего гауссовского случайного процесса (см. Питербарг [21]).

Вычислим асимптотику $\beta(L_n, a_n)$ вероятностей больших уклонений ошибок второго рода. Как нетрудно видеть, (5) представляет собой асимптотику вероятностей больших уклонений гауссовской случайной величины имеющей дисперсию равную максимуму по $t \in (0,1)$ дисперсий броуновского моста $w(t)$ умноженного на функцию $q(t)$. Таким образом будет показано, что соответствующий супремумы асимптотики вероятностей ошибок второго рода достигаются на функциях распределения, порожденных дельтообразными функциями $n^{-1/2}h_s(t) = F(t) - t = a_n q^{-1}(t_1) + s - t$ для $s < t < s + a_n q^{-1}(t_1)$ и $h_s(t) = 0$ для остальных $t \in (0,1)$, где $t_1 \in (s, s + a_n q^{-1}(t_s))$.

Имеем

$$P(\sup\{|\widehat{F}_n(t) - t| q(t) : t \in (0,1)\} < r_n) =$$

$$P_0(\sup\{|\widehat{F}_n(F(t)) - t| q(t) : t \in (0,1)\} < r_n) \doteq I_n. \tag{24}$$

Как следует из теоремы 3 в [16] существуют такое вероятностное пространство, что на нем можно определить броуновский мост $w(F(t))$ и эмпирические функции распределения $\widehat{F}_n(F(t))$ так, что

$$P_0(\sup\{n^{1/2}|(\widehat{F}_n(F(t)) - F(t)) - w(F(t))| q(t) : t \in (0,1)\} > x_n) <$$

$$< C\exp\{-Cn^{1/2}x_n\}, \tag{25}$$

где $x_n > Cn^{-1/6}$, $n^{1/2}r_nx_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом

$$I_n \leqslant P_0(\sup|w(F(t)) + h(t)|q(t) : t \in (0,1)\} < n^{1/2}r_n + x_n))+$$

$$+O(\exp\{-Cn^{1/3}\}), \tag{26}$$

где $h(t) = n^{1/2}(F(t) - t)$.

Следовательно оценка сверху для вероятностей больших уклонений ошибок второго рода может быть получена вычислением

$$\sup P_0(\sup\{|w(F(t)) - h(t)|q(t) : t \in (0,1)\} < n^{1/2}r_n + x_n), \tag{27}$$

где внешний супремум берется по всем функциям распределения F имеющим вероятностные меры $P \in \Lambda(T_K, a_n)$ и функциям $h(t)$ таким, что $\sup\{|h(t)|q(t) : t \in (0,1)\} > n^{1/2}a_n$ и $n^{-1/2}h(t) + t$- функция распределения (здесь F и h - независимые переменные).

Событие, стоящее в (27) под знаком вероятности, имеет место, если броуновский мост $w(F(t))$ не пересечет один из графиков функций $-n^{1/2}r_nq^{-1}(t) - x_n + h(t)$ или $n^{1/2}r_nq^{-1}(t) + x_n + h(t)$. Исследуем вопрос для какой функции h максимальна вероятность того, что броуновский мост $w(F(t))$ не пересечет первый график. Ясно, что она будет больше для любой функции $h_1(t) < h(t)$, удовлетворяющей условию $h_1(s_1)q(s_1) > n^{1/2}a_n$ при некотором $s_1 \in (0,1)$ (если бы функция $h(t)q(t)$ достигала значения $-a_nn^{1/2}$, то мы по аналогии могли бы рассмотреть вероятность пересечения второго графика). Поэтому функция $\overline{h}(t)$, максимизирующая данную вероятность, имеет вид $\overline{h}(t) = n^{1/2}(a_nq^{-1}(t_1) + s_1 - t)$ для $s_1 < t < s_1 + a_nq^{-1}(t_1)$ и $\overline{h}(t) = 0$ для остальных t. Здесь t_1 одна из точек интервала $(s_1, s_1 + a_nq^{-1}(t_1))$. Мы не рассматриваем случай $\overline{h}(t) < 0$ для некоторых $t \notin (s_1, s_1 + a_nq^{-1}(t_1))$, так как тогда на таком участке $t \notin (s_1, s_1 + a_nq^{-1}(t_1))$ вероятность пересечения броуновским мостом графика функции $-n^{1/2}r_nq^{-1}(t) + x_n + \overline{h}(t)$ будет меньше чем вероятность пересечения для функции $n^{1/2}r_nq^{-1}(t) + x_n + \overline{h}(t)$, что может добавить дополнительный член в асимптотику. В тоже время вероятность пересечения броуновским мостом $w(F(t))$ графика функции $-n^{1/2}r_nq^{-1}(t) + x_n$ при $t \notin (s_1, s_1 + a_nq^{-1}(t_1))$ есть $1 + o(1)$, в отличии от вероятности непересечения $-n^{1/2}r_nq^{-1}(t) + o(n^{-1/6}) + \overline{h}(t)$ при $t \in (s_1, s_1 + a_nq^{-1}(t_1))$.

Для указанной функции $\overline{h}(t)$ мы имеем

$$P_0(|w(F(t))| < n^{1/2} r_n q^{-1}(t) + x_n, t \in (0,1)) <$$

$$< 1 - \exp\left\{-\frac{n r_n^2}{2d_1^2}(1+o(1))\right\}. \tag{28}$$

$$P_0(w(F(t)) + n^{1/2}(a_n - r_n) q^{-1}(t) + n^{1/2}(s_1 - t) > 0,$$

$$t \in (s_1, s_1 + a_n q^{-1}(t_1))) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi} d_1} \int\limits_{n^{1/2}(a_n - r_n)}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2d_1^2}\right\} dx \times$$

$$P_0(\inf\{w(u(t)) q(t) + x - n^{1/2}(a_n - r_n) + n^{1/2} t q(t + s_1),$$

$$t \in (0, a_n q^{-1}(t_1))\} > 0) < \frac{1}{\sqrt{2\pi} d_1} \int\limits_{n^{1/2}(a_n - r_n)}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2d_1^2}\right\} dx =$$

$$= \frac{d_1}{\sqrt{2\pi n}(a_n - r_n)} \exp\left\{-\frac{n(a_n - r_n)^2}{2d_1^2}\right\} dx, \tag{29}$$

где $d_1^2 = F(s_1)(1 - F(s_1)) q^2(s_1) = (1 - s_1) s_1 q^{-2}(s_1) + O(a_n)$ и $u(t) = F(s_1 + t) - F(s_1)$ при $t \in (0, a_n q^{-1}(t_1))$.

Докажем, что данная граница сверху достигается. Для этого заметим, что $F(t) = n^{-1/2}\overline{h}(t) + t = s_1 + a_n q^{-1}(s_1)$ постоянна на интервале $t \in (s_1, s_1 + a_n q^{-1}(s_1))$. Отсюда легко следует требуемое утверждение. Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 3. Основные леммы. Перейдем к вычислению асимптотики супремума вероятностей ошибок второго рода для класса функционалов T определенного в теореме 3. Вместо функционала $T(P)$ в дальнейшем мы будем рассматривать функционал $N_1(F - F_0) = T(P)$.

Наибольшую трудность в оценках вызывает неортогональность системы функций ϕ_j относительно меры $P \in \Phi(T, a_n)$. В тоже время на основе доказательства теоремы 3.2 в [5] можно доказать, что достаточно рассмотреть последовательности вероятностных мер P_n удаленные на расстояние порядка $o(a_n)$ от вероятностных мер $\widetilde{P}_n$, $d\widetilde{P}_n / dP_0 = 1 + a_n \phi_1$, где расстояние рассматривается относительно метрики Хеллингера ρ. Для любых

$P, Q \in \Lambda$

$$\rho(P,Q)=\left(\int\left(\left(\frac{dP}{dR}\right)^{1/2}-\left(\frac{dQ}{dR}\right)^{1/2}\right)^{2}dR\right)^{1/2},\quad R=\frac{1}{2}(P+Q).$$

Это существенно облегчает задачу.

Основные этапы доказательства представлены в виде нескольких лемм, которые приведены ниже. Их доказательство будет дано в конце работы.

Утверждение леммы 2 позволяет при вычислении вероятностей ошибок второго рода ограничиться классом вероятностных мер P абсолютно непрерывных относительно P_0.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* Б1. *Тогда для любого $P \in \Lambda$ и любого $\epsilon > 0$ можно указать такую меру $\overline{P}$ абсолютно непрерывную относительно P_0, что для любого $a > 0$*

$$\overline{P}(T(\widehat{P}_n) < a-\epsilon) < P(T(\widehat{P}_n) < a) < \overline{P}(T(\widehat{P}_n) < a+\epsilon) \tag{30}$$

и

$$|T(\overline{P}) - T(P)| < \epsilon. \tag{31}$$

Пусть P_n последовательность вероятностных мер абсолютно непрерывных относительно P_0. Обозначим $u_j = u_{jn} = \int \phi_j dP_n$, $0 \leqslant j < \infty$.

Лемма 3. *Пусть $T(P_n) = a_n, \rho(P_n, \widetilde{P}_n) = o(a_n)$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-2}\sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2 = 0. \tag{32}$$

В леммах 4–6 даны оценки сверху для вероятностей ошибок второго рода $P_n(T(\widehat{P}_n) < r_n)$ в зависимости от удаленности последовательностей альтернатив P_n от $\widetilde{P}_n$.

Лемма 4. *Пусть последовательность $P_n \in \Lambda$ абсолютно непрерывна относительно P_0 и $T(P_n) \geqslant a_n, \rho(P_n, \widetilde{P}_n) > c_1 a_n$. Тогда существует $c_0 = c(c_1) > 1$ такое, что для $n > n_0$*

$$P_n(T(\widehat{P}_n) < r_n) < \exp\left\{-\frac{1}{2}c_0 n a_n^2\right\}. \tag{33}$$

Будем предполагать в дальнейшем, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j u_j^2 = a_n^2.$$

Если бы это равенство не имело место, то было бы достаточно во всех последующих оценках положить $a_n = T(P_n)$.

Дальнейшие оценки вероятностей ошибок второго рода будут проведены отдельно для

$$\limsup_{n\to\infty} n \sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2 = \infty. \tag{34}$$

и

$$n \sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2 < C < \infty. \tag{35}$$

Определим эллипсоид $W_n = \left\{ v : \sum_{j=1}^{\infty} b_j v_j^2 = r_n^2, v = \{v_j\}_{j=1}^{\infty} \right\}$. Ясно, что $T(\widehat{P}_n) < r_n$ эквивалентно $S_n \in n^{1/2} W_n$.

Лемма. . *Пусть* $T(P_n) = a_n$ *и имеет место* (32), (34). *Тогда*

$$P_n(S_n \in n^{1/2} W_n) < C \exp\left\{ -\frac{n}{2}(a_n - r_n)^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{n\lambda_n^2}{2 + 2\lambda_n} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{b_j u_{jn}^2 (1 - b_j)}{1 + \lambda_n b_j} + O\left(a_n^{-2} \left(\sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2 \right)^2 \right) \right\}. \tag{36}$$

где $\lambda_n = \frac{a_n - r_n}{r_n}$.

Лемма 6. *Пусть* $T(P_n) = a_n$ *и имеет место* (32), (35). *Тогда*

$$P_n(S_n \in n^{1/2} W_n) \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_n(u^{(n)}) n^{-1/2} (a_n - r_n)^{-1} \exp\left\{ -\frac{1}{2} n (a_n - r_n)^2 \right\} (1 + o(1)), \tag{37}$$

Таким образом получение оценки сверху в (12) сводится к максимизации правых частей (33), (36), (37). Поскольку $c_0 > 1$ и в (36)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{b_j u_{jn}^2 (1 - b_j)}{1 + \lambda_n b_j} = \infty$$

то этот максимум достигается для $u_{jn} = 0$, $2 \leqslant j < \infty$ и равен правой части (12). В силу теоремы 4 и леммы 1 асимптотика вероятностей больших уклонений $\widetilde{P}_n(S_n \in n^{1/2}W_n)$ также равна правой части (12), что и доказывает (12).

Доказательство лемм 1–6. При доказательстве леммы 1 мы будем использовать стандартную технику получения подобного рода результатов (см. [13, 22]).

Доказательство леммы 1. Обозначим $J_n = P(||Y - n^{1/2}u^{(n)}||_B^2 < nr_n^2)$. Запишем

$$J_n = \int\limits_0^{r_n} F_{1n}(n(r_n - y)^2) f_{2n}(2nr_n y - ny^2)(2nr_n - 2ny)dy, \qquad (38)$$

где F_{1n} функция распределения $(Y_1 - n^{1/2}a_n)^2$, а f_{2n}- плотность распределения $\sum_{j=2}^{\infty} b_j(Y_j - n^{1/2}u_{jn})^2$ соответственно.

Оценим интеграл справа в (38) отдельно для областей интегрирования $(0, \epsilon_n n^{-1/2})$ и $(\epsilon_n n^{-1/2}, r_n)$, где $\epsilon_n \to 0$, $n^{1/2}\epsilon_n r_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Обозначим интегралы по этим областям интегрирования J_{n1} и J_{n2} соответственно.

При $n \to \infty$ равномерно по $y \in (0, \epsilon_n n^{-1/2})$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} F_{1n}\left(n(r_n - y)^2\right) F_{1n}^{-1}(nr_n^2) \exp\{n(a_n - r_n)y + \frac{n}{2}y^2\} = 1. \qquad (39)$$

Следовательно, делая замену переменных $z = 2nr_n y$, получаем

$$J_{n1} = F_{1n}(nr_n^2) \int\limits_0^{\epsilon_n n^{-1/2}} \exp\left\{-n(a_n - r_n)y - \frac{n}{2}y^2\right\} \times$$

$$f_{2n}(2nr_n y - ny^2)(2nr_n - 2ny)dy(1 + o(1)) = \qquad (40)$$

$$F_{1n}(nr_n^2) \int\limits_0^{2\epsilon_n n^{1/2} r_n} \exp\left\{-s_n z - \frac{z^2}{8nr_n^2}\right\} f_{2n}\left(z - \frac{z^2}{4nr_n^2}\right)\left(1 - \frac{z}{2nr_n^2}\right)dz,$$

где $s_n = \frac{a_n - r_n}{2r_n}$.

Делая замену переменных $t = z - \frac{z^2}{4nr_n^2}$, получаем

$$J_{n1}F_{1n}^{-1}(nr_n^2) = \int\limits_0^{2\epsilon_n n^{1/2} r_n + O(\epsilon_n)} \exp\{-s_n t\} f_{2n}(t)dt(1 + o(1)) =$$

$$\int\limits_0^\infty \exp\{-s_n t\} f_{2n}(t)dt(1+o(1))+O\left(\exp\{-a_n\epsilon_n n^{1/2}r_n\}\int\limits_{\epsilon_n n^{1/2}r_n}^\infty f_{2n}(t)dt\right)$$

$$= \int\limits_0^\infty \exp\{-s_n t\} dP\left(\sum_{j=2}^\infty b_j(Y_j - n^{1/2}u_{jn})^2 < t\right)(1+o(1))+$$

$$+O(\exp\{-a_n\epsilon_n n^{1/2}r_n\}) = (2\pi)^{1/2}\gamma_n(u^{(n)})(1+o(1)). \qquad (41)$$

Поскольку для $y \in (\epsilon_n n^{-1/2}, r_n)$, имеет место $F_{1n}\left(n(r_n-y)^2\right) < CF_{1n}(nr_n^2)\exp\{-n(a_n-r_n)y\}$, то

$$J_{n2} < C\exp\{-s_n\epsilon_n n^{1/2}r_n\}F_{1n}(nr_n^2)\int f_{2n}(2nr_ny-ny^2)(2nr_n-2ny)dy<$$

$$C\exp\{-s_n\epsilon_n n^{1/2}r_n\}F_{1n}\left(nr_n^2\right). \qquad (42)$$

Из (38), (41), (42) следует (23).

Доказательство леммы 2. Для любого k обозначим

$$T_k^2(P) = \sum_{j=1}^k b_j\left(\int \phi_j dP\right)^2.$$

Заметим, что поскольку

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in(0,1)}\sum_{j=k}^\infty b_j|\phi_j(x)|^2 = 0,$$

то для любого $\delta > 0$ найдется такое k, что

$$T_k(\widehat{P}_n) - \delta < T(\widehat{P}_n) < T_k(\widehat{P}_n) + \delta. \qquad (43)$$

Поскольку функции ϕ_j ограничены и непрерывны, то для любого $\epsilon_1 > 0$ и любого k, $1 \leqslant k < \infty$ найдутся кусочно-постоянные функции $\overline{\phi}_j$, $0 \leqslant j \leqslant k$, обладающие следующими свойствами:

(i) для всех $0 \leqslant j \leqslant k$ имеет место $\sup_{x\in(0,1)}|\phi_j(x) - \overline{\phi}_j(x)| < \epsilon_1$.

(ii) существует разбиение Π отрезка $(0,1)$ на множества Ω_t, $1 \leqslant t \leqslant l$ такое, что на них функции $\overline{\phi}_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$ принимают постоянные значения и множества Ω_t , $1 \leqslant t \leqslant l$ открыты или являются замыканием открытых множеств.

Определим функционалы

$$\overline{T}^2(P) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \left(\int_0^1 \overline{\phi}_j \, dP \right)^2$$

и

$$\overline{T}_k^2(P) = \sum_{j=1}^{k} b_j \left(\int_0^1 \overline{\phi}_j \, dP \right)^2 .$$

Из (i), (ii) вытекает, что

$$|T_k(\widehat{P}_n) - \overline{T}_k(\widehat{P}_n)| < C_k \epsilon_1, \tag{44}$$

где C_k не зависит от ϵ_1. Аналогично (43), для любого $\delta > 0$ найдется такое $k > 0$, что $\overline{T}_k(\widehat{P}_n) - \delta < \overline{T}(\widehat{P}_n) < \overline{T}_k(\widehat{P}_n) + \delta$. Кроме того существует вероятностная мера $\overline{P}$ абсолютно непрерывная относительно P_0, имеющая плотность, принимающую постоянные значения на множествах разбиения Π, и такая, что $\overline{P}(\Omega_t) = P(\Omega_t)$, $1 \leqslant t \leqslant l$. Ясно что тогда $P(\overline{T}_k(\widehat{P}_n) < a) = \overline{P}(\overline{T}_k(\widehat{P}_n) < a)$. Следовательно

$$\overline{P}(\overline{T}_k(\widehat{P}_n) < a - C_k\epsilon_1) < P(T_k(\widehat{P}_n) < a) < \overline{P}(\overline{T}_k(\widehat{P}_n) < a + C_k\epsilon_1) \tag{45}$$

и

$$|T(\overline{P}) - T(P)| < C\epsilon_1. \tag{46}$$

Из (43), (45), (46) следует (30), (31).

Доказательство леммы 3. Обозначим $f(x) = \frac{dP_n}{dP_0}(x), x \in (0,1)$. Зададим функцию $f^{1/2}$ в следующем виде

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{1 - \|e\|^2} + \sum_{j=1}^{\infty} e_j \phi_j(x),$$

где $e = \{e_j\}_1^{\infty}$.

Тогда

$$\rho^2(P_n, \widetilde{P}_n) = \int \left(\sqrt{1 - \|e\|^2} + \sum_{j=1}^{\infty} e_j \phi_j - \sqrt{1 + a_n \phi_1} \right)^2 dP_0 =$$

$$2-2\int\left(\sqrt{1-\|e\|^2}+\sum_{j=1}^{\infty}e_j\phi_j\right)\sqrt{1+a_n\phi_1}\,dP_0=o(a_n^2). \qquad (47)$$

Разлагая $(1+a_n\phi_1)^{1/2}$ в ряд Тейлора и используя условие B1, получаем

$$\sqrt{1-\|e\|^2}\int\sqrt{1+a_n\phi_1}\,dP_0=$$

$$=\sqrt{1-\|e\|^2}-\frac{1}{8}\sqrt{1-\|e\|^2}a_n^2+o(a_n^2) \qquad (48)$$

и

$$\int\sum_{j=1}^{\infty}e_j\phi_j\sqrt{1+a_n\phi_1}\,dP_0=$$

$$\frac{1}{2}e_1a_n-\frac{1}{8}a_n^2\int\sum_{j=1}^{\infty}e_j\phi_j\phi_1^2\,dP_0+o(a_n^2), \qquad (49)$$

так как ϕ_1 ограничена и

$$\int\left|\sum_{j=1}^{\infty}e_j\phi_j\right|dP_0\leqslant\left(\int(\sqrt{f}-1)^2dP_0\right)^{1/2}<2(1-\sqrt{1-\|e\|^2})^{1/2}.$$

Из (47)–(49) получаем, что $\|e\|=o(1)$. Отсюда, разлагая $\sqrt{1-\|e\|^2}$ в ряд Тейлора и подставляя (48), (49) в (47), имеем

$$e_1^2+\sum_{j=2}^{\infty}e_j^2-e_1a_n+\frac{1}{4}a_n^2=o(a_n^2). \qquad (50)$$

Из (50) получаем

$$e_1=\frac{1}{2}a_n+o(a_n)\quad i\quad \sum_{j=2}^{\infty}e_j^2=o(a_n^2). \qquad (51)$$

Отсюда для любого j, $1\leqslant j<\infty$

$$u_j=\int\phi_jfdP_0=\int\phi_j\left(\sqrt{1-\|e\|^2}+\sum_{l=1}^{\infty}e_l\phi_l\right)^2dP_0=$$

$$2\sqrt{1-\|e\|^2}e_j+\int\phi_j\left(\sum_{l=1}^{\infty}e_l\phi_l\right)^2dP_0=$$

$$2e_j + o(a_n^2) + O\left(\int \left(\sum_{l=1}^{\infty} e_l \phi_l\right)^2 dP_0\right) = 2e_j + O(a_n^2). \qquad (52)$$

Из (51) и (52) следует (32).

Доказательство леммы 4. Для любого $r > 0$ обозначим $\Omega(r) = \{Q : T(Q) < r, Q \in \Lambda\}$ и $\Omega_0(r) = \Omega(r) - P_0$.

Согласно теореме 3.2 в [5] для любых последовательностей $d_n > r_n > 0, d_n \to 0, nd_n^2 \to \infty, n(d_n - r_n)^2 \to \infty, nr_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{P \in \Phi(T,d_n)} (nd_n^2)^{-1} \log P(T(\widehat{P}_n) < r_n) = -\frac{1}{2}. \qquad (53)$$

Поэтому при доказательстве (33) можно предположить, что $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} T(P_n) = 1$. Если бы $T(P_{n_k}) > (1+\delta) b_{n_k}$ для некоторой подпоследовательности $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то (33) следовало бы из (53) для $v_n = (1+\delta)a_n$. Более того мы будем цчитать, что $T(P_n) = a_n$, так как в противном случае можно было бы положить $a_n = T(P_n)$.

Цогласно лемме 3 найдется такое $0 < c_2 < 1$, что

$$\sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2 > c_2 a_n^2. \qquad (54)$$

В свою очередь $T(P_n) = a_n$ и (54) означают, что для любого $0 < \delta < 1 - c_2$

$$\widetilde{T}^2(P) \doteq (1-\delta) u_{1n}^2 + \left(1 + \frac{1-c_2}{c_2}\delta\right) \sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2 > a_n^2. \qquad (55)$$

Обозначим $\Phi_1(a_n) = \{P : \widetilde{T}(P) > a_n, P \in \Lambda\}$ и $\Phi_{10}(a_n) = \Phi_1(a_n) - P_0$.

Для любых $G_1, G_2 \in \Lambda_0$ положим

$$\rho_0^2(G_1, G_2) = \int \left(\frac{d(G_1 - G_2)}{dP_0}\right)^2 dP_0,$$

если $G_1 - G_2$ абсолютно непрерывно относительно P_0 и $\rho_0(G_1, G_2) = \infty$ в противном случае. Для любых $\Omega_0, \Phi_0 \subset \Lambda_0$ обозначим $\rho_0(\Omega_0, \Phi_0) = \inf\{\rho_0(G_1, G_2) : G_1 \in \Omega_0, G_2 \in \Phi_0\}$.

Прямыми вычислениями получаем

$$\rho_0(\Omega_0(r_n), \Phi_{10}(a_n)) = \frac{a_n}{\sqrt{1-\delta}} - r_n > a_n - r_n, \tag{56}$$

если $\frac{a_n}{\sqrt{1-\delta}} - r_n < b_2^{-1/2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{1+\delta_1}} - r_n\right)$, где $\delta_1 = \frac{1-c_2}{c_2}\delta$.

Таким образом (33) будет следовать из

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{P\in\Phi_1(a_n)} (n\rho_0^2(\Omega_0(r_n), \Phi_{10}(a_n)))^{-1} \log P(\widehat{P}_n \in \Omega(a_n)) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{P\in\Phi_1(a_n)} (n\rho_0^2(\Omega_0(r_n), \Phi_{10}(a_n)))^{-1} \log P(T(\widehat{P}_n) < r_n) \leqslant -1. \tag{57}$$

Таким образом (57) отличается от (53) тем, что супремум берется по множеству $\Phi_1(b_n)$, а не $\Phi(T, b_n)$. Это вызывает отличия в доказательстве (57) по сравнению с теоремой 3.2 в [5], на которых мы сейчас и остановимся.

Обозначим $\Pi = \Pi_m = \{S_j\}_{j=1}^m$ разбиение множества S состоящее из непересекающихся множеств S_j, $\cup_{j=1}^m S_j = S$. Скажем что разбиение $\Pi_m = \{S_j\}_{j=1}^m$ вложено в разбиение $\Pi_{m_1} = \{\widetilde{S}_j\}_1^{m_1}$, если для каждого S_j, $1 \leqslant j \leqslant m$ найдется $\widetilde{S}_i, 1 \leqslant i \leqslant m_1$, такое, что $S_j \subseteq \widetilde{S}_i$. Для любого $\Omega_0 \subset \Lambda$ обозначим цл(Ω_0) замыкание Ω_0 в τ-топологии.

Для любого разбиения $\Pi_m = \{S_j\}_1^m$, вероятностных мер Q, $P \in \Lambda$ и $\Omega \subset \Lambda$ обозначим

$$\rho(Q, P|\Pi) = \sum_{j=1}^m (Q^{1/2}(S_j) - P^{1/2}(S_j))^2$$

и $\rho(\Omega, P|\Pi) = \inf\{\rho(Q, P|\Pi) : Q \in \Omega\}$.

Так же как и в теореме 3.2 в [5] доказательство верхней границы в (57) основано на неравенстве

$$P_n(\widehat{P}_n \in \Omega(r_n)) \leqslant$$

$$\exp\{-2n\rho^2(\Omega(r_n), P_n|\Pi_m)(1 + \omega_{mn}(\rho(\Omega(a_n), P_n|\Pi_m))\}, \tag{58}$$

где $\omega_{mn}(x) \to 0$ при $x \to 0, n \to \infty$ и не зависит от P_n, а также на тождестве

$$\rho^2(P_0 + aG_1, P_0 + aG_2|\Pi_m) = \frac{1}{4}a^2\rho_0^2(G_1, G_2|\Pi_m) \doteq$$

$$\frac{1}{4}a^2\sum_{j=1}^{m}\frac{G_1(S_j)-G_2(S_j))^2}{P_0(S_j)}(1+o(1)) \tag{59}$$

при $a\to 0$ для любых $G_1,G_2\in\Lambda_0$, таких, что $P_0+aG_1\in\Lambda, P_0+aG_2\in\Lambda$ для $0<a<a_0$.

Мы берем последовательность вложенных разбиений $\Pi_m=\{S_m\}_1^m$ такую, что множества $S_{jm}, 1\leqslant j\leqslant m, 1\leqslant m<\infty$ порождают σ-алгебру в S. Берем последовательности зарядов $G_m\in\overline{\Omega}_0\doteq r_n^{-1}\mathrm{cl}\,(\Omega_0(r_n)), H_m\in\overline{\Phi}_{10}\doteq r_n^{-1}\mathrm{cl}\,(\Phi_{10}(r_n))$ такие, что

$$\rho_0(H_m,G_m|\Pi_m)=\rho_0(\overline{\Omega}_0,\overline{\Phi}_0|\Pi_m) \tag{60}$$

и аналогично доказательству теоремы 3.2 в [5] показываем, что можно выделить сходящиеся в τ-топологии подпоследовательности $H_{m_j}\to H_0\in\overline{\Omega}_0$, $G_{m_j}\to G_0\in\overline{\Phi}_{10}$ при $j\to\infty$ такие, что

$$\lim_{j\to\infty}\rho_0(H_{m_j},G_{m_j}|\Pi_{m_j})=\rho_0(\overline{\Omega}_0,\overline{\Phi}_{10}). \tag{61}$$

Из (58)–(61) следует (57), что и доказывает (33).

Доказательство леммы 5. Пусть $v^{(n)}=\{v_{jn}\}_{j=1}^\infty$ точка эллипсоида W_n такая, что $\|v^{(n)}-u^{(n)}\|=\inf\{||v-u^{(n)}||, v\in W_n\}$.

Координаты $v^{(n)}$ удовлетворяют уравнению

$$u_{jn}-v_{jn}-\lambda b_j v_{jn}=0, \quad ,0\leqslant j<\infty, \tag{62}$$

где λ находится из условия $v^{(n)}\in W_n$.

Проведем к эллипсоиду $n^{1/2}W_n$ в точке $n^{1/2}v^{(n)}$ касательную гиперплоскость

$$\sum_{j=1}^\infty\frac{\lambda b_j}{1+\lambda b_j}u_{jn}\left(y_j-\frac{n^{1/2}u_{jn}}{1+\lambda b_j}\right)=0.$$

Обозначим $\overline{S}_j=\overline{S}_{jn}=S_{jn}-ES_{jn}=S_{jn}-n^{1/2}u_{jn}$, $1\leqslant j<\infty$. Тогда

$$\overline{P}_n(S_n\in n^{1/2}W_n)\leqslant$$

$$\leqslant\overline{P}_n\left(\sum_{j=1}^\infty\frac{\lambda b_j}{1+\lambda b_j}u_{jn}\overline{S}_{jn}<n^{1/2}\sum_{j=1}^\infty\frac{\lambda b_j u_{jn}}{1+\lambda b_j}\left(\frac{u_{jn}}{1+\lambda b_j}-u_{jn}\right)\right)=$$

$$\overline{P}_n\left(\sum_{j=1}^\infty\frac{\lambda b_j}{1+\lambda b_j}u_{jn}\overline{S}_{jn}<-n^{1/2}\sum_{j=1}^\infty\left(\frac{\lambda b_j u_{jn}}{1+\lambda b_j}\right)^2\right). \tag{63}$$

Поскольку случайные величины

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda b_j}{1+\lambda b_j} u_{jn}(\phi_j(X_s) - n^{1/2}u_{jn}) \leqslant \lambda \sum_{j=1}^{\infty} b_j |u_{jn}|(|\phi_j(X_s)| + n^{-1/2}|u_{jn}|)$$

$$\leqslant \lambda \sum_{j=1}^{\infty} b_j |u_{jn}|(|\phi_j(X_s)| + Cn^{-1/2}) \leqslant C\lambda \sum_{j=1}^{\infty} b_j \qquad (64)$$

ограничены к ним применима теорема Крамера и для доказательства леммы 5 остается оценить

$$M_{1n} = \mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda b_j}{1+\lambda b_j} u_{jn} \overline{S}_{jn}\right), \qquad M_{2n} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda b_j u_{jn}}{1+\lambda b_j}\right)^2.$$

Имеем

$$u_{1n} = a_n + o(a_n) =$$

$$= \sqrt{a_n^2 - \sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2} = a_n - \frac{1}{2a_n} \sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2 + O\left(a_n^{-3}\left(\sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2\right)^2\right) \quad (65)$$

и остаточным членом можно пренебречь.

Аналогично

$$v_{1n} = r_n - \frac{1}{2r_n} \sum_{j=2}^{\infty} b_j v_{jn}^2 + O\left(r_n^{-3}\left(\sum_{j=2}^{\infty} b_j v_{jn}^2\right)^2\right) =$$

$$r_n - \frac{1}{2r_n} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{b_j}{(1+\lambda b_j)^2} u_{jn}^2 + O\left(a_n^{-3}\left(\sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2\right)^2\right). \qquad (66)$$

Подставляя (65), (66) в (62) для $j = 1$, $b_1 = 1$ получаем

$$a_n - (1+\lambda) r_n + O\left(a_n^{-2} \sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2\right) = 0$$

и следовательно

$$\lambda = \frac{a_n - r_n}{r_n} + O\left(a_n^{-2} \sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2\right). \qquad (67)$$

Отсюда имеем

$$M_{2n} = -(u_{1n}-v_{1n})^2 - \sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{\lambda b_j u_{jn}}{1+\lambda b_j}\right)^2 = -\left(a_n - r_n - \frac{1}{2a_n}\sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2 + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2r_n}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{b_j}{(1+\lambda b_j)^2}u_{jn}^2 + O\left(\frac{1}{a_n^3}\left(\sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2\right)^2\right)\right)^2 - \sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{\lambda b_j u_{jn}}{1+\lambda b_j}\right)^2 =$$

$$-(a_n-r_n)^2 + \frac{a_n-r_n}{a_n}\sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2 - \frac{a_n-r_n}{r_n}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{b_j u_{jn}^2}{(1+\lambda b_j)^2} +$$

$$O\left(\frac{1}{a_n^2}\left(\sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2\right)^2\right) - \sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{\lambda b_j u_{jn}}{1+\lambda b_j}\right)^2 =$$

$$-(a_n-r_n)^2 + \frac{\lambda}{1+\lambda}\sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2(1+o(1)) - \lambda\sum_{j=2}^{\infty}\frac{b_j u_{jn}^2}{(1+\lambda b_j)^2} +$$

$$O\left(\frac{1}{a_n^2}\left(\sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2\right)^2\right) - \sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{\lambda b_j u_{jn}}{1+\lambda b_j}\right)^2 =$$

$$-(a_n-r_n)^2 + \lambda\sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2\left(\frac{1}{1+\lambda} - \frac{1}{1+\lambda b_j}\right) + o(a_n^2) =$$

$$-(a_n-r_n)^2 + \lambda^2\sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2\frac{b_j-1}{(1+\lambda)(1+\lambda b_j)} + o(a_n^2). \qquad (68)$$

Остается оценить M_{1n}. Имеем

$$E[S_{in}S_{jn}] = \int \phi_i\phi_j\left(1+\sum_{l=1}^{\infty} u_{ln}\phi_l\right)dP_0 = \delta_{ij} + \sum_{l=1}^{\infty} u_{ln}\int \phi_i\phi_j\phi_l\,dP_0,$$

$$0 \leqslant i,j < \infty,$$

где $\delta_{ij}=1$, если $i=j$ и $\delta_{ij}=0$, если $i\neq j$.

Следовательно

$$N^{-1}M_{1n} = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda b_j u_{jn}}{1+\lambda b_j}\right)^2 + J_{n1} - J_{n2}, \qquad (69)$$

где

$$J_{n1} = \int\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda b_j u_{jn}}{1+\lambda b_j}\phi_j\right)^2 \sum_{l=1}^{\infty} u_{ln}\phi_l\; dP_0 <$$

$$C\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j|u_{jn}|\right)^2 \int\left|\sum_{l=1}^{\infty} u_{ln}\phi_l\right| dP_0, \qquad (70)$$

$$J_{n2} = n\left((u_{1n}-v_{1n})u_{1n} + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{\lambda b_j u_{jn}^2}{1+\lambda b_j}\right)^2 = O(na_n^4) \qquad (71)$$

Поскольку

$$\int\left|\sum_{j=1}^{\infty} u_{jn}\phi_j\right| dP_0 = \int\left|\frac{dP}{dP_0} - 1\right| dP_0 \leqslant 2\rho(P,P_0) = O(a_n),$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} b_l|u_{ln}| < \left(\sum_{l=1}^{\infty} b_l\right)^{1/2}\left(\sum_{l=1}^{\infty} b_l u_{ln}^2\right)^{1/2} < Ca_n,$$

то из (70) получаем

$$J_{n1} = O(a_n^3). \qquad (72)$$

Из (69), (71), (72) следует, что

$$M_{1n} = (a_n - r_n)^2 - \lambda^2\sum_{j=2}^{\infty} b_j u_{jn}^2 \frac{b_j - 1}{(1+\lambda)(1+\lambda b_j)} + O(a_n^3 + na_n^4). \quad (73)$$

Применяя к (63) теорему Крамера, из (63), (68), (73) получаем (36).

Доказательство леммы 6. При выполнении условий леммы 6 мы можем применить теорему 4, после чего задача сводится к вычислению асимптотики типа (23), когда случайные величины Y_j имеют не единичную ковариационную матрицу $\Psi =$

$\{E[\overline{S}_{in}\overline{S}_{jn}]\}_{i,j=0}^{\infty}$. Определим диагональную матрицу $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ такую, что $b_{jj} = b_j$ и $b_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Искомая вероятность не превосходит

$$P\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j(Y_j - n^{1/2}u_{jn})^2 < nr_n^2\right) = \int\limits_{\Delta_n} \exp\left\{-\frac{nz^2}{2}\right\} dz, \qquad (74)$$

где $\Delta_n = \{z : (z - \Psi^{-1/2}u)'\Psi^{1/2}B\Psi^{1/2}(z - \Psi^{-1/2}u) < r_n^2\}$ и u' обозначает вектор транспонированный к u.

Определим единичный оператор $E : B \to B$. Обозначим $\overline{z} \in \Delta_n$ точку, в которой $|\overline{z} - u| = \inf\{|z - u| : z \in \Delta_n\}$ и зададим касательное подпространство $\Gamma_{\overline{z}}$ к Δ_n в точке $\overline{z}$. Определим оператор D, переводящий любую точку $v \in \Gamma_{\overline{z}}$ в проекцию $(E + \Psi^{1/2}B\Psi^{1/2})v$ на $\Gamma_{\overline{z}}$, и вектора ортогональные $\Gamma_{\overline{z}}$ в самих себя.

Для вычисления (74) мы будем использовать следующую интерпретацию (23). Правая часть (23) равна

$$(2\pi n)^{-1/2}|\overline{z} - u|^{-1}(\det D)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{n}{2}|\overline{z} - u|^2\right\}(1 + o(1)). \qquad (75)$$

Если бы матрица Ψ была единичной, то (75) перешло бы в (23). Таким образом (75) представляет собой версию (23) с поправкой на недиагональность ковариационной матрицы S_n.

Оценим $|\overline{z} - u|$. Непосредственно решая экстремальную задачу, находим, что

$$\overline{z} - u = (\Psi^{1/2}B\Psi^{1/2} + \lambda E)^{-1}\Psi^{1/2}Bu, \qquad (76)$$

где λ удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2 u'\Psi^{-1/2}(\Psi^{1/2}B\Psi^{1/2} + \lambda E)^{-1}\Psi^{1/2}B\Psi^{1/2}\times$$
$$\times(\Psi^{1/2}B\Psi^{1/2} + \lambda E)^{-1}\Psi^{-1/2}u = r_n^2. \qquad (77)$$

Имеем

$$\overline{z} - u = (\lambda E + B)^{-1}Bu + (\Psi^{1/2}B\Psi^{1/2} + \lambda E)^{-1}\times$$
$$\times(\lambda E - B\Psi^{1/2})(\Psi^{1/2} - E)B(\lambda E + B)^{-1}u. \qquad (78)$$

Оценим

$$I \doteq ||u'B(\lambda E + B)^{-1}(\Psi^{1/2} - E)(\lambda E - B\Psi^{1/2})(\Psi^{1/2}B\Psi^{1/2} + \lambda E)||^2 <$$

$$C|u'B(\lambda E+B)^{-1}(\Psi^{1/2}-E)^2B(\lambda E+B)^{-1}u|. \qquad (79)$$

Положим $f=\frac{dP_n}{dP_0}$ и определим матрицы $\Psi_0=\left\{\int\phi_i\phi_j f dP_0\right\}_{i,j=1}^{\infty}$, $U=uu'$, $L=ee'$,

$$\Xi^{1/2}=\left\{\int\phi_i\phi_j f^{1/2}dP_0\right\}_{i,j=0}^{\infty}.$$

Тогда $\Psi=\Psi_0-U$ и $\Xi=\Psi_0-L$.

Для любой ограниченной функции g такой, что $\int g dP_0=0$, и соответствующего вектора $\overline{g}=\{g_j\}_1^{\infty}$, $g_j=\int g\phi_j dP_0$, $1\leqslant j<\infty$, имеем

$$\overline{g}'(\Xi^{1/2}-E)^2\overline{g}=\int g^2(f^{1/2}-1)^2dP_0<C\rho^2(P,P_0). \qquad (80)$$

Поскольку функция $h=\sum_{j=1}^{\infty}u_{jn}\frac{b_j}{\lambda+b_j}\phi_j$ ограничена и $E_0h(X_1)=0$, имеем

$$||uB(\lambda E+B)^{-1}(\Psi^{1/2}-E)||^2<2I_1+4I_2+4I_3, \qquad (81)$$

где

$$I_1=||uB(\lambda E+B)^{-1}((\Psi_0-L)^{1/2}-E)||^2, \qquad (82)$$

$$I_2=||uB(\lambda E+B)^{-1}(\Psi_0^{1/2}-(\Psi_0-U)^{1/2})||^2, \qquad (83)$$

$$I_3=||uB(\lambda E+B)^{-1}(\Psi_0^{1/2}-(\Psi_0-L)^{1/2})||^2. \qquad (84)$$

Поскольку Ψ_0, Ψ_0-U, $\Psi_0^{1/2}-(\Psi_0-U)^{1/2}$, U неотрицательные операторы, то

$$I_2<2u'B(\lambda E+B)^{-1}\Psi_0^{1/2}(\Psi_0^{1/2}-(\Psi_0-U)^{1/2})(\lambda E+B)^{-1}Bu \qquad (85)$$

Поскольку $\Psi_0^{1/2}\leqslant\Psi_0^{1/2}+(\Psi_0-U)^{1/2}$, то заменяя в правой части (85) сомножитель $\Psi_0^{1/2}$ на $\Psi_0^{1/2}+(\Psi_0-U)^{1/2}$, получаем

$$I_2<2u'B(\lambda E+B)^{-1}U(\lambda E+B)^{-1}Bu=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_ju_{jn}^2}{\lambda+b_j}\right)^2=o(a_n^4). \qquad (86)$$

Рассуждая аналогично (85), (86) и используя (51), получаем

$$I_3\leqslant 2u'B(\lambda E+B)^{-1}L(\lambda E+B)^{-1}Bu=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_je_ju_{jn}}{\lambda+b_j}\right)^2\leqslant$$

$$C\sum_{j=1}^{\infty} b_j u_{jn}^2 \sum_{j=1}^{\infty} b_j e_j^2 = o(a_n^4). \tag{87}$$

Имеем

$$I_1 = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{u_{jn}b_j}{\lambda+b_j} \sum_{t=1}^{\infty} \left(\int \phi_j\phi_t f^{1/2} dP_0 - \delta_{jt} \right) \times$$

$$\times \left(\int \phi_i\phi_t f^{1/2} dP_0 - \delta_{it} \right) \frac{u_{in}b_i}{\lambda+b_i} =$$

$$\int \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_{jn}b_j\phi_j}{\lambda+b_j} \right)^2 (f^{1/2}-1)^2 dP_0 - \left(\sum_{j=2}^{\infty} \frac{u_{jn}b_je_j}{\lambda+b_j} \right)^2 \leqslant$$

$$C\sum_{j=1}^{\infty} b_j u_{jn}^2 \int \sum_{j=1}^{\infty} b_j\phi_j^2 (f^{1/2}-1)^2 dP_0 < Ca_n^2\rho^2(P,P_0) < Ca_n^4 \tag{88}$$

Здесь $\delta_{jt} = 1$, если $j = t$, и $\delta_{jt} = 0$, если $j \neq t$,

Из (79), (81)–(84), (86)–(88) следует

$$I = o(a_n^4). \tag{89}$$

Поскольку

$$|u'B(\lambda E + B)^{-1}(\Psi^{1/2}B\Psi^{1/2} + \lambda E)^{-1} \times$$

$$\times (\lambda E - B\Psi^{1/2})(\Psi^{1/2} - E)B(\lambda E + B)^{-1}u| < C||(\lambda E + B)^{-1}Bu|| I^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j u_{jn}^2 \right)^{1/2} I^{1/2} = o(a_n^3), \tag{90}$$

то (78), (89), (90) означает

$$|\overline{z} - u|^2 = |uB(\lambda E + B)^{-1}|^2 + O(|a_n|^3) \tag{91}$$

Отметим, что

$$\Psi^{-1/2}(\Psi^{1/2}B\Psi^{1/2} + \lambda E)^{-1}\Psi^{1/2}B\Psi^{1/2}(\Psi^{1/2}B\Psi^{1/2} + \lambda E)^{-1}\Psi^{-1/2} =$$

$$(B + \lambda E)^{-1}B(B + \lambda E)^{-1} \tag{92}$$

Таким образом λ определяется из уравнения

$$\lambda^2 u_n (B + \lambda E)^{-2} B u_n = r_n^2 \tag{93}$$

и вычисление асимптотики $n|\overline{z}-u|^2$ из (91), (93) не представляет труда.

Для вычисления $(\det D)^{-1/2}$ используем следующий факт. Если две матрицы A_1 и A_2 симметричны, положительно определены и $A_1 < A_2$, т.е. $(x, A_1x) < (x, A_2x)$ для всех векторов x, то $\det A_1 < \det A_2$. Поэтому если мы обозначим D_k матрицу, порождаемую действием оператора D на конечномерном подпространстве R_k натянутом на функции $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{k-1}$, то получим

$$(\det D)^{-1/2} \leqslant (\det D_k)^{-1/2}. \tag{94}$$

В тоже время, как легко видеть, $\det D_k = \det \overline{D}_k(1 + o(1))$, где $\overline{D}_k$ -оператор, переводящий любую точку $z \in \overline{\Gamma}_{\overline{z}} \cap R_k$ в проекцию $(E + B)z$ на $\overline{\Gamma}_{\overline{z}} \cap R_k$.

Таким образом из (91), (93), (94) следует, что при оценке правой части (74) замена ковариационного оператора Ψ на единичный не приводит к существенной погрешности и поэтому из (74) следует (37).

Литература

1. I. G. Abrahamson, *Exact Bahadur efficiencies for Kolmogorov–Smirnov and Kuiper one and two-sample statistics.* Ann. Math. Statist. **38** (1967), 1475–1490.
2. В. Ю. Бенткус, *О больших уклонениях в банаховом пространстве.* — Теория вероятн. и ее примен. **31** (1986), 710–716.
3. А. А. Боровков, А. А. Могульский Большие уклонения и статистический принцип инвариантности, — Теория вероятн. и ее примен. **37** (1992), 11–18.
4. А. А. Боровков, Н. М. Сычева, *Об асимптотически оптимальных непараметрических критериях.* — Теория вероятн. и ее примен. **13** (1968), 385–418.
5. М. С. Ермаков, *Асимптотическая минимаксность критериев типа Колмогорова и омега-квадрат.* — Теория вероятн. и ее примен. **40** (1995), 54–67.
6. М. С. Ермаков, *Большие уклонения эмпирических мер и статистические критерии.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **207** (1993), 37–60.
7. M. S. Ermakov, *Minimax testing of nonparametric hypothesis against nonparametric sets of alternatives.* — Probability Theory and Mathem. Statist. Fifth Vilnius Intern. Conf. v.1 VSP/Mokslas ed. Grigelionis et all (1990), pp. 175–184.
8. M. S. Ermakov, *On asymptotic minimaxity of rank tests.* — Statist. Probab. Lett. **15** (1992), 191–196.
9. М. С. Ермаков, *Асимптотическая минимаксность критериев омега-квадрат.* — Теория вероятн. и ее примен. **42** (1997), 668–695.
10. M. S. Ermakov On asymptotic minimaxity of Kolmogorov and omega-square tests, — Statist. Probab. Lett. **30** (1996), 227–233.

11. М. С. Ермаков, *Минимаксная непараметрическая проверка гипотез о плотности распределения.* — Теория вероятн. и ее примен. **39** (1994), 488–512.
12. М. С. Ермаков, *О вероятностях больших уклонений в банаховом пространстве.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **278** (2001), 40–57.
13. G. G. Gregory, *On efficiency and optimality of quadratic tests.* — Ann. Statist., **8** (1980), 116–132.
14. C. R. Hwang Gaussian measure of large balls in a Hilbert space, — Proc. Amer. Math. Soc. **78** (1980), 107–110; **94** (1985) 188.
15. Yu. I. Ingster, *Asymptotically minimax hypothesis testing for nonparametric alternatives I, II, III.* — Math. Meth. Statist. **2** (1993), 85–114, 171–189, 249–268.
16. J. Komlos, P. Major, G. Tusnady, *An approximation of partial sums of independent RV's and the sample DF.* — Z. Wahrscheinlichtskeittheorie verw Geb., **32** (1975), 111–131.
17. А. А. Могульский Одно замечание о больших уклонениях статистики омега-квадрат, —Теория вероятн. и ее примен. **22** (1977), 170–175.
18. Г. А. Несенко, Ю. Н. Тюрин, *Асимптотика статистики Колмогорова для параметрических семейств.* — Доклады АН СССР **239** (1978), 1292–1294.
19. Л. В. Осипов, *О вероятностях больших уклонений для независимых случайных векторов.* — Теория вероятн. и ее примен. **23** (1978), 510–525.
20. В. И. Паулаускас, *О скорости сходимости в центральной предельной теореме в банаховом пространстве.* — Теория вероятн. и ее примен. **21** (1976), 775–791.
21. В. И. Питербарг, *Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей.* МГУ, М. (1988)..
22. В. М. Золотарев, *Об одной вероятностной задаче.* — Теория вероятн. и ее примен., **6** (1961), 219–222.

Ermakov M.S. On large deviations of type II error probabilities of Kolmogorov and omega-squared tests.

For the Kolmogorov and omega-squred tests the strong asymptotics for large deviations of type II error probabilities are obtained in the case of "least favourable alternatives." Using these asymptotics the type II error probabilities for any sequence of alternatives can be easily estimated. The proofs are based on one exact asymptotics for large deviation probabilities for Gaussian measures in the Hilbert space and a theorem on large deviation probabilities of sums of independent random vectors in Banach space (see [12]).

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 10 июля 2002 г.