Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 297, 2003 г.

Л. А. Молотков

О ЗАТУХАНИИ ВОЛН В ЭФФЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПОРИСТЫЕ И ТРЕЩИНОВАТЫЕ СРЕДЫ, НАСЫЩЕННЫЕ ЖИДКОСТЬЮ

Теоретическое исследование распространения сейсмических волн в пористых и трещиноватых средах, насыщенных жидкостью, проводятся на основе эффективных моделей. Такой моделью, в частности, является эффективная модель среды, в которой чередуются упругие и жидкие слои. Впервые эта эффективная модель совместно с описывающими ее уравнениями была построена Л. А. Молотковым методом матричного осреднения в 1979 году [1]. При выводе упомянутых уравнений в волновом поле рассматриваемой среды совершается предельный переход, при котором число упругих и жидких слоев устремляется к бесконечности, а общая толщина слоистой системы и отношение толщин упругих и жидких слоев остаются постоянными. Полученные уравнения позволяют рассчитывать волновые поля в эффективной модели от различных источников, выделять из волнового поля объемные волны, строить фронты этих волн и записывать выражения для скоростей волн вдоль слоев и в перпендикулярном направлении [2, 3].

Среды с чередующимися упругими и жидкими слоями исследовались в работах М. Шонберга [4]. Им были построены фронты волн в эффективной модели от точечного источника и были получены выражения для скоростей волн, однако уравнения эффективной модели в его работах не выводились. Большой интерес представляет проведенное Т. Плоной, К. Винклером и М. Шонбергом экспериментальное исследование распространения ультразвуковых волн в чередующихся упруго-жидких слоях [5]. Эти опыты подтвердили существование основных объемных волн в эффективной модели, дали хорошее совпадение между

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) грант 03-05-65015.

теоретически рассчитанными и экспериментально полученными скоростями волн и тем самым обосновали возможность использования этой эффективной модели.

Недостаток рассматриваемой модели состоит в том, что она не учитывает затухания волн. В реальной же упруго-жидкой среде поглощение энергии в основном связано с наличием силы трения между упругими и жидкими слоями. Для учета этой силы эффективная модель рассматривается как частный случай модели Био и в эту модель вводится затухание, обусловленное трением между жидкими и упругими частицами. В результате в уравнениях эффективной модели появляются дополнительные члены, описывающие затухание и дисперсию. Энергетические исследования волнового поля на основе этих уравнений позволяют установить выражения для плотностей кинетической и потенциальной энергий и для потоков энергии вдоль осей, а также показать, как убывает суммарная энергия со временем. Используя построенные точные решения уравнений, удается для каждой объемной волны, распространяющейся вдоль слоев, указать не только выражения для скорости, но и выражения для коэффициентов затухания.

§1. Вывод уравнений эффективной модели, учитывающей затухание в среде

Пусть задана среда $0 \le z \le H$, в которой чередуются упругие и жидкие слои (рис. 1). Такая среда рассматривалась в ряде работ [1–5] и для нее была построена двухфазная эффективная модель, описываемая уравнениями

$$t_{xx1} = [(1-\varepsilon)b_1^2\tilde{\lambda} + a_1]\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + b_1\varepsilon\tilde{\lambda}\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + b_1\tilde{\lambda}\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$t_{xx2} = t_{zz1} = t_{zz2} = (1-\varepsilon)b_1\tilde{\lambda}\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \varepsilon\tilde{\lambda}\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \tilde{\lambda}\frac{\partial u_z}{\partial z}; \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial t_{xx1}}{\partial x} = \varrho_1\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial t_{xx2}}{\partial x} = \varrho_2\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial t_{zz1}}{\partial z} = \bar{\varrho}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \qquad (1.2)$$

в которых использованы обозначения

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda_2(\lambda_1 + 2\mu_1)}{\varepsilon(\lambda_1 + 2\mu_1) + \lambda_2(1-\varepsilon)}, \quad a_1 = \frac{4\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_1 + 2\mu_1}, \quad b_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1},$$

$$\bar{\varrho} = \varrho_1(1-\varepsilon) + \varrho_2\varepsilon. \qquad (1.3)$$

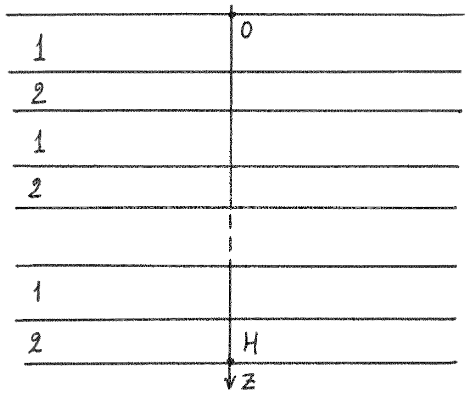

Рис. 1.

В формулах (1.1)–(1.3) индекс 1 указывает, что величина относится к упругим слоям, а индекс 2 определяет принадлежность величины к жидким слоям. В приведенные соотношения входят смещения $u_{x1}, u_{z1}, u_{x2}, u_{z2}$, напряжения $t_{xx1}, t_{xx2}, t_{zz1}, t_{zz2}$, плотности ϱ_1, $\varrho_2, \bar{\varrho}$, пористость ε и коэффициенты Ламе $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2 = \varrho_2 v_2^2$, при этом v_2 – скорость распространения в жидких слоях. В приведенных уравнениях (1.1) и (1.2) упругие и жидкие среды являются идеальными и трение между слоями также не учитывается. Цель работы состоит в учете этого трения, при этом предполагается, что трение внутри упругой и жидкой сред отсутствует.

Для учета трения между слоями используется утверждение [6], что рассматриваемая эффективная модель является особым частным случаем трансверсально-изотропной среды Био. Как известно [7, 6], смещения и напряжения в каждой точке среды Био являются осредненными по малой окрестности этой точки, при этом смещения в упругой (или жидкой) фазе осредняются по объему упругой (или жидкой) среды в этой окрестности, а напряжения осредняются по всему объему упомянутой окрестности. В результате этих осреднений смещения u_x, u_z, U_x, U_z и напряжения $\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma$ в среде Био, соответствующей эффективной модели, представляются равенствами

$$u_x = u_{x1}, \quad u_z = u_{z1}, \quad U_x = u_{x2}, \quad U_z = u_{z2}, \tag{1.4}$$

$$\sigma_{xx} = (1-\varepsilon)t_{xx1}, \quad \sigma_{zz} = (1-\varepsilon)t_{zz1}, \quad \sigma = \varepsilon t_{xx2} = \varepsilon t_{zz2}.$$

Эти величины, согласно равенствам (1.1) и (1.2), удовлетворяют уравнениям

$$\sigma_{xx} = (1-\varepsilon)[(1-\varepsilon)b_1^2\tilde{\lambda} + a_1]\frac{\partial u_x}{\partial x} + b_1\tilde{\lambda}(1-\varepsilon)^2\frac{\partial u_z}{\partial z} +$$

$$+ b_1\varepsilon(1-\varepsilon)\tilde{\lambda}\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right), \tag{1.5}$$

$$\sigma_{zz} = (1-\varepsilon)^2 b_1\tilde{\lambda}\frac{\partial u_x}{\partial x} + (1-\varepsilon)^2\tilde{\lambda}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \varepsilon(1-\varepsilon)\tilde{\lambda}\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right),$$

$$\sigma = b_1\varepsilon(1-\varepsilon)\tilde{\lambda}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \varepsilon(1-\varepsilon)\tilde{\lambda}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \varepsilon^2\tilde{\lambda}\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right);$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = (1-\varepsilon)\varrho_1\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \bar{\varrho}(1-\varepsilon)\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \varepsilon\varrho_2\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \varepsilon\bar{\varrho}\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}, \tag{1.6}$$

описывающим среду Био в первом представлении. Уравнения (1.5) и (1.6) не учитывают диссипации энергии в среде Био. Чтобы учесть силы трения, возникающие между жидкими и упругими слоями, необходимо в соотношения (1.6), описывающие равенства сил, добавить члены, в которых сила трения пропорциональна относительной скорости в жидкости. Согласно формулам (10.1) [8], уравнения (1.6) в этом случае заменяются уравнениями

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = (1-\varepsilon)\varrho_1\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + b\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{\partial U_x}{\partial t}\right), \qquad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \bar{\varrho}(1-\varepsilon)\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \varepsilon\varrho_2\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} + b\left(\frac{\partial U_x}{\partial t} - \frac{\partial u_x}{\partial t}\right), \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \varepsilon\bar{\varrho}\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}, \tag{1.7}$$

которые описывают среду Био с затуханием, вызванным трением между упругой и жидкой средами. Входящий в уравнения (1.7) коэффициент трения b предполагается положительным и выражается равенством $b = \varepsilon^2\bar{\eta}/\bar{k}$ через вязкость $\bar{\eta}$ и абсолютную проницаемость $\bar{k}$ [9]. Уравнения закона Гука (1.5) при этом остаются без изменения.

После введения членов, связанных с трением, полезно вернуться к величинам $u_{x1}, u_{x2}, u_z, t_{xx1}$ и $t_{xx2} = t_{zz}$, которые определяются из уравнений (1.1) и равенств

$$\frac{\partial t_{xx1}}{\partial x} = \varrho_1 \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} + \frac{b}{1-\varepsilon}\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t} - \frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} = \bar{\varrho}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial t_{xx2}}{\partial x} = \varrho_2 \frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2} + \frac{b}{\varepsilon}\left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial t} - \frac{\partial u_{x1}}{\partial t}\right), \tag{1.8}$$

отличающихся от уравнений (1.2) только наличием дополнительных членов. Таким образом, уравнения (1.1) и (1.8) описывают эффективную модель упруго-жидкой среды с учетом затухания.

§2. Энергетическое исследование эффективной модели, учитывающей затухание в среде

Для проведения этого исследования помножим первое, второе и третье уравнения (1.8) соответственно на множители $(1-\varepsilon)\partial u_{x1}/\partial t$, $\partial u_z/\partial t$ и $\varepsilon \partial u_{x2}/\partial t$.

После сложения полученных уравнений и простейших преобразований приходим к уравнению энергетического баланса

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_z}{\partial z} = \frac{\partial W_k}{\partial t} + \frac{\partial W_p}{\partial t} + b\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t} - \frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\right)^2, \tag{2.1}$$

где

$$p_x = (1-\varepsilon)t_{xx1}\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \varepsilon t_{xx2}\frac{\partial u_{x2}}{\partial x},$$

$$p_z = t_{xx2}\frac{\partial u_z}{\partial t} \tag{2.2}$$

– потоки энергии вдоль осей x и z,

$$W_k = \frac{1}{2}\left[(1-\varepsilon)\varrho_1\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t}\right)^2 + \varepsilon\varrho_2\left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\right)^2 + \bar{\varrho}\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2\right] \tag{2.3}$$

–плотность кинетической энергии и

$$\frac{\partial W_p}{\partial t} = (1-\varepsilon)t_{xx1}\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial x \partial t} + \varepsilon t_{xx2}\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial x \partial t} + t_{xx2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \tag{2.4}$$

– производная плотности потенциальной энергии по времени. После подстановки уравнений (1.1) в соотношение (2.4) получаем формулу

$$W_p = \frac{1}{2}(1-\varepsilon)[(1-\varepsilon)b_1^2\tilde{\lambda} + a_1]\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial x}\right)^2 +$$

$$+(1-\varepsilon)b_1\tilde{\lambda}\frac{\partial u_{x1}}{\partial x}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \varepsilon\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\tilde{\lambda}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \varepsilon\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right)^2 \qquad (2.5)$$

для плотности потенциальной энергии. Отметим, что выражение (2.5) является неотрицательно определенной функцией от производных смещений.

Из формул (2.1)–(2.5) следует, что в рассматриваемой среде имеет место затухание. В самом деле, если пренебрегать потоками энергии, то из соотношения (2.1) после его интегрирования по времени следует равенство

$$W_k(t) + W_p(t) = W_k(0) + W_p(0) - b\int\limits_0^t \left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t} - \frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\right)^2 dt, \qquad (2.6)$$

показывающее, что плотность полной энергии убывает в каждой точке среды. Если рассмотреть всю среду v и считать ее энергетически изолированной, то ее полная энергия

$$W(t) = \iiint\limits_v [W_k(t) + W_p(t)]dv \qquad (2.7)$$

выражается формулой

$$W(t) = W(0) - b\int\limits_0^t dt \iiint\limits_v \left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t} - \frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\right)^2 dv. \qquad (2.8)$$

Из равенства (2.8) следует, что полная энергия энергетически изолированной среды монотонно уменьшается с ростом времени.

§3. Решение полученных уравнений

Решение уравнений (1.1) и (1.8) будем искать в виде равенств

$$u_{xi} = \int\limits_0^\infty \frac{\sin kx dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\tilde{u}_{xi}^{+}e^{kz\alpha} + \tilde{u}_{xi}^{-}e^{-kz\alpha}\right)e^{kt\eta}d\eta,$$

$$u_z = \int_0^\infty \frac{\cos kx dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\tilde{u}_z^+ e^{kz\alpha} + \tilde{u}_z^- e^{-kz\alpha}\right) e^{kt\eta} d\eta, \tag{3.1}$$

$$t_{xxi} = \int_0^\infty \frac{k \cos kx dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\tilde{t}_{xxi}^+ e^{kz\alpha} + \tilde{t}_{xxi}^- e^{-kz\alpha}\right) e^{kt\eta} d\eta \quad (i = 1, 2).$$

Функции $\tilde{u}_{x1}^+, \tilde{u}_{x2}^+, \tilde{u}_z^+, \tilde{t}_{xx1}^+$ и $\tilde{t}_{xx2}^+$, входящие в соотношения (3.1), удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered}
[(1-\varepsilon)b_1^2\tilde{\lambda} + a_1]\tilde{u}_{x1}^+ + b_1\varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{u}_{x2}^+ + b_1\tilde{\lambda}\alpha\tilde{u}_z^+ - \tilde{t}_{xx1}^+ = 0, \\
(1-\varepsilon)b_1\tilde{\lambda}\tilde{u}_{x1}^+ + \varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{u}_{x2}^+ + \tilde{\lambda}\alpha\tilde{u}_z^+ - \tilde{t}_{xx2}^+ = 0, \\
\bar{\varrho}\eta^2\tilde{u}_z^+ - \alpha\tilde{t}_{xx2}^+ = 0, \\
\left[\varrho_1\eta^2 + \frac{b\eta}{k(1-\varepsilon)}\right]\tilde{u}_{x1}^+ - \frac{b\eta}{k(1-\varepsilon)}\tilde{u}_{x2}^+ + \tilde{t}_{xx1}^+ = 0, \\
-\frac{b\eta}{k\varepsilon}\tilde{u}_{x1}^+ + \left[\varrho_2\eta^2 + \frac{b\eta}{k\varepsilon}\right]\tilde{u}_{x2}^+ + \tilde{t}_{xx2}^+ = 0.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Уравнения (3.2) имеют ненулевое решение при условии равенства нулю определителя

$$\begin{vmatrix}
(1-\varepsilon)b_1^2\tilde{\lambda} + a_1 & b_1\varepsilon\tilde{\lambda} & b_1\tilde{\lambda}\alpha & -1 & 0 \\
(1-\varepsilon)b_1\tilde{\lambda} & \varepsilon\tilde{\lambda} & \tilde{\lambda}\alpha & 0 & -1 \\
0 & 0 & \bar{\varrho}\eta^2 & 0 & -\alpha \\
\varrho_1\eta^2 + \frac{b\eta}{k(1-\varepsilon)} & -\frac{b\eta}{k(1-\varepsilon)} & 0 & 1 & 0 \\
-\frac{b\eta}{k\varepsilon} & \varrho_2\eta^2 + \frac{b\eta}{k\varepsilon} & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix} = 0. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) равносильно уравнению

$$A - B\alpha^2 = 0, \tag{3.4}$$

в котором

$$A = \begin{vmatrix}
(1-\varepsilon)b_1^2\tilde{\lambda} + a_1 & b_1\varepsilon\tilde{\lambda} & -1 & 0 \\
(1-\varepsilon)b_1\tilde{\lambda} & \varepsilon\tilde{\lambda} & 0 & -1 \\
\varrho_1\eta^2 + \frac{b\eta}{k(1-\varepsilon)} & -\frac{b\eta}{k(1-\varepsilon)} & 1 & 0 \\
-\frac{b\eta}{k\varepsilon} & \varrho_2\eta^2 + \frac{b\eta}{k\varepsilon} & 0 & 1
\end{vmatrix} =$$

$$= \bar{\varrho}\eta^2(\varrho_1\varrho_2\eta^4 + [(1-\varepsilon)b_1^2\tilde{\lambda}\varrho_2 + a_1\varrho_2 + \varepsilon\tilde{\lambda}\varrho_1]\eta^2 + a_1\varepsilon\tilde{\lambda} + \tag{3.5}$$

$$+\frac{b\eta}{k\varepsilon}[\varrho_1\eta^2 + a_1 + b_1\varepsilon\tilde{\lambda} + (1-\varepsilon)b_1^2\tilde{\lambda}] + \frac{b\eta}{k(1-\varepsilon)}[\varrho_2\eta^2 + \varepsilon\tilde{\lambda} + (1-\varepsilon)b_1\tilde{\lambda}]),$$

$$B = \begin{vmatrix} (1-\varepsilon)b_1^2\tilde{\lambda} + a_1 & b_1\varepsilon\tilde{\lambda} & b_1\tilde{\lambda} & -1 \\ (1-\varepsilon)b_1\tilde{\lambda} & \varepsilon\tilde{\lambda} & \tilde{\lambda} & 0 \\ \varrho_1\eta^2 + \frac{b\eta}{k(1-\varepsilon)} & -\frac{b\eta}{k(1-\varepsilon)} & 0 & 1 \\ -\frac{b\eta}{k\varepsilon} & \varrho_2\eta^2 + \frac{b\eta}{k\varepsilon} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \tag{3.6}$$

$$= \tilde{\lambda}\left[\varrho_2\eta^2(\varrho_1\eta^2 + a_1) + \frac{b\eta}{k\varepsilon}(\varrho_1\eta^2 + a_1) + \frac{b\varrho_2\eta^3}{k(1-\varepsilon)}\right].$$

Входящая в выражения (2.1) функция $\alpha(\eta)$ определяется равенством

$$\alpha = \sqrt{A/B}. \tag{3.7}$$

Таким образом, решения уравнений (1.1) и (1.8) представляются соотношениями (3.1) и (3.7), при этом величины $\tilde{u}_{xi}^+, \tilde{u}_{xi}^-, \tilde{u}_z^+, \tilde{u}_z^-$, $\tilde{t}_{xxi}^+$, $\tilde{t}_{xxi}^-(i=1,2)$ являются произвольными функциями. Их выражения определяются источником, возбуждающим среду.

§4. О затухании объемных волн

Как показано в §2, в рассматриваемой эффективной модели имеет место диссипация энергии. Выясним теперь, как затухает каждая из объемных волн, распространяющихся в этой эффективной модели вдоль слоев. Для разделения волнового поля на отдельные объемные волны полезно рассмотреть случай, когда не учитывается трение между жидкими и упругими слоями ($b=0$) и характеристическая функция $\alpha(\eta)$ выражается соотношением

$$\alpha = \sqrt{\bar{\varrho}\frac{\varrho_1\varrho_2\eta^4 + [(1-\varepsilon)b_1^2\tilde{\lambda}\varrho_2 + a_1\varrho_2 + \varepsilon\tilde{\lambda}\varrho_1]\eta^2 + a_1\varepsilon\tilde{\lambda}}{\varrho_2\tilde{\lambda}(\varrho_1\eta^2 + a_1)}}. \tag{4.1}$$

С использованием функции $\alpha(\eta)$ были построены в работах [2–4] волновые фронты от точечного источника в рассматриваемой эффективной модели без диссипации (рис. 2). При переходе к модели, учитывающей трение между жидкими и упругими слоями, эти фронты сохраняются, так как они определяются старшими производными в уравнениях (1.1) и (1.8), а члены, описывающие

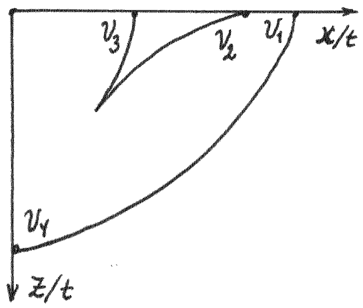

Рис. 2.

затухание, оказываются младшими по сравнению с остальными членами.

Правая часть уравнения (4.1) имеет три пары точек ветвления

$$\eta_1 = \pm i v_1, \quad \eta_2 = \pm i v_2, \quad \eta_3 = \pm i v_3, \tag{4.2}$$

при этом v_1, v_2 и v_3 – скорости волн вдоль оси x. Эти скорости выражаются равенствами

$$\begin{gathered} v_{1,3}^2 = [\pm\sqrt{[\varepsilon\varrho_1\tilde\lambda + (1-\varepsilon)b_1^2\varrho_2\tilde\lambda + a_1\varrho_2]^2 - 4\varepsilon\varrho_1\varrho_2\tilde\lambda a_1} + \\ +\varepsilon\varrho_1\tilde\lambda + (1-\varepsilon)b_1^2\varrho_2\tilde\lambda + a_1\varrho_2]/(2\varrho_1\varrho_2), \\ v_2^2 = a_1/\varrho_1. \end{gathered} \tag{4.3}$$

и удовлетворяют неравенствам

$$v_1 > v_2 \geq v_3. \tag{4.4}$$

Все три пары точек ветвления расположены на мнимой оси. Если в эффективную модель ввести затухание, то точки ветвления (4.2) сместятся, а координаты смещенных точек ветвления будут определять не только скорости, но и коэффициенты затухания. Остановимся на выводе выражений η_1, η_2 и η_3 после указанных смещений в линейном приближении.

Для величины η_2 на основании равенств (3.6) и (3.7) получим уравнение

$$\varrho_1\eta^2 + a_1 = -\frac{b\eta(\varrho_1\eta^2 + a_1)}{k\varepsilon\varrho_2\eta^2} - \frac{b\eta^3}{k(1-\varepsilon)\eta^2}, \tag{4.5}$$

из которого следует соотношение

$$\eta_2 = \pm i\sqrt{\frac{a_1}{\varrho_1}} - \frac{b}{2k(1-\varepsilon)\varrho_1}, \tag{4.6}$$

определяющее комплексные точки η_2. Формула (4.6) показывает, что обе точки η_2 смещаются в левую плоскость, что соответствует затуханию "пластинчатой волны".

Для определения расположения точек ветвления η_1 и η_3 используем уравнение

$$\varrho_1\varrho_2\eta^4 + [(1-\varepsilon)b_1^2\tilde{\lambda}\varrho_2 + a_1\varrho_2 + \varepsilon\tilde{\lambda}\varrho_1]\eta^2 + a_1\varepsilon\tilde{\lambda} =$$

$$= -\frac{b\eta}{k\varepsilon(1-\varepsilon)}[\bar{\varrho}\eta_2 + a_1(1-\varepsilon) + \tilde{\lambda}(b_1+\varepsilon-b_1\varepsilon)^2], \tag{4.7}$$

которое следует из условия $\alpha = 0$ и из соотношений (3.4) и (3.5). Разлагая левую часть на множители и вводя обозначение

$$v_0^2 = [a_1(1-\varepsilon) + \tilde{\lambda}(b_1+\varepsilon-b_1\varepsilon)^2]/\bar{\varrho}, \tag{4.8}$$

получим вместо (4.7) соотношение

$$\varrho_1\varrho_2(\eta^2+v_1^2)(\eta^2+v_3^2) = -\frac{b\bar{\varrho}\eta}{k\varepsilon(1-\varepsilon)}(\eta^2+v_0^2), \tag{4.9}$$

из которого следуют равенства

$$\eta^2 = -v_1^2 - \frac{b\bar{\varrho}\eta}{k\varepsilon(1-\varepsilon)\varrho_1\varrho_2}\frac{\eta^2+v_0^2}{\eta^2+v_3^2},$$

$$\eta^2 = -v_3^2 - \frac{b\bar{\varrho}\eta}{k\varepsilon(1-\varepsilon)\varrho_1\varrho_2}\frac{\eta^2+v_0^2}{\eta^2+v_1^2}. \tag{4.10}$$

Так как вторые члены в правых частях формул (4.10) могут рассматриваться как линейные поправки, то подставим в них соответственные нулевые приближения $\eta = \pm iv_1$ и $\eta = \pm iv_3$. В результате получим формулы

$$\eta_1^2 = -v_1^2 \pm \frac{ib\bar{\varrho}v_1}{k\varepsilon(1-\varepsilon)\varrho_1\varrho_2}\frac{v_0^2-v_1^2}{v_1^2-v_3^2},$$

$$\eta_3^2 = -v_3^2 \mp \frac{ib\bar{\varrho}v_3}{k\varepsilon(1-\varepsilon)\varrho_1\varrho_2}\frac{v_0^2-v_3^2}{v_1^2-v_3^2}, \tag{4.11}$$

из которых следуют соотношения

$$\eta_1 = \pm i v_1 - \frac{b\bar{\varrho}}{2k\varepsilon(1-\varepsilon)\varrho_1\varrho_2}\frac{v_1^2 - v_0^2}{v_1^2 - v_3^2},$$

$$\eta_3 = \pm i v_3 - \frac{b\bar{\varrho}}{2k\varepsilon(1-\varepsilon)\varrho_1\varrho_2}\frac{v_0^2 - v_3^2}{v_1^2 - v_3^2}. \qquad (4.12)$$

Чтобы волны со скоростями v_1 и v_3 были затухающими, необходимо доказать неравенства

$$v_3 < v_0 < v_1. \qquad (4.13)$$

С этой целью рассмотрим функцию

$$F(\tau) = \varrho_1\varrho_2\tau^4 - [(1-\varepsilon)b_1^2\tilde{\lambda}\varrho_2 + a_1\varrho_2 + \varepsilon\tilde{\lambda}\varrho_1]\tau^2 + a_1\varepsilon\tilde{\lambda}, \qquad (4.14)$$

которая в области $\tau > 0$ имеет корни $\tau = v_1$ и $\tau = v_3$ и является отрицательной в интервале $v_3 < \tau < v_1$ и положительной вне этого промежутка (рис. 3).

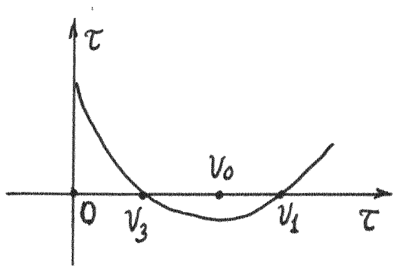

Рис. 3.

Доказательство неравенства (4.13) сводится к проверке неравенства

$$F(v_0) < 0. \qquad (4.15)$$

Оно очевидно, так как

$$F(v_0) = -\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)[a_1\varrho_2 - \tilde{\lambda}(b_1 + \varepsilon - b_1\varepsilon)(\varrho_1 - b_1\varrho_2)]^2}{(\bar{\varrho})^2}. \qquad (4.16)$$

Таким образом, обе продольные волны, распространяющиеся со скоростями v_1 и v_3, испытывают затухание.

В заключение остановимся на рассмотрении двух предельных случаев, когда $\varepsilon = 0$ и когда $\varepsilon = 1$. Случай $\varepsilon = 0$ соответствует упругой среде, пересеченной системой параллельных плоскостей, на которых имеет место контакт с проскальзыванием. При условии $\varepsilon = 0$ уравнения (1.1) и (1.8) переходят в уравнения

$$
\begin{gathered}
t_{xx1} = (\lambda_1 + 2\mu_1)\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial u_{z1}}{\partial z}, \\
t_{zz1} = \lambda_1 \frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + (\lambda_1 + 2\mu_1)\frac{\partial u_{z1}}{\partial z}, \qquad (4.17) \\
\frac{\partial t_{xx1}}{\partial x} = \varrho_1 \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial t_{zz1}}{\partial z} = \varrho_1 \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial t^2}, \quad t_{xz1} = 0
\end{gathered}
$$

эффективной модели для упругой среды. При этом же условии характеристическая функция, согласно формулам (3.4)–(3.7), представляется соотношением

$$
\alpha = \sqrt{\frac{\varrho_1 \eta^2 (\varrho_1 \eta^2 + \lambda_1 + 2\mu_1)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\varrho_1 \eta^2 + a_1)}}. \qquad (4.18)
$$

Эффективная модель, описываемая уравнениями (4.17) и характеристической функцией (4.18), не обладает затуханием. Эта модель была исследована в работе [2] и в §42 [8]. Фронты от точечного источника в этой модели представляются на рис. 4, при этом скорости волн вдоль оси x даются равенствами

$$
v_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\varrho_1}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{4\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}{\varrho_1(\lambda_1 + 2\mu_1)}}. \qquad (4.19)
$$

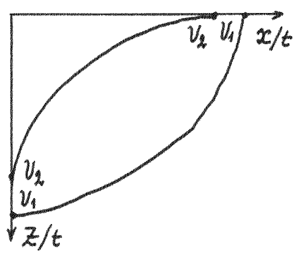

Рис. 4.

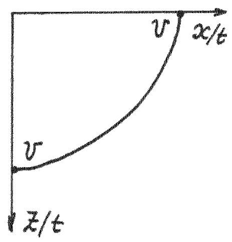

Рис. 5.

Случай, когда $\varepsilon = 1$, соответствует однородной жидкости, описываемой уравнениями

$$p = \lambda_2 \left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z2}}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varrho_2 \frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \varrho_2 \frac{\partial^2 u_{z2}}{\partial t^2}, \tag{4.20}$$

в которых p – давление. Характеристическая функция, согласно (3.4)–(3.7), представляется равенством

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{\varrho_2 \eta^2}{\lambda_2}}. \tag{4.21}$$

Жидкая среда, описываемая уравнениями (4.20), также не обладает затуханием. Круглый фронт от точечного источника в этой жидкости представляется на рис. 5, при этом скорость волны выражается формулой

$$v = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\varrho_2}}. \tag{4.22}$$

Во всех остальных случаях рассматриваемая упруго-жидкая среда обладает диссипацией, при этом коэффициенты затухания κ_1, κ_2 и κ_3, согласно соотношениям (4.12), представляются равенствами

$$\kappa_1 = \frac{b\bar{\varrho}}{2k\varepsilon(1-\varepsilon)\varrho_1\varrho_2} \frac{v_1^2 - v_0^2}{v_1^2 - v_3^2},$$

$$\kappa_2 = \frac{b}{2k\varepsilon(1-\varepsilon)\varrho_1}, \tag{4.23}$$

$$\kappa_3 = \frac{b\bar{\varrho}}{2k\varepsilon(1-\varepsilon)\varrho_1\varrho_2} \frac{v_0^2 - v_3^2}{v_1^2 - v_3^2}.$$

Формулы (4.23), выведенные в линейном приближении, справедливы в интервале $0 < \varepsilon < 1$, за исключением областей вблизи концов этого интервала, где линейные приближения оказываются неточными. В этих областях для учета затухания следует использовать выражения для характеристических функций (3.4)–(3.7). Как показывают дополнительные исследования, волна, распространяющаяся вдоль оси z со скоростью v_4, не испытывает затухания.

Литература

1. Л. А. Молотков, *Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **89** (1979), 219-233.
2. Л. А. Молотков, А. Е. Хило, *Исследование однофазных и многофазных эффективных моделей, описывающих периодические среды.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **140** (1984), 105-122.
3. Л. А. Молотков, *Об особенностях распространения волн в слоистых моделях трещиноватых сред.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **173** (1988), 123-133.
4. M. Schoenberg, *Wave propagating in alternating fluid and solid layers.* — Wave motion **6** (1984), 303-320.
5. T. J. Plona, K. W. Winkler, M. Schoenberg, *Acoustic waves in alternating fluid/solid layers.* — J. Acoust. Soc. Am. **81** no. 5 (1987), 1227-1234.
6. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Эффективная модель слоистой упруго-жидкой среды как частный случай модели Био.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **230** (1995), 172-195.
7. T. Bourbie, O. Coussy, B. Zinzner, *Acoustic of porous media.* — Paris (1987), 326.
8. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред.* — С-Петербург (2001), 348.
9. M. A. Biot, D. G. Willis, *The elastic coefficients of theory consolidation.* — J. Appl. mechan. **24** (1957), 594-601.

Molotkov L. A. On the wave attenuation in the effective model describing porous and fractured media saturated by fluid.

The wave attenuation is introduced into the effective model of media consisting of alternating elastic and fluid layers. This attenuation is connected with friction on boundaries between elastic and fluid layers and is described by additional terms in the equations of the effective model. Investigation of these equations allows to derive expressions of attenuation coefficients for every body wave propagating along the layers.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 января 2003 г.