Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 297, 2003 г.

Н. Я. Кирпичникова,
С. Н. Кирпичников, В. Б. Филиппов

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ МАЛОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ В СЛАБО ИСКРИВЛЕННОМ СЛОЕ

Рассматривается задача рассеяния *плоской коротковолновой* электромагнитной волны *от неоднородного включения*, находящегося в *слабо искривленном слое*. Включение имеет вид бесконечного цилиндра малого поперечного сечения. Предполагается, что поперечное сечение неоднородности является областью, диаметр d которой мал по сравнению с длиной волны λ: $d \ll \lambda$. Плоскость падения заданной волны перпендикулярна оси цилиндра (электрическая поляризация). В этом случае общая задача переходит в частную плоскую задачу дифракции от малой неоднородности Ω_2 в слабо искривленном слое. Толщина слоя имеет порядок длины волны.

Находя асимптотики задач рассеяния от неоднородностей, приходится сталкиваться с таким понятием как интегральные характеристики этих неоднородностей. Одной из таких важнейших характеристик служит объем области. Особую роль характеристики рассеивателя играют в случае рэлеевской асимптотики при дифракции волн на различных рассеивателях (см. [1–3]). В задачах дифракции коротких волн эти характеристики дают лишь локальный эффект следующего порядка малости по сравнению с падающим и отраженным полями (при $kr \gg 1$) (см. [4–5]), в отличие от падения длинноволнового поля на неоднородность $r \to \infty$. В работах авторов [4–5] показано, что волна, рассеянная от неоднородности в слое, будет излучать подобно цилиндрической с интенсивностью пропорциональной площади сечения неоднородности и скачкам диэлектрической и магнитной проницаемостей на границах разделов.

В данной статье мы исследуем дифракцию электромагнитного

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) (гранты 02-01-00260, 02-01-01039).

поля, падающего на слабо искривленный слой, в который помещена малая неоднородность. Задача содержит два малых положительных параметра: диаметр области $kd \ll 1$ и параметр $\varepsilon \ll 1$ искривления слоя ширины $H = h + h_1 + O(\varepsilon)$.

1. Постановка задачи дифракции от малой неоднородности в слабо искривленном слое

Пусть на поверхность раздела Γ_{01} (рис.1) среды Ω_0 и диэлектрического слоя Ω_1 толщины H из верхней среды Ω_0 падает плоская электрически поляризованная волна. Внутри слабо искривленного диэлектрического слоя Ω_1 помещена малая неоднородность Ω_2. Нижнюю среду под диэлектрическим слоем обозначим через Ω_3.

Пусть плоскость чертежа xy совпадает с плоскостью падения волны, а плоскость xz совпадает с границами раздела сред. В качестве верхней поверхности слоя Γ_{01} выберем поверхность $F(\varepsilon x, y) = y - h - \varepsilon f(x) = 0$. Нижняя граница диэлектрического слоя Γ_{13} с уравнением $F_1(\varepsilon x, y) = y - h_1 - \varepsilon f_1(x) = 0$ находится на глубине $H = h + h_1 + O(\varepsilon)$ от верхней Γ_{01}.

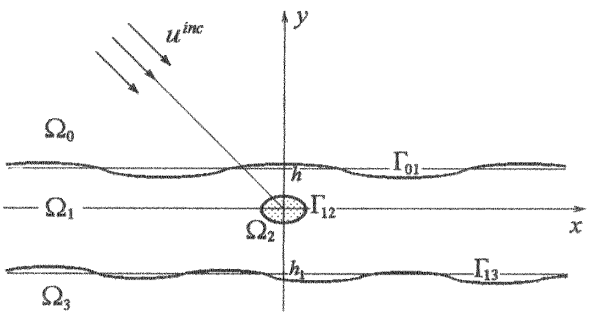

Рис. 1.

С центром в начале координат поместим в слой цилиндр с поперечным сечением Ω_2. Образующая цилиндра параллельна оси Oz. Поверхность включения Ω_2 обозначим через Γ_{12}. Диаметр d области Ω_2 мал по сравнению с длиной волны, т.е. $kd \ll 1$. Толщина слоя имеет порядок длины волны: $k\,H \sim O(1)$.

Из предположения, что падающее электрическое поле $\mathbf{E}^{\rm inc}$ поляризовано перпендикулярно к плоскости падения, следует, что

этим свойством обладает и полное поле, т.е.

$$\mathbf{E} = (0, 0, E_z), \quad \mathbf{H} = i\omega\mu \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}, -\frac{\partial E_z}{\partial x}, 0 \right).$$

В соответствии с нумерацией рассматриваемых областей Ω_j, $j = 0, 1, 2, 3$, обозначим соответствующие им решения через

$$\mathbf{E}_j = E^0 \mathbf{e}_z u_j, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Введенные скалярные функции u_j удовлетворяют следующим задачам: в областях Ω_j, $j = 0, 1, 2, 3$

$$\Delta u_j + k_j^2 u_j = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3, \tag{1.1}$$

где

$$k_j = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_j \mu_j}, \quad \varepsilon_j = \varepsilon_j' + \frac{4i\pi\sigma_j}{\omega}.$$

Здесь через ε_j и μ_j обозначены комплексная диэлектрическая проницаемость и магнитная проницаемость сред Ω_j, $j = 0, 1, 2, 3$, соответственно.

На границах раздела Γ_{01}, Γ_{12}, Γ_{13} (см. рис. 1) u_j удовлетворяют условиям жесткого контакта:

$$\begin{cases} u_i = u_j & \text{при} \quad i \neq j, \\ \dfrac{1}{\mu_i}\dfrac{\partial u_i}{\partial n} = \dfrac{1}{\mu_j}\dfrac{\partial u_j}{\partial n} & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{1.2}$$

Для однозначности решения следует добавить условие излучения Зоммерфельда.

Фактически мы решаем трехмерную задачу (см. рис. 1): между двумя неограниченными слабо искривленными плоскостями Γ_{01} и Γ_{13}, образующими диэлектрический слой с проницаемостями μ_1, ε_1 и лежащими на слабо искривленном полупространстве Ω_3, поместим тонкий бесконечной длины провод (цилиндр с поперечным сечением Ω_2) проницаемостей μ_2, ε_2. На слой из области Ω_0 падает плоская волна, скорость которой зависит от магнитной μ_0 и электрической ε_0 проницаемостей. Исследуется задача *рассеяния* плоской волны *от малой неоднородности*, ограниченной поверхностью Γ_{12} с диаметром d, $kd \ll 1$ и *помещенной в слабо искривленный слой*.

Эту задачу будем решать в несколько этапов: 1) найдем волну, отраженную от слоя без неоднородности; 2) построим функцию

Грина задачи рассеяния плоской волны от слабо искривленного слоя без включения и найдем асимптотику этой функции в области $kr \gg 1$, где r есть расстояние до наблюдателя от неоднородности; 3) используя функцию Грина этапа 2), выведем интегральное уравнение для решения поставленной задачи с неоднородностью в слое; 4) и, наконец, исследуя ядро полученного интегрального уравнения, применим итерационный метод отыскания решения этого интегрального уравнения.

2. Решение задачи отражения плоской волны от слабо искривленного слоя (без включения)

Решение задачи (1.1)–(1.2) со слабоискривленными слоями, если включение Ω_2 отсутствует, известно и его можно найти во многих работах [6–7]. Однако, это решение играет здесь существенную роль и для построения функции Грина и при итерационном методе решения интегрального уравнения. Найдем его в форме, согласованной с постановкой задачи, вводя необходимые обозначения.

Прежде всего приведем некоторые простейшие формулы, связанные с искривлением границ раздела сред. Пусть на произвольную гладкую поверхность $F(\boldsymbol{x}) = 0$ падает плоская волна $e^{i\boldsymbol{kr}} = e^{ik\boldsymbol{ar}}$, где $\boldsymbol{k}$ – волновой вектор, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{k}/k$ – единичный вектор в направлении падения волны. Тогда отраженная от поверхности $F(\boldsymbol{x}) = 0$ волна имеет амплитудный множитель $e^{ik\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{r}}$, в котором

$$\boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{a} - 2\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\,\boldsymbol{a}\right), \tag{2.1}$$

причем, для угла падения θ получим (см. [8])

$$\cos\theta = -\left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\,\boldsymbol{a}\right) = \left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\boldsymbol{a}^*\right). \tag{2.2}$$

Следовательно, по падающему полю $\boldsymbol{a}$ отраженное $\boldsymbol{a}^*$ восстанавливается по формуле (2.1). Угол падения θ не должен быть равен или близок к $\pi/2$. Тогда условия (1.2) на границах Γ раздела перейдут в условия

$$u_i\big|_\Gamma = u_j\big|_\Gamma, \quad \mu_i^{-1}(\nabla F, \nabla u_i)\big|_\Gamma = \mu_j^{-1}(\nabla F, \nabla u_j)\big|_\Gamma. \tag{2.3}$$

Вектор ∇F, параллельный нормали к слабо искривленной поверхности раздела $F(\varepsilon x, y) = 0$, равен $\nabla F = (-\varepsilon f'(x), 1)$, а единичные касательные к поверхностям $F(\varepsilon x, y) = 0$ и $F_1(\varepsilon x, y) = 0$

векторы $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{t}_1$ имеют следующий вид

$$\boldsymbol{t} = \frac{(1, \varepsilon f'(x))}{|\nabla F|}, \quad \boldsymbol{t}_1 = \frac{(1, \varepsilon f_1'(x))}{|\nabla F_1|}.$$

Все формулы выпишем с точностью до $O(\varepsilon^2)$, поэтому считаем, что $|\nabla F| = 1$.

Ищем поле в областях Ω_j, $j = 0, 1, 3$ в виде

$$\begin{aligned} u_0^0 &= [u^{\text{inc}} + A\, u^{\text{refl}}] \exp\{i\xi\alpha\}, \\ u_1^0 &= [B\, u^{-\,\text{refr}} + C\, u^{+\,\text{refr}}] \exp\{i\xi\alpha\}, \\ u_3^0 &= D\, u^{\text{refr}} \exp\{i\xi\alpha_1\}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где

$$u^{\text{inc}} = \exp\{-i\sqrt{k^2 - \xi^2}\beta\}, \quad u^{\text{refl}} = \exp\{i\sqrt{k^2 - \xi^2}\beta\},$$

$$u^{\mp\,\text{refr}} = \exp\{\mp i\sqrt{k_1^2 - \xi^2}\beta\}, \quad u^{\text{refr}} = \exp\{i\sqrt{k_3^2 - \xi^2}\beta_1\}. \tag{2.5}$$

Здесь $k_0 = k$, $\xi = k\sin\theta$, θ – угол падения плоской волны в области Ω_0, т.е. угол между ∇F и направлением падения $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{k}/k$, θ_1, θ_3 – уголы преломления в слоях Ω_1, Ω_3, которые находятся из закона Снеллиуса:

$$\xi = k\sin\theta = k_1\sin\theta_1 = k_3\sin\theta_3,$$

$$\alpha = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t}), \quad \alpha_1 = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t}_1), \quad \beta_i = (\boldsymbol{r}, \frac{\nabla F_i}{|\nabla F_i|}).$$

Коэффициенты отражения A и преломления B, C, D находятся из условий (1.2), (2.3) на границах раздела:

$$A = \frac{E^{-2}\Delta'}{\Delta},\ B = \frac{2\,E^{-1}E_1(1 + \mathcal{E}_{13})}{\Delta},\ C = \frac{2\,E^{-1}E_1E_{10}^2(1 - \mathcal{E}_{13})}{\Delta}. \tag{2.6}$$

В формулах (2.6) неизвестные величины Δ, Δ', E, $\mathcal{E}_{13}$, E_1, E_{10} представлены через известные следующими выражениями:

$$\Delta = (1 + \mathcal{E}_{01})(1 + \mathcal{E}_{13}) + E_{10}^2E_1^2(1 - \mathcal{E}_{01})(1 - \mathcal{E}_{13}), \tag{2.7}$$

$$\Delta' = (1 - \mathcal{E}_{01})(1 + \mathcal{E}_{13}) + E_{10}^2E_1^2(1 + \mathcal{E}_{01})(1 - \mathcal{E}_{13}), \tag{2.8}$$

$$E = e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2}(h + \varepsilon[f(x) - xf'(x)])}, \quad E_1 = e^{i\sqrt{k_1^2 - \xi^2}(h + \varepsilon[f(x) - xf'(x)])}, \tag{2.9}$$

$$E_{10} = e^{i\sqrt{k_1^2-\xi^2}(h_1-\varepsilon[f_1(x)-xf_1'(x)])}, \tag{2.10}$$

$$\mathcal{E}_{01} = \frac{\mu_0\sqrt{k_1^2-\xi^2}}{\mu_1\sqrt{k_0^2-\xi^2}}, \quad \mathcal{E}_{13} = \frac{\mu_1\sqrt{k_3^2-\xi^2}}{\mu_3\sqrt{k_1^2-\xi^2}}. \tag{2.11}$$

Окончательно, решение задачи дифракции плоской электромагнитной электрически поляризованной волны от слабо искривленного слоя без неоднородности, лежащего на полупространстве имеет вид

$$u_0^0 = E^{-1}\left[e^{-i\sqrt{k^2-\xi^2}F(\varepsilon x,y)} + \frac{\Delta'}{\Delta}e^{i\sqrt{k^2-\xi^2}F(\varepsilon x,y)}\right]e^{i\xi\alpha}, \tag{2.12}$$

$$u_1^0 = 2E^{-1}\left\{\left[\frac{(1+\mathcal{E}_{13})}{\Delta}e^{-i\sqrt{k_1^2-\xi^2}F(\varepsilon x,y)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{(1-\mathcal{E}_{13})E_1^2E_{10}^2}{\Delta}e^{i\sqrt{k_1^2-\xi^2}F(\varepsilon x,y)}\right]\right\}e^{i\xi\alpha}. \tag{2.13}$$

Конкретный вид решения u_3^0 в области Ω_3 не будет использован и здесь не приводится.

3. Функция Грина задачи отражения от слабо искривленного слоя

Для дальнейшего конструирования решения потребуется функция Грина точечного источника, помещенного в область Ω_0. Обозначим эту функцию через $\mathcal{G}_j(M,M')$, $j=0,1,3$, где точка M является точкой наблюдения и принадлежит области Ω_0, а в точке M' помещен точечный источник. Ввиду того, что точка наблюдения $M\in\Omega_0$ лишь функция $\mathcal{G}_0(M,M')$ является настоящей обобщенной функцией Грина и удовлетворяет в области Ω_0 уравнению Гельмгольца с дельта функцией в правой части

$$\Delta\mathcal{G}_0(M,M') + k^2\mathcal{G}_0(M,M') = \delta(M-M'). \tag{3.1}$$

Две другие квазифункции Грина $\mathcal{G}_j(M,M')$, $j=1,3$ являются решениями однородного уравнения Гельмгольца в соответствующих областях Ω_1, Ω_3, но зависят от двух аргументов, как классическая функция Грина $\mathcal{G}_0(M,M')$.

На границах раздела Γ_{01}, Γ_{13} (см. рис. 1) $\mathcal{G}_j(M,M')$, $j=0,1,3$ удовлетворяют условиям (1.2) или (2.3), в которых следует заменить u_j на $\mathcal{G}_j(M,M')$. К уравнениям и равенствам на границах раздела следует добавить условие излучения Зоммерфельда.

Приведем теперь формулу для функции Грина $\mathcal{G}_0(M,M')$ задачи отражения от слабо искривленного слоя, когда $M,\ M'\in\Omega_0$

$$\mathcal{G}_0(M,M')=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i(\alpha-\alpha')\xi}G_0(y,y',\xi)d\xi. \tag{3.2}$$

Здесь интегрирование происходит по переменной $\xi=k\sin\theta$, которая является горизонтальной компонентой волнового числа, определяется углом падения θ и сохраняется при переходе через слабо искривленные слои. Фактически интегрирование происходит по поверхностям постоянного уровня $F(\varepsilon x,y)=\mathrm{const}$. Разность $\alpha-\alpha'$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$ равна $(x-x')+\varepsilon(f'(x)y-f'(x')y')$.

Функция Грина $G_0(y,y',\xi)$ в области Ω_0, содержащей источник и точку наблюдения, принимает вид

$$G_0(M,M')=\frac{e^{i\sqrt{k^2-\xi^2}\beta_>}}{2i\sqrt{k^2-\xi^2}}\left[e^{-i\sqrt{k^2-\xi^2}\beta_<}+\frac{\Delta'}{\Delta}E^{-2}e^{i\sqrt{k^2-\xi^2}\beta_<}\right]. \tag{3.3}$$

Здесь Δ, Δ' и $E=e^{i\sqrt{k^2-\xi^2}\beta}|_{F=0}$ определены выражениями (2.7)–(2.9).

Далее построим квазифункцию Грина $G_{10}(y,y',\xi)$ в случае, когда источник находится в верхнем полупространстве $M'\in\Omega_0$, $M\in\Omega_1$. Она представлена формулой

$$G_{10}(y,y',\xi)=\frac{e^{i\sqrt{k^2-\xi^2}F(\varepsilon x',y')}}{i\sqrt{k^2-\xi^2}\Delta}\times$$

$$\times\left[(1+\mathcal{E}_{13})e^{-i\sqrt{k_1^2-\xi^2}F(\varepsilon x,y)}+E_1^2E_{10}^2(1-\mathcal{E}_{13})e^{i\sqrt{k_1^2-\xi^2}F(\varepsilon x,y)}\right], \tag{3.4}$$

где величины $E_1=e^{i\sqrt{k_1^2-\xi^2}\beta}|_{F=0}$ и $E_{10}=e^{i\sqrt{k_1^2-\xi^2}\beta}|_{F_1=0}$ определены формулами (2.9)–(2.10).

Мы изучаем задачу рассеяния ($kr\gg1$, $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{x^2+y^2}+O(\varepsilon^2)$), от малой неоднородности $kd\ll1$, помещенной в слабо искривленный слой толщины H, $kH\sim O(1)$. Для этого исследуем при $kr\gg1$ и $kd\ll1$ асимптотику функции Грина $\mathcal{G}_0$ и квазифункции $\mathcal{G}_{10}$, определенных формулами (3.2)–(3.4).

Нам понадобится лишь асимптотика квазифункции Грина $\mathcal{G}_{10}$ и значение этой функции на неоднородности (т.е. в точке (0,0)).

Получим асимптотику, используя стандартные приемы метода стационарной фазы [8–10]. Обычно в слое Ω_1 скорость волн меньше, чем в верхнем полупространстве Ω_0, т.е. $k_1 > k$. Разрезы на плоскости комплексного переменного $\xi = k = k_0$ в формулах (3.2), (3.4) располагаются, как и в работе [4]. Асимптотика квазифункции Грина $\mathcal{G}_{10}$ при $kr \gg 1$, $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ запишется в следующем виде:

$$\mathcal{G}_{10}(r, \varphi; 0, 0) = \frac{e^{i(kr - 3\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}} \frac{e^{ik \sin\varphi\, F(0,0)} e^{-i\sqrt{k_1^2 - k^2\cos^2\varphi}\, F(0,0)}}{\Delta(\varphi)} \times$$

$$\times \Big[(1 + \mathcal{E}_{13}) + (1 - \mathcal{E}_{13}) e^{2i\sqrt{k_1^2 - k^2\cos^2\varphi}\, F_1(0,0)}\Big]. \qquad (3.5)$$

Мы рассматриваем малую неоднородность, для которой $kd \ll 1$. Для дальнейших рассмотрений нам понадобится значение функции u_1^0 на этой малой неоднородности или просто значение в точке $(0, 0)$, которая лежит внутри неоднородности Ω_2. Приведем значение функции $u_1^0(0, 0)$

$$u_1^0 = \frac{2e^{ik \sin\varphi_0\, F(0,0)} e^{-i\sqrt{k_1^2 - k^2\cos^2\varphi_0}\, F(0,0)}}{\Delta(\varphi_0)} \times$$

$$\times \Big[(1 + \mathcal{E}_{13}) + (1 - \mathcal{E}_{13}) e^{2i\sqrt{k_1^2 - k^2\cos^2\varphi_0}\, F_1(0,0)}\Big]. \qquad (3.6)$$

4. Интегральное уравнение в задаче дифракции от слабо искривленного слоя с включением

Используя функции и квазифункции Грина $\mathcal{G}_j$, построенные в п. 3, сведем решение сформулированной задачи (1.1)–(1.2) к решению интегральных уравнений. Затем, учитывая малость ядер этих уравнений, найдем решение интегральных уравнений методом последовательных приближений.

Вывод интегральных уравнений проводится также, как и в статьях авторов [4, 5] и основан на применении формулы Грина к решению u_j задачи (1.1)–(1.2) и к функции Грина $\mathcal{G}$ в областях Ω_j, $j = 0, 1, 2, 3$.

На рис. 2 отмечены контуры, по которым происходит интегрирование. Переменной интегрирования служит точка источника M'. Контур C_R есть полокружность большого радиуса R с центром в точке $(0, F(0, y') = 0$. Окружность C_ε отделяет точку

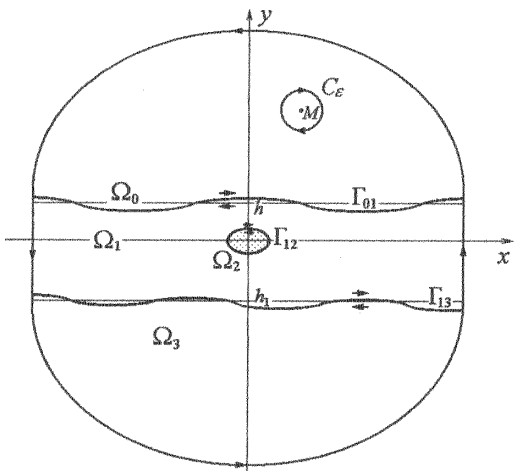

Рис. 2.

наблюдения M от точки интегрирования M'. В конечных формулах радиус $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$. На боковых контурах в области Ω_1 при $y' = \pm R$ и на полусфере C_R выполняются условия излучения для решения и функции Грина, следовательно подинтегральные выражения устремляются к нулю при $R \to \infty$.

Применив в четырех областях Ω_j, $j = 0, 1, 2, 3$ формулу Грина, получим четыре интегральных уравнения, из которых с учетом условий на границах разделов, получим одно интегральное уравнение

$$u_0(M) = \frac{\mu_0}{\mu_1}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1\right) \int\limits_{\Gamma_{12}} \frac{\partial u_2}{\partial n'} \mathcal{G}_{10} d\Gamma + \frac{\mu_0}{\mu_1}(k_1^2 - k_2^2) \iint\limits_{\Omega_2} \mathcal{G}_{10} u_2 d\Omega. \quad (4.1)$$

Здесь $M \in \Omega_0$, а интегрирование происходит по поверхности неоднородности Γ_{12} и по самой неоднородности Ω_2. Отметим, что для параллельной поляризации всюду в формуле (4.1) следует вместо магнитной проницаемости μ поставить диэлектрическую ε.

5. Итерационный метод решения интегрального уравнения

Решать уравнение (4.1) будем следующим образом. Представим функции $u_j(M), j = 0, 1, 2$ в виде суммы неизвестных слагаемых $U_j(M)$ и известных функций u_j^0, которые равны отраженной

u_0^0 волне в области Ω_0 и преломленной волне u_1^0 в области Ω_1 при падении плоской волны на слабо искривленный слой без включения:

$$u_j = U_j + u_j^0, \quad j = 0,1,3, \quad u_2 = U_2 + u_1^0. \tag{5.1}$$

Для неизвестных функций $U_j(M)$ получаем следующие задачи:

$$(\Delta + k_j^2)U_j = 0, \quad j = 0,1,3, \quad (\Delta + k_2^2)U_2 = (k_1^2 - k_2^2)u_1^0, \tag{5.2}$$

$$\begin{cases} U_0 = U_1 & \text{при} \quad F(\varepsilon x, y) = 0, \\ \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial U_0}{\partial n} = \dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{\partial U_1}{\partial n} & \text{при} \quad F(\varepsilon x, y) = 0, \end{cases} \tag{5.3}$$

$$\begin{cases} U_1 = U_3 & \text{при} \quad F_1(\varepsilon x, y) = 0, \\ \dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{\partial U_1}{\partial n} = \dfrac{1}{\mu_3}\dfrac{\partial U_3}{\partial n} & \text{при} \quad F_1(\varepsilon x, y) = 0, \end{cases} \tag{5.4}$$

$$\begin{cases} U_1 = U_2 & \text{на} \quad \Gamma_{12}, \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial n} = \dfrac{\mu_1}{\mu_2}\dfrac{\partial U_2}{\partial n} + \dfrac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2}\dfrac{\partial u_1^0}{\partial n}, & \text{на} \quad \Gamma_{12}, \end{cases} \tag{5.5}$$

где n – внешняя нормаль области Ω_2. Сюда следует добавить условия излучения Зоммерфельда.

Решать задачи (5.2)–(5.5) будем точно также, как и задачу для функции u в предыдущем пункте. Применим формулу Грина к неизвестному решению U и к функции Грина $\mathcal{G}$. После некоторых преобразований получим следующее интегральное уравнение относительно неизвестного решения U:

$$U_0(M) = \frac{\mu_0}{\mu_1}\left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\int\limits_{\Gamma_{12}} \left[\frac{\partial U_2}{\partial n} + \frac{\partial u_1^0}{\partial n}\right]\mathcal{G}_{10}\,d\Gamma +$$

$$+\frac{\mu_0}{\mu_1}(k_2^2 - k_1^2)\iint\limits_{\Omega_2} \mathcal{G}_{10}(U_2 + u_1^0)\,d\Omega. \tag{5.6}$$

Интегральное уравнение (5.6) можно решать методом последовательных приближений, выбрав в качестве нулевой итерации для функции U значение $U^{(0)} = 0$. Это возможно, так как из физических соображений и по условию задачи U конечно, а область интегрирования мала ($kd \ll 1$).

Следовательно, первая итерация к решению $U^{(1)}$ равна:

$$U^{(1)}(M) = \frac{\mu_0(\mu_1-\mu_2)}{\mu_1^2}\int\limits_{\Gamma_{12}}\left[\frac{\partial u_1^0}{\partial n'}\,\mathcal{G}_{10}\right]d\Gamma+$$

$$+\frac{\mu_0}{\mu_1}(k_2^2-k_1^2)\iint\limits_{\Omega_2}\mathcal{G}_{10}\,u_1^0 d\Omega. \qquad (5.7)$$

6. Дифракционная добавка от неоднородности

Подставляя (3.5), (3.6) в формулу (5.7) для первой итерации $U^{(1)}$ функции U, мы получим добавочное слагаемое от неоднородности к решению задачи отражения плоской волны от слоя глубины $H+O(\varepsilon)$. Эта добавка представляет собой цилиндрическую волну, рассеивающуюся от неоднородности с некоторой диаграммой направленности.

Введем обозначения, согласованные с работой [5]. Обозначим коэффициенты прохождения волны из верхней среды в слой и обратно через $T_{01}(\varphi_0)$, $T_{10}(\varphi)$, соответственно:

$$T_{01}(\varphi_0)=\frac{2e^{ik\sin\varphi_0 F(0,0)}e^{-i\sqrt{k_1^2-k^2\cos^2\varphi_0}\,F(0,0)}}{\Delta(\varphi_0)}\times$$

$$\times\left[(1+\mathcal{E}_{13})+(1-\mathcal{E}_{13})e^{2i\sqrt{k_1^2-k^2\cos^2\varphi_0}\,F_1(0,0)}\right]. \qquad (6.1)$$

$$T_{10}(\varphi)=\frac{e^{ik\sin\varphi\,F(0,0)}e^{-i\sqrt{k_1^2-k^2\cos^2\varphi}\,F(0,0)}}{\Delta(\varphi)}\times$$

$$\times\left[(1+\mathcal{E}_{13})+(1-\mathcal{E}_{13})e^{2i\sqrt{k_1^2-k^2\cos^2\varphi}\,F_1(0,0)}\right]. \qquad (6.2)$$

Приведем формулы дифракционной добавки к решению задачи отражения электромагнитной плоской волны, поляризованной перпендикулярно. Рассеяние электромагнитной плоской волны, поляризованной перпендикулярно плоскости падения, от малой неоднородности (для наглядности круг радиуса $d/2$) в слабо искривленном слое дается формулой

$$U_0^{(1)}(r,\varphi)=\frac{\mu_0}{2\mu_1}\left(\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}-1\right)\pi(k_2d)^2\frac{e^{i(kr-3\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}F(\varphi_0,\varphi), \qquad (6.3)$$

где диаграмма направленности $F(\varphi_0, \varphi)$ равна

$$F(\varphi_0, \varphi) = T_{01}(\varphi_0)T_{10}(\varphi). \tag{6.4}$$

Дифракционная добавка (6.3) мала ввиду того, что она содержит два малых множителя $(k_2 d)^2$, $k_2 d \ll 1$ и $(kr)^{-1/2}$, $kr \gg 1$.

Если сравнивать рассеяние плоской электромагнитной волны от неоднородности *в слое с плоскими границами раздела* с рассеянием этой волны от неоднородности в *слабо искривленном слое*, то *качественная картина (формула* (6.3)*) сохранится*. Искривленность слоя скажется в диаграмме направленности (6.4), точнее в коэффициентах проходимости $T_{01}(\varphi_0)$ и $T_{10}(\varphi)$. По сравнению с плоскопараллельными слоями всюду, где раньше стояли h и h_1, обозначающие месторасположение плоских границ раздела, теперь стоят $F(0,0) = h - \varepsilon f(0)$, и $F_1(0,0) = h_1 - \varepsilon f_1(0)$, да и в решении $u_j^0(x,y)$ x и y в экспонентах отраженных и преломленных волн следует заменить на $\alpha \approx x + \varepsilon f'(x)y$ и $\beta \approx y - \varepsilon f'(x)x$, соответственно и т.д.

Поле, отраженное от неоднородности в слабо искривленном слое, будет излучать подобно цилиндрической волне, мощность которой *пропорциональна площади сечения* этой неоднородности и *скачкам диэлектрической и магнитной проницаемостей* на границах разделов.

Литература

1. Г. Полиа, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике*. М. (1962).
2. В. Ю. Готлиб, *О рэлеевской асимптотике дифракционных задач*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **62** (1976), 52-59.
3. В. М. Бабич, И. С. Зорин, М. И. Иванов, А. В. Мовчан, С. А. Назаров, *Интегральные характеристики в задачах теории упругости*. — Препринт ЛОМИ, Р-6-89, Л., (1989), 61 с.
4. В. Б. Филиппов, Н. Я. Кирпичникова, *Дифракция электромагнитных волн на малых неоднородностях*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **257** (1999), 304–322.
5. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, *Дифракция плоских электромагнитных волн от малой неоднородности, помещенной в слой*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **275** (2001), 85–99.
6. Л. А. Молотков, *О характеристических матрицах слабо искривленных упругих слоев*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **99** (1980), 74–84.
7. Л. М. Бреховских, *Волны в слоистых средах*. Наука, М. (1973).
8. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн*. Изд-во “Советское радио”, М. (1970).

9. Ф. Франк, Р. Мизес, *Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики*. ОНТИ ГРОТЛ, Л.-М. (1937).
10. Г. И. Макаров, В. В. Новиков, *Теория распространения радиоволн*. — В кн.: 1-ая Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн. Изд. АН СССР, Паланга, (1968), 242–304.

Kirpichnikova N. Ya., Kirpichnikov S. N., Philippov V. B. Scattering of a plane electromagnetic wave on a small inhomogeneity in a slightly bent layer.

The problem of the diffraction of the electromagnetic plane wave, scattered on a small inhomogeneity in a slightly bent layer, is investigated. The inhomogeneity is supposed to be a cylinder. A cross-section area and diameter of the cylinder are small in comparision with the length of the incident wave.

It is proved that the small inhomogeneity radiates as a point source, the power of which is proportional to the cross-section area and the jumps of the dielectric and magnetic constants on the interfaces.

The bend of the layer does rezult in variation of the exponential factors of the reflected and refracted waves and in variation of the radiation pattern of the scattered waves.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
С.-Петербургский
государственный
университет

Поступило 3 марта 2003 г.