Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 297, 2003 г.

Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, Н. Г. Власюк

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В ВОЛНОВОДЕ. II

Введение

Исследуется модельная задача распространения возбуждаемых точечным источником волн в волноводе. Скорость распространения волн в волноводе специальным образом зависит от вертикальной составляющей и задача допускает точное решение в виде контурного интеграла.

Путем преобразований "комбинированного метода" точное решение представляется в виде суммы геометрооптических, нормальных волн и остатка. Остаток выражается простой формулой и описывает сложное интерференционное волновое поле на значительных расстояниях от источника. Поле соответствует лучам, которые расположены в окрестности каустик вблизи линии минимума скорости. Получены достаточные условия на количество отщепленных нормальных и геометрооптических волн.

"Комбинированный метод" впервые был предложен В. Б. Филипповым для получения поля точечного источника в окрестности вогнутой стороны зеркала [1–3].

В работе В. Б. Филиппова [4] этот метод применен к изучению эталонной задачи распространения волн в волноводе в предельном варианте (без краевых условий). Эталонная задача предполагает специальную зависимость скорости от координат, при которой решение уравнения Гельмгольца выражается через функции параболического цилиндра.

В статье авторов [5] исследовалась поставленная модельная задача, но там задача не решена до конца, так как рассмотрено только слагаемое, независящее от краевых условий. Данная работа служит подготовительным этапом для нахождения поля в волноводе, когда скорость произвольным образом зависит от вертикальной переменной, имеет минимум по этой переменной и

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) (грант 02-01-00260).

медленно измененяется в волноводе как функция от горизонтальной составляющей.

Мы пользуемся результатами работ В. С. Булдырева [6, 7], где исследован процесс отщепления волн геометрической природы (или их поглощение осевой волной) если источник и точка наблюдения находятся на оси канала. Интерференция волн описывалась в [6, 7] сложной специальной функцией, которая была протабулирована в работе В. С. Булдырева, А. И. Ланина, З. А. Янсон [8].

Заметим, что близкие (с некоторыми отличиями) результаты, полученные другими методами, имеются в работах [9–19].

Известно, что в средах с немонотонным показателем преломления возникает волновод с осью по линии максимума показателя преломления. Поле лучей в волноводе образует сложную систему каустик, имеющих на оси канала острия и сгущающихся при возрастании расстояния между источником и наблюдателем.

Для получения поля точечного источника в волноводе необходимы существенные усложнения лучевого метода (Грикуров [9]), либо применение метода канонического оператора Маслова (Крюковский, Лукин, Палкин [10]). В [10] проведено численное сравнение метода Маслова с методом суммирования гауссовых пучков (Качалов, Попов [11, 12]) при описании амплитуды поля акустической волны, распространяющейся в неоднородном звуковом канале в области фокусировки. Применение метода нормальных волн также наталкивается на трудности, поскольку при высоких частотах возникает необходимость суммирования большого числа мод. Именно для этого случая в работе А. С. Старкова [13] предложен метод асимптотического суммирования нормальных волн, основанный на использовании производящей функции для полиномов Эрмита.

1. Постановка задачи

Рассмотрим модельную задачу распространения волн, возбуждаемых точечным источником, в двумерной среде с показателем преломления, зависящим только от вертикальной составляющей специального вида

$$n(z) = \sqrt{1 - \left(\frac{z}{l_1}\right)^2}, \quad |z| < l_1. \tag{1.1}$$

Звуковое давление u удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2 n^2(z))u = -\delta(x)\delta(z - z_0), \tag{1.2}$$

краевому условию Дирихле на верхней границе

$$z = z_1, \quad l_1 > z_1 > z_0,$$

краевому условию Неймана на нижней границе

$$z = z_2, \quad -l_1 < z_2 < z_0,$$

соответственно, и условиям предельного поглощения на бесконечности

$$u \to 0 \quad \text{при} \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} \to \infty, \quad \operatorname{Im} k > 0. \tag{1.3}$$

Применив к уравнению (1.2) преобразование Фурье по переменной x, для подинтегральной функции $\Psi(z, \zeta)$ получим следующую задачу Штурма–Лиувилля:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \left(k^2 n^2(z) - k^2 \zeta^2\right)\Psi = -\delta(z - z_0), \tag{1.4}$$

$$\Psi(z, \zeta)|_{z=z_1} = 0, \quad \frac{\partial \Psi(z, \zeta)}{\partial z}|_{z=z_2} = 0. \tag{1.5}$$

Введем большой параметр задачи $\mathcal{K}$, новую переменную Z и параметр t по формулам

$$\begin{aligned} &\mathcal{K} = \frac{k l_1}{2} \gg 1, \quad Z = \sqrt{\frac{2k}{l_1}} z = \sqrt{\mathcal{K}} \frac{2z}{l_1}, \\ &t + 1/2 = (1 - \zeta^2)\frac{k l_1}{2} = (1 - \zeta^2)\mathcal{K}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Тогда функция Грина $\Psi(Z, Z_0, \zeta)$ задачи (1.4), (1.5) примет следующий вид

$$\Psi(Z, Z_0, \zeta) = \begin{cases} \frac{\Psi_1(Z_0)\Psi_2(Z)}{W(\Psi_1 \Psi_2)}, & Z_2 < Z < Z_0, \\ \frac{\Psi_1(Z)\Psi_2(Z_0)}{W(\Psi_1 \Psi_2)}, & Z_1 > Z > Z_0, \end{cases} \tag{1.7}$$

или в более компактной форме

$$\Psi(Z_>, Z_<, \zeta) = \frac{\Psi_1(Z_>)\Psi_2(Z_<)}{W(\Psi_1 \Psi_2)}. \tag{1.8}$$

Здесь через $Z_>$, $(Z_<)$ обозначены наибольшее, (наименьшее) значение аргументов (Z, Z_0); $W(\Psi_1\Psi_2)$ – определитель Вронского двух линейно независимых решений Ψ_1, Ψ_2

$$W(\Psi_1\Psi_2) = \Psi_1\frac{\partial\Psi_2}{\partial Z} - \Psi_2\frac{\partial\Psi_1}{\partial Z} =$$

$$= -W(D_t(Z)D_t(-Z))[D_t(Z_1)D_t'(-Z_2) + D_t(-Z_1)D_t'(Z_2)], \qquad (1.9)$$

а $W(D_t(Z)D_t(-Z))$ есть вронскиан функций параболического цилиндра $D_t(Z)$ и $D_t(-Z)$ равный

$$W(D_t(Z)D_t(-Z)) = 2D_t(0)\,D_t'(0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(t+1)\sin\,\pi t.$$

Решение задачи (1.2), (1.3) с показателем преломления вида (1.1) определяется следующим выражением

$$u(x,z) = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{kl_1}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx\zeta}\frac{\Psi_1(Z_>)\Psi_2(Z_<)}{D_t(0)D_t'(0)\Psi_2(Z_1)}\,d\zeta \qquad (1.10)$$

где линейно независимые решения Ψ_1, Ψ_2 определены формулами

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1 &= D_t(Z)D_t(-Z_1) - D_t(-Z)D_t(Z_1), \\ \Psi_2 &= D_t(Z)D_t'(-Z_2) + D_t(-Z)D_t'(Z_2). \end{aligned}\right\} \qquad (1.11)$$

Корни знаменателя подинтегрального выражения (1.10) совпадают с корнями вронскиана $D_t(0)D_t'(0)$ и функции $\Psi_2(Z_1)$. На плоскости комплексного переменного ζ корни $\sin\pi t = 0$ (корни вронскиана $D_t(0)D_t'(0)$) могут быть определены [6] из соотношений

$$t = \frac{1}{2}\big[kl_1(1-\zeta^2) - 1\big] = n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots N, \ldots,$$

и равны

$$\zeta = \zeta_n \equiv \pm\sqrt{1 - \frac{2n+1}{kl_1}}. \qquad (1.12)$$

Таким образом, полюса $\pm\zeta_n$ располагаются на плоскости ζ симметрично относительно начала координат. При вещественных k и $n < \mathcal{K} - 1/2 \equiv n_0$ полюса $\pm\zeta_n$ вещественны и по модулю не превосходят единицы: $|\pm\zeta_n| < 1$, при $n > n_0$ будут чисто мнимыми.

Для сходимости интеграла (1.10) контур интегрирования при $x < 0$ должен быть приподнят во второй квадрант плоскости ζ, $\operatorname{Im}\zeta > 0$, а при $x > 0$ опущен в четвертый квадрант $\operatorname{Im}\zeta < 0$.

Полюса подинтегрального выражения, которые являются нулями знаменателя $\Psi_2(Z_1) = D_t(Z_1)D_t'(-Z_2) + D_t(-Z_1)D_t'(Z_2) = 0$, тоже определены на плоскости комплексного переменного ζ и зависят от соотношения между t и Z_i, $i = 1, 2$. При $|Z_i| \gg 1$, что эквивалентно $\sqrt{\mathcal{K}}H/l_1 \gg 1$, где H – ширина волновода $z_1 - z_2 = H$, и при $|t + 1/2| \gg |\frac{Z_i^2}{4}|$ нули знаменателя $\Psi_2(Z_1) = 0$ равны нулям функции $\sin\sqrt{t + 1/2}(Z_1 - Z_2) = 0$.

Для этого необходимо воспользоваться асимптотикой функций параболического цилиндра при больших $|t + 1/2|$. Асимптотика функций параболического цидиндра $D_t(Z)$ и $D_t(-Z)$ на плоскости комплексного переменного ζ (плоскость значка t), при больших $|t + 1/2|$, ($|t + 1/2| \gg |\frac{Z^2}{4}|$) имеет осциллирующий характер. ВКБ приближение в этом случае дает для функций параболического цилиндра асимптотическое выражение вида

$$D_t(Z) \underset{|t+\frac{1}{2}|\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[4]{t+\frac{1}{2}}} \exp\left(\pm i\sqrt{t+\frac{1}{2}}Z\left(1 - \frac{Z^2}{24(t+\frac{1}{2})} + \dots\right)\right).$$

Числитель подынтегрального выражения (1.10) при $|t + 1/2| \gg |Z^2/4|$ имеет оценку, составленную из линейной комбинации функций вида

$$\sim \frac{c}{\sqrt{t+\frac{1}{2}}} \exp\left\{ikx\zeta \pm i\sqrt{t+\frac{1}{2}}\,(Z_> \pm Z_<)\right\}\times$$
$$\times \exp\left\{ \pm i\sqrt{t+\frac{1}{2}}(Z_1 \pm Z_2)\right\}, \qquad (1.13)$$

где $\sqrt{t + 1/2} = \sqrt{|t + 1/2|}\exp(i/2\arg(t + 1/2))$, $|\arg(t + 1/2)| < \pi$, причем знак "+" берется, когда $0 < \arg(t + 1/2) < \pi$, знак "−" берется, когда $-\pi < \arg(t + 1/2) < 0$.

Нетрудно показать, что при $x > 0$ контур интегрирования в интеграле (1.10) можно продеформировать и совместить с контуром γ, изображенным на рис. 1.

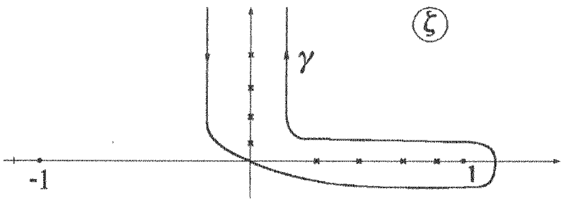

Рис. 1.

Тогда интеграл (1.10) примет следующее выражение

$$u(x,z) = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{kl_1}{2}}\int\limits_{\gamma} e^{ikx\zeta}\frac{\Psi_1(Z_>)\Psi_2(Z_<)}{D_t(0)D_t'(0)\Psi_2(Z_1)}\,d\zeta, \qquad (1.14)$$

Полюса подинтегрального выражения, которые являются нулями знаменателя $\Psi_2(Z_1)$, определены на плоскости комплексного переменного ζ из уравнения

$$\sqrt{t+1/2}[Z_1 - Z_2] = k\sqrt{1-\zeta^2}H = r\pi, \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

и равны

$$t = t_r = \frac{r^2\pi^2}{(Z_1 - Z_2)^2} - \frac{1}{2}, \quad \zeta = \zeta_r \equiv \pm\sqrt{1 - \frac{r^2\pi^2}{(kH)^2}}. \qquad (1.15)$$

Нули функции $\Psi_2(Z_1)$ входят в интеграл (1.10). Они дадут еще серию полюсов подинтегрального выражения на вещественной оси по модулю меньших единицы ζ_r, $r = 1, 2, \dots, r_0$. Для $r > r_0 \equiv kH/\pi$ полюса будут чисто мнимыми при вещественном k. При выборе ширины волновода порядка $\sqrt{\mathcal{K}}H/l_1 \gg 1$, корни $\Psi_2(Z_1) = 0$ (1.15) располагаются между корнями $\sin\pi t = 0$. Минимальное расстояние между корнями ζ_n, $n = 1, 2, \dots, n_0$ имеет порядок $O([\mathcal{K}]^{-1})$, расстояние между корнями ζ_r, $r = 1, 2, \dots, r_0$ имеет порядок $O([\sqrt{\mathcal{K}}]^{-1})$, $\mathcal{K} \gg 1$.

2. Исследование решения задачи

Для распространения звука в океане наиболее важно не абсолютное значение скорости звука, а форма (профиль) кривой $c(z) = (n(z))^{-1}$ и прежде всего распределение градиента скорости звука по глубине. Для глубоководных районов типичным является профиль $c(z)$, при котором на некоторой глубине имеется минимум скорости звука. Эта глубина называется осью подводного звукового канала. Если источник звука расположен на оси подводного звукового канала или вблизи нее, то часть звуковых волн оказывается “захваченной” звуковым каналом и распространяется в нем, не касаясь ни дна, ни поверхности океана и, следовательно, не испытывает рассеяния и поглощения на его границах. Луч, вышедший из излучателя под не слишком большим углом скольжения Ψ (углом, составленным с горизонталью), будет вновь и вновь возвращаться к оси канала. Такое распространение называется волноводным. Подводный звуковой канал является частным случаем природного волновода. Акустический волновод имеется и в атмосфере [16].

Ограничимся в данной работе исследованием решения задачи (1.2), (1.3) в случае, когда источник и наблюдатель находятся вблизи оси волновода, а границы волновода $z = z_1 > 0$, $z = z_2 < 0$ далеки по отношению к предельным границам волновода так, что $H/l_1 \ll 1$, где через $H = z_1 - z_2$ обозначена ширина волновода. Так порядок малости H определен нами условием $1 \ll \sqrt{\mathcal{K}} H/l_1 \ll \sqrt{\mathcal{K}}$, а близость источника и наблюдателя к оси волновода уточним позже.

Продеформируем контур интегрирования (1.14) γ (рис. 1) в контур γ_N (рис. 2).

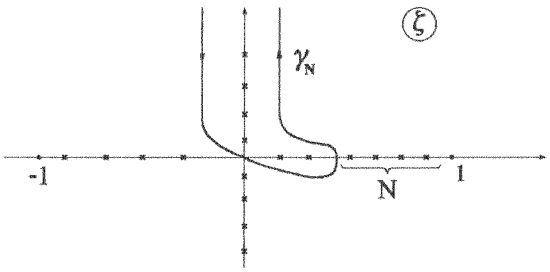

Рис. 2.

При этом выделится сумма вычетов в полюсах (1.12), (1.15) подынтегрального выражения (1.14) (так называемые нормальные волны двух серий).

После выделения N и R нормальных волн, соответствующих нулям функций $\sin \pi t$ и $\Psi_2(Z_1)$, интеграл (1.14) примет вид:

$$u = \sum_{n=0}^{N} u_n^{\text{norm}} + \sum_{r=0}^{R} u_r^{\text{norm}} + \\ + \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{kl_1}{2}} \int\limits_{\gamma_N} e^{ikx\zeta} \frac{\Psi_1(Z_>)\,\Psi_2(Z_<)}{D_t(0)\,D_t'(0)\Psi_2(Z_1)}\,d\zeta, \tag{2.1}$$

где

$$u_n^{\text{norm}} = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{e^{ikx\sqrt{1-\frac{2n+1}{kl_1}}}}{\sqrt{kl_1-(2n+1)}} \left[\frac{\Psi_1(Z_>)\Psi_2(Z_<)}{\Psi_2(Z_1)}\right]\Bigg|_{t=n}, \tag{2.2}$$

$$u_r^{\text{norm}} = \frac{l_1 r\pi(-1)^{r+1}}{8\sqrt{\mathcal{K}}H} \frac{e^{ikx\sqrt{1-\frac{r^2\pi^2}{k^2H^2}}}}{\sqrt{k^2H^2-r^2\pi^2}} \left[\frac{\Psi_1(Z_>)\Psi_2(Z_<)}{D_t(0)D_t'(0)}\right]\Bigg|_{t=t_r}. \tag{2.3}$$

В формуле (2.2) произведение функций $\Psi_1(Z_>)\Psi_2(Z_<)$ деленное на $\Psi_2(Z_1)$ вычисляется для значка t функций параболического цилиндра, принимающих целые значения $t = n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, N$, а в формуле (2.3) индекс функций параболического цилиндра $t = t_r$, $r = 0, 1, 2, 3, \ldots, R$ вычисляется согласно равенству (1.15).

Учитывая порядок выбора ширины волновода, получаем, что порядок $N \sim O(\mathcal{K})$, а $R \sim O(\sqrt{\mathcal{K}})$. Следовательно число корней R функции $\Psi_2(Z_1)$ ограничено числом N. Условия на выбор величины N укажем ниже, когда выделим из интеграла (2.1) геометрооптическую часть поля.

3. Комбинированное представление поля

В этом разделе из решения задачи, состоящей из суммы нормальных волн двух видов и интеграла по контуру γ_N,

$$\begin{gathered} u = \sum_{n=0}^{N} u_n^{\text{norm}} + \sum_{r=0}^{R} u_r^{\text{norm}} + I, \\ I = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{kl_1}{2}} \int\limits_{\gamma_N} e^{ikx\zeta} \frac{\Psi_1(Z_>)\,\Psi_2(Z_<)}{D_t(0)\,D_t'(0)\Psi_2(Z_1)}\,d\zeta, \end{gathered} \tag{3.1}$$

выделим геометрооптическую часть и некоторый остаток. Для этого подставим в интеграл вместо Ψ_1, Ψ_2 их выражения через функции параболического цилиндра (1.11) и представим интеграл суммой интегралов $I = \sum_{\alpha_1\beta_1=\pm1} I_{\alpha_1\beta_1}$, где

$$I_{\alpha_1\beta_1} = \frac{\sqrt{\mathcal{K}}}{4\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\gamma_N} \frac{e^{ikx\zeta}}{\sin \pi t \Gamma(t+1)} \times \\ \times \frac{D_t(\alpha_1 Z_>) D_t(\beta_1 Z_<) D_t(-\alpha_1 Z_1) D_t'(-\beta_1 Z_2)}{[D_t(Z_1)D_t'(-Z_2) + D_t(-Z_1)D_t'(Z_2)]} d\zeta, \tag{3.2}$$

Асимптотический метод ВКБ при $|t+1/2| \gg |Z^2/4|$ даст нам следующее выражение для интеграла (3.2)

$$I_{\alpha_1\beta_1} = \frac{\sqrt{\mathcal{K}}}{4\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\gamma_N} \frac{e^{ikx\zeta}}{\sin \pi t \Gamma(t+1)} \times \\ \times \frac{D_t(\alpha_1 Z_>) D_t(\beta_1 Z_<) e^{\pm i\sqrt{t+1/2}(\alpha_1 Z_1 + \beta_1 Z_2)}}{2i \sin \sqrt{t+1/2}(Z_1 - Z_2)} d\zeta. \tag{3.3}$$

Как и в работе [6], разложим функции

$$(\sin \pi t)^{-1} \quad \text{и} \quad (\sin \sqrt{t+1/2}(Z_1 - Z_2))^{-1}$$

в геометрическую прогрессию с остаточными членами:

$$\frac{1}{\sin \pi t} = -2i\left[\sum_{m=0}^{M-1} e^{i\pi t(2m+1)} + \frac{e^{i\pi t(2M+1)}}{1 - e^{i2\pi t}}\right], \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{\sin \sqrt{t+1/2}(Z_1 - Z_2)} = \\ = -2i\left[\sum_{j=0}^{Y-1} e^{i\sqrt{t+1/2}(Z_1-Z_2)(2j+1)} + \frac{e^{i\sqrt{t+1/2}(Z_1-Z_2)(2Y+1)}}{1 - e^{i2\sqrt{t+1/2}(Z_1-Z_2)}}\right]. \tag{3.5}$$

Подставляя ряды (3.4), (3.5) вместо синусов знаменателя в интеграл (3.3), представим интеграл суммой $M+Y$ интегралов и трех остаточных интегралов. Очевидно, что интегралы, стоящие в двойной сумме по m от 0 до $M-1$ и по j от 0 до $Y-1$, равны нулю, поскольку подынтегральное выражение не имеет особенностей, и контур интегрирования γ_N стягивается в точку.

Если в (3.5) сделаем замену $\sqrt{t+1/2}(Z_1 - Z_2) = kH\sqrt{1-\zeta^2}$, для интеграла (3.3) получим формулу

$$
\begin{aligned}
I_{\alpha_1\beta_1} = &-\frac{\sqrt{\mathcal{K}}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\gamma_N} \frac{e^{ikx\zeta} e^{\pm ik\sqrt{1-\zeta^2}(\alpha_1 z_1 + \beta_1 z_2)} D_t(\alpha_1 Z_>) D_t(\beta_1 Z_<)}{2i\Gamma(t+1)} \times \\
&\times \Bigg\{ \sum_{m=0}^{M-1} \frac{e^{i\pi t(2m+1)} e^{2ik\sqrt{1-\zeta^2}H(2Y+1)}}{1 - e^{2ikH\sqrt{1-\zeta^2}}} d\zeta + \\
&+ \sum_{j=0}^{Y-1} \frac{e^{i\pi t(2M+1)} e^{ik\sqrt{1-\zeta^2}H(2j+1)}}{1 - e^{2i\pi t}} d\zeta \\
&+ \frac{e^{i\pi t(2M+1)} e^{ik\sqrt{1-\zeta^2}H(2Y+1)}}{(1 - e^{2i\pi t})(1 - e^{2ikH\sqrt{1-\zeta^2}})} d\zeta \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Далее заменим функции параболического цилиндра $D_t(\alpha_1 Z_>)$ $D_t(\beta_1 Z_<)$, входящие как линейная комбинация в подинтегральное выражение (3.6), на новые функции по формуле:

$$
D_t(Z) = \frac{\Gamma(t+1)}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{i\pi t/2} D_{-t-1}(iZ) + e^{-i\pi t/2} D_{-t-1}(-iZ) \right]. \tag{3.7}
$$

Предположим, что контур γ_N настолько удален от точки $\zeta = 1$ $(t = 0)$, что на нем выполняются условия:

$$
\left| t + \frac{1}{2} \right| \gg 1, \quad \operatorname{Re} \sqrt{t + \frac{1}{2}} - \frac{Z}{2} \gg \left| t + \frac{1}{2} \right|^{-1/6}. \tag{3.8}
$$

Тогда функции параболического цилиндра можно заменить на их асимптотические разложения:

$$
\begin{aligned}
D_{-t-1}(iZ) \sim &\left[1 - \frac{Z^2}{4(t+\frac{1}{2})} \right]^{-1/4} \times \\
&\times \exp\left\{ -i\Big(t + \frac{1}{2}\Big) P\left(\frac{Z}{2\sqrt{t+\frac{1}{2}}} \right) \right\} D_{-t-1}(0),
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

где $P(x) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$.

Заметим, что имеют место формулы

$$
D_{-t-1}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, 2^{-t/2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{t}{2}+1\right)}, \tag{3.10}
$$

$$\Gamma(t+1)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}2^t\Gamma\Big(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{t}{2}+1\Big), \tag{3.11}$$

$$\frac{\Gamma\Big(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{t}{2}+1\Big)}\sim\sqrt{\frac{2}{t}}\quad\text{при}\quad |t|\gg 1,\ |\arg t|<\pi. \tag{3.12}$$

При подстановке формул (3.7), (3.9)–(3.12) в интеграл (3.6) получим:

$$I_{\alpha_1\beta_1}=\frac{i\sqrt{\mathcal{K}}}{8\pi}\sum_{\alpha,\beta=\pm1}\int\limits_{\gamma_N}\varphi(t,\alpha_1 Z_>,\beta_1 Z_<)\Big\{\sum_{m=0}^{M-1}\frac{e^{ik\Phi_{m\alpha\beta Y}}}{1-e^{2ikH\sqrt{1-\zeta^2}}}d\zeta+$$

$$+\sum_{j=0}^{Y-1}\frac{e^{ik\Phi_{M\alpha\beta j}}}{1-e^{2i\pi t}}d\zeta+\frac{e^{ik\Phi_{M\alpha\beta Y}}}{(1-e^{2i\pi t})(1-e^{2ikH\sqrt{1-\zeta^2}})}d\zeta\Big\}, \tag{3.13}$$

$$\Phi_{m\alpha\beta j}=x\zeta+\frac{t\pi}{k}\Big[2m+1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\Big]-\frac{t+\frac{1}{2}}{k}\Big[\alpha P\Big(\frac{\alpha_1 Z_>}{2\sqrt{t+\frac{1}{2}}}\Big)-$$

$$-\beta P\Big(\frac{\beta_1 Z_<}{2\sqrt{t+\frac{1}{2}}}\Big)\Big]+\sqrt{1-\zeta^2}[H(2j+1)\pm(\alpha_1 z_1+\beta_1 z_2)], \tag{3.14}$$

$$\varphi=\Big(t+\frac{1}{2}-\frac{(\alpha_1 Z_>)^2}{4}\Big)^{-1/4}\Big(t+\frac{1}{2}-\frac{(\beta_1 Z_<)^2}{4}\Big)^{-1/4}. \tag{3.15}$$

Каждый интеграл в формуле (3.13) по контуру γ_N разобьем на два: интеграл с фазовым множителем $\Phi_{m\alpha\beta Y}$ представим интегралами по контуру γ^1 и γ^2_{NR}, интегралы с фазовыми множителями $\Phi_{M\alpha\beta j}$ и $\Phi_{M\alpha\beta Y}$ заменим на интегралы по контуру γ^1 и γ^2_N. Контуры γ^1, γ^2_{NR} и γ^2_N при $\operatorname{Im}\zeta<0$ уходят на бесконечность в секторе $-\pi/2<\arg\zeta<-\pi/4$, а при $\operatorname{Im}\zeta>0$ – γ^1 в секторе $\pi/2<\arg\zeta<3\pi/4$; γ^2_{NR}, γ^2_N в секторе $\pi/4<\arg\zeta<\pi/2$. Схематически контуры γ^1 и γ^2_N показаны на рис. 3, контур γ^2_{NR} ведет себя подобно контуру γ^2_N.

Контур γ^2_N пересекает вещественную ось при $\zeta=a_N$, так что

$$\zeta_{N+1}<a_N<\zeta_N, \tag{3.16}$$

где $\zeta_n=\sqrt{1-\frac{2n+1}{kl_1}}$, а контур γ^2_{NR} пересекает вещественную ось при $\zeta=a_R$, где

$$\zeta_{R+1}<a_R<\zeta_R, \tag{3.17}$$

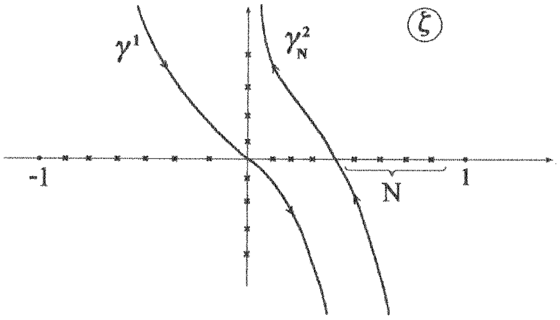

Рис. 3.

а $\zeta_r \equiv \pm\sqrt{1-\frac{r^2\pi^2}{(kH)^2}}$. Нетрудно показать, что интегралы по контуру γ^1, γ^2_{NR} и γ^2_N существуют по отдельности.

В интегралах по γ^1 разложим знаменатели в геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{1-e^{i2\pi t}} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{i2m\pi t},$$
$$\frac{1}{1-e^{2ik\sqrt{1-\zeta^2}H}} = \sum_{j=0}^{\infty} e^{2ik\sqrt{1-\zeta^2}Hj},$$

тогда формула (3.1) примет вид

$$\begin{aligned} u = \sum_{n=1}^{N} u_n^{\text{norm}} + \sum_{r=1}^{R} u_r^{\text{norm}} + \sum_{\alpha_1\beta_1=\pm1}\sum_{\alpha,\beta=\pm1}\Bigg\{\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{j=Y}^{\infty} I^{(1)}_{m\alpha\beta j} + \\ + \sum_{m=M}^{\infty}\sum_{j=0}^{Y-1} I^{(1)}_{m\alpha\beta j} + \sum_{m=M}^{\infty}\sum_{j=Y}^{\infty} I^{(1)}_{m\alpha\beta j} + \\ + \sum_{m=0}^{M-1} I^{(2)}_{m\alpha\beta Y} + \sum_{j=0}^{Y-1} I^{(2)}_{M\alpha\beta j} + I^{(2)}_{M\alpha\beta Y}\Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

где

$$I^{(1)}_{m\alpha\beta j} = \frac{i\sqrt{K}}{8\pi}\int\limits_{\gamma^1} \varphi(\zeta,\alpha_1 Z_>,\beta_1 Z_<)e^{ik\Phi_{m\alpha\beta j}(\zeta,x,\alpha_1 Z_>,\beta_1 Z_<)}\,d\zeta, \tag{3.19}$$

$$I^{(2)}_{m\alpha\beta Y}=\frac{i\sqrt{\mathcal{K}}}{8\pi}\int\limits_{\gamma^2_{NR}}\varphi(\zeta,\alpha_1 Z_>,\beta_1 Z_<)\frac{e^{ik\Phi_{m\alpha\beta Y}(\zeta,x,\alpha_1 Z_>,\beta_1 Z_<)}}{1-e^{2ikH\sqrt{1-\zeta^2}}}\,d\zeta, \quad (3.20)$$

$$I^{(2)}_{M\alpha\beta j}=\frac{i\sqrt{\mathcal{K}}}{8\pi}\int\limits_{\gamma^2_{N}}\varphi(\zeta,\alpha_1 Z_>,\beta_1 Z_<)\frac{e^{ik\Phi_{M\alpha\beta j}(\zeta,x,\alpha_1 Z_>,\beta_1 Z_<)}}{1-e^{i2\pi t}}\,d\zeta, \quad (3.21)$$

$$I^{(2)}_{M\alpha\beta Y}= \\ =\frac{i\sqrt{\mathcal{K}}}{8\pi}\int\limits_{\gamma^2_{N}}\varphi(\zeta,\alpha_1 Z_>,\beta_1 Z_<)\frac{e^{ik\Phi_{M\alpha\beta Y}(\zeta,x,\alpha_1 Z_>,\beta_1 Z_<)}}{(1-e^{i2\pi t})(1-e^{2ik\sqrt{1-\zeta^2}H})}d\zeta. \quad (3.22)$$

4. Вычисление интегралов $I^{(1)}_{m\alpha\beta j}$, $I^{(2)}_{m\alpha\beta Y}$, $I^{(2)}_{M\alpha\beta j}$, $I^{(2)}_{M\alpha\beta Y}$

Обратимся к вычислению входящих в формулы (3.19)–(3.22) интегралов $I^{(1,2)}_{m\alpha\beta j}$.

4.1. Интегралы $I^{(1)}_{m\alpha\beta j}$ могут быть вычислены методом стационарной фазы [5]. Уравнение для стационарной точки имеет вид (в переменных ζ и z малое)

$$\Phi'_{m\alpha\beta j}=x-l_1\zeta\left\{\left[2m+1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\pi-\alpha\arcsin\frac{\alpha_1 z_>}{l_1\sqrt{1-\zeta^2}}+\right. \\ \left.+\beta\arcsin\frac{\beta_1 z_<}{l_1\sqrt{1-\zeta^2}}+\frac{[H(2j+1)\pm(\alpha_1 z_1+\beta_1 z_2)]}{l_1\sqrt{1-\zeta^2}}\right\}=0. \quad (4.1)$$

Учитывая ширину волновода $H=O((\sqrt{\mathcal{K}})^{-1})$, получаем, что последнее слагаемое в (4.1) не влияет на значение стационарной точки.

Решение этого уравнения $\zeta=\zeta_{m\alpha\beta j}$ имеет наглядную лучевую интерпретацию. Выпустим из источника $x=0$, $z=z_0$ (предположим, что $z_0=z_>$) луч так, чтобы он попал в точку наблюдения (x,z).

Для частного закона (1.1) изменения показателя преломления $n(z)$ уравнение луча имеет вид (см. [6]):

$$z=A\sin(Bx+C),$$

где

$$A = l_1\sqrt{1-a^2}, \quad B = \frac{1}{l_1 a}, \quad C = \arcsin\frac{z_0}{A}.$$

Величина $a = n(z)\cos\Psi(z)$ постоянна на луче ($\Psi(z)$ – угол наклона луча).

Расстояние между соседними точками пересечения лучом оси x называют циклом, величина цикла равна $l = \pi l_1 a$. Очевидно, имеет место равенство

$$x = pl \pm l_1\, a \arcsin\frac{\alpha_1 z_0}{l_1\sqrt{1-a^2}} \pm l_1\, a \arcsin\frac{\beta_1 z}{l_1\sqrt{1-a^2}}. \tag{4.2}$$

В этом случае будем говорить, что луч имеет p циклов. Знаки "+" или "−" выбираются в зависимости от знаков z_0, z и четности величины p. С учетом этого можно записать

$$x = \big[2m+1+(\alpha+\beta)/2\big]\,l - \alpha l_1 a \arcsin\frac{\alpha_1 z_>}{l_1\sqrt{1-a^2}} +$$

$$+\beta l_1 a \arcsin\frac{\beta_1 z_<}{l_1\sqrt{1-a^2}} + \frac{[H(2j+1)\pm(\alpha_1 z_1+\beta_1 z_2)]a}{\sqrt{1-a^2}},$$

$$\alpha, \quad \beta = \pm 1, \quad \alpha_1, \quad \beta_1 = \pm 1. \tag{4.3}$$

Мы видим, что формула (4.3) с точностью до $O(\mathcal{K}^{-1/2})$ совпадает с (4.1), если взять $\zeta = a$, т.е. для стационарной точки получаем выражение

$$\zeta_{m\alpha\beta j} = n(z_0)\cos\Psi, \tag{4.4}$$

где Ψ – угол выхода из точки $(0, z_0)$ луча, попадающего в точку (x, z) и имеющего $2m+1+(\alpha+\beta)/2$ циклов. Заметим, что имеет место монотонность по величине m:

$$\zeta_{m\alpha\beta j} \leqslant \zeta_{m'\alpha'\beta' j} \tag{4.5}$$

при $m > m'$ и любых α, β, α', β'. Нетрудно показать, что фаза $\Phi_{m\alpha\beta j}$, вычисленная в стационарной точке $\zeta_{m\alpha\beta j}$, равна эйконалу этого луча

$$\Phi_{m\alpha\beta j}(\zeta_{m\alpha\beta j}, x, z_>, z_<) = \tau_{m\alpha\beta j}(x, z_0, z).$$

Легко видеть, что начальный контур интегрирования γ^1 может быть совмещен со стационарным контуром для фазы $\Phi_{m\alpha\beta j}$, который проходит через точку $\zeta_{m\alpha\beta j}$ и уходит на бесконечность, асимптотически приближаясь к лучам $\arg\zeta = -\pi/4$ и $\arg\zeta = 3\pi/4$. Существенной областью интегрирования будет область, где

$$\frac{k}{2}\Phi''_{m\alpha\beta j}(\zeta_{m\alpha\beta j})\,(\zeta - \zeta_{m\alpha\beta j})^2 = O(1). \tag{4.6}$$

Метод стационарной фазы применим, если в существенной области интегрирования при $n \geqslant 3$ выполняется неравенство

$$\frac{k}{n!}\Phi^{(n)}_{m\alpha\beta j}(\zeta_{m\alpha\beta j})\,(\zeta - \zeta_{m\alpha\beta j})^n \ll 1, \tag{4.7}$$

где $\Phi^{(n)}_{m\alpha\beta j}$ – производная от фазы порядка n. Условие (4.7) будет выполнено, если производные от фазы удовлетворяют неравенству

$$k\Phi^{(n)}_{m\alpha\beta j}(\zeta_{m\alpha\beta j})\big[k\Phi''_{m\alpha\beta j}(\zeta_{m\alpha\beta j})\big]^{-n/2} \ll 1. \tag{4.8}$$

В реальных задачах распространения волн отношение z/l_1 является малой величиной. Поэтому естественно предположить, что выполняется условие

$$\left|\frac{z}{l_1\sqrt{1-\zeta^2}}\right| \ll 1. \tag{4.9}$$

Если предположить, что выполняется неравенство

$$\left|\frac{z}{(1-\zeta^2)^{3/2}}\right| \ll l_1\pi\,[2m+1+(\alpha+\beta)/2],$$

которое с учетом уравнения (4.1) эквивалентно условию

$$\left|\frac{z}{(1-\zeta^2)^{3/2}}\right| \ll x, \tag{4.10}$$

то мы получим, что вторая производная от фазы $\Phi''_{m\alpha\beta j}$ не обращается в нуль и имеет оценку

$$\Phi''_{m\alpha\beta j} \sim -l_1\pi\,[2m+1+(\alpha+\beta)/2] \sim -\frac{x}{\zeta}. \tag{4.11}$$

Окончательно получим, что неравенство (4.8) будет выполнено, если стационарная точка $\zeta = \zeta_{m\alpha\beta j}$ отделена от нуля настолько, что выполняется условие

$$\frac{kz}{(1-\zeta^2)^{n-1/2}}\,(kx)^{-n/2} \ll 1.$$

Для $\zeta = \zeta_{m\alpha\beta j}$, удовлетворяющем условию

$$1-\zeta^2 \gg \max\left\{\frac{1}{kl_1},\ \left(\frac{z}{l_1}\right)^2,\ \left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{2}{2n-1}}(kx)^{-\frac{n-2}{2n-1}}\right\} \tag{4.12}$$

при $n \geqslant 2$, проведение метода стационарной фазы для интеграла $I^{(1)}_{m\alpha\beta j}$ не встретит препятствий.

Результат вычисления интеграла $I^{(1)}_{m\alpha\beta j}$ по методу стационарной фазы дает геометрическую волну, проходящую через точки $(0, z_0)$ и (x, z). Волна имеет $2m+1+(\alpha+\beta)/2$ циклов и $2j$ раз пересекает водновод от одной границы до другой и обратно с циклом $[H(2j+1) \pm (\alpha_1 z_1 + \beta_1 z_2)]$.

4.2. Обратимся к вычислению интегралов $I^{(2)}_{M\alpha\beta j}$, $I^{(2)}_{m\alpha\beta Y}$, $I^{(2)}_{M\alpha\beta Y}$.

Рассмотрим интеграл $I^{(2)}_{M\alpha\beta j}$:

$$I^{(2)}_{M\alpha\beta j} = \frac{i\sqrt{\mathcal{K}}}{8\pi}\int\limits_{\gamma_N^2} \varphi(\zeta, \alpha_1 Z_>, \beta_1 Z_<)\frac{e^{ik\Phi_{M\alpha\beta j}(\zeta, x, \alpha_1 Z_>, \beta_1 Z_<)}}{1-e^{i2\pi t}}\,d\zeta. \tag{4.13}$$

Предположим, что точка пересечения a_N контура γ_N^2 с вещественной осью удовлетворяет неравенству

$$\zeta_{M\alpha\beta j} \leqslant a_N \leqslant \zeta_{M-1\,\alpha'\beta' j}, \forall\alpha, \beta, \alpha', \beta', \tag{4.14}$$

где

$$\zeta_{m\alpha\beta j} \sim \frac{x}{l_1\pi[2m+1+(\alpha+\beta)/2]}$$

является стационарной точкой для интеграла $I^{(1)}_{m\alpha\beta j}$. Заметим, что, ввиду соотношения (4.5), всегда можно добиться, чтобы условие (4.14) выполнялось. В верхней полуплоскости ζ при $\operatorname{Im}\zeta > 0$ величина $\exp\{i2\pi t\}$ экспоненциально растет, а в нижней полуплоскости экспоненциально убывает при удалении от вещественной оси. Следовательно, в верхней полуплоскости ζ (при $\operatorname{Im}\zeta > 0$) подынтегральное выражение в интеграле $I^{(2)}_{M\alpha\beta j}$ (см. (4.13)) будет вести себя как $\exp\{ik\Phi_{M-1\,\alpha\beta j}\}$, а в нижней ее поведение как $\exp\{ik\Phi_{M\alpha\beta j}\}$. Нетрудно показать, что при выполнении условия (4.14) подынтегральное выражение экспоненциально убывает при удалении от вещественной оси.

Имеем при $\zeta = a_N + i\xi$, учитывая (1.6), (3.15),

$$\Phi_{m\alpha\beta j}(\zeta) = \Phi_{m\alpha\beta j}(a_N) + i\Phi'_{m\alpha\beta j}(a_N)\xi + O(\Phi''_{m\alpha\beta j}\xi^2),$$

$$t(\zeta) = t(a_N) - ikl_1 a_N \xi + O(kl_1\xi^2),$$

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-a_N^2}} + O\left(\frac{\xi}{(1-a_N^2)^{3/2}}\right)\right].$$

Подставляя эти выражения в формулу (4.13), получим:

$$I^{(2)}_{M\alpha\beta j} \sim \frac{i}{8\pi\sqrt{1-a_N^2}} e^{ik\Phi_{M\alpha\beta j}(a_N)} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-k\Phi'_{M\alpha\beta j}(a_N)\xi}}{1 - e^{i2\pi t(a_N)} e^{2\pi k l_1 a_N \xi}}\, d\xi.$$

Эту формулу можно записать в другом виде

$$I^{(2)}_{M\alpha\beta j} \sim \frac{i}{2^4\pi^2 k l_1 a_N \sqrt{1-a_N^2}} \times$$

$$\times \Big\{ e^{ik\Phi_{M\alpha\beta j}(a_N)} \big[F(p_N, q_N) - e^{-iq_N} F(p_N + 1, q_N)\big] -$$

$$- e^{ik\Phi_{M-1\,\alpha\beta j}(a_N)} \big[F(3 - p_N, q_N) - e^{-iq_N} F(2 - p_N, q_N)\big] \Big\}, \qquad (4.15)$$

где

$$F(p,q) = \int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}}{1 - 2x\cos q + x^2}\, dx,$$

$$p_N = -\frac{\Phi'_{M\alpha\beta j}(a_N)}{2\pi l_1 a_N}, \quad q_N = kl_1\pi(1 - a_N^2) - \pi.$$

Заметим, что формула (4.15) имеет смысл при $1 > p_N > 0$, что выполняется, если справедливо неравенство (4.14) для величины a_N. Как видно из разложений подинтегральной функции (4.13) в окрестности точки $\zeta = a_N + i\xi$, погрешность формулы (4.15) имеет порядок максимума из величин $xk^{-1}l_1^{-2}$ и $(kl_1)^{-1}(1 - a_N^2)^{-3/2}$.

Вычислим интеграл $I^{(2)}_{m\alpha\beta Y}$:

$$I^{(2)}_{m\alpha\beta Y} = \\ = \frac{i\sqrt{\mathcal{K}}}{8\pi} \int\limits_{\gamma^2_{NR}} \varphi(\zeta, \alpha_1 Z_>, \beta_1 Z_<) \frac{e^{ik\Phi_{m\alpha\beta Y}(\zeta, x, \alpha_1 Z_>, \beta_1 Z_<)}}{1 - e^{2ik\sqrt{1-\zeta^2}H}}\, d\zeta. \quad (4.16)$$

Предположим, что точка пересечения a_R контура γ^2_{NR} с вещественной осью удовлетворяет неравенству

$$\zeta_{m\alpha\beta Y} \leqslant a_R \leqslant \zeta_{m\,\alpha'\beta' Y-1}, \quad \forall \alpha, \beta, \alpha', \beta', \quad (4.17)$$

где

$$\zeta_{m\alpha\beta j} \sim \frac{x}{l_1 \pi [2m + 1 + (\alpha + \beta)/2]}$$

Раскладывая подинтегральную функцию (4.16) в окрестности $\zeta = a_R + i\xi$ аналогично представлению интеграла $I^{(2)}_{M\alpha\beta j}$, получим

$$I^{(2)}_{m\alpha\beta Y} \sim \frac{i e^{ik\Phi_{m\alpha\beta Y}(a_R)}}{8\pi\sqrt{1 - a_R^2}}$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-k\xi\Phi'_{m\alpha\beta Y}(a_R)}}{1 - e^{i2kH\sqrt{1-a_R^2}} e^{2kHa_R\xi(\sqrt{1-a_R^2})^{-1}}}\, d\xi.$$

Если мы введем новую переменную, то предыдущая формула запишется в следующем виде

$$I^{(2)}_{m\alpha\beta Y} \sim \frac{i}{2^4 \pi k H a_R} \Big\{ e^{ik\Phi_{m\alpha\beta Y}(a_R)} \big[F(p_R, q_R) - e^{-iq_R} F(p_R + 1, q_R)\big] - \\ - e^{ik\Phi_{m\alpha\beta Y-1}(a_R)} \big[F(3 - p_R, q_R) - e^{-iq_R} F(2 - p_R, q_R)\big] \Big\}, \quad (4.18)$$

где

$$F(p, q) = \int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}}{1 - 2x\cos q + x^2}\, dx,$$

$$p_R = -\frac{\Phi'_{m\alpha\beta Y}(a_R)\sqrt{1 - a_R^2}}{2\,H\,a_R}, \quad q_R = 2\,k\,H\sqrt{1 - a_R^2}.$$

Интеграл $I^{(2)}_{M\alpha\beta Y}$ из формулы (3.22) вычисляется аналогично интегралу $I^{(2)}_{M\alpha\beta j}$.

Итак, показано, что при достаточно больших значениях волнового числа k имеет место комбинированное представление (3.18)–(3.22) для вычисления звукового поля u, в котором функции $I^{(1)}_{m\alpha\beta j}$ определяют собой значения геометрооптических волн, а для остатка $I^{(2)}_{m\alpha\beta j}$ справедлива простая формула (4.15). Величины M, Y и N, R (соответственно количество отщепленных геометрооптических и нормальных волн) находятся из условия, чтобы выполнялись неравенства (3.16), (3.17), (4.12), (4.14), (4.17). Обоснование возможности использования "комбинированного метода" в случае, когда скорость $c(z)$ на оси волновода произвольна, но имеет минимальное значение, проводится аналогично.

Литература

1. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, В. Б. Филиппов, *Коротковолновая асимптотика в задаче дифракции на вогнутой поверхности.* — В кн.: XI Всесоюзный симпозиум по распространению радиоволн, **3**. Наука, М. (1975), 47–50.
2. В. Б. Филиппов, *Коротковолновая асимптотика тока и диаграмма направленности для задачи дифракции на неплоских экранах.* — В кн.: VII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространения волн, **1**, (Ростов н/Д). Наука, М. (1977), 47–50.
3. V. B. Philippov, *Diffraction by a nonplanar screen.* — Wave Motion, **3** (1981), 78–81.
4. В. Б. Филиппов, *Об одном методе расчета поля точечного источника в волноводе.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **99** (1980), 146–156.
5. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, Н. Г. Власюк, *Комбинированный метод расчета поля точечного источника в водноводе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **257** (1999), 66–74.
6. В. С. Булдырев, *Поле точечного источника в волноводе.* — Труды МИАН СССР **CXV** (1971), 78–102.
7. В. С. Булдырев, *Асимптотика решений волнового уравнения, сосредоточенных вблизи оси плоского волновода в неоднородной среде.* — В кн.: Проблемы математической физики. Изд-во ЛГУ, Ленинград, Вып. 3 (1968), 5–30.
8. В. С. Булдырев, А. И. Ланин, З. А. Янсон, *Вычисление поля на оси симметричного волновода.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. **14** (1974), 84.
9. В. Э. Грикуров, *Явление перекрытия прикаустических зон в приповерхностном волноводе и связанное с ним обобщение лучевого метода.* — Изв. ВУЗов, Радиофизика **23**, No. 9 (1980), 1038.

10. А. С. Крюковский, Д. С. Лукин, Е. А. Палкин, *Численное сравнение двух асимптотических методов решение задач дифракции волн в плавно неоднородных средах.* — Изв. ВУЗов, Радиофизика, **29**, No. 29 (1986), 9–88.
11. А. П. Качалов, М. М. Попов, *Применение метода суммирования гауссовых пучков для расчета высокочастотных волновых полей.* — Докл. АН СССР **258**, No. 5 (1981), 1097–1100.
12. А. П. Качалов, М. М. Попов, *Применение гауссовых пучков в изотропной теории упругости.* Препринт ЛОМИ Р-9-82, Л. (1982).
13. А. С. Старков, *Об одном методе расчета поля точечного источника в рефракционном волноводе.* — Изв. ВУЗов **32**, No. 11 (1989).
14. В. М. Кудряшов, *Геометроволновой способ вычисления акустических полей в волноводе.* — Акустический журнал **22**, вып. 5 (1976), 724–728.
15. A. Erdelyi, M. Wyman, *The asymptotic evaluation of certain integrals.* — ARMA **14**, No. 3 (1963), 217–260.
16. L. B. Felsen, *Backscattering from wide-angle and narrow-angle cones.* — J. Appl. Phys. **26**, No. 2 (1955), 138–151.
17. L. B. Felsen, *Hybrid ray-mode fields in inhomogeneous waveguides and ducts.* — J. Acoust. Soc. Amer. **69** (1981), 352–361.
18. D. Ludwig, *Diffraction by a circular cavity.* — J. Math. Phys. **11**, No. 5 (1970), 1617–1630.
19. Л. М. Бреховских, *Акустика океана.* Наука, М. (1974).

Kirpichnikova N. Ya., Philippov V. B., Vlasjuk N. G. Combined method of calculation of the field of the point source in a wave guide.

The two-dimensional problem of propagation of waves, raised by a point source, in an interior wave guide is investigated. The Dirichlet (Neumann) boundary condition is given on the upper (lower) bound of the wave guide. The possibility of representation of the exact solution as a sum of the geometro-optical waves, the normal waves and the residual is shown. The sufficient conditions on the general amount of the detached normal and geometro-optical waves are obtained. The residual is expressed by the simple formula.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 14 февраля 2003 г.

С.-Петербургский
государственный
университет