Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 298, 2003 г.

И. В. Вагурина

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ, ОСТАНОВЛЕННОГО В МОМЕНТЫ МАКСИМУМА И МИНИМУМА ИЗ СЛУЧАЙНЫХ ВРЕМЕН

1. Введение. В статье [1] изучались распределения функционалов от броуновского движения, остановленного в моменты максимума и минимума из моментов, обратных к аддитивным функционалам и момента первого выхода на границу интервала. Данная работа продолжает исследования, начатые в [1]. В ней в моменты, из которых выбираются максимальные или минимальные, включен момент, обратный к размаху.

Пусть $W(s)$, $s \in [0, \infty)$, – процесс броуновского движения, выходящий из точки x, и пусть

$$\theta_v = \min\Big\{t : \sup_{0\leqslant s\leqslant t} W(s) - \inf_{0\leqslant s\leqslant t} W(s) = v\Big\}$$

– момент, когда размах процесса $W(s)$ достигает заданного значения v. Такой момент называется обратным к размаху.

Символами $\mathbf{E}_x$ и $\mathbf{P}_x$ обозначим математическое ожидание и вероятность по броуновскому движению при условии $W(0) = x$. Для любого события A и случайной величины ξ под математическим ожиданием $\mathbf{E}\{\xi; A\}$ подразумеваем $\mathbf{E}\{\xi \mathbf{1}_A\}$.

Рассматриваются аддитивные функционалы вида

$$A(t) := \int\limits_0^t f(W(s))ds + \sum_{j=1}^k \gamma_j \ell(t, x_j),$$

где $\gamma_j \geqslant 0$, $j = 1, \dots k$, $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^1$, $\ell(t, y)$ – локальное время

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ No. 02-01-00265 и гранта НШ-2258.2003.1.

броуновского движения, определяемое формулой

$$\ell(t,y)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mathbf{1}_{[y,y+\varepsilon)}(W(v))dv,$$

где $\mathbf{1}_E(\cdot)$ – индикатор борелевского множества E.

В работе [2] изучался вопрос о распределении таких функционалов, остановленных в момент θ_v. Было доказано, что для кусочно непрерывной неотрицательной функции $f(x)$ верны следующие формулы, позволяющие вычислять условные распределения функционалов для моментов θ_v, при условии $W(\theta_v)<z$:при $x-v<z<x$

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v));W(\theta_v)<z\}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial v}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{z,z+v}));W(H_{z,z+v})=z\},\qquad (1.1)$$

а при $x<z<x+v$

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v));W(\theta_v)<z\}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial v}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{z-v,z}));W(H_{z-v,z})=z\},\qquad (1.2)$$

где $H_{a,b}=\min\{s:W(s)\notin(a,b)\}$ – момент первого выхода процесса $W(s)$ на границу интервала (a,b). Математические ожидания функционалов, стоящих в правых частях (1.1) и (1.2), находятся при помощи хорошо известной теоремы (см. [5], гл. 2, §2, теорема 2.4):

Теорема 1.1. *Пусть $f(x)$, $x\in[a,b]$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция. Тогда функция*

$$U(x):=\mathbf{E}_x\Big\{\exp(-A(H_{a,b}));W(H_{a,b})=a\Big\}$$

является единственным непрерывным решением задачи:
для $x\in(a,b)\backslash\{x_1,\dots,x_k\}$

$$\frac{1}{2}U''(x)-f(x)U(x)=0,\qquad (1.3)$$

$$U'(x_i+)-U'(x_i-)=2\gamma_iU(x_i),\qquad i=1,\dots,k,\qquad (1.4)$$

$$U(a+) = 1, \quad U(b-) = 0. \tag{1.5}$$

Замечание 1.1. Аналогичная теорема верна и в случае, когда $W(H_{a,b}) = b$. При этом граничные условия (1.5) примут вид: $U(a+) = 0$, $U(b-) = 1$.

Обозначим τ – случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$ и не зависящее от процесса $W(s)$. Пусть $\nu(\beta, \tau)$ – момент, обратный к адитивному функционалу, который определяется как

$$\nu(\beta, \tau) = \min\{s : \int\limits_0^s g(W(v))dv + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \ell(s, a_i) \geqslant \tau\},$$

где $g(x)$ – неотрицательная кусочно непрерывная функция, $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots q$, $\vec{a} = (a_1, \dots, a_q) \in \mathbb{R}^q$.

Далее будет доказано, что результаты, аналогичные (1.1) и (1.2), верны и для более общих моментов: для $\theta_v^{a,b} := \min\{\theta_v, H_{a,b}\}$ и $\theta_v^\nu := \min\{\theta_v, \nu(\beta, \tau)\}$. Предложенный подход позволяет свести поставленную задачу о нахождении распределения функционалов от броуновского движения, остановленного в моменты $\theta_v^{a,b}$ и θ_v^ν к нахождению распределения функционалов, изученных в [1].

2. О распределении функционалов в момент θ_v^ν, при условии $\theta_v^\nu = \theta_v$.. Случайный момент времени θ_v^ν может быть реализован либо на моменте θ_v, либо на $\nu(\beta, \tau)$. В этом пункте докажем теорему о распределении функционалов, касающуюся первого случая, когда $\theta_v^\nu = \theta_v$.

Приведем теорему, на которую опираются все последующие результаты (ее доказательство см. в [1]).

Положим $H_{a,b}^\nu = \min\{H_{a,b}, \nu(\beta, \tau)\}$.

Теорема 2.A. *Пусть $f(x)$, $x \in [a, b]$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция, $H_{a,b}^\nu = \min\{H_{a,b}, \nu(\beta, \tau)\}$. Тогда функция*

$$U(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\exp(-A(H_{a,b}^\nu)); W(H_{a,b}^\nu) = a\Big\}$$

является единственным непрерывным решением задачи: для $x \in (a, b)\backslash\{a_1, \dots, a_q, x_1, \dots, x_k\}$

$$\frac{1}{2}U''(x) - \Big(\lambda g(x) + f(x)\Big)U(x) = 0, \tag{2.1}$$

$$U'(a_k+) - U'(a_k-) = 2\lambda\beta_k U(a_k), \qquad k = 1, \dots, q, \tag{2.2}$$

$$U'(x_i+) - U'(x_i-) = 2\gamma_i U(x_i), \qquad i = 1, \dots, k, \tag{2.3}$$

$$U(a+) = 1, \quad U(b-) = 0.$$

В дальнейшем нам понадобятся формулы, котрые легко получить из теоремы 1.1. Полагая в ней $f(x) = 0$, имеем:

$$\mathbf{P}_x\{W(H_{a,b}) = a\} = \frac{b-x}{b-a}, \quad \mathbf{P}_x\{W(H_{a,b}) = b\} = \frac{x-a}{b-a}. \tag{2.4}$$

Если положить $f(x) = \alpha$, то получим следующее выражение:

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-\alpha H_{a,b}); W(H_{a,b}) = a\} = \frac{\operatorname{sh}((b-x)\sqrt{2\alpha})}{\operatorname{sh}((b-a)\sqrt{2\alpha})}. \tag{2.5}$$

Дифференцируя его по α и устремляя α к 0, приходим к формуле:

$$\mathbf{E}_x\{H_{a,b}; W(H_{a,b}) = a\} = \frac{(b-x)(x-a)}{3(b-a)}(2b - x - a). \tag{2.6}$$

Также нам понадобится формула 1.3.3.5(a) из [3]:

$$\mathbf{E}_x\{e^{-\eta\ell(H_{a,b},y)}; W(H_{a,b}) = a\} = \begin{cases} \frac{b-x}{b-a+2\eta(b-y)(y-a)}, & y \leqslant x \leqslant b, \\ \frac{b-x+2\eta(b-y)(y-x)}{b-a+2\eta(b-y)(y-a)}, & a \leqslant x \leqslant y, \end{cases}$$

из которой следует, что

$$\mathbf{E}_x\{\ell(H_{a,b}, y); W(H_{a,b}) = a\} =$$

$$= \frac{2(b-y)^2(x-a)}{(b-a)^2}, \quad a < x < y < b. \tag{2.7}$$

Аналогичные формулы имеют место и при $W(H_{a,b}) = b$.

Следующая теорема является основным результатом этого и следующего пунктов.

Теорема 2.1. *Пусть $f(x)$, $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, – кусочно непрерывные неотрицательные функции. Тогда при $x - v < z < x$*

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^\nu)); W(\theta_v^\nu) < z, \theta_v^\nu = \theta_v\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H^\nu_{z,z+v})); W(H^\nu_{z,z+v}) = z\}. \tag{2.8}$$

Замечание. Аналогичный результат будет верен и при $x < z < x+v$. Для этого нужно заменить в (2.8) момент $H^{\nu}_{z,z+v}$ на момент $H^{\nu}_{z-v,z}$.

Доказательство. Обозначим $H_z = \min\{s : W(s) = z\}$. Для достаточно малого $\delta > 0$ положим $D_\delta = \{$ множество траекторий броуновского движения, которые начинаясь в точке x достигают уровень $z+v$ раньше, чем z; затем достигают уровень $z+\delta$ раньше, чем $z+v+\delta$; $\theta^{\nu}_v = \theta_v$ $\}$ и $C_\delta = \{$ множество траекторий броуновского движения, которые начинаясь в точке x достигают уровень $z+v$ раньше, чем $z+\delta$; затем достигают уровень $z+\delta$ раньше, чем $z+v+\delta$; затем достигают уровень z раньше, чем $z+v$; $\theta^{\nu}_v = \theta_v$ $\}$.

Легко проверить, что

$$C_\delta \subset \{W(\theta^{\nu}_v) \in [z, z+\delta), \theta^{\nu}_v = \theta_v\} \subset D_\delta, \tag{2.9}$$

$$C_\delta \subset \{\sup_{0<s<H^{\nu}_z} W(s) \in [z+v, z+v+\delta), \theta^{\nu}_v = \theta_v\} \subset D_\delta. \tag{2.10}$$

В силу строго марковского свойства броуновского движения и (2.9), (2.10) получаем, что

$$\mathbf{P}_x(D_\delta \setminus C_\delta) \leqslant 2\mathbf{P}_{z+v}(W(H^{\nu}_{z+\delta,z+v+\delta}) = z+\delta)\mathbf{P}_{z+\delta}(W(H^{\nu}_{z,z+v}) = z+v)$$

$$\leqslant 2\mathbf{P}_{z+v}(W(H_{z+\delta,z+v+\delta}) = z+\delta)\mathbf{P}_{z+\delta}(W(H_{z,z+v}) = z+v). \tag{2.11}$$

В выражении (2.11) учитывается тот факт, что множество траекторий, для которых выполняется условие $W(H_{a,b}) = a$ гораздо шире, чем множество траекторий, для которых верно $W(H^{\nu}_{a,b}) = a$.

Используя формулы (2.4), получаем

$$\mathbf{P}_x(D_\delta \setminus C_\delta) \leqslant \frac{2\delta^2}{v^2}. \tag{2.12}$$

Учитывая (2.9)–(2.12), заметим, что

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta^{\nu}_v)); W(\theta^{\nu}_v) \in [z, z+\delta); \theta^{\nu}_v = \theta_v\} =$$

$$= \mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta^{\nu}_v)); \sup_{0<s<H^{\nu}_z} W(s) \in [z+v, z+v+\delta); \theta^{\nu}_v = \theta_v\} + O\Big(\frac{\delta^2}{v^2}\Big)$$

$$= \mathbf{E}_x\{\exp(-A(H^{\nu}_z)); \sup_{0<s<H^{\nu}_z} W(s) \in [z+v, z+v+\delta); \theta^{\nu}_v = \theta_v\} +$$

$$+I_\delta + O(\frac{\delta^2}{v^2}), \qquad (2.13)$$

где

$$I_\delta = \mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^\nu)) - \exp(-A(H_z^\nu));$$

$$\sup_{0<s<H_z^\nu} W(s) \in [z+v, z+v+\delta), \theta_v^\nu = \theta_v\}$$

$$= \mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^\nu)) - \exp(-A(H_z^\nu); C_\delta\} + O\Big(\frac{\delta^2}{v^2}\Big).$$

Поскольку $f(x)$ – кусочно непрерывная функция, то она ограничена на любом конечном интервале. Отсюда следует неравенство:

$$|I_\delta| \leqslant \mathbf{E}_x\{|A(\theta_v^\nu) - A(H_z^\nu)|; C_\delta\} + O(\frac{\delta^2}{v^2}) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{y\in[z,z+v+\delta]} f(y)\mathbf{E}_x\{|\theta_v^\nu - H_z^\nu|; C_\delta\}$$

$$+\sum_{j=1}^k \gamma_j \mathbf{E}_x\{\ell(H_z^\nu, x_j) - \ell(\theta_v^\nu, x_j); C_\delta\} + O(\frac{\delta^2}{v^2}).$$

Применяя строго марковское свойство, получим следующие оценки:

$$\mathbf{E}_x\{|\theta_v^\nu - H_z^\nu|; C_\delta\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}_{z+v}(W(H_{z+\delta,z+v+\delta}^\nu) = z+\delta)\mathbf{E}_{z+\delta}\{H_{z,z+v}^\nu; W(H_{z,z+v}^\nu) = z\}. \quad (2.14)$$

В силу (2.4) имеем: $\mathbf{P}_{z+v}(W(H_{z+\delta,z+v+\delta}^\nu) = z+\delta) \leqslant \frac{\delta}{v}$. Математическое ожидание оценим, применив (2.6):

$$\mathbf{E}_{z+\delta}\{H_{z,z+v}^\nu; W(H_{z,z+v}^\nu) = z\} \leqslant \mathbf{E}_{z+\delta}\{H_{z,z+v}; W(H_{z,z+v}^\nu) = z\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{E}_{z+\delta}\{H_{z,z+v}; W(H_{z,z+v}) = z\} = \frac{(v-\delta)\delta}{3v}(2v-\delta) \leqslant \frac{2}{3}v\delta.$$

Из приведенных выше оценок следует, что

$$\mathbf{E}_x\{|\theta_v^\nu - H_z^\nu|; C_\delta\} \leqslant \frac{2}{3}\delta^2.$$

Теперь получим оценку для $\mathbf{E}_x\{\ell(H_z^\nu, x_j) - \ell(\theta_v^\nu, x_j); C_\delta\}$, $j = 1, \ldots, k$. В силу строго марковского свойства можем написать

$$\mathbf{E}_x\{\ell(H_z^\nu, x_j) - \ell(\theta_v^\nu, x_j); C_\delta\} \leqslant \mathbf{P}_{z+v}(W(H_{z+\delta,z+v+\delta}^\nu) = z+\delta)\times$$

$$\times \mathbf{E}_{z+\delta}\{\ell(H^{\nu}_{z,z+v},x_j);W(H^{\nu}_{z,z+v})=z\}, \tag{2.15}$$

где, как уже отмечалось, вероятность в правой части неравенства (2.15) не превосходит $\frac{\delta}{v}$. Легко видеть, что

$$\mathbf{E}_{z+\delta}\{\ell(H^{\nu}_{z,z+v},x_j);W(H^{\nu}_{z,z+v})=z\}\leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{E}_{z+\delta}\{\ell(H_{z,z+v},x_j);W(H_{z,z+v})=z\},$$

поскольку процесс локального времени является неубывающим по времени и множество траекторий, для которых $W(H_{z,z+v})=z$ шире, чем множество траекторий при условии $W(H^{\nu}_{z,z+v})=z$. Применяя (2.7), имеем

$$\mathbf{E}_x\{\ell(H^{\nu}_z,x_j)-\ell(\theta^{\nu}_v,x_j);C_\delta\}\leqslant \frac{\delta}{v}\frac{2(z+v-x_j)^2\delta}{v^2}.$$

Таким образом, $I_\delta=O(\delta^2)$.

Осталось заметить, что

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H^{\nu}_z));\sup_{0<s<H^{\nu}_z}W(s)\in[z+v,z+v+\delta);\theta^{\nu}_v=\theta_v\}$$
$$=\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H^{\nu}_{z,z+v+\delta}));W(H^{\nu}_{z,z+v+\delta})=z;\theta^{\nu}_v=\theta_v\}-$$
$$-\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H^{\nu}_{z,z+v}));W(H^{\nu}_{z,z+v})=z;\theta^{\nu}_v=\theta_v\},$$

а затем разделить (2.13) на δ и устремить его к 0. Соотношение (2.8) доказано.

Проверим, что частная производная по переменной v в правой части (2.8) существует.

Обозначим

$$U_v(x)=\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H^{\nu}_{z,z+v}));W(H^{\nu}_{z,z+v})=z\}.$$

Эта функция является единственным непрерывным решением задачи (2.1)–(2.3) при $a=z$ и $b=z+v$ с граничными условиями $U(z)=1$, $U(z+v)=0$. Тогда $U_v(x)$ можно представить в виде:

$$U_v(x)=\frac{\psi(z+v)\varphi(x)-\psi(x)\varphi(z+v)}{\psi(z+v)\varphi(z)-\psi(z)\varphi(z+v)}, \tag{2.16}$$

где ψ, φ – фундаментальные решения задачи (2.1)–(2.3). Из (2.16) следует дифференцируемость по v, причем это верно, даже если $z+v$ совпадает с одной из точек a_i или x_j. Теорема доказана.

3. О распределении функционалов в момент θ_v^ν. Используя теорему 2.1 можно вычислить $\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^\nu))\}$. Разобьем это математическое ожидание на два слагаемых:

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^\nu))\}$$
$$= \mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^\nu)); \theta_v^\nu = \theta_v\} + \mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^\nu)); \theta_v^\nu = \nu(\beta,\tau)\}. \quad (3.1)$$

Первое слагаемое, согласно теореме 2.1, представляется в виде

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^\nu)); \theta_v^\nu = \theta_v\}$$
$$= \int\limits_{x-v}^{x} \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{z,z+v}^\nu)); W(H_{z,z+v}^\nu) = z\}dz +$$
$$+ \int\limits_{x}^{x+v} \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{z-v,z}^\nu)); W(H_{z-v,z}^\nu) = z\}dz. \quad (3.2)$$

Математическое ожидание, стоящее под знаком интеграла, можно вычислить, используя теорему 2.A.

Преобразуем второе слагаемое. Аналогичный подход был осуществлен в дипломной работе О. В. Андреевой (см. [6]). Обозначим $\nu = \nu(\beta,\tau)$.

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^\nu)); \theta_v^\nu = \nu\}$$
$$= \mathbf{E}_x\{\exp(-A(\nu)); \sup_{0<s<\nu} W(s) - \inf_{0<s<\nu} W(s) < v\}$$
$$= \int\limits_{x-v}^{x+v} \mathbf{E}_x\{\exp(-A(\nu)); \sup_{0<s<\nu} W(s) - \inf_{0<s<\nu} W(s) < v, W(\nu) \in [z, z+dz)\}.$$

Рассмотрим дополнительное условие: $\inf_{0<s<\nu} W(s) \in [b-v, b-v+db)$, от которого избавимся интегрированием. Заметим, что $b \in (x, z+v)$ в случае $x-v<z<x$ и $b \in (z, x+v)$ в случае $x<z<x+v$. В результате получаем:

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^\nu)); \theta_v^\nu = \nu\} =$$
$$= \int\limits_{x-v}^{x} \int\limits_{x}^{z+v} \mathbf{E}_x\{\exp(-A(\nu)); \sup_{0<s<\nu} W(s) - \inf_{0<s<\nu} W(s) < v,$$

$$W(\nu)\in[z,z+dz),\ \inf_{0<s<\nu}W(s)\in[b-v,b-v+db)\}+$$

$$+\int\limits_{x}^{x+v}\int\limits_{z}^{x+v}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\nu));\ \sup_{0<s<\nu}W(s)-\inf_{0<s<\nu}W(s)<v,$$

$$W(\nu)\in[z,z+dz),\ \inf_{0<s<\nu}W(s)\in[b-v,b-v+db)\}=$$

$$=\int\limits_{x-v}^{x}\int\limits_{x}^{z+v}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\nu));\ \sup_{0<s<\nu}W(s)<b,$$

$$W(\nu)\in[z,z+dz),\ \inf_{0<s<\nu}W(s)\in[b-v,b-v+db)\}+$$

$$+\int\limits_{x}^{x+v}\int\limits_{z}^{x+v}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\nu));\ \sup_{0<s<\nu}W(s)<b,$$

$$W(\nu)\in[z,z+dz),\ \inf_{0<s<\nu}W(s)\in[b-v,b-v+db)\}.$$

Сделав во втором слагаемом линейную замену переменной $b-v\mapsto b$, получим окончательное выражение

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^\nu));\theta_v^\nu=\nu\}=$$

$$=\int\limits_{x-v}^{x}\int\limits_{x}^{z+v}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\nu));W(\nu)<z,$$

$$b-v<\inf_{0<s<\nu}W(s),\ \sup_{0<s<\nu}W(s)<b\}dbdz$$

$$+\int\limits_{x}^{x+v}\int\limits_{z-v}^{x}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\nu));W(\nu)<z,$$

$$b<\inf_{0<s<\nu}W(s),\ \sup_{0<s<\nu}W(s)<b+v\}dbdz. \qquad (3.3)$$

Вычислять выражения вида

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\nu));W(\nu)<z,a<\inf_{0<s<\nu}W(s),\ \sup_{0<s<\nu}W(s)<b\},$$

можно с помощью теоремы из [4].

Теорема 3.A. *Пусть $f(x)$, $x \in [a,b]$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция. Тогда для $a < z < b$ функция*

$$G_z(x) = \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\Big\{\exp(-A(\nu)); W(\nu) < z, a < \inf_{0<s<\nu} W(s), \sup_{0<s<\nu} W(s) < b\}$$

является единственным непрерывным решением задачи:
для $x \in (a,b)\backslash\{a_1,\dots,a_q,x_1,\dots,x_k\}$

$$\frac{1}{2}G''(x) - \Big(\lambda g(x) + f(x)\Big)U(x) = 0,$$

$$G'(z+) - G'(z-) = -2\lambda g(z),$$

$$G'(a_k+) - G'(a_k-) = 2\lambda\beta_k G(a_k), \qquad k = 1,\dots,q,$$

$$G'(x_i+) - G'(x_i-) = 2\gamma_i G(x_i), \qquad i = 1,\dots,k,$$

$$U(a+) = 0, \quad U(b-) = 0.$$

Приведем несколько примеров применения полученных результатов.

Пример 3.1 Пусть для момента $\nu(0,\tau)$ функция $g(x) = \frac{c}{x^2}$, где $c > 0$ – константа. Предположим, что $h > v > 0$. Вычислим $\mathbf{P}_x(W(\theta_v^\nu) \in dz, \theta_v^\nu = \theta_v)$, применив теорему 2.1 при $f(x) = 0$. В силу (2.8) имеем

$$\mathbf{P}_x(W(\theta_v^\nu) \in dz, \theta_v^\nu = \theta_v) = \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{P}_x(W(H_{z,z+v}^\nu) = z)\mathbf{1}_{(x-v,x)}(z)dz$$
$$+\frac{\partial}{\partial v}\mathbf{P}_x(W(H_{z-v,z}^\nu) = z)\mathbf{1}_{(x,x+v)}(z)dz. \tag{3.4}$$

Обозначим $\alpha = \sqrt{1+8\lambda c}$. Вероятность $\mathbf{P}_x(W(H_{a,b}^\nu) = a)$ была найдена в [1]:

$$\mathbf{P}_x(W(H_{a,b}^\nu) = a) = \frac{x^{(1+\alpha)/2}b^{(1-\alpha)/2} - x^{(1-\alpha)/2}b^{(1+\alpha)/2}}{a^{(1+\alpha)/2}b^{(1-\alpha)/2} - a^{(1-\alpha)/2}b^{(1+\alpha)/2}}. \tag{3.5}$$

Аналогичная формула верна и для вероятности $\mathbf{P}_x(W(H_{a,b}^\nu) = b)$:

$$\mathbf{P}_x(W(H_{a,b}^\nu) = b) = \frac{a^{(1+\alpha)/2}x^{(1-\alpha)/2} - a^{(1-\alpha)/2}x^{(1+\alpha)/2}}{a^{(1+\alpha)/2}b^{(1-\alpha)/2} - a^{(1-\alpha)/2}b^{(1+\alpha)/2}}. \tag{3.6}$$

Учитывая вышеприведенные формулы, выражение (3.4) преобразуем к виду:

$$\mathbf{P}_x(W(\theta_v^\nu) \in dz, \theta_v^\nu = \theta_v) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\alpha}{z(z+v)} \dfrac{x^{(1+\alpha)/2} z^{(1-\alpha)/2} - z^{(1+\alpha)/2} x^{(1-\alpha)/2}}{(z+v)^{\alpha} z^{-\alpha} + (z+v)^{-\alpha} z^{\alpha} - 2} dz, & z \in (x-v, x), \\ \dfrac{\alpha}{z(z-v)} \dfrac{x^{(1+\alpha)/2} z^{(1-\alpha)/2} - z^{(1+\alpha)/2} x^{(1-\alpha)/2}}{z^{\alpha}(z-v)^{-\alpha} + z^{-\alpha}(z-v)^{\alpha} - 2} dz, & z \in [x, x+v). \end{cases}$$

Пример 3.2. В случае $g(x) = 1$, то есть когда момент $\nu(0,\tau)$ вырождается в экспоненциальный момент остановки τ, верна следующая формула:

$$\mathbf{P}_x(W(\theta_v^{\tau}) \in dz, \theta_v^{\tau} = \theta_v) = \sqrt{2\lambda} \frac{\operatorname{sh}(|x-z|\sqrt{2\lambda})}{\operatorname{sh}^2(v\sqrt{2\lambda})} dz, \qquad |z-x| < v.$$

Этот результат можно получить и иначе, если учесть, что $\mathbf{P}_x(W(\theta_v^{\tau}) \in dz, \theta_v^{\tau} = \theta_v)$ есть преобразование Лапласа с параметром λ от соответствующей вероятности, где τ заменено на t.

$$\mathbf{P}_x(W(\theta_v^{\tau}) \in dz, \theta_v^{\tau} = \theta_v) = \mathbf{E}_x\{\mathbf{1}_{\{\theta_v^{\tau} = \theta_v\}}; W(\theta_v) \in dz\}$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \mathbf{E}_x\{\mathbf{1}_{\{\theta_v^{t} = \theta_v\}}; W(\theta_v) \in dz\} dt$$

$$= \mathbf{E}_x\{\lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{\{\theta_v^{t} = \theta_v\}} dt; W(\theta_v) \in dz\}$$

$$= \mathbf{E}_x\{\lambda \int_{\theta_v}^{\infty} e^{-\lambda t} dt; W(\theta_v) \in dz\} = \mathbf{E}_x\{e^{-\lambda\theta_v}; W(\theta_v) \in dz\}.$$

Формулу для $\mathbf{E}_x\{e^{-\lambda\theta_v}; W(\theta_v) \in dz\}$ можно найти в [3], и она совпадает с полученной нами.

4. О распределении функционалов в момент $\theta_v^{a,b}$. В этом пункте нас будет интересовать распределение функционала, остановленного в момент минимума из момента первого выхода $H_{a,b}$ и момента θ_v, обратного к размаху.

Очевидно, что такая задача имеет смысл не при любых a, b, v и x. Рассмотрим два вырожденных случая. В первом случае, при $v \geqslant |a-b|$, момент $H_{a,b}$ всегда наступает раньше, чем момент θ_v, и задача о распределении функционала в момент $\theta_v^{a,b}$ сводится к задаче с моментом $H_{a,b}$. Во втором случае будем считать, что $v <$

$|b-a|$ и v достаточно мало, чтобы x лежал в интервале $(a+v, b-v)$. Предполагается, что $a+v<b-v$. Тогда момент θ_v всегда будет наступать раньше, чем $H_{a,b}$ и задача редуцируется к задаче с моментом θ_v.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь два невырожденных случая:

$$0<x-a<v<b-a, \tag{i}$$

$$0<b-x<v<b-a. \tag{ii}$$

Замечание 4.1. Несложно понять, что выполнение неравенств (i) и (ii) одновременно влечет следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}(b-a)<v<b-a.$$

Математическое ожидание функционала $A(\theta_v^{a,b})$ разобьем на два слагаемых следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^{a,b}))\} &= \mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^{a,b})); \theta_v^{a,b}=\theta_v\}\\ &+\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^{a,b})); \theta_v^{a,b}=H_{a,b}\}.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Преобразуем первое слагаемое из (4.1).Имеем

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^{a,b})); \theta_v^{a,b}=\theta_v\}\\ &=\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^{a,b})); \theta_v^{a,b}=\theta_v, W(\theta_v)=\inf_{0<s<\theta_v} W(s)\}\\ &+\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^{a,b})); \theta_v^{a,b}=\theta_v, W(\theta_v)=\sup_{0<s<\theta_v} W(s)\}\end{aligned}$$

Каждое из слагаемых представим в виде интегралов по всевозможным значениям, которые могут принимать $\inf\limits_{0<s<\theta_v} W(s)$ и $\sup\limits_{0<s<\theta_v} W(s)$:

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^{a,b})); \theta_v^{a,b}=\theta_v\}$$

$$=\int\limits_{\max\{x-v,a\}}^{\min\{x,b-v\}} \mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^{a,b})); W(\theta_v^{a,b})=\inf_{0<s<\theta_v} W(s),$$

$$\inf_{0<s<\theta_v} W(s)\in[z,z+dz)\}$$

$$+\int\limits_{\max\{x,a+v\}}^{\min\{x+v,b\}}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^{a,b}));W(\theta_v^{a,b})=\sup_{0<s<\theta_v}W(s),$$

$$\sup_{0<s<\theta_v}W(\theta_v)\in[z,z+dz)\}$$

$$=\int\limits_{\max\{x-v,a\}}^{\min\{x,b-v\}}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^{a,b}));W(\theta_v^{a,b})\in[z,z+dz)\}$$

$$+\int\limits_{\max\{x,a+v\}}^{\min\{x+v,b\}}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^{a,b}));W(\theta_v^{a,b})\in[z,z+dz)\}$$

$$=\int\limits_{\max\{x-v,a\}}^{\min\{x,b-v\}}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v));W(\theta_v)\in[z,z+dz)\}$$

$$+\int\limits_{\max\{x,a+v\}}^{\min\{x+v,b\}}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v));W(\theta_v)\in[z,z+dz)\}.$$

Учитывая (1.1) и (1.2), получаем:

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^{a,b}));\theta_v^{a,b}=\theta_v\}$$

$$=\int\limits_{\max\{x-v,a\}}^{\min\{x,b-v\}}\frac{\partial}{\partial v}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{z,z+v}));W(H_{z,z+v})=z\}dz \tag{4.2}$$

$$+\int\limits_{\max\{x,a+v\}}^{\min\{x+v,b\}}\frac{\partial}{\partial v}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{z-v,z}));W(H_{z-v,z})=z\}dz.$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части (4.1). Имеем

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^{a,b}));\theta_v^{a,b}=H_{a,b}\}$$

$$=\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{a,b}));\theta_v^{a,b}=H_a\}+\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{a,b}));\theta_v^{a,b}=H_b\}$$

$$=\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{a,b}));\sup_{0<s<H_{a,b}}W(s)-\inf_{0<s<H_{a,b}}W(s)<v,W(H_{a,b})=a\}$$

$$+\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{a,b}));\ \sup_{0<s<H_{a,b}} W(s)-\inf_{0<s<H_{a,b}} W(s)<v, W(H_{a,b})=b\}$$

$$=\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{a,b}));\ \sup_{0<s<H_{a,b}} W(s)<v+a, W(H_{a,b})=a\}$$

$$+\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{a,b}));\ \inf_{0<s<H_{a,b}} W(s)>b-v, W(H_{a,b})=b\}$$

$$=\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{a,v+a})); W(H_{a,v+a})=a\}$$

$$+\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{b-v,b})); W(H_{b-v,b})=b\}. \qquad (4.3)$$

Замечание 4.3. Если имеет место случай (i), и при этом не выполняется (ii), то

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{b-v,b})); W(H_{b-v,b})=b\}=0.$$

Аналогично, если имеет место (ii) и не выполняется (i), то

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{a,v+a})); W(H_{a,v+a})=a\}=0.$$

В результате получим следующую формулу:

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\theta_v^{a,b}))\}=$$

$$=\int\limits_{\max\{x-v,a\}}^{\min\{x,b-v\}} \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{z,z+v})); W(H_{z,z+v})=z\}dz$$

$$+\int\limits_{\max\{x,a+v\}}^{\min\{x+v,b\}} \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{z-v,z})); W(H_{z-v,z})=z\}dz$$

$$+\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{a,v+a})); W(H_{a,v+a})=a\}$$

$$+\mathbf{E}_x\{\exp(-A(H_{b-v,b})); W(H_{b-v,b})=b\}. \qquad (4.4)$$

Приведем несколько примеров применения этой формулы.

Пример 4.1. Предположим, что выполняются условия (i) и (ii). Найдем $\mathbf{P}_x(\theta_v<H_{a,b})$ и $\mathbf{P}_x(\theta_v^{a,b}=H_{a,b})$. Обе вероятности получаются из (4.3) при $f(x)=0$.

$$\mathbf{P}_x(\theta_v^{a,b}<H_{a,b})=\int\limits_{\max\{x-v,a\}}^{\min\{x,b-v\}} \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{P}_x(W(H_{z,z+v})=z)dz+$$

$$+\int\limits_{\max\{x,a+v\}}^{\min\{x+v,b\}} \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{P}_x(W(H_{z-v,z})=z)dz.$$

В силу (2.4), а также (i), (ii), получаем:

$$\mathbf{P}_x(\theta_v < H_{a,b}) = \int\limits_a^{b-v} \frac{\partial}{\partial v}\frac{z+v-x}{v}dz + \int\limits_{a+v}^{b} \frac{\partial}{\partial v}\frac{x-z+v}{v}dz = \frac{b-a}{v} - 1.$$

$$\mathbf{P}_x(\theta_v^{a,b} = H_{a,b}) = \mathbf{P}_x(W(H_{a,\min\{a+v,b\}})=a) + \mathbf{P}_x(W(H_{\max\{b-v,a\},b})=b)$$
$$= 2 - \frac{b-a}{v}.$$

Ввиду замечания 4.1 нетрудно проверить, что $1 \leqslant \frac{b-a}{v} \leqslant 2$. Таким образом, $\mathbf{P}_x(\theta_v^{a,b} < H_{a,b}) = 2 - \frac{b-a}{v}$ будет лежать в интервале $[0,1]$.

Пример 4.2. Вычислим $\mathbf{E}_x\{\exp(-\alpha\theta_v^{a,b})\}$. Будем предполагать, что выполняется условие (i) и не выполняется (ii). Применим теорему (4.1) при $f(x)=\alpha$.

Рассмотрим первое слагаемое в (4.1). Из формулы (4.4) имеем

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-\alpha\theta_v^{a,b}); \theta_v^{a,b} < H_{a,b}\} =$$
$$= \int\limits_{\max\{x-v,a\}}^{\min\{x,b-v\}} \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{E}_x\{\exp(-\alpha H_{z,z+v}); W(H_{z,z+v})=z\}dz$$
$$+ \int\limits_{\max\{x,a+v\}}^{\min\{x+v,b\}} \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{E}_x\{\exp(-\alpha H_{z-v,z}); W(H_{z-v,z})=z\}dz. \tag{4.5}$$

Учитывая (i), а также (2.5), получаем

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-\alpha\theta_v^{a,b}); \theta_v^{a,b} < H_{a,b}\}$$
$$= \int\limits_a^x \frac{\sqrt{2\alpha}\,\mathrm{sh}((x-z)\sqrt{2\alpha})}{\mathrm{sh}^2((v)\sqrt{2\alpha})}dz + \int\limits_{a+v}^{x+v} \frac{\sqrt{2\alpha}\,\mathrm{sh}((z-x)\sqrt{2\alpha})}{\mathrm{sh}^2((v)\sqrt{2\alpha})}dz$$
$$= \frac{1}{\mathrm{sh}^2(v\sqrt{2\alpha})}\Big(\mathrm{ch}((x-a)\sqrt{2\alpha}) + \mathrm{ch}(v\sqrt{2\alpha}) - \mathrm{ch}((a+v-x)\sqrt{2\alpha}) - 1\Big).$$

Второе слагаемое в (4.1) вычислим, учитывая замечание 4.3.

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-\alpha\theta_v^{a,b}); \theta_v^{a,b} = H_{a,b}\} = \mathbf{E}_x\{\exp(-\alpha H_{a,v+a}); W(H_{a,v+a}) = a\}$$
$$= \frac{\operatorname{sh}((v+a-x)\sqrt{2\alpha})}{\operatorname{sh}(v\sqrt{2\alpha})}.$$

Теперь можно вычислить

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-\alpha\theta_v^{a,b})\} =$$
$$= \mathbf{E}_x\{\exp(-\alpha\theta_v^{a,b}); \theta_v^{a,b} < H_{a,b}\} + \mathbf{E}_x\{\exp(-\alpha\theta_v^{a,b}); \theta_v^{a,b} = H_{a,b}\}$$
$$= \frac{\operatorname{ch}((a+v-x)\sqrt{2\alpha})+1}{\operatorname{ch}(v\sqrt{2\alpha})+1}.$$

Если выполнено условие (ii), но не выполнено (i), то после аналогичных вычислений получаем следующую формулу:

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-\alpha\theta_v^{a,b})\} = \frac{\operatorname{ch}((x-b+v)\sqrt{2\alpha})+1}{\operatorname{ch}(v\sqrt{2\alpha})+1}. \tag{4.6}$$

И, наконец, при выполнении условий (i) и (ii) одновременно имеем:

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-\alpha\theta_v^{a,b})\} = \frac{\operatorname{ch}((a+v-x)\sqrt{2\alpha})+\operatorname{ch}((x-b+v)\sqrt{2\alpha})}{\operatorname{ch}(v\sqrt{2\alpha})+1}. \tag{4.7}$$

5. Распределение функционалов в случайное время, равное максимуму из двух моментов. Для нахождения распределений функционалов, остановленных в момент максимума из вышеприведенных моментов остановки, воспользуемся следующим результатом. Его подробное объяснение можно найти в статье [4].

Пусть μ_1, μ_2 – два момента остановки. Обозначим $\mu_1 \vee \mu_2 = \max\{\mu_1, \mu_2\}$. Тогда

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\mu_1 \vee \mu_2))\} = \mathbf{E}_x\{\exp(-A(\mu_1))\}$$
$$+\mathbf{E}_x\{\exp(-A(\mu_2))\} - \mathbf{E}_x\{\exp(-A(\min\{\mu_1,\mu_2\}))\}. \tag{5.1}$$

Пример 5.1. Вычислим $\mathbf{E}_x\{\exp(-\alpha(\theta_v \vee H_{a,b}))\}$. Из (5.1) следует, что

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-\alpha(\theta_v \vee H_{a,b}))\} =$$

$$= \mathbf{E}_x\{e^{-\alpha\theta_v}\} + \mathbf{E}_x\{e^{-\alpha H_{a,b}}\} - \mathbf{E}_x\{e^{-\alpha(\theta_v^{a,b})}\}. \qquad (5.2)$$

Для нахождения первого слагаемого в (5.2) применим следующую формулу из [2]:

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-\int_0^{\theta_v} f(W(s))ds)\} = \omega \int_x^{x+v} \frac{\rho(z,x)+\rho(x,z-v)}{\rho^2(z,z-v)}dz,$$

где $\rho(x,y) = \varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x)$, $\omega = \varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x)$ – вронскиан, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – фундаментальные решения уравнения $\frac{1}{2}U''(x) - f(x)U(x) = 0$. Полагая $f(x) = \alpha$, получаем:

$$\mathbf{E}_x\{e^{-\alpha\theta_v}\} = \sqrt{2\alpha}\int_x^{x+v} \frac{\operatorname{sh}((x-z+v)\sqrt{2\alpha}) + \operatorname{sh}((z-x)\sqrt{2\alpha})}{\operatorname{sh}^2(v\sqrt{2\alpha})}dz$$

$$= 2\frac{\operatorname{ch}(v\sqrt{2\alpha})-1}{\operatorname{sh}^2(v\sqrt{2\alpha})}.$$

Для вычисления $\mathbf{E}_x\{e^{-\alpha H_{a,b}}\}$ будем использовать известную формулу из [3]:

$$\mathbf{E}_x\{e^{-\alpha H_{a,b}}\} = \frac{\operatorname{sh}((b-x)\sqrt{2\alpha})}{\operatorname{sh}((b-a)\sqrt{2\alpha})} + \frac{\operatorname{sh}((x-a)\sqrt{2\alpha})}{\operatorname{sh}((b-a)\sqrt{2\alpha})}.$$

И, наконец, $\mathbf{E}_x\{\exp(-\alpha(\theta_v^{a,b}))\}$ было найдено в примере 4.2. Таким образом, подставляя полученные формулы в (5.2) и преобразуя результат, получим:

а) если выполнено (i), но не выполнено (ii), то

$$\mathbf{E}_x\{e^{-\alpha(\theta_v \vee H_{a,b})}\} = \frac{1-\operatorname{ch}((a+v-x)\sqrt{2\alpha})}{1+\operatorname{ch}(v\sqrt{2\alpha})} +$$

$$+\frac{\operatorname{sh}((b-x)\sqrt{2\alpha}) + \operatorname{sh}((x-a)\sqrt{2\alpha})}{\operatorname{sh}((b-a)\sqrt{2\alpha})},$$

б) если выполнено (ii), но не выполнено (i), то

$$\mathbf{E}_x\{e^{-\alpha(\theta_v \vee H_{a,b})}\} = \frac{1-\operatorname{ch}((x-b+v)\sqrt{2\alpha})}{1+\operatorname{ch}(v\sqrt{2\alpha})} +$$

$$+\frac{\operatorname{sh}((b-x)\sqrt{2\alpha}) + \operatorname{sh}((x-a)\sqrt{2\alpha})}{\operatorname{sh}((b-a)\sqrt{2\alpha})},$$

в) если выполнены (i) и (ii), то

$$\mathbf{E}_x\{e^{-\alpha(\theta_v\vee H_{a,b})}\} = \frac{1-\operatorname{ch}((a+v-x)\sqrt{2\alpha})}{1+\operatorname{ch}(v\sqrt{2\alpha})} + \frac{1-\operatorname{ch}((x-b+v)\sqrt{2\alpha})}{1+\operatorname{ch}(v\sqrt{2\alpha})}$$
$$+\frac{\operatorname{sh}((b-x)\sqrt{2\alpha})+\operatorname{sh}((x-a)\sqrt{2\alpha})}{\operatorname{sh}((b-a)\sqrt{2\alpha})}.$$

Литература

1. И. В. Вагурина, *Распределения аддитивных функционалов от броуновского движения, остановленного в различные случайные моменты времени.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **294** (2002), 55–76.
2. А. Н. Бородин, *О распределении функционалов от броуновского движения, остановленного в момент, обратный к размаху.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **260** (1999), 50–72.
3. A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae, Second Edition.* Basel-Boston-Berlin, Birkhäuser, 2002.
4. А. Н. Бородин, *О распределении функционалов от броуновского движения, остановленного в момент, обратный ко времени пребывания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **228** (1996), 39–56.
5. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для случайных блужданий.* Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова РАН, Наука, С.-Петербург (1994).
6. О. В. Андреева, *О распределении функционалов от броуновского движения, остановленного в случайный момент времени.* С.-Петербург (2000), Дипломная работа, СПбГУ, математико-механический факультет.

Vagurina I. V. On distributions of additive functionals of Brownian motion stopped at the moment of maximum or minimum of random times.

The distributions of additive functionals of Brownian motion stopped at a random moments are investigated. The moments are constructed by maximum and minimum operations from the inverse range time and the moment inverse to some additive functionals, the first exit time. Some interesting examples of applications are examining.

Санкт-Петербургский
государственный
торгово-экономический
институт

Поступило 14 ноября 2003 г.