Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 297, 2003 г.

**А. П. Киселев, В. О. Яровой, Е. А. Всемирнова**

# АНОМАЛИИ ПОЛЯРИЗАЦИИ УПРУГИХ ВОЛН. КАУСТИКА И ПОЛУТЕНЬ

**Работа посвящается Л. А. Молоткову
в связи с его семидесятилетием**

## 1. Введение

Стандартной, или "нормальной", поляризацией в сейсмике считают ту, которую имела бы локально соответствующая плоская волна. Аномальная поляризация, или деполяризация, – это отклонение от плоско–волнового стандарта. Теория однородных плоских волн [1] дает для волн $P$ линейную поляризацию. Анализ полевого материала в ВСП показывает, что даже для первых вступлений типична нелинейная поляризация [2–5], причем нелинейность поляризации всего в несколько процентов надежно фиксируется при надлежащей обработке данных ПМ ВСП.

При массовом внедрении трехкомпонентных наблюдений в вертикальное сейсмическое профилирование в 1980-е годы ожидали, что изучение деполяризации позволит получать качественно новые сведения о структуре околоскважинного пространства [2]. Надежды эти, как нам кажется, основательные, пока не оправдались. Часть вины за это лежит на теоретиках, которые, во-первых, не вполне разобрали специфику разных механизмов деполяризации, а, во-вторых, не довели свои знания до широких кругов сейсморазведчиков. Настоящая статья имеет целью сделать по шагу в обоих направлениях.

**Основные и примесные компоненты.** В ситуации, когда волна отчетливо прослеживается, составляющая смещения в ней, направленная "как соответствующая плоская волна" называется основной или "нормальной", а ортогональная к ней – аномальной или примесной. Формы сигнала в них обычно разные. Характер этого различия определяется причинами возникновения аномальных составляющих. Спектральные и корреляционные характеристики обеих составляющих несут информацию об особенностях волнового процесса и о строении среды (на этом, по-видимому, и основывались надежды Е. И. Гальперина). Они анализировались, с различной степенью подробности, для разных моделей среды и волнового процесса.

**Дифракция в рамках лучевой теории.** Термин “примесная составляющая” взят из классической работы по лучевой теории [6], обобщающей однородные плоские волны. Анализ [7] показывает, что само понятие волны основано именно на лучевом методе. В его рамках основная компонента описывается старшим приближением, а примесная – поправочным. Возникновение примесной компоненты в плавно-неоднородной(в частности, в однородной) среде, в случае когда поле лучей регулярно и фронт локально аппроксимируется касательной плоскостью, можно трактовать как поперечную диффузию поля при дифракции на плавной крупномасштабной неоднородности [8]. Примесные компоненты, связанные с этим явлением, исследовались в ряде работ, например, [9–12, 14] и др. Оказалось, что форма сигнала в примесной компоненте является интегралом от формы сигнала в основной, и поэтому учет поляризационных аномалий почти не усложняет вычисления волнового поля. Примесная компонента имеет в этих моделях стабильную форму и амплитуду и хорошо прослеживается.

**Интерференция.** Ряд работ, например, [15, 16], посвящен аномалиям поляризации волн вблизи протяженных границ раздела, когда возникновение аномальной составляющей связано с интерференцией. Исследовались эффекты рассеяния на отдельных малых включениях и на их периодических композициях [17]. Отмечено, что при рассеянии на малых плавных включениях (см. [18] и ссылки там) и на резких малых и среднемасштабных [19, 20] и др., примесная компонента беспорядочно меняется по амплитуде и форме и плохо коррелируется.

В настоящей работе мы рассматриваем модельные примеры, в которых дифракция и интерференция переплетаются. Здесь формы сигналов и в основной, и в примесной компонентах изменяются сложным образом, и, в отличие от ранее разобранных случаев, и при вычислении нестационарных полей необходимо использование преобразования Фурье по времени.

**Пограничные слои.** Мы рассматриваем волновые процессы, связанные с нарушением регулярности поля лучей, когда возникают особые линии, вблизи которых фронт совсем не похож на плоский. Там происходит слияние отдельных волн в единое дифракционное поле – "интерферирующие волны вступают в дифракционное взаимодействие". При нарушении регулярности поля лучей интерференция и дифракция переплетаются. Области, где это происходит, получили в теории дифракции название пограничных слоев [21].

Наиболее интересные для сейсмики волновые погранслои – это окрестнось каустики и зона полутени. В обоих случаях имеются как области интерференции различных волн, где они могут быть различены и прослежены, так и собственно пограничные слои, при подходе к которым фазы волн сближаются, и их индивидуальнось теряется.

**Каустика.** Каустика, т. е. огибающая лучей, может возникнуть при отражении от вогнутой поверхности. С освещенной стороны каустики, рис. 1, на некотором расстоянии от нее, различимы приходящая к ней и уходящая от нее волны. С теневой стороны волн нет. В узком пограничном слое вокруг каустики при движении с освещенной стороны в теневую наблюдается сперва слияние интерферирующих волн, а затем – постепенное исчезновение волнового поля.

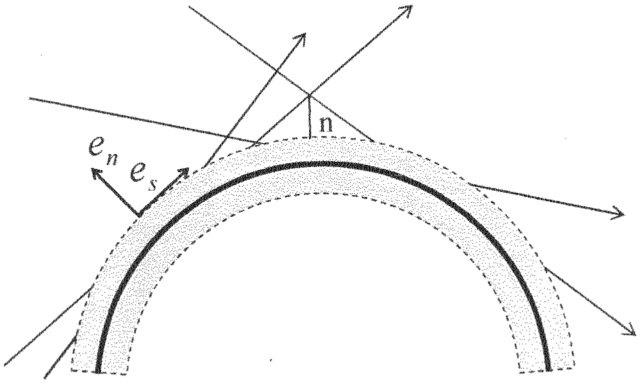
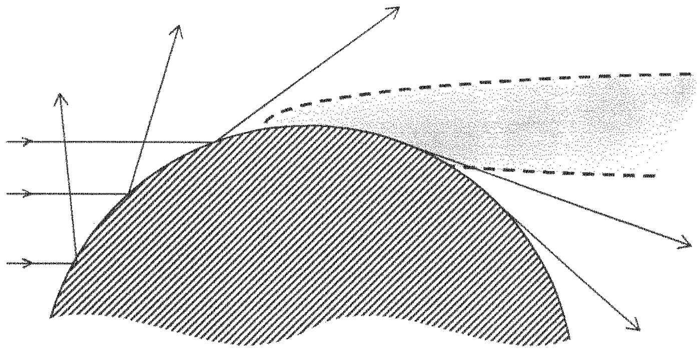



Рис. 1. Лучи вблизи каустики.

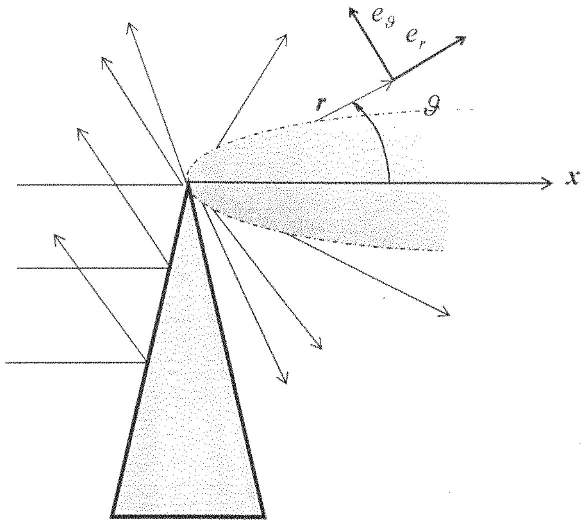
Каустика отвечает складке на волновом фронте, который делается совсем не похож на плоский. Поэтому поле вблизи нее не описывается лучевым методом. Формулы для старшего члена поля вблизи простой гладкой каустики в скалярном случае известны очень давно [23, 22]. Из недавних работ отметим [24]. Случай теории упругости обсуждали, в контексте задач сейсмики, например, [25–27].

**Полутень.** Другой встречающийся в сейсмике случай дифракционного пограничного слоя – это полутеневая зона, возникающая при дифракции на крупномасштабном препятствии, как на гладком выпуклом, так и на имеющем острую кромку. В случае острой кромки (рис. 2а) с освещенной стороны интерферируют падающая и краевая волны; в тени существует одна краевая волна. В пограничном слое, вокруг линии, отделяющей геометрически освещенную область от геометрической тени, поле имеет специфический "френелевский" характер.

Для выпуклого гладкого препятствия с освещенной стороны интерферируют падающая и отраженная волны, а в тени поле состоит из волн Фридлендера–Келлера, пробежавших по границе и соскользнувших с нее [21], (рис. 2б). Вблизи геометрической границы раздела света и тени поле имеет погранслойный характер. И для гладкого тела, и для тела с кромкой, погранслойное поле, в главном приближении, описывается одинаковыми формулами, содержащими интеграл Френеля. В скалярной задаче полутеневое поле для заостренного тела описал еще О. Френель, а для гладкого – В. А. Фок [28, 29]. В теории упругости соответствующие формулы для главного члена вывели одновременно для случае гладкого выпуклого тела в [30–32] и для случае тела с кромкой – в [33] (соответственно, в духе метода пограничного слоя [28, 21], и с помощью приема родственного методу Кирхгофа [23]. Для конкретного углового препятствия – плоской трещины – интеграл Френеля извлечен позднее из точного решения задачи дифракции [34]. Обсуждение главного члена асимптотики можно найти, например, в [36, 35]. Формулы с френелевскими интегралами для случая однородной изотропной упругой среды можно получить совсем легко [13, 14], если заимствовать выражения для соответствующих потенциалов из стандартных учебниках теории дифракции [22, 23]. При этом "нормально" поляризованное поле описывается главным членом асимптотики, а ано-



а)




б)

Рис. 2. Лучи вблизи полутени. а) для гладкого выпуклого тела; б) для крупномасштабного острия.

мальные компоненты – поправочным. Этот прием годится и для ряда других пограничных слоев [14], в том числе, и для каустики (не обязательно простой и гладкой).

**Цель работы. Возможные обобщения.** В упомянутых работах о поле около каустики и в полутени речь шла либо о “нормальной” составляющей поля, либо о гармонической по времени задаче. Мы предлагаем простой метод численного моделирования аномалий поляризации нестационарных упругих волн около гладкой (т.е. не имеющей точек заострения) каустики и в полутени. Метод позволяет также получить качественные заключения о спектрах составляющих волнового поля. Мы рассматриваем аномалии волн $P$ в самом простом случае однородной изотропной среды. Они оказываются очень интенсивными. Рассмотрение волн $S$ в такой среде, с использованием формул работ [13, 14], вполне аналогично, причем свойства примесных компонент качественно сохраняются, а их роль несколько усиливается (подобные результаты отмечали, в рамках пригодности лучевой теории, например, [11]). Более сложные каустики в изотропной однородной среде можно рассмотреть совершенно аналогично. Учет неоднородности и анизотропии среды заметно усложняет математический аппарат, не изменяя, по-видимому, основных качественных выводов.

## 2. Нестационарные поля и их спектры

**Потенциалы.** Нестационарное поле смещений однородной изотропной упругой среды $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ($\mathbf{r}$ – точка наблюдения, а $t$ – время) описывается уравнением

$$a^2 \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\, \mathbf{u} - b^2 \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\, \mathbf{u} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

в котором $a$ и $b$ обозначают скорости волн $P$ и $S$. Для волны $P$ поле представимо в виде

$$\mathbf{u} = \mathrm{grad}\, \varphi, \tag{2}$$

где $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$ – скалярный потенциал. Он удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \tag{3}$$

где $\Delta$ – оператор Лапласа. Для простоты мы считаем далее волновой процесс не зависящим от координаты $z$, так что $\mathbf{r} = (x, y)$ и

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Мы будем основываться на формулах для спектра нестационарного поля, точнее, для спектра $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, \omega)$ потенциала $\varphi(\mathbf{r}, t)$, через который он выражается по формуле

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \tag{4}$$

Здесь $\omega$ имеет, для $\omega > 0$, смысл круговой частоты. Очевидно, $\Phi(\mathbf{r}, \omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Phi + \frac{\omega^2}{a^2}\Phi = 0, \tag{5}$$

а спектр смещения (поле гармонических по времени смещений) $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r}, \omega)$ выражается через него так

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, \omega) = \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}, \omega). \tag{6}$$

**Следствие вещественности поля.** Поле нестационарных смещений $\mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega)$ вещественно, а потому вещественен и потенциал $\varphi$. Спектры же полей, отвечающих физически содержательным задачам, обычно комплексны. Из вещественности $\varphi$ легко следует, см., например, [37], способ продолжения комплексного спектра на отрицательные значения частоты:

$$\Phi(-\omega) = \Phi^*(\omega), \tag{7}$$

причем $^*$ означает комплексное сопряжение. Из (4) и (7) вытекает, что

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} [\mathrm{Re}\Phi(\omega) \cos \omega t - \mathrm{Im}\Phi(\omega) \sin \omega t]\, d\omega, \tag{8}$$

где Re и Im – действительная и мнимая части. Зависимость от $\mathbf{r}$ опущена, что будет делаться и дальше.

## 3. Поле около каустики

**Спектр каустического потенциала.** Для описания поля вблизи каустики удобны переменные $n$ и $s$ – нормаль к каустике, направленная в освещенную область и длина ее дуги. В них

$$\operatorname{grad} = \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial n} + \mathbf{e}_s \frac{1}{1 + \frac{n}{R}} \frac{\partial}{\partial s}, \tag{9}$$

где $\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_s$ – единичные векторы вдоль координатных линий, а $R$ – радиус кривизны каустики. Основной следует считать составляющую поля, касательную к каустике $u_s = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_s)$.

Описание спектра поля вблизи каустики мы основываем на асимптотической для больших значений $\omega R/a$ формуле

$$\Phi(\omega) = e^{i\omega s/a} v\,(-N)\,\Psi(\omega), \tag{10}$$

где

$$v(M) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \cos(\beta M + \beta^3/3) d\beta$$

– функция Эйри–Фока, а

$$N = n \sqrt[3]{\frac{2\omega^2}{a^2 R}}$$

– обезразмеренная нормаль. Здесь, как всегда в гармонических по времени задачах дифракции, предполагается $\omega > 0$. Эта формула отличается от классической [22, 23, 21] множителем $\Psi(\omega)$, который должен быть выбран исходя из формы приходящей волны.

**Асимптотика в освещенной области.** Отойдем от каустики в освещенную область настолько, чтобы $N$ можно было считать большим – это соответствует расстояниям, где приходящая и уходящая волны физически различимы. Воспользовавшись асимптотикой [29, 21]

$$v(-N) \approx \frac{\sin(\frac{2}{3}N^{3/2} + \pi/4)}{\sqrt[4]{N}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt[4]{N}} \left\{ e^{-i\frac{2}{3}N^{3/2} + i\pi/4} + e^{+\frac{2}{3}iN^{3/2} - i\pi/4} \right\}, \quad N \to +\infty,$$

представим спектр потенциала в виде суммы приходящей и уходящей волн,

$$\Phi \cong \Phi^- + \Phi^+,$$

где

$$\Phi^- = \frac{A}{\omega^{1/6}} \Psi(\omega) e^{i\omega\tau^- + i\pi/4}, \quad \Phi^+ = \frac{A}{\omega^{1/6}} \Psi(\omega) e^{i\omega\tau^+ - \pi/4}, \quad \omega > 0. \tag{11}$$

Здесь

$$A = A(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt[12]{\frac{a^2 R}{2}}}{2\sqrt[4]{n}}$$

вещественно и не зависит от $\omega$,

$$\tau^- = \frac{1}{a}\left(s - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2n^3}{R}}\right)$$

отвечает геометрическому времени пробега для приходящей волны, а

$$\tau^+ = \frac{1}{a}\left(s + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2n^3}{R}}\right)$$

– для уходящей [21, 14]. Согласно (9) и (11), основная компонента приходящего поля при малых $n$, но больших $N$, равна

$$u_s^- \approx \frac{\partial \Phi^-}{\partial s} \approx \frac{i\omega}{a}\Phi^- \approx \frac{i\omega A}{\omega^{1/6}} e^{i\pi/4}\Psi(\omega), \quad \omega > 0. \tag{12}$$

**Выбор спектра каустического поля по приходящей волне.** Волновое поле в освещенной области представляется суммой приходящей и уходящей волн $\mathbf{u}^-$ и $\mathbf{u}^+$. Смещение в основной компоненте приходящей волны $u_s^- = (\mathbf{u}^- \cdot \mathbf{e}_s)$ вблизи каустики, но при больших $N$, мы считаем заданным в лучевом виде

$$u_s^-(\mathbf{r}, t) = h(\mathbf{r}) f^-(t - \tau^-), \tag{13}$$

где $f^-$ вещественная функция, описывающая ее форму, считается известной, а $h(\mathbf{r}) = \psi/\sqrt{J}$ ($J$ – геометрическое расхождение лучей, $\psi$ – “начальные данные” [6, 21], характеризующие поперечное распределение интенсивности поля в основной компоненте). Форма сигнала $f^-(t)$ связана со своим спектром $F^-(\omega)$ формулами обращения интеграла Фурье

$$f^-(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^-(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega, \; F^-(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f^-(p) e^{i\omega p} dp. \tag{14}$$

Сравнив (12) со спектром “нормальной” компоненты падающей волны, находим, что

$$\Psi(\omega) = C\; e^{-i\frac{3\pi}{4}} \; \frac{F^-(\omega)}{\omega^{5/6}}, \; \omega > 0, \tag{15}$$

где $C = C(\mathbf{r}) \lim\limits_{n \to 0} (h/A) \neq 0$ – вещественная медленно меняющаяся величина, которую в рассматриваемом приближении можно считать постоянной.

Формулы (2), (8), (10), (14) и (15) позволяют численно моделировать и основную, и примесную компоненты поля вблизи каустики, а использование асимптотических формул для функций Эйри [29, 21] дает возможность качественного суждения об их спектрах.

**Качественные свойства поля и спектров.** Из (9) и (10) следует, что на самой каустике основная компонента имеет частотную зависимость $\sim i\omega\Psi(\omega)$, а примесная – $\sim \omega^{2/3}\Psi(\omega)$.

Наиболее высокочастотна основная компонента на каустике (спектр $\sim i\omega\Psi(\omega)$). В порядке асмиптотического убывания интенсивности на высоких частотах за ней идут: примесная компонента на каустике ($\sim \omega^{2/3}\Psi(\omega)$), затем основная в приходящей волне и ее примесная (цоответственно, $\omega^{5/6}\Psi(\omega)$ и $\omega^{-1/6}\Psi(\omega)$). Как и всегда, когда пригоден лучевой метод, частотная зависимость спектра примесной компоненты имеет, по сравнению с основной, дополнительный множитель $1/(-i\omega)$ (для $\omega > 0$).

В тени, где $N < 0$, при удалении от каустики спектры обеих компонент быстро смещаются в область низких частот, а интенсивности их быстро убывают.

**Связь между формами приходящей и уходящей волн.** Выразим явно временну́ю зависимость $f^+(t)$ уходящей волны через временну́ю зависимость $f^-(t)$ приходящей. Рассмотрим их спектры

$$f^{\pm}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F^{\pm}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Из (11) вытекает, что при $\omega > 0$

$$F^+(\omega) = -iF^-(\omega).$$

Поскольку функции $f^{\pm}(t)$ вещественны, то, согласно (7), на всей оси частот

$$F^+(\omega) = -i\,\mathrm{sgn}\,(\omega) F^-(\omega), \tag{16}$$

где $\mathrm{sgn}(\omega) = 1$ для $\omega > 0$, и $\mathrm{sgn}(\omega) = -1$ для $\omega < 0$. Поскольку

$$\mathrm{sgn}\,(\omega) = \frac{1}{\pi}\mathrm{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega s}}{s} ds, \tag{17}$$

где v.p. означает, что интеграл понимается в смысле главного значения, то, по теореме о свертке,

$$f^{+}(t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^{-}(\sigma)}{\sigma - t} d\sigma, \tag{18}$$

т.е. форма уходящей волны дается преобразованием Гильберта [37] от формы приходящей волны. Такое же соотношение справедливо и для примесных компонент, формы которых, на достаточном удалении от каустики, являются интегралами от форм соответствующих основных.

**Пример численного моделирования.** На рис. 3 приведены результаты численного моделирования основной и примесной компонент поля в окрестности каустики. Видно, как по мере удаления от каустики в освещенную область, поле разделяется на приходящую и уходящую волны, формы которых соответствуют качественной теории. Интенсивность примесных компонент для параметров, встречающихся в сейсморазведке, может быть очень высока.

## 4. Поле в полутени

**Спектр полутеневого потенциала.** При описания полутени удобны координаты $r$ и $\vartheta$ – расстояние от острия и угол с направлением падающего поля, рис. 2б, в которых

$$\mathrm{grad} = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}, \tag{19}$$

$\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\vartheta$ – единичные координатные векторы. Радиальную компоненту поля $u_r = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_r)$ следует считать в полутени основной, а угловую $u_\vartheta = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_\vartheta)$ – примесной. Асимптотическое выражение для спектра потенциала при больших $\omega r/a$ и малых $\vartheta$

$$\Phi = e^{i\frac{\omega r}{a}\cos\vartheta}\mathcal{F}(\Theta)\Psi(\omega), \tag{20}$$

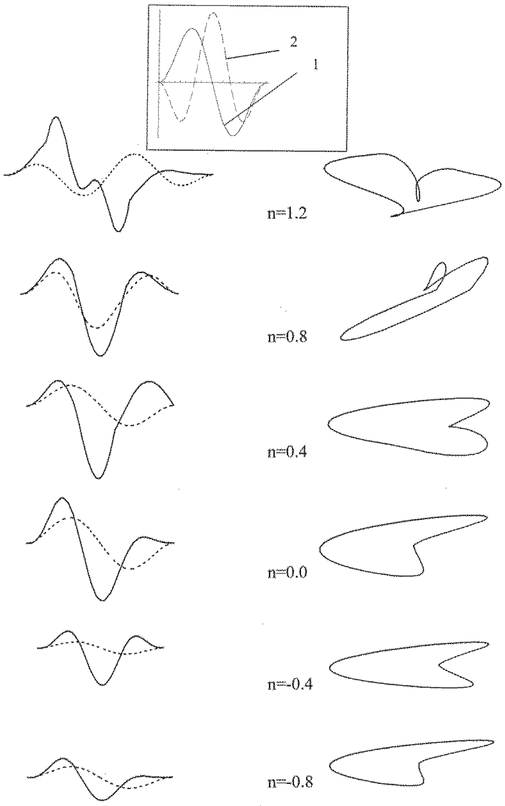



Рис. 3. Синтетические сейсмограммы для волн $P$ вблизи каустики радиуса $R = 3\Lambda$, где $\Lambda$ – характерная длина волны сигнала в основной компоненте приходящей волны (жирные линии – основная компонента, пунктир – примесная) и траектории. В рамке: (1) – форма сигнала в основной компоненте приходящей волны вдали от каустики, (2) – ее преобразование Гильберта.

где

$$\mathcal{F}(\Theta) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\Theta} \exp\left(i\alpha^2\right) d\alpha$$

– интеграл Френеля, а

$$\Theta = \vartheta\sqrt{\frac{\omega r}{2a}}.$$

Формула отличается от классической [22, 23] множителем $\Psi(\omega)$, который мы выберем, сравнив поле, отвечающее потенциалу (20), с падающей волной.

**Определение спектра полутеневого поля по приходящей волне.** При удалении от геометрической границы раздела в освещенную область настолько, что аргумент $\Theta$ интеграла Френеля становится большим, из асимптотики (например, [29])

$$\mathcal{F}(\Theta) \approx 1 + e^{-3i\pi/4}\frac{e^{i\Theta^2}}{2\sqrt{\pi}\Theta}, \quad \Theta \gg 1,$$

и предположения, что угол дифракции мал, $|\vartheta| \ll 1$ получаем

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \approx \frac{i\omega}{a}\Phi \approx \frac{i\omega}{a}e^{i\omega x/a}\Psi(\omega) +$$

$$+ e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{a}{2\pi r}}\frac{1}{\vartheta}e^{i\omega r/a}\sqrt{\omega}\Psi(\omega), \ \omega > 0. \tag{21}$$

Последнее слагаемое справа описывает спектр краевой волны, расходящуюся от острия, а предпоследнее должно совпадать со спектром падающей волной в освещенной области. Падающая волна, отвечающая полутеневому полю со спектром (20) – это плоская волна, набегающая на препятствие слева [22, 23]. Пусть она задана в виде

$$\mathbf{u}^- = \mathbf{e}_x f^-(t - x/a) \approx \mathbf{e}_r f^-(t - x/a). \tag{22}$$

Здесь $x = r\cos\vartheta$ – декартова координата вдоль направления прихода падающей волны, а $\mathbf{e}_x$ – ее орт. Сравнивая "нормально" поляризованную составляющую поля, отвечающего предпоследнему слагаемому в (21), со спектром падающей волны, получаем

$$\Psi(\omega) = \frac{aF^-(\omega)}{i\omega}, \ \omega > 0, \tag{23}$$

где $F^-$ и $f^-$ связаны формулами обращения (14).

**Качественные свойства поля и спектров.** Спектр основной компоненты волны $P$ в полутени (как и для падающей волны) имеет порядок $i\omega\Psi(\omega)$. Примесная компонентва в полутени более низкочастотна ($\sim \sqrt{\omega}\Psi(\omega)$). В основной (радиальной) компоненте волны, дифрагированной острием, порядок спектра $\sim \sqrt{\omega}\Psi(\omega)$, а в ее примесной – $\sim \Psi(\omega)/\sqrt{\omega}$).

**Осредненный эллипс поляризации.** При обработке полевого материала полезной характеристикой является осредненный эллипс (в трехмерном случае – эллипсоид) поляризации [38, 4, 5]. Рассмотрим матрицу $\mathbf{T}$ ковариаций поля, элементы которой $T_{ij}(\mathbf{r})$ задаются в точке $\mathbf{r}$ формулой

$$T_{ij}(\mathbf{r}) = \int\limits_{t_1(\mathbf{r})}^{t_2(\mathbf{r})} u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}, t) dt, \tag{24}$$

где $u_i$ и $u_j$ – компоненты смещений в какой-нибудь ортогональной системе координат. Интеграл берется по временнóму окну, в котором сосредоточена волна. Матрица $\mathbf{T}$ симметрична и неотрицательна. Обозначим ее собственные числа в двумерном случае через $\lambda_1(\mathbf{r})$ и $\lambda_2(\mathbf{r})$, а собственные векторы через $\mathbf{e}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{e}_2(\mathbf{r})$, так что $\mathbf{T}\mathbf{e}_{1,2} = \lambda_{1,2}\mathbf{e}_{1,2}$. Очевидно, $\mathbf{e}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{e}_2(\mathbf{r})$ ортогональны. Собственные числа характеризуют распределение энергии в направлениях собственных векторов. Осредненный (амплитудный) эллипс поляризации в точке $\mathbf{r}$ – это эллипс, главные оси которого направлены вдоль $\mathbf{e}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{e}_2(\mathbf{r})$ и имеют длины, соответственно, $\sqrt{\lambda_1(\mathbf{r})}$ и $\sqrt{\lambda_2(\mathbf{r})}$. Величина и ориентация осей эллипса не зависят от координатной системы.

Эллипс поляризации, характеризующийся в каждой точке $\mathbf{r}$ двумя числами (длинами своих осей и направлением, скажем, большей из них), дает наглядное представление о смещениях в этой точке. Для гармонических колебаний, если интегрировать в (24) по периоду, он совпадает с траекторией частицы в волне. Для плоской волны $P$ эллипс вырождается в отрезок. Чем больше отношение его осей, тем ближе поляризация к линейной.

Из результатов численного моделирования волнового поля на основе формул (8), (19), (20), (23) мы приводим только картину эллипсов поляризации волны $P$ для зоны полутени, где падающая и дифрагированная волны физически неразличимы, рис. 4. Видно, что при удалении от препятствия поляризация стремится к линейной довольно медленно.

## 5. Выводы

1. Предложен простой единообразный подход к численному моделированию поляризационных аномалий упругих волн около каустики и в полутени.

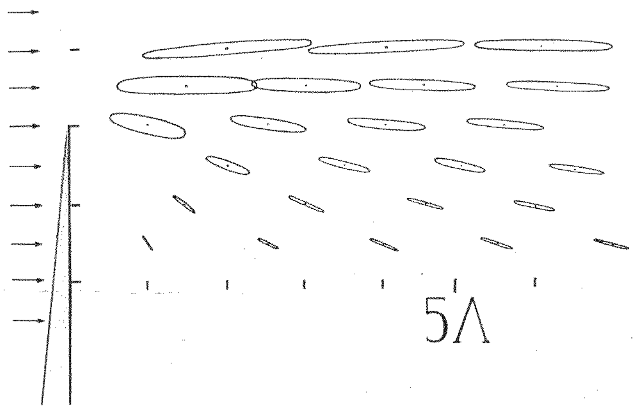



Рис. 4. Осредненные эллипсы поляризации в волне $P$ в полутени. Форма импульса в основной компоненте падающей волны та же, что и на Рис. 3; $\Lambda$ – характерная длина волны.

2. Из численных примеров, иллюстрирующих предложенный метод расчета, видны характерные общие черты поляризационных аномалий в пограничных слоях. Это:

очень высокая интенсивность примесных компонент, вполне сопоставимых по амплитуде с основными,

появление, новых, по сравнению с областями, где поле лучей регулярно, форм сигналов, заметно отличающихся от формы основной компоненты и интеграла от нее.

3. В области, где поле не разделяется на отдельные волны, каждая из компонент более высокочастотна, чем в дальней зоне, причем частоты в основной выше, чем в примесной.

4. И основная, и примесная компоненты хорошо прослеживаются вдоль пограничного слоя, и плохо – поперек него.

5. Качественные выводы о характере аномально поляризованного поля сохраняются и в анизотропных средах с плавными неоднородностями.

В заключение авторы приносят благодарность Т. Б. Яновской за интересное обсуждение результатов.

## Литература

1. К. Аки, Р. Ричардс, *Количественная сейсмология.* Мир, М. (1983).

2. Е. И. Гальперин, *Поляризационный метод сейсмических исследований.* Недра, М. (1977).
3. Н. А. Караев, О. М. Прокатор, А. Л. Ронин, Л. И. Платонова, *Поле падающих волн в реальных неоднородных средах.* — В кн.: Вопр. динам. теории распростр. сейсм. волн, В. 23 (1983), 185–195.
4. И. А. Быков, *Определение параметров сейсмических волн в ПМ ВСП.* — В кн.: Вопр. динам. теории распростр. сейсм. волн, В. 24 (1984), 61–76.
5. И. А. Быков, *Методика поляризационной обработки данных метода вертикального сейсмического профилирования в рудных районах.* — Дисс. ЛГУ. Л. (1986).
6. А. С. Алексеев, В. М. Бабич, Б. Я. Гельчинский, *Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов.* — В кн.: Вопр. динам. теории распростр. сейсм. волн, В. 5 (1961), 5–21.
7. V. M. Babich, A. P. Kiselev, *Nongeometrical waves – are there any ? An asymptotic description of some "nongeometrical" phenomena in seismic wave propagation.* — Geophys. J. Intern. **99**, No. 2 (1989), 415–420.
8. А. П. Киселев, *Примесные компоненты упругих волн.* — Изв. АН СССР. Физика Земли No. 5 (1983) 51–56.
9. А. В. Гаврилов, А. П. Киселев, *Влияние неоднородности среды и направленности источника на поляризацию упругих $P$-волн.* — Изв. АН СССР. Физика Земли No. 6 (1986), 84–87.
10. В. М. Гурьянов, О. В. Карева, *Алгоритм вычисления двух лучевых приближений решения смешанной задачи для уравнения Ламе.* — В кн.: Вопр. динам. теории распростр. сейсм. волн, В. 25 (1986), 149–169.
11. А. П. Киселев, Ю. В. Рослов, *Использование примесных компонент при численном моделировании поляризационных аномалий объемных упругих волн.* — Геология и Геофизика No. 4 (1991), 121–131.
12. L. Eisner, I. Pšenčík, *Computation of additional components of the first-order ray approximation in isotropic media.* — Pure Appl. Geophys. **148** (1996), 227–253.
13. А. П. Киселев, *Дифракционная деполяризация.* — Ж. технической физики **56**, No. 6 (1987), 330–332.
14. L. Fradkin, A. P. Kiselev, *The two-component representations of time-harmonic elastic body waves at high- and intermediate-frequency regimes.* — J. Acoust. Soc. Amer. **101**, No. 1 (1997), 52–65.
15. А. П. Киселев, В. О. Яровой, *Дифракция, интерференция и деполяризация упругих волн. I. Поляризационные аномалии вблизи слабоконотрастной границы раздела.* — Изв. РАН, Физика Земли No. 11 (1994), 32–39.
16. V. Farra, S. Le Begat, *Sensitivity of $qP$-wave travel times and polarization vectors to heterogeneity, anisotropy and interfaces.* – Geophys. J. Int. **121**, No. 2 (1995), 371–382.
17. C. Boutin, J. L. Aurialt, *Rayleigh scattering in elastic composite materials.* — Int. J. Eng. Sci. **31**, No. 12 (1993), 1669–1689.
18. С. И. Александров, *Деполяризация объемных упругих волн при рассеянии в случайно-неоднородной среде.* — Изв. РАН, Физика Земли **9** (1997), 81–88.
19. Н. А. Караев, Е. Н. Фролова, А. А. Анисимов, *Физическое моделирование поля рассеянных сейсмических волн при просвечивании гетерогенных*

*блоков.* – Методы разведочной геофизики. Сейсморазведка в рудных районах. Л. НПО Рудгеофизика (1989), 38–55.

20. Е. Н. Фролова, *Волны просвечивания в гетерогенных системах со среднемасштабными включениями.* Канд. дисс. ЛГУ (1991).
21. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции.* ЛГУ, Л. (1975).
22. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля.* Наука, М. (1967).
23. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики.* Наука, М. (1970).
24. Н. Я. Кирпичникова, *О поведении вблизи каустики нестационарного волнового поля с особенностью (типа однородной обобщенной функции) на фронте.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **186** (1990), 122–133.
25. Т. Б. Яновская, *Исследование решений уравнений динамической теории упругости в окрестности каустики.* — В кн.: Вопр. динам. теории распростр. сейсм. волн, В.7 (1964), 61–76.
26. С. В. Гольдин, *Преобразование и восстановление разрывов в задачах томографического типа.* – Ин-т геол. и геофиз, СО АН СССР. Новосибирск (1982).
27. A. Hanyga, M. A. Slawinski, *Caustics in qSV rayfields of transversely isotropic and vertically inhomogeneous media.* Anisotropy 2000: Fractures, Converted Waves and Case Studies (9IWSA), ed. L. Ikelle and A. Gangi, Soc. Exploration Geophys (2000), 1–18.
28. В. А. Фок, *Диффракция Френеля от выпуклых тел.* — Усп. физ. наук **43**, No. 4 (1950), 587–599.
29. В. А. Фок, *Проблемы диффракции и распространения электромагнитных волн.* Наука, М. (1970).
30. А. П. Киселев, Б. А. Чихачев, *Методика локальных разложений в задачах с двумя скоростями распространения волн.* — В кн.: – VI Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн. Т. 1, Ереван (1973), 376–380.
31. Б. А. Чихачев, *Дифракция высокочастотной упругой волны на границе двух неоднородных сред.* – Вестник ЛГУ, (Сер. Физика, Химия) No. 2 (1975), 142–146.
32. Б. А. Чихачев, *Дифракция упругой волны на границе двух неоднородных сред.* — В кн.: Вопр. динам. теории распростр. цейсм. волн, В. 16 (1976), 11–16.
33. К. Д. Клем-Мусатов, *Об изменении интенсивности волновых фронтов в окрестности геометрической тени.* — ДАН СССР **223**, No. 2 (1975), 339–342.
34. J. D. Achenbach, A. K. Gautesen, H. McMaken, *Ray Methods for Waves in Elastic Solids.* Pitman (1982).
35. C. J. Thomson, *Corrections for grazing rays in 2-D seismic modelling.* — Geophys. J. Intern. **96**, No. 3 (1989), 415–446.
36. К. Д. Клем-Мусатов, *Поперечная диффузия от границы геометрической тени.* – Геология и геофизика No. 10 (1976), 130–139.
37. Л. Д. Вайнштейн, Д. Е. Вакман, *Разделение частот в теории колебаний и волн.* Наука, М. (1983).

38. E. A. Flinn, *Signal analysis using rectilinearity and direction of particle motion.* — Proc. IEEE **53** (1965), 1880–1884.

Kiselev A. P., Yarovoy V. O., and Vsemirnova E. A. Polarization anomalies of elastic waves. Caustic and penumbra.

Theoretical study of polarization-spectral anomalies of a wave field (that is its deviation from that predicted by simple plane-wave models) is presented. A simple method of numerical simulation of anomalies of nonstationary wave fields near a caustic and in penumbra is described. It uses both leading and correcting terms in asymptotic formulas. Examples of simulation of displacements and average polarization ellipses are given. A discussion of quantitative properties of wave fields presented.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Институт проблем машиноведения РАН
С.-Петербургский университет
аэрокосмического приборосторения

Поступило 10 марта 2003 г.