Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 297, 2003 г.

М. А. Лялинов

О ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ИМПЕДАНСНОМ КОНУСЕ

Введение

Исследование задачи дифракции волн на выпуклом конусе с идеальными граничными условиями проводилось в последнее десятилетие достаточно интенсивно. Благодаря работам В. А. Боровикова [1], В. П. Смышляева, В. М. Бабича, D. S. Jones'а и других авторов, соответствующая теория приобрела в настоящее время, в определенном смысле, завершенную форму. Достаточно полный обзор результатов в этой области представлен в работах [2, 3].

Ситуация с граничными условиями третьего рода (импедансными) пока не достигла уровня развития в задаче с идеальными условиями. Однако, в последнее время появился ряд работ, содержащих существенное продвижение в этой более сложной задаче. В 1997 году J.- M. L. Bernard [4] опубликовал работу, в которой получено фредгольмово интегральное уравнение, и изложил содержательные результаты по его исследованию в случае кругового импедансного конуса. В этой же работе предложены подходы и для электромагнитной векторной задачи для кругового конуса с импедансными условиями (условиями Леонтовича).

В работах [5, 6] вычислена асимптотика диаграммы рассеяния плоской волны на узком импедансном конусе, тем самым, получены результаты аналогичные изложенным в [7, 8] для случая идеальных граничных условий. В статье [9] предложен подход для изучения дифракции волн на произвольном выпуклом импедансном конусе в скалярной задаче. Электромагнитная векторная задача изучается в работе [10]. Первые численные результаты в скалярной задаче в осесимметричном случае изложены в работе [11]. Статья [12] содержит, в частности, исследование волн отраженных от границы выпуклого импедансного конуса, а также

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 02-02-16560 и РФФИ 01-01-00218.

асимптотику дальнего поля вблизи границы свет–тень для отраженных лучей, выражающуюся через функции параболического цилиндра.

В настоящей работе изучаются некоторые вопросы оправдания решения задачи дифракции плоской скалярной волны на импедансном выпуклом конусе. Основная трудность в строгой постановке задачи состоит в формулировке условий излучения для рассеянного поля. Совсем недавно аналогичный вопрос в задаче дифракции на упругом угле был разрешен в работе В. В. Камоцкого и G. Lebeau [13] и доказана соответствующая теорема единственности. В нашей работе фактически предъявлено классическое решение задачи, удовлетворяющее "физическим" условиям излучения. Это означает, что построенное решение ведет себя как сферическая расходящаяся волна вне области, засвеченной отраженными лучами. В области, засвеченной отраженными от конуса лучами, существует также сферическая волна от вершины конуса и, вообще говоря, поверхностные волны рэлеевского типа. Заметим, что рассматривается случай, когда падающая плоская волна полностью освещает поверхность кругового конуса. В действительности, продемонстрировано существование решения, единственность которого, хотя и не вызывает сомнения при разумной постановке, не доказана. В случае освещения конуса точечным источником постановка задачи и единственность решения демонстрируются сравнительно просто.

Во второй части работы обсуждаются условия возникновения поверхностных волн и соответствующий коэффициент возбуждения. При определенных условиях на импеданс, вблизи поверхности конуса возникает пограничный слой, в котором нельзя различить сферическую волну и поверхностные волны. Соответствующую ситуацию мы называем явлением Вейля-ван-дер-Поля по аналогии с задачей о точечном источнике над импедансной плоскостью [14].

2. Классическое решение задачи

Пусть коническая поверхность C вырезает область Σ на единичной сфере S^2 с центром O в вершине конуса [9]. Точки ω_0 и ω на единичной сфере соответствуют направлению падения плоской волны $U^i(kr,\omega,\omega_0)$ и точке наблюдения $\vec{r}$, $\vec{\omega} = \vec{r}/r$. Пусть $\hat{\theta}(\omega,\omega_0)$ геодезическое расстояние между ω и ω_0 на сфере, k —

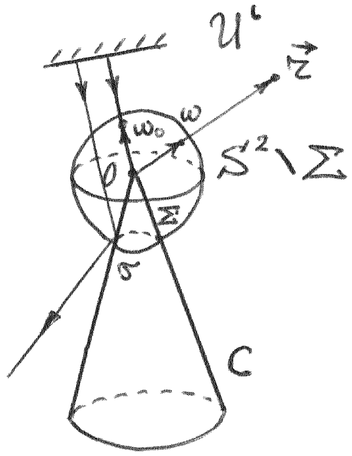

Рис.1. Дифракция плоской волны на импедансном конусе.

волновое число, тогда

$$U^i = e^{ikr\cos\hat{\theta}(\omega,\omega_0)}, \quad k = \Omega/c. \tag{1}$$

Гармоническая зависимость от времени $e^{-i\Omega t}$ здесь и в дальнейшем опускается. Рассеянное поле $U(kr,\omega,\omega_0)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)U = 0, \tag{2}$$

в сумме с падающим полем граничному условию

$$\frac{\partial(U+U^i)}{\partial n}\Big|_c - ik\eta(U+U^i)\Big|_c = 0, \tag{3}$$

где n – внутренняя нормаль к C, η – импеданс. Мы считаем, что $\mathrm{Re}\,\eta > 0$, т.е. коническая поверхность является поглощающей, если не оговорено противное. В вершине конуса решение U удовлетворяет условию Мейкснера

$$U = O(r^h), \quad r|\nabla U| = O(r^h), \quad h > -1/2, \tag{4}$$

что обеспечивает локальную интегрируемость плотности энергии [9], а также "физическим" условиям излучения, которые достаточно подробно обсуждаются в работе [9]. Считаем, что конус острый, т.е. Σ принадлежит полусфере в S^2, и выпуклый.

Плоская падающая волна допускает интегральное представление [9]

$$U^i(kr,\omega,\omega_0)=\frac{4}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\nu\sin\pi\nu U^i_\nu(\omega,\omega_0)\frac{K_\nu(-ikr)}{\sqrt{-ikr}}d\nu, \tag{5}$$

где

$$U^i_\nu(\omega,\omega_0)=-\frac{P_{\nu-1/2}(-\cos\hat\theta(\omega,\omega_0))}{4\cos(\pi\nu)}, \tag{6}$$

$P_{\nu-1/2}(x)$ – функция Лежандра, $K_\nu(z)$ – модифицированная функция Бесселя (функция Макдональда),

$$K_\nu(z)=-i\frac{\pi}{2}e^{-i\nu\pi/2}H^{(2)}_\nu(-iz),$$

причем интеграл в (5) экспоненциально сходится, если

$$\hat\theta(\omega,\omega_0)>\frac{\pi}{2}+|\arg(-ik)|,\quad |\arg(-ik)|\leqslant\pi/2. \tag{7}$$

Последнее легко проверяется с использованием ассимптотик

$$K_\nu(z)\sim\mathrm{Const}\,\frac{\nu^a\cos[\nu(\pi/2+|\arg(z)|)]}{\sin\pi\nu},$$
$$|\mathrm{Im}\,\nu|\to\infty,\quad |\arg(\nu)|\to\pi/2,\quad a=|\mathrm{Re}\,\nu|-1/2,$$
$$P^{-|n|}_{\nu-1/2}(\cos\theta)=\frac{\sqrt{2}\Gamma(\nu-|n|+1/2)}{\sqrt{\pi\sin\theta}\Gamma(\nu+1)}\cos\big(\nu\theta-|n|\pi/2+\frac{\pi}{4}\big)\big(1+O(\frac{1}{\nu})\big),$$

$|n|$ ограничено, $\delta<\theta<\pi-\delta$, $\delta>0$ малое, $|\nu|\gg 1$, $|\arg(\nu)|<\pi$. Оценки для $K_\nu(z)$ и $P^{-|n|}_{\nu-1/2}(\cos\theta)$ могут быть легко найдены в стандартном справочнике, например, в [15]. Вследствие представления (5), естественно искать рассеянное поле $U(kr,\omega,\omega_0)$ в виде аналогичного интеграла [9]

$$U(kr,\omega,\omega_0)=\frac{4}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\nu\sin\pi\nu\quad U_\nu(\omega,\omega_0)\frac{K_\nu(-ikr)}{\sqrt{-ikr}}d\nu. \tag{8}$$

Прежде, чем сформулировать и доказать точное утверждение о представлении (8) и классическом решении задачи дифракции, опишем свойства спектральной функции $U_\nu(\omega,\omega_0)$. Заметим [9], что представление для рассеянного поля (8) тесно связано с преобразованием Конторовича–Лебедева.

Предположим, что $U_\nu(\omega, \omega_0)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция $\omega = (\theta, \varphi)$, где (θ, φ) – сферические координаты в $S^2 \setminus \overline{\Sigma}$, и имеет непрерывную производную на границе σ для любых ν, принадлежащих полосе $\Pi_\delta = \{\nu : |\mathrm{Re}\,\nu| < 1+\delta\}$, $\delta > 0$ малое. Кроме того, U_ν регулярна в Π_δ вместе с производной $\frac{\partial U_\nu}{\partial N_\omega}\Big|_\sigma$, где N_ω – внутренняя нормаль к σ, лежащая в касательной плоскости к S^2. Будем считать, что U_ν решает задачу для уравнения

$$(\Delta_\omega + \nu^2 - 1/4)U_\nu(\omega, \omega_0) = 0 \tag{9}$$

с граничным условием

$$\frac{\partial \widehat{U}_{\nu+1}}{\partial N_\omega}\Big|_\sigma - \frac{\partial \widehat{U}_{\nu-1}}{\partial N_\omega}\Big|_\sigma = (-2\nu)\eta \widehat{U}\Big|_\sigma, \tag{10}$$

$\widehat{U}_\nu = U_\nu + U_\nu^i$, Δ_ω – оператор Лапласа–Бельтрами на сфере S^2, $\Delta_\omega = \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2$.

Для сходимости интеграла (8) $U_\nu(\omega, \omega_0)$ должна экспоненциально убывать для всех $\omega \in S^2 \setminus \Sigma$, точнее, мы потребуем, чтобы выполнялись оценки в Π_δ

$$|U_\nu(\omega, \omega_0)| \leqslant \mathrm{Const}\, \frac{|\nu|^\varkappa}{|\cos[(\pi+\varepsilon)\nu]|}, \quad \text{при} \quad \hat{\theta}'(\omega, \omega_0) > \pi, \quad \varkappa \geqslant 0, \tag{11}$$

$\varepsilon > 0$ некоторое малое положительное число, $\widehat{\theta}'(\omega, \omega_0) = \min\limits_{s\in\sigma}(\widehat{\theta}(\omega, s) + \widehat{\theta}'(s, \omega_0))$ длина “ломаной” геодезической [2, 9]. Величина $\widehat{\theta}'(\omega, \omega_0)$ имеет простой геометрический смысл. Если из точки ω_0 на $S^2 \setminus \Sigma$ выпустить луч (геодезическую), который отразится от σ по законам оптики и придет в точку ω, то $\widehat{\theta}'(\omega, \omega_0)$ совпадает с наименьшей длиной такой ломаной на $S^2 \setminus \Sigma$, соединяющей ω и ω_0. При $\theta'(\omega, \omega_0) \leqslant \pi$ считаем, что

$$|U_\nu(\omega, \omega_0)| \leqslant \mathrm{Const}\, \frac{|\nu|^{\varkappa_1}}{|\cos[\nu\widehat{\theta}'(\omega, \omega_0)]|}, \quad \varkappa_1 \geqslant -1/2. \tag{12}$$

Область $\widehat{\theta}'(\omega, \omega_0) > \pi$, следуя [2], назовем “оазисом”. Как оказывается, в этой области дальнее поле U (при $kr \to \infty$) описывается сферической волной, расходящейся от вершины конуса. Отраженные от конуса лучи засвечивают область $\widehat{\theta}' \leqslant \pi$.

Достаточно подробная мотивация того, почему естественно рассматривать задачу (9), (10) в описанном классе функций, изложена в [9]. Граничная задача (9), (10) нестандартна, так как является нелокальной по спектральной переменной ν, благодаря граничному условию, связывающему $U_\nu|_\sigma$ и нормальные производные со сдвигом по ν.

Справедливо следующее

Предложение 1. *Пусть спектральная функция $U_\nu(\omega,\omega_0)$ является решением задачи (9), (10) в классе функций, описанном выше. Тогда, если*

$$\widehat{\theta}'(\omega,\omega_0) > \pi/2 + |\arg(-ik)|, \quad |\arg(-ik)| \leqslant \pi/2, \tag{13}$$

интегральное представление (8) является классическим решением уравнения Гельмгольца (2), удовлетворяет граничному условию (3) и условию Мейкснера (4) и при $|kr|\to\infty$ в "оазисе" ($\widehat{\theta}'(\omega,\omega_0)>\pi$) имеет асимптотику

$$U(kr,\omega,\omega_0) = D(\omega,\omega_0)\frac{e^{ikr}}{(-ikr)}\Big(1+O\Big(\frac{1}{kr}\Big)\Big), \tag{14}$$

где

$$D(\omega,\omega_0) = \frac{2}{i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \nu\sin\pi\nu \quad U_\nu(\omega,\omega_0)d\nu \tag{15}$$

диаграмма рассеяния.

Заметим, что, благодаря условию (13), интеграл (8) экспоненциально сходится, тогда прямой подстановкой (8) в (2), с учетом уравнения Бесселя для $K_\nu(z)$

$$\Big[\frac{d^2}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{d}{dz}+\Big(1+\frac{\nu^2}{z^2}\Big)\Big]K_\nu(z)=0$$

и уравнения (9), проверяем (см., например, [16], стр. 613), что $U(kr,\omega,\omega_0)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца.

Проверим граничное условие (3), подставив в него представление (8) и учитывая соотношения

$$\frac{K_\nu(z)}{z} = \frac{K_{\nu+1}(z)-K_{\nu-1}(z)}{2\nu}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial N_\omega},$$

имеем

$$\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\nu\sin\pi\nu}{\sqrt{-ikr}}\Big[\frac{\partial\widehat{U}_\nu}{\partial N_\omega}\Big|_\sigma(-ik)\cdot\frac{K_{\nu+1}(-ikr)-K_{\nu-1}(-ikr)}{2\nu}$$

$$-ik\eta\widehat{U}_\nu|_\sigma K_\nu(-ikr)\Big]d\nu$$

$$=\frac{(-ik)}{\sqrt{-ikr}}\Big\{\int\limits_{-i\infty+1}^{i\infty+1}\frac{\sin\pi\nu}{2}\frac{\partial\widehat{U}_{\nu+1}}{\partial N_\omega}\Big|_\sigma K_\nu(-ikr)d\nu$$

$$-\int\limits_{-i\infty-1}^{i\infty-1}\frac{\sin\pi\nu}{2}\frac{\partial\widehat{U}_{\nu-1}}{\partial N_\omega}\Big|_\sigma K_\nu(-ikr)d\nu$$

$$+\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\sin\pi\nu}{2}\cdot 2\eta\nu\widehat{U}_\nu|_\sigma K_\nu(-ikr)d\nu\Big\}$$

$$=\frac{(-ik)}{\sqrt{-ikr}}\Big(\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\sin\pi\nu}{2}\Big[\frac{\partial\widehat{U}_{\nu+1}}{\partial N_\omega}\Big|_\sigma-\frac{\partial\widehat{U}_{\nu-1}}{\partial N_\omega}\Big|_\sigma$$

$$+2\nu\eta\widehat{U}_\nu|_\sigma\Big]K_\nu(-ikr)d\nu\Big)=0.$$

При деформации контуров в мнимую ось мы использовали регулярность $\frac{\partial\widehat{U}}{\partial N_\omega}\Big|_\sigma$ в полосе Π_δ, а затем условие (10).

Для проверки условия Мейкснера воспользуемся в интеграле (8) формулами

$$K_\nu(z)=\frac{\pi(I_{-\nu}(z)-I_\nu(z))}{2\sin\pi\nu},$$
$$I_\nu(z)=e^{-i(\pi/2)\nu}J_\nu(iz),\quad -\pi<\arg(z)\leqslant\pi/2,$$

а также регулярностью $U_\nu(\omega,\omega_0)$ в окрестности мнимой оси, имеем

$$U(kr,\omega,\omega_0)=\frac{(-\sqrt{2\pi})}{i\sqrt{-ikr}}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\nu(I_\nu(-ikr)-I_{-\nu}(-ikr))U_\nu(\omega,\omega_0)d\nu$$

$$=\frac{2i\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-ikr}}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\nu I_\nu(-ikr)\cdot U_\nu(\omega,\omega_0)d\nu$$

$$=\frac{2i\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-ikr}}\int\limits_{-i\infty+a}^{i\infty+a}\nu e^{-i\nu\pi/2}J_\nu(kr)U_\nu(\omega,\omega_0)_d\nu=O((kr)^{-1/2+a}),$$

где $a>0$ малое, $|kr|\to 0$. Аналогично проверяется оценка для производных.

Наконец, асимптотическое поведение дальнего поля в "оазисе", $\widehat{\theta}'(\omega,\omega_0)>\pi$ (см. (14), (15)) следует из представления (8) с использованием асимптотики

$$K_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}\big(1+O_\alpha\big(\frac{1}{z}\big)\big),\quad \alpha=\nu/z.$$

Предложение 1 не описывает поведение дальнего поля вне оазиса, т.е. в области, засвеченной отраженными лучами. Описанию дальнего поля в этой области посвящена, отчасти, вторая часть данной работы, а также статья [12].

Как видно из доказательства Предложения 1, ключевое значение для исследования решения U задачи дифракции играет краевая задача (9), (10) для спектральной функции, к изучению которой мы и переходим.

3. Краевая задача для спектральной функции $U_\nu(\omega,\omega_0)$

Вместо краевой задачи (9), (10) для функции U_ν удобно исследовать эквивалентную задачу.

Предложение 2. *Для того, чтобы функция $U_\nu(\omega,\omega_0)$ решала задачу (9), (10) в описанном выше классе функций, необходимо и достаточно, чтобы она была решением уравнения (9) и удовлетворяла условию*

$$\frac{\partial\widehat{U}_\nu}{\partial N_\omega}\Big|_\sigma=\eta A\widehat{U}_\nu|_\sigma,\quad \widehat{U}_\nu=U_\nu+U_\nu^{-i}, \tag{16}$$

где

$$A\widehat{U}_\nu|_\sigma := \frac{1}{2i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{t\sin(\pi t)\widehat{U}_t|_\sigma dt}{\cos(\pi\nu)+\cos(\pi t)}.$$

Эквивалентность нелокальных граничных условий (10) и (16) легко проверяется с помощью хорошо разработанной теории функциональных уравнений Малюжинца [17, 18]. Именно, $s(\nu)$ есть регулярное в Π_δ четное решение уравнений

$$s(\nu \pm 1) - s(-\nu \pm 1) = (\mp 2i)H(\nu),$$

причем $s(\nu)$ и $H(\nu)$ экспоненциально убывают при $\nu \to i\infty$, $s(\nu) = s(-\nu)$, тогда и только тогда, когда

$$s(\nu) = \frac{1}{4}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} H(\tau)\Big(\frac{\sin(\pi\tau/2)}{\cos(\pi\tau/2)-\sin(\pi\nu/2)} + \frac{\sin(\pi\tau/2)}{\cos(\pi\tau/2)+\sin(\pi\nu/2)}\Big)d\tau.$$

Использование этого утверждения и доказывает эквивалентность задач (9), (10) и (9), (16).

Оказывается, что, если задача (9), (16) разрешима в соответствующем классе функций, то такое решение единственно.

Предложение 3. *Пусть* $\operatorname{Re}\eta \geqslant 0$ *и* $\nu \in (-i\infty, i\infty)$*, тогда решение однородной задачи* (9), (16) *(с* $U_\nu^i \equiv 0$*) тождественно равно 0.*

Доказательство этого утверждения содержится в приложении C работы [9].

Краевая задача (9), (16) нетрадиционна, так как включает нелокальное по спектральной переменной краевое условие. Поэтому доказательство существования решения является содержательной задачей. Для простоты мы рассмотрим круговой конус. Заметим, что впервые интегральное уравнение, которое является основой нашего исследования, появилось в работе [4]. Там же сделаны существенные шаги по его исследованию.

Здесь мы дополняем эти исследования и уточняем некоторые результаты.

Предложение 4 (круговой конус). *Существует решение* $U_\nu(\omega,\omega_0)$ *задачи* (9), (10)*, экспоненциально убывающее в* Π_δ *при* $\nu \to i\infty$*,* $\operatorname{Re}\eta > 0$*.*

Заметим, что проверка точных оценок (11), (12) требует отдельного обсуждения и затрагивается во второй части этой работы. Класс функций, в котором ищется решение подробно описан во втором параграфе.

Воспользуемся возможностью разделения переменных и будем искать решение задачи (9), (16) в виде[1]

$$U_\nu(\omega,\omega_0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{-in\varphi} R(\nu,n)\frac{P_{\nu-1/2}^{-|n|}(\cos\theta)}{d_{\theta_1}P_{\nu-1/2}^{-|n|}(\cos\theta_1)}, \tag{17}$$

где $\theta=\theta_1$ уравнение σ на сфере S^2, причем, используя формулу сложения для функций Лежандра, имеем представление для $U_\nu^i(\omega,\omega_0)=-\frac{P_{\nu-1/2}(-\cos\hat\theta(\omega,\omega_0))}{4\cos(\pi\nu)}$

$$U_\nu^i(\omega,\omega_0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{-in\varphi} R_i(\nu,n)\frac{P_{\nu-1/2}^{-|n|}(-\cos\theta)}{d_{\theta_1}P_{\nu-1/2}^{-|n|}(-\cos\theta_1)}, \tag{18}$$

$0<\theta_0<\theta$, $\cos\hat\theta(\omega,\omega_0)=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\,\sin(\varphi-\varphi_0)$, $\varphi_0=0$,

$$R_i(\nu,n)=\frac{i^n}{(-4)\cos\pi\nu}\frac{\Gamma(\nu+|n|+1/2)}{\Gamma(\nu-|n|+1/2)}\times$$
$$d_{\theta_1}P_{\nu-1/2}^{-|n|}(-\cos\theta_1)P_{\nu-1/2}^{-|n|}(\cos\theta_0).$$

Ряд (17) является решением уравнения (9). Подставляя (17) и (18) в граничное условие, получаем уравнение для нахождения $R(\nu,n)$ ($\nu\in i\mathbb{R}$)

$$R(\nu,n)=\frac{1}{2}\eta\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{w(t,n)\sin(\pi t)R(t,n)}{\cos(\pi t)+\cos(\pi\nu)}dt+S_i(\nu,n), \tag{19}$$

$$S_i(\nu,n)=-R_i(\nu,n)+\frac{1}{2}\eta\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{w_i(t,n)\sin(\pi t)R_i(t,n)dt}{\cos(\pi t)+\cos(\pi\nu)},$$

$$w(\nu,n)=-i\nu\frac{P_{\nu-1/2}^{-|n|}(\cos\theta_1)}{d_{\theta_1}P_{\nu-1/2}^{-|n|}(\cos\theta_1)},\quad w_i(\nu,n)=-i\nu\frac{P_{\nu-1/2}^{-|n|}(-\cos\theta_1)}{d_{\theta_1}P_{\nu-1/2}^{-|n|}(-\cos\theta_1)}.$$

[1] Мы пользуемся определением присоединенных функций Лежандра 8.704 из [15].

Для дальнейшего существенно, что, ввиду интегрального представления

$$P_{\nu-1/2}^{-|n|}(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(\sin\theta)^{-|n|}}{\Gamma(|n|+1/2)}\int\limits_0^\theta \frac{\cos(\nu t)dt}{(\cos t-\cos\theta)^{-|n|+1/2}}, \quad n\in\mathbb{Z},$$

функция $w(\nu,n)>0$, если $\nu\in[0,+i\infty)$. Кроме того,

$$w(\nu,n) = 1+O_n\big(\frac{1}{\nu}\big), \quad \nu\to i\infty, \tag{20}$$

$|n|$ ограничено. Заметим, что асимптотика (20) неравномерна по $|n|$. Пользуясь четностью $R(\nu,n)$, из (19) имеем

$$R(\nu,n) = \eta\int\limits_0^{i\infty}\frac{w(t,n)R(t,n)\sin\pi+dt}{\cos\pi t+\cos\pi\nu}+S_i(\nu,n). \tag{21}$$

Лемма 1. *При* $\operatorname{Re}\eta\geqslant 0$ *уравнение* (21) *в классе функций*

$$(-1)\int\limits_0^{i\infty}\sin\pi t|R(t,n)|^2dt<\infty,$$

если имеет, то только одно решение.

Лемма 1 утверждает единственность решения интегрального уравнения (19), (21). Рассмотрим однородное уравнение (21), домножим его на $w(\nu,n)\ \overline{R(\nu,n)}$ и проинтегрируем по $[0,i\infty)$, имеем, вычисляя вещественную часть,

$$\int\limits_0^{i\infty}(-w(\nu,n))\sin\pi\nu|R(\nu,n)|^2d\nu$$

$$+\operatorname{Re}(\eta)\int\limits_0^{i\infty}dt\int\limits_0^{i\infty}d\nu\frac{w(t,n)w(\nu,n)\sin\pi t\sin\pi\nu}{\cos\pi t+\cos\pi\nu}\times$$

$$R(t,n)\cdot\overline{R(\nu,n)} = 0.$$

Теперь для доказательства Леммы достаточно проверить неравенство

$$\int\limits_1^\infty\int\limits_1^\infty\frac{v(\nu)\overline{v(t)}}{\cos(\pi\nu)+\cos\pi t}d(\cos\pi t)d(\cos\pi\nu)\geqslant 0,$$

$v(\nu) = w(\nu, n)\ R(\nu, n)$. Последнее неравенство является следствием равенства $(A > 1, A \to \infty)$

$$\int\limits_1^A \int\limits_1^A \frac{h(p)h(q) + m(p)m(q)}{p+q} dp\, dq = \int\limits_0^\infty \Big[\int\limits_1^A h(p), e^{-sp} dp \Big]$$

$$\times \Big[\int\limits_1^A h(q), e^{-sq} dq \Big] ds + \int\limits_0^\infty \Big[\int\limits_1^A m(p), e^{-sp} dp \Big] \Big[\int\limits_1^A m(q), e^{-sq} dq \Big] ds \geqslant 0,$$

где $m(p) = \operatorname{Re} v,\ h(p) = \operatorname{Im} v$.

Преобразуем уравнение (21), введя новую переменную $x = 1/\cos(\pi\nu)$ и новую неизвестную функцию

$$\mathbf{r}(x, n) = R(\nu, n) \cos \pi\nu|_{x=1/\cos(\pi\nu)}.$$

Имеем

$$\mathbf{r}(x, n) + \frac{\eta}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{W(y, n)\mathbf{r}(y, n)}{x+y} dy = \mathbf{r}_i(x, n), \tag{22}$$

где

$$\mathbf{r}_i(x, n) = S_i(\nu, n) \cos \pi\nu|_{x=1/cos(\pi\nu)},$$
$$W(x, n) = w(\nu, n)|_{x=1/\cos(\pi\nu)}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $|n|$ конечное фиксированное, т.е. не является большим параметром. Воспользуемся явным видом R_i и асимптотикой функций Лежандра при $\nu \to i\infty$, тогда

$$|R_i(\nu, n)| \leqslant \text{Const}\, |e^{i\nu(\theta_1 - \theta_0)}|,$$
$$|\mathbf{r}_i(x, n)| \leqslant \text{Const}\, |\log(1/x)| x^{\frac{\theta_1 - \theta_0}{\pi} - 1}, \quad x \in (0, 1]. \tag{23}$$

Оценки (23) показывают, что уравнение (22) естественно рассматривать в $L_p(0,1)$ при $1 < p < p_* = \frac{\pi}{\pi - (\theta_1 - \theta_0)}$.

Лемма 2. *Пусть* $\operatorname{Re} \eta > 0$ *и* n *фиксировано, тогда оператор в левой части (22) представим в виде* $D+K$, *где* D *ограниченно обратимый оператор Диксона,*

$$(D\mathbf{r})(x) =: \mathbf{r}(x) - \lambda \int\limits_0^1 \frac{\mathbf{r}(y) dy}{x+y}, \quad \lambda = -\eta/\pi, \tag{24}$$

а оператор K,

$$(K\mathbf{r})(x) := \frac{\eta}{\pi}\int_0^1 \frac{W(y,n)-1}{x+y}\mathbf{r}(y,n)dy \tag{25}$$

компактен.

Для проверки Леммы 2 достаточно учесть, что при $\nu \to i\infty$ и n ограниченных мы имеем

$$w(\nu,n) = 1 + O_n\big(\frac{1}{\nu}\big),$$
$$W(x,n) = 1 + O_n(1/\log(1/x)).$$

Оператор Диксона [4] имеет ограниченный обратный в $L_p(0,1)$, причем, что замечательно, он находится явно.

Обратимся к компактности оператора K в (25). Технически несколько удобней рассмотреть оператор K' – "сопряженный" к K

$$(K'\mathbf{r})(x) = \eta\frac{W(x,n)-1}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathbf{r}(y)dy}{x+y},$$

так как K и K' компактны одновременно.

Воспользуемся критерием Рисса компактности множества в $L_p(0,1)$. Напомним, что множество $T \subset L_p(0,1)$ компактно, если оно ограничено и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех $|t| < \delta$

$$\|g(x+t) - g(x); L_p(0,1)\| < \varepsilon$$

при любых $g \in T$. Оператор K' ограничен в $L_p(0,1)$. Имеем

$$\|(K'\mathbf{r})(x+t) - (K'\mathbf{r})(x); L_p(0,1)\|^p$$
$$= \frac{\eta}{\pi}\int_0^1 dx\Big|(W(x,n)-1)\int_0^1 \mathbf{r}(y,n)\Big(\frac{1}{x+y+t} - \frac{1}{x+y}\Big)dy\Big|^p$$
$$\leqslant c\int_0^1 dx\Big|\frac{1}{\log\left(\frac{x+1}{x}\right)}\Big|^p\Big|\int_0^1 dy\Big(\frac{r(y)}{x+y+t} - \frac{r(y)}{x+y}\Big)\Big|^p$$
$$\leqslant c_1\|\mathbf{r}; L_p(0,1)\|^p \cdot \int_0^1 dx\frac{1}{\log^p\left(\frac{x+1}{x}\right)}\Big[\int_0^1 dy\Big|\frac{1}{x+t+y} - \frac{1}{x+y}\Big|^q\Big]^{p/q}, \tag{26}$$

где мы воспользовались неравенством Гёльдера, $1/p + 1/q = 1$. Остается заметить, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать δ так, чтобы при $|t| < \delta$ повторный интеграл в правой части (26) был меньше ε. Это следует из неравенства $\left(q = \frac{p}{p-1}\right)$

$$\int_0^\delta dx \frac{1}{|\log x|^p}\Big[\int_0^\delta \Big|\frac{1}{x+y+t} - \frac{1}{x+y}\Big|^q\Big]^{p/q}$$

$$\leqslant C\int_0^\delta dx \frac{1}{|\log x|^p}\Big[\Big(\frac{1}{x}\Big)^{-1+q}\Big]^{p/q} = C\int_0^\delta \frac{dx}{x|\log x|^p}$$

$$\leqslant C_1 1/|\log\delta|^{p-1}, \quad p > 1.$$

Из леммы 2 следует, что оператор в (22) фредгольмов, а тогда из Леммы 1 получаем, что решение уравнения (22) существует и единственно.

Обратимся теперь к случаю $|n| \gg 1$. Это, в частности, необходимо для обоснования сходимости ряда (17).

Лемма 3. *Пусть $|n|$ достаточно велико ($|n| \gg 1$), тогда уравнение (22) является уравнением второго рода с ограниченно обратимым (равномерно по n) оператором в $L_p(0,1)$, $1 < p < p_*$.*

Для доказательства этой леммы используется асимптотика функций Лежандра, полученная недавно В. М. Бабичем (частное сообщение)

$$P^{-|n|}_{\nu-1/2}(\cos\theta)$$

$$= \frac{(\sin\theta)^{|n|}}{\Gamma(|n|+1)}\Big[\frac{[(\zeta\cos\theta + \sqrt{1-\zeta^2\sin^2\theta})/(1+\zeta)]^\zeta}{\cos\theta + \sqrt{1-\zeta^2\sin^2\theta}}\Big]^{|n|}\big(1 + O_\zeta\big(\frac{1}{|n|}\big)\big),$$

где $|n| \gg 1$, $\zeta = \nu/|n|$, ζ вне окрестности точки $1/\sin\theta$. В действительности, нас интересует случай, когда $|\zeta| \leqslant q_1 < 1$. Воспользовавшись этой асимптотикой для функции $w(\nu, n)$ можно установить оценку

$$|w(\nu,n)| \leqslant \frac{|\nu|}{|n|}|\psi(\zeta)|, \tag{27}$$

где $\psi(\zeta)$ ограничено при $\nu \in [0, |n|/A]$, $|n| \gg 1$, A – некоторое фиксированное число ($A > 1$). Важно отметить, что функция $w(\nu, n)$

остается ограниченной и при $\nu \to i\infty$, $|n| \to \infty$, $|\nu| > |n|$. В частности, это приведет к ограниченности (равномерной по n) нормы оператора обратного к $D + K$. Детали мы опускаем, так как они аналогичны доказательству Леммы 2.

Вследствие Леммы 3 для решения уравнения (22) при $|n| \gg 1$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{r}; L_p(0,1)\| \leqslant C\|\mathbf{r}_i; L_p(0,1)\|, \tag{29}$$

где постоянная C не зависит от $|n|$, θ_1, θ_0. Для обоснования сходимости ряда (17) воспользуемся оценкой (29). Рассмотрим правую часть в (29).

Пусть $|n| \gg 1$ некоторое число, тогда при $\nu \in [0, i|n|]$, используя выражения для $R_i(\nu, n)$, имеем оценку ($\zeta = \nu/|n|$)

$$\begin{aligned}
|R_i(\nu,n)| &\leqslant \frac{\mathrm{Const}}{|\cos\pi\nu|}\Big(\frac{\sin(\pi-\theta_1)}{(1+\zeta)^\zeta}\cdot\frac{\sin\theta_0}{(1+\zeta)^\zeta}\Big)^{|n|} \\
&\times\Big[\frac{(\zeta\cos(\pi-\theta_1)+\sqrt{1-\zeta^2\sin^2(\pi-\theta_1)})^\zeta}{\cos(\pi-\theta_1)+\sqrt{1-\zeta^2\sin^2(\pi-\theta_1)}} \\
&\cdot\frac{(\zeta\cos\theta_0+\sqrt{1-\zeta^2\sin^2\theta_0})^\zeta}{\cos\theta_0+\sqrt{1-\zeta^2\sin^2\theta_0}}\Big]^{|n|} \\
&\leqslant \frac{\mathrm{Const}}{|\cos\pi\nu|}|\psi(\zeta)|^{|n|} \leqslant \frac{C\cdot h^{|n|}}{|\cos\pi\nu|}, \quad h<1.
\end{aligned}$$

Имеем на промежутке $x \in [1/ch(\pi|n|), 1]$ (см. (19))

$$|\mathbf{r}_i(x,n)| \leqslant C|h|^{|n|}. \tag{30}$$

Пусть $\delta > 0$ малое число и $1 < p < p_\delta = \frac{\pi}{\pi-(\theta_1-\theta_0-\delta)}$. Пусть $\nu \to i\infty$, $|n|$ большое фиксированное, $|\nu| > |n|$,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}_i(x,n)| &\leqslant C|\nu|\big|e^{i\nu(\theta_1-\theta_0)}\cos\pi\nu\big||_{x=1/\cos(\pi\nu)} \\
&\leqslant C\log(1/x)e^{-|n|\delta}x^{-1/p_\delta}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Используем оценки (30) и (31) для равномерной по θ_1, θ_0, $|n|$

оценки правой части в (29).

$$\int_0^1 |\mathbf{r}_i(x,n)|^p dx \leqslant \int_0^{1/ch(\pi|n|)} + \int_{1/ch(\pi|n|)}^1 |\mathbf{r}_i(x,n)|^p dx$$
$$\leqslant C_1|h|^{pn} + C_2 e^{-|n|\delta p}\int_0^1 \log(1/x) x^{-1/p_\delta} dx$$
$$\leqslant C(|h|^{p|n|} + e^{-\delta p|n|}), \quad |n| \gg 1.$$

Заметим, что оценка может быть уточнена.

Теперь применим полученную оценку и (29) для доказательства сходимости ряда (17) для $U_\nu(\omega,\omega_0)$. Для этого достаточно в (17) перейти к $x = 1/\cos\pi\nu$, $r(x,n)$ и оценить в $L_p(0,1)$ "хвост" ряда, начиная с $|n| \gg 1$ и до бесконечности. Очевидно, ввиду равномерности оценок по $\theta, \varphi, \theta_0, \theta_1$, ряд сходится в $L_p(0,1)$ равномерно по $\omega = (\theta,\varphi) \in S^2/\Sigma$ и по θ_0, θ_1. То же самое можно сказать и о сходимости классических производных $U_\nu(\omega,\omega_0)$ по θ,φ.

Оценка решения (экспоненциальное убывание) следует из принадлежности решения $\cos\pi\nu U_\nu|_{x=1/\cos\pi\nu}$ пространству $L_p(0,1)$. Для завершения доказательства Предложения 4 остается обсудить регулярность U_ν и $\partial_{N_\omega}U_\nu$ в полосе Π_δ. Решение интегрального уравнения (19) регулярно в окрестности мнимой оси. Воспользовавшись известными соображениями об аналитическом продолжении интеграла в (19) (знаменатель не обращается в 0 и в полосе $|\mathrm{Re}\,\nu| < 1$), убеждаемся, что $R(\nu,n)$, а значит, и члены ряда (17) регулярные в Π_δ функции. Аналогично доказывается регулярность $\partial_{N_\omega}U_\nu$.

4. Решение задачи при $|kr| \to \infty$ в области, засвеченной отраженными лучами. Поверхностные волны

Для изучения поведения дальнего поля в области, засвеченной отраженными лучами удобно вместо (8) использовать другое интегральное представление для $U(kr,\omega,\omega_0)$. Для этого воспользуемся интегралом Зоммерфельда для функций Бесселя

$$K_\nu(z) = \frac{1}{4\sin\pi\nu}\int_\gamma e^{-ikr\cos\alpha}\frac{(e^{i\nu\alpha} - e^{-i\nu\alpha})}{2}d\alpha,$$

подставим в (8) и при $\hat{\theta}'(\omega,\omega_0) > \pi/2 + |\arg(-ik)|$ поменяем порядки интегрирования [9,2]

$$U(kr,\omega,\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{-ikr}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} e^{-ikr\cos\alpha}\Phi(\alpha,\omega,\omega_0)d\alpha, \tag{32}$$

$$\Phi(\alpha,\omega,\omega_0) = \sqrt{2\pi}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\nu U_\nu(\omega,\omega_0)\frac{e^{i\nu\alpha}-e^{-i\nu\alpha}}{2}d\nu, \tag{33}$$

где γ – контур Зоммерфельда, состоящий из двух петель γ_+ и γ_-, (Рис. 2).

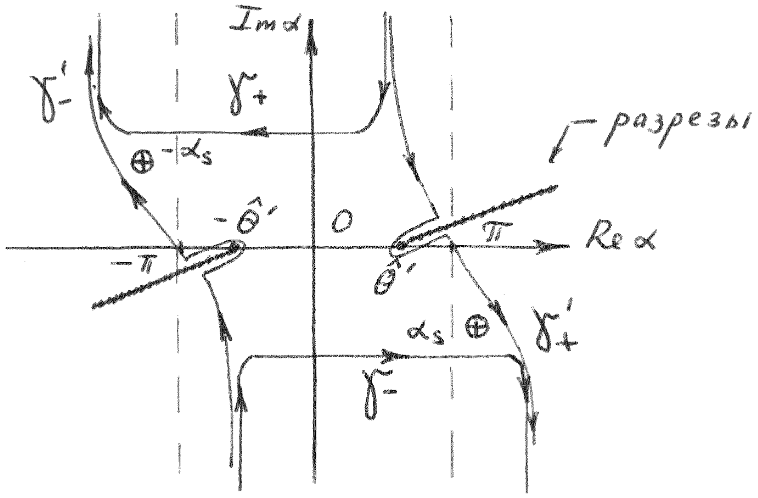

Рис. 2. Деформация контуров интегрирования и особенности функции $\Phi(\alpha,\omega,\omega_0)$.

Представление (32) в виде интеграла Зоммерфельда хорошо приспособлено для вычисления асимптотики дальнего поля, которая определяется вкладом от точек перевала $\pm\pi$ $(kr\to\infty)$ и от особенностей функции $\Phi(\alpha,\omega,\omega_0)$, захватываемых при деформации контура γ в перевальный γ' (Рис. 2). Тем самым, ключевым для вычисления дальнего поля является определение особенностей $\Phi(\alpha,\omega,\omega_0)$, к описанию которых мы и переходим.

Для формальных упрощений рассмотрим случай осесимметричного падения плоской волны ($\theta_0 = 0$) на круговой конус с границей $\theta = \theta_1$, тогда

$$U_\nu(\omega,\omega_0) = R(\nu,0)\frac{P_{\nu-1/2}(\cos\theta)}{d_{\theta_1}P_{\nu-1/2}(\cos\theta_1)}, \tag{34}$$
$$U^i_\nu(\omega,\omega_0) = R_i(\nu,0)\frac{P_{\nu-1/2}(-\cos\theta)}{d_{\theta_1}P_{\nu-1/2}(-\cos\theta_1)},$$
$$R_i(\nu,0) = -\frac{d_{\theta_1}P_{\nu-1/2}(-\cos\theta_1)}{4\cos(\pi\nu)},$$

а $R(\nu,0)$ является решением уравнения (19), $n = 0$, или, что эквивалентно [4], разностного уравнения

$$R(\nu+1) - R(\nu-1) = (-2i)[\eta R(\nu)w(\nu) - G_i(\nu)], \tag{35}$$
$$G_i(\nu) = \frac{i}{2}[R_i(\nu+1) - R_i(\nu-1) - w_i(\nu)\eta R_i(\nu)],$$
$$R(\nu) := R(\nu,0), \quad R_i(\nu) := R_i(\nu,0), \quad w(\nu) := w(\nu,0),$$
$$w_i(\nu) := w_i(\nu,0).$$

Ввиду формулы (33), $\Phi(\alpha,\omega,\omega_0)$ является, фактически, преобразованием Фурье от $U_\nu(\omega,\omega_0)$, поэтому особенности аналитической функции $\Phi(\alpha,\omega,\omega_0)$ на плоскости α определяются асимптотикой $U_\nu(\omega,\omega_0)$ при $\nu \to i\infty$. В нашем случае, выражение (34) связывает U_ν и $R(\nu)$. Тем самым, необходимо исследовать $R(\nu)$ при $\nu \to i\infty$. Достаточно подробное исследование $R(\nu)$ представлено в [4], а случай произвольного выпуклого контура и $\theta_0 > 0$ рассмотрен в [9, 12].

Функция $R(\nu)$ может быть представлена в виде

$$R(\nu) = R_r(\nu) + R_s(\nu), \tag{36}$$

где $R_r(\nu)$ имеет асимптотику ($\nu \to i\infty$)

$$R_r(\nu) = \sum_{m=0}^{\infty} i\nu a_m \frac{e^{i\nu\theta_1}}{(i\nu)^{m+1/2}} + O(\sqrt{\nu}e^{i\nu(2\pi-\theta_1)}),$$

а $R_s(\nu)$ оценивается как

$$R_s(\nu) = O(e^{i\nu(\pi+\varepsilon)}),$$

где $\operatorname{Re}\varepsilon > 0$, если $\operatorname{Re}\eta > 0$.

Функция $\Phi(\alpha, \omega, \omega_0)$ является нечетной по α, поэтому достаточно изучить ее особенности при $\operatorname{Re}\alpha > 0$ в полосе $|\operatorname{Re}\alpha| \leqslant 3\pi/2$, в которой находятся стационарные контуры γ'. При использовании метода перевала в (32) вклад от точек перевала $\pm\pi$ описывает сферическую волну [9, 12], расходящуюся от вершины конуса. В области, засвеченной отраженными лучами, $\widehat{\theta}'(\omega, \omega_0) < \pi$, функция $\Phi(\alpha, \omega, \omega_0)$ имеет особенности на вещественной оси в точках $\pm\widehat{\theta}'$, которые являются точками ветвления (Рис. 2), $\Phi(\alpha, \omega, \omega_0) = O((\alpha - \widehat{\theta}')^{-3/2})$. Если точка наблюдения находится в "оазисе", $(\widehat{\theta}' > \pi)$, то эти особенности расположены вне полосы $|\operatorname{Re}\alpha| \leqslant \pi$ и не захватываются при деформации контура в перевальный. Эти особенности определяют отраженную от конуса волну [9, 12]. Процедура вычисления этой волны описана в [12], где также найдена асимптотика дальнего поля в переходной зоне $\widehat{\theta}' \sim \pi$ в терминах функций параболического цилиндра.

Кроме особенностей на вещественной оси, $\Phi(\alpha, \omega, \omega_0)$ имеет полюсы $\pm\alpha_s$ в полосе $|\operatorname{Re}\alpha| \leqslant 3\pi/2$. Эти полюсы отвечают за поверхностные волны рэлеевского типа. Они аналогичны поверхностным волнам в задаче дифракции на импедансном клине [17]. В нашем случае явного решения построить не удается даже в осесимметричной ситуации, поэтому вычисление поверхностных волн не является элементарной задачей. Заметим, что анализ, представленный в работе [4], содержит существенную информацию для вычисления этих волн с помощью формул (32), (33), хотя этот вопрос в работе и не рассматривается.

Поведение $\Phi(\alpha, \omega, \omega_0)$ в окрестности полюса определяется некоторыми слагаемыми в асимптотике $U_\nu(\omega, \omega_0)$ при $\nu \to \infty$. Изучим слагаемое $R_s(\nu)$ при $\nu \to i\infty$ в выражении (36). Для этого рассмотрим преобразование Фурье $r(\alpha)$

$$r(\alpha) = \frac{1}{i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} R(\nu) e^{i\nu\alpha} d\alpha, \tag{37}$$

$$R(\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} r(\alpha) e^{-i\nu\alpha} d\alpha. \tag{38}$$

Наша цель в следующем. Мы вычислим полюса функции $r(\alpha)$.

Эти полюса определяются асимптотикой R_s в (36) при $\nu \to \infty$. Подставляя соответствующий член асимптотики в выражение (34), найдем нужное слагаемое в асимптотике $U_\nu(\omega, \omega_0)$ $(\nu \to i\infty)$ и, тем самым, главную часть $\Phi(\alpha, \omega, \omega_0)$ в окрестности α_s.

Введем обозначение $\eta = \sin\zeta$, $0 \leqslant \operatorname{Re}\zeta \leqslant \pi/2$. Принимая во внимание свойства $R(\nu)$, можем утверждать, что $r(\alpha)$ регулярна в полосе $|\operatorname{Re}\alpha| \leqslant \theta_1$ и

$$|r(\alpha)| \leqslant Ce^{-a|\operatorname{Im}\alpha|}, \quad |\operatorname{Im}\alpha| \to \infty, \quad a > 1.$$

Преобразуем по Фурье уравнение (35), после элементарных преобразований получим [4]

$$r(\alpha) = \frac{\sin\zeta(V(\alpha) + V_1(\alpha) + V_2(\alpha)) - T_i(\alpha)}{\sin\alpha + \sin\zeta}, \tag{39}$$

где

$$V(\alpha) = \frac{1}{i}\int\limits_{i\mathbb{R}} (w(\nu) + i\operatorname{tg}(\nu b))R(\nu)e^{i\nu\alpha}d\nu, b > 2\pi,$$

$$V_1(\alpha) = \frac{1}{i}\int\limits_{i\mathbb{R}} (\operatorname{sign}(i\nu) - i\operatorname{tg}(\nu b))R(\nu)e^{i\nu\alpha}d\nu,$$

$$V_2(\alpha) = \frac{1}{i}\int (1 - \operatorname{sign}(i\nu))R(\nu)e^{i\nu\alpha}d\nu$$

и $T_i(\alpha)$ преобразование Фурье от $G_i(\nu)$.

Если описать аналитическое продолжение правой части в (39) в окрестность точки $\alpha = \alpha_s$, $\alpha_s = \pi + \zeta$, то легко вычислить главную часть $r(\alpha)$ в окрестности полюса α_s. Функция $T_i(\alpha)$ задается явными выражениями и регулярность ее продолжения в окрестность α_s может быть продемонстрирована. $V_1(\alpha)$ регулярна в полосе $|\operatorname{Re}\alpha| < 2b$ и, значит, в окрестности α_s. $V_2(\alpha)$ имеет вид

$$V_2(\alpha) = \frac{2}{i}\int\limits_0^{i\infty} R(\nu)e^{i\nu\alpha}d\nu,$$

следовательно, регулярна при $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Наиболее содержательным является продолжение $V(\alpha)$ в окрестность $\alpha = \alpha_s$. Используя теорему о преобразовании Фурье от свертки, имеем

$$V(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{i\mathbb{R}} H_b(\alpha - \tau)r(\tau)d\tau, \tag{40}$$

где

$$H_b(\alpha) = \frac{1}{i} \int\limits_{i\mathbb{R}} [w(\tau) + i\mathrm{tg}(b\nu)] e^{i\nu\alpha} d\alpha, \quad H_b(\alpha) = -H_b(-\alpha).$$

Ядро $H_b(\alpha)$ регулярно в верхней полуплоскости α и непрерывно на вещественной оси [4], кроме точек $2m\theta_1$ $2mb$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$. Справедлива оценка $|H_b(\alpha)| \leqslant Ce^{-\frac{\pi|\mathrm{Im}\,\alpha|}{4\theta_1}}$, $\mathrm{Im}\,\alpha \to \infty$. Можно показать, что интеграл (40) продолжается как регулярная функция в окрестность $\alpha = \alpha_s$.

Из представления (39) получаем, что главная часть $r(\alpha)$ в окрестности $\alpha = \alpha_s = \pi + \zeta$ имеет вид

$$r(\alpha) = \frac{D_s}{\alpha - \alpha_s} + \dots,$$

где

$$D_s = -\mathrm{tg}\zeta [V(\alpha_s) + V_1(\alpha_s) + V_2(\alpha_s)] + T_i(\alpha_s)/\cos\zeta.$$

Постоянная D_s непосредственно связана с коэффициентом возбуждения поверхностных волн. Если известно $R(\nu)$, как решение интегрального уравнения, постоянная D_s, в принципе, может быть вычислена.

Очевидно, что

$$r(\alpha) = \frac{(-2)}{i} \int\limits_0^{i\infty} D_s e^{i\nu\alpha_s} \cos(\nu\alpha) d\nu + \dots = \frac{D_s}{\alpha - \alpha_s} + \dots.$$

Тем самым, $R_s(\nu) = -D_s e^{i\nu[\pi+\zeta]} + \dots$ – старшее слагаемое в асимптотике $R_s(\nu)$, $\nu \to i\infty$ в (36). Остается подставить это выражение в (34) и, используя асимптотику функции Лежандра, получить, что

$$U_\nu(\omega, \omega_0) \sim -D_s e^{i\nu[\pi+\zeta]} \frac{P_{\nu-1/2}(\cos\theta)}{d_{\theta_1} P_{\nu-1/2}(\cos\theta_1)}$$
$$= -D_s \frac{e^{i\nu[\pi+\zeta+\theta_1-\theta]}}{(-i\nu)} + \dots, \quad \nu \to i\infty, \quad \alpha \sim \alpha_s.$$

Предположим, что $|\mathrm{Re}\,\alpha| < \pi + \mathrm{Re}\,\zeta + \theta_1 - \theta$, тогда из представления

(33) имеем в окрестности $\alpha = \alpha_s$

$$\Phi(\alpha,\omega,\omega_0) = 2\sqrt{2\pi}\int_0^{i\infty} D_s e^{i\nu[\pi+\zeta+\theta_1-\theta]}\sin\nu\alpha d\nu$$

$$= 2\sqrt{2\pi}D_s\frac{\alpha}{\alpha^2-\alpha_{s,\theta}}+\dots = \frac{D_s\sqrt{2\pi}}{\alpha-\alpha_{s,\theta}}+\dots, \qquad (41)$$

где $\alpha_{s,\theta} = \pi+\zeta+\theta_1-\theta$.

Предположим теперь, что $\operatorname{Im}\zeta < 0$, точнее, что полюсы $\pm\alpha_{s,\theta}$ захватываются контуром при деформации в γ'. Тогда, воспользовавшись (41), применяя метод перевала в (32), получаем, в частности, выражение для поверхностной волны в асимптотике дальнего поля

$$U_s(kr,\omega,\omega_0) = 2\sqrt{2\pi}D_s\frac{e^{ikr\cos(z+\theta_1-\theta)}}{\sqrt{-ikr}}. \qquad (42)$$

выражение для поверхностной волны переписывается в виде

$$U_s = 2\sqrt{2\pi}D_s\frac{e^{ikr\cos(\operatorname{Re}\zeta+\theta_1-\theta)ch(\operatorname{Im}\zeta)}}{\sqrt{-ikr}}\times$$
$$\times\, e^{kr\sin(\operatorname{Re}\zeta+\theta_1-\theta)sh(\operatorname{Im}\zeta)}.$$

Очевидно, что поверхностная волна распространяется вдоль C, затухая по r, как $1/\sqrt{kr}$, если $\operatorname{Re}\zeta = 0$, $\operatorname{Im}\zeta < 0$. Вне поверхности C волна убывает экспоненциально. При несимметричном падении плоской волны на конус ($\theta_0 > 0$) поверхностные волны зависят и от координаты φ. Соответствующие вычисления не вызывают затруднений.

5. Явление Вейля–ван-дер-Поля

Рассмотрим случай малого относительного импеданса $\eta = \sin\zeta \sim 0$, $\zeta \sim 0$. В этом случае $\pm\alpha_s$, полюсы $\Phi(\alpha,\omega,\omega_0)$ располагаются в окрестности перевальных точек $\pm\pi$. Более точно, мы предположим, что

$$|\zeta+\theta_1-\theta| \ll 1,$$

следовательно, $\alpha_{s,\theta} = \pi+\zeta+\theta_1-\theta$ находится в окрестности седловой точки $+\pi$. В этой окрестности используем аппроксимацию (с погрешностью $O(1/\sqrt{kr})$)

$$\cos\alpha = -1+(\alpha-\pi)^2/2+\dots$$

и проинтегрируем по отрезку на γ'_+ в окрестности $+\pi$

$$U(kr,\omega,\omega_0) \cong \frac{2e^{ikr}}{\sqrt{-ikr}} \frac{D_s}{2\pi i} \int\limits_{\pi+ae^{3\pi i/4}}^{\pi-ae^{3\pi i/4}} \frac{e^{-ikr(\alpha-\pi)^2/2}}{\alpha-\alpha_{s,\theta}} d\alpha, a>0.$$

Введем новую переменную $\tau=\alpha-\pi$ и заменим контур интегрирования на $\mathcal{L}=(e^{3\pi i/4}\infty, -e^{3\pi i/4}\infty)$, что вносит экспоненциально малую погрешность при $kr\to\infty$. Таким образом, получаем

$$U(kr,\omega,\omega_0) \cong \frac{e^{ikr}}{\sqrt{-ikr}} \frac{D_s}{\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{e^{-ikr\tau^2/2}}{\tau-E(\zeta,\theta)} d\tau,$$

$E(\zeta,\theta)=\zeta+\theta_1-\theta$, или

$$U(kr;\omega,\omega_0) \cong \frac{e^{ikr}}{\sqrt{-ikr}} \frac{D_s}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-krt^2/2}dt}{t-e^{i\pi/4}E}. \tag{43}$$

Интеграл в (43) легко выражается через интеграл Френеля [19]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-krt^2/2)}{t-Ee^{i\pi/4}} dt = l^{-iE^2kr/2}(1-F(-e^{3\pi i/4}E\sqrt{kr/2})),$$

где $F(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$.

Ввиду условия $|E|\ll 1$, фронт поверхностной волны на C близок к фронту сферической волны от вершины конуса, близки также и скорости их распространения. В действительности, невозможно разделить эти волны вблизи конуса. С физической точки зрения происходит интерференция волн в пограничном слое

$$|\zeta+\theta_1-\theta| = O(1/\sqrt{kr}), \quad kr\to\infty. \tag{44}$$

Похожее явление существует при дифракции волн он точечного источника над импедансной плоскостью [14]. Соответствующее явление называют явлением Вейля–ван-дер-Поля. В нашем случае вершина конуса играет роль виртуального источника и мы называем выражение (43) формулой Вейля–ван-дер-Поля.

Еще одно замечание касается вычисления коэффициента D_s в условиях явления Вейля–Ван-дер-Поля. В области перехода из пограничного слоя (44) при условии $\sqrt{kr}E = O((kr)^\delta)$ ($\delta > 0$ малое) интеграл (43) должен смыкаться с выражением для сферической волны, расходящейся от вершины. В этом случае диаграмма рассеяния может быть вычислена независимо, с помощью суммирования по Абелю–Пуассону [2]. Можно ожидать, что зная дифракционный коэффициент (диаграмму рассеяния) из условия сшивания, в принципе, можно найти D_s. Другой способ вычисления D_s основан на асимпотичеком решении уравнения (35) ($\eta \to 0$) и использовании выражения для D_s через $R(\nu)$.

Литература

1. В. А. Боровиков, *Дифракция на многоугольниках и многогранниках.* — Наука, Москва, (1966).
2. V. M. Babich, D. B. Dement'ev, B. A. Samokish, V. P. Smyshlyaev, *On evaluation of the diffraction coefficients for arbitrary "non-singular" directions of a smooth convex cone.* — SIAM Appl. Math. **60** (2) (2000), 536–573.
3. D. S. Jones, *Scattering by a cone.* — Q. J. Mech. Appl. Math. **50** (1997), 499–523.
4. J.- M. L. Bernard, *Methode analytique et transofrmees fonctionnelles pour la diffraction d'ondes par une singularite conique: equation integrale de noyau non-oscillant pour le cas d'impedance constante.* — Rapport CEA-R-5764, Editions Dist-Saclay, CEA/Saclay (1997).
5. J. M. L. Bernard, M. A. Lyalinov, *The leading asymptotic term for the scattering diagram in the problem of diffraction by a narrow circular impedance cone.* — J. Phys. A, A32 (1999), L43–L48.
6. J. M. L. Bernard, M. A. Lyalinov, *Spectral domain solution and asymptotics for the diffraction by an impedance cone.* — IEEE Trans Anten. Propagat., AP-49, **12** (2001), 1633–1635.
7. L. B. Felsen, *Plane wave scattering by small angle cones.* — IRE Trans. Antennas Propagat. **50** (1957), 121–129.
8. В. М. Бабич, *О дифракции высокочастотной акустической волны на абсолютно жестком конусе произвольного сечения.* — Прикл. Матем. и Механ. **60** (1) (1996), 72–78.
9. J. M. L. Bernard, M. A. Lyalinov, *Diffraction of scalar waves by a convex impedance cone of arbitrary cross-section.* — Wave Motion **33** (2001), 155–181.
10. J. M. L. Bernard, M. A. Lyalinov, *Electromagnetic scattering by an impedance cone.* — Направлена в печать в IMA Journ. on Appl. Math. (2002).
11. Y. A. Antipov, *Diffraction of a plane wave by a circular cone with an impedance boundary condition.* — SIAM Journ. Appl. Math. **62** (4) (2002), 1122–1152.
12. J. M. L. Bernard, M. A. Lyalinov, *On diffraction by an impedance cone of an arbitrary cross section: the far field in the penumbral zone.* — Proc. of Intern. Workshop on Direct and Inverse Wave Scattering, Gebze, Turkey, Sept. 25–29 (2002), 73–82.
13. V. Kamotski and G. Lebeau, *Diffraction by an elastic wedge with stress-free boundary: existence and uniqueness.* — Направлена в печать в Proc. Royal. Soc. London.

14. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения волн.* — М. (1970).
15. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм и произведений.* — ГТТЛ., М.-Л. (1951).
16. D. S. Jones, *The theory of electromagnetizm.* — Pergamon Press. London (1964).
17. G. D. Maliuzhinets, *Excitation, reflection and emission of surface waves from a wedge with given face impedances.* — Sov. Phys. Dokl. **3** (1958), 752–755.
18. А. А. Тужилин, *К теории неоднородных функциональных уравнений Малюжинца.* — Дифференциальные уравнения **9** (11) (1973), 2058–2064.
19. М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды.* — Москва, Наука (1987).

Lyalinov M. A. On diffraction of a plane wave by an impedance cone.

Some questions on substantiation of the solution in the diffraction problem by an impedance cone are discussed. The surface waves as well as the Weyl–van-der-Pol phenomenon are studied in the zone illuminated by the reflected rays.

С.-Петербургский государственный университет

E-mail: lyalinov@mph.phys.spbu.ru

Поступило 23 декабря 2002 г.