Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 297, 2003 г.

М. И. Белишев

О СВЯЗИ ДАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

0. Введение

0.1. О работе. Как известно, граничные спектральные данные компактного Риманова многообразия с краем определяют его динамические граничные данные (оператор реакции волнового уравнения), отвечающие *любому* промежутку времени $[0, T]$: оператор реакции представляется в виде ряда по спектральным данным.

Обратное верно в следующем смысле: оператор реакции определяет многообразие [5], [2], а с ним и спектральные данные. Для нахождения последних можно восстановить многообразие, а, затем, решить на нём (прямую) граничную спектральную задачу. Такой способ, очевидно, малоэффективен и возникает вопрос: можно ли извлечь спектральные данные из оператора реакции, не решая обратной задачи (не восстанавливая многообразия)?

Положительный ответ дан в работе [4]. Предложенная в ней схема такова:

1) по оператору реакции строится каноническая модель исходной динамической системы и находится самосопряженный оператор, определяющий свободную эволюцию модели;

2) проводится спектральный анализ этого оператора;

3) по его спектру и собственным элементам, во внешнем пространстве (общем для системы и модели) восстанавливаются спектральные данные.

Такая схема позволяет избежать решения обратной задачи; однако, её конструктивность остаётся проблематичной.

В настоящей статье, комбинируя методы работ [1], [4], мы предлагаем процедуру извлечения спектральных данных из оператора реакции, которая существенно проще схемы 1)–3). Эта процедура является "прямой", – она проводится во внешнем пространстве и не требует построения модели, и конструктивной, –

Поддержано грантом РФФИ No. 02-01-00260.

в её основе лежит вариационный принцип, допускающий численную реализацию.

В п.п. 0.2–0.4 мы определяем объекты, фигурирующие в описании результатов работы.

0.2. Многообразие. Пусть (Ω, g) есть гладкое[1] n-мерное компактное риманово многообразие с краем Γ ; g-метрический тензор. Введем функцию расстояния (*эйконал*)

$$\tau(x) := \operatorname{dist}(x, \Gamma), \quad x \in \Omega$$

и обозначим

$$T_* := \max_{\Omega} \tau(\cdot).$$

Эйконал определяет семейство подмногообразий

$$\Omega^\xi := \{x \in \Omega |\ \tau(x) < \xi\}, \quad \xi > 0$$

и гиперповерхностей (эквидистант края)

$$\Gamma^\xi := \{x \in \Omega |\ \tau(x) = \xi\}, \quad \xi > 0.$$

Несложно показать, что Ω^ξ удовлетворяет условию конуса при любом ξ. Отметим равенство

$$T_* = \inf\{\xi > 0 |\ \Omega^\xi = \Omega\}.$$

Через ∇_g и Δ_g мы обозначаем операторы градиента и Бельтрами–Лапласа на Ω . Всюду ниже $\nu = \nu(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ -внешняя нормаль.

0.3. Спектральные данные. Рассмотрим семейство граничных задач

$$-\Delta_g \varphi = \lambda \varphi \quad \text{в} \quad \operatorname{int} \Omega^T; \tag{0.1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma; \tag{0.2}$$

$$\varphi = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma^T, \tag{0.3}$$

(int -внутренность, $T > 0$ — параметр); пусть $\{\lambda_k^T\}_{k=1}^\infty\ :\ 0 \le \lambda_1^T < \lambda_2^T \le \ldots$ есть спектр, а $\{\varphi_k^T\}_{k=1}^\infty$ — соответствующие собственные функции, образующие ортонормированный базис пространства $L_2(\Omega^T)$.

[1] всюду в работе “гладкий” означает “C^∞-гладкий”.

Набор $\{\lambda^T_k\,;\varphi^T_k\,|_\Gamma\,\}_{k=1}^\infty$ составляет *спектральные данные* подмногообразия (Ω^T,g); подчёркивая зависимость от параметра, мы называем эти данные текущими. При $T>T_*$ условие (0.3) отсутствует, выполняется равенство $\Omega^T=\Omega$ и текущие данные переходят в данные $\{\lambda_k;\ \varphi_k\,|_\Gamma\,\}_{k=1}^\infty$ всего многообразия (Ω,g).

0.4. Динамические данные. Рассмотрим динамическую систему с граничным управлением Неймана

$$u_{tt}-\Delta_g u=0 \quad \text{в} \quad Q^T; \tag{0.4}$$

$$u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0 \quad \text{в} \quad \Omega\,; \tag{0.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=f \quad \text{на} \quad \Sigma^T, \tag{0.6}$$

в которой $Q^T:=\operatorname{int}\,\Omega\times(0,T)$, $\Sigma^T:=\Gamma\times[0,T]$, $u=u^f(x,t)$ — решение. С системой ассоциирован *оператор реакции* $R^T:L_2(\Sigma^T)\mapsto L_2(\Sigma^T)$,

$$R^T f:=u^f\,|_{\Sigma^T}.$$

Обозначим $P^{2T}:=\{(x,t)|\ x\in\operatorname{int}\,\Omega^T,\ 0<t<2T-\tau(x)\}$. В силу гиперболичности волнового уравнения (0.4) (конечности области влияния), задача

$$u_{tt}-\Delta_g u=0 \quad \text{в} \quad P^{2T}; \tag{0.7}$$

$$u=0 \quad \text{при} \quad t<\tau(x)\,; \tag{0.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=f \quad \text{на} \quad \Sigma^{2T} \tag{0.9}$$

оказывается корректно поставленной[2]; пусть $u=u^f(x,t)$ есть её решение. С этой задачей свяжем оператор $R^{2T}:L_2(\Sigma^{2T})\mapsto L_2(\Sigma^{2T})$, $R^{2T}f:=u^f|_{\Sigma^{2T}}$, который назовём *продолженным оператором реакции* исходной системы (0.4)–(0.6).

По гиперболичности, решение задачи (0.7)–(0.9), а с ним и оператор R^{2T}, определяются подмногообразием (Ω^T,g). В свою очередь, оператор R^{2T} определяет (Ω^T,g) с точностью до изометрии [5], [2].

[2]задача (0.7)–(0.8) является максимальным естественным расширением задачи (0.4)–(0.6), не требующим постановки дополнительного краевого условия на Γ^T.

0.5. Результаты. Основное содержание работы составляет процедура, позволяющая *при любом* $T > 0$ находить текущие спектральные данные $\{\lambda_k^T; \varphi_k^T \mid_\Gamma\}_{k=1}^{\infty}$ по заданному оператору R^{2T}. Процедура основана на вариационном принципе.

В качестве приложения, решается задача о продолжении оператора R^{2T} с $\Gamma \times [0, 2T]$ на $\Gamma \times [0, \infty)$: по нему восстанавливается оператор реакции системы (0.6)–(0.8) с финальным моментом $t = \infty$ и дополнительным граничным условием $u|_{\Gamma^T \times [0,\infty)} = 0$.

1. Динамические системы

1.1. Система α^T. Символом α^T мы обозначаем систему (0.4)–(0.6); здесь она снабжается стандартными атрибутами теории управления,-пространствами и операторами. Все пространства вещественны.

Пространство управлений $\mathcal{F}^T := L_2(\Sigma^T)$ (с мерой $d\Gamma dt$) называется *внешним пространством* системы α^T. В нём выделим линеал гладких управлений

$$\mathcal{M}^T := \{f \in C^\infty(\Sigma^T) | \operatorname{supp} f \subset \Gamma \times (0, T]\}$$

(управления из $\mathcal{M}^T$ аннулируются вблизи $\Gamma \times \{t = 0\}$). При $f \in \mathcal{M}^T$ задача (0.4)–(0.6) имеет единственное классическое решение u^f, гладкое в $\bar{Q}^T$. По гиперболичности имеем

$$\operatorname{supp} u^f(\cdot, t) \subset \Omega^t, \qquad 0 \le t \le T; \tag{1.1}$$

если $\mathcal{T}^T_{T-\tau} : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{F}^T$,

$$(\mathcal{T}^T_{T-\tau} f)(\cdot, t) := \begin{cases} 0, & 0 \le t \le T - \tau; \\ f(t - (T - \tau)), & T - \tau < t \le T; \end{cases}$$

есть оператор запаздывания, то, по стационарности системы (независимости Ω, g от времени) имеем

$$\begin{aligned} u^{\mathcal{T}^T_{T-\tau} f}(\cdot, T) = u^f(\cdot, \tau); \quad u^{f_{tt}}(\cdot, T) = u^f_{tt}(\cdot, T) \\ =< \text{см. } (0.4) > = \ \Delta_g u^f(\cdot, T). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Как показано в работе [7] отображение $f \mapsto u^f$ непрерывно из $\mathcal{F}^T$ в $C([0, T]; H^s(\Omega))$ с любым $s < \frac{3}{5}$ ($H^s(...)$-классы Соболева). В силу этого, оно расширяется по непрерывности с $\mathcal{M}^T$ на всё

$\mathcal{F}^T$; образы этого расширения суть обобщённые решения задачи (0.4)–(0.6).

Пространство $\mathcal{H}^T := L_2(\Omega^T)$ есть *внутреннее пространство* системы α^T ; состояния $u^f(\cdot,t)$ суть его элементы (см. (1.1)).

Соответствие "вход $\mapsto$ состояние" описывается *оператором управления* $W^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{H}^T$,

$$W^T f := u^f(\cdot,T).$$

В силу упоминавшегося выше результата [7], этот оператор непрерывен.

Соответствие "вход $\mapsto$ выход" в системе α^T реализует *оператор реакции* $R^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{F}^T$,

$$R^T f := u^f|_{\Sigma^T}.$$

Он непрерывен; более того, R^T действует непрерывно из $\mathcal{F}^T$ в $H^s(\Sigma^T)\bigcap C([0,T];H^r(\Gamma))$ с $s<\frac{1}{5}$ и $r<\frac{1}{10}$ (см. [7]), из чего следует его компактность. По стационарности системы, R^T коммутирует с $\mathcal{T}^T_{T-\tau}$.

1.2. Система α^T_*. Обозначим $N^T := \{(x,t)|\ x\in\Omega^T,\ \tau(x)<t<T\}$; система α^T_* вида

$$v_{tt}-\Delta_g v=0 \quad \text{в} \quad N^T\,; \tag{1.3}$$

$$v|_{t=T}=0, \quad v_t|_{t=T}=y \quad \text{в} \quad \Omega^T\,; \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\nu}=0 \quad \text{на} \quad \Sigma^T\,; \tag{1.5}$$

называется двойственной к системе α^T. При $y\in C_0^\infty(\operatorname{int}\,\Omega^T)$ задача (1.3)–(1.5) имеет единственное классическое решение $v=v^y(x,t)$, гладкое в $\bar N^T$. Отображение $y\mapsto v^y$ непрерывно из $\mathcal{H}^T$ в $H^1(N^T)$; в дальнейшем мы предполагаем его расширенным на всё $\mathcal{H}^T$ и рассматриваем образы расширения как обобщённые решения. Для последних корректно определён след $v^y|_{\Sigma^T}\in\mathcal{F}^T$.

Следующий результат проясняет характер двойственности систем α^T и α^T_*.

Лемма 1. *Для $f\in\mathcal{F}^T$ и $y\in\mathcal{H}^T$ справедливо соотношение*

$$(u^f(\cdot,T),y)_{\mathcal{H}^T}=-(f,v^y|_{\Sigma^T})_{\mathcal{F}^T}. \tag{1.6}$$

$\lhd$ Выберем $f \in \mathcal{M}^T$ и $y \in C_0^\infty(\int \Omega^T)$, так что решения u^f и v^y суть классические. В приводимой ниже выкладке, при интегрировании по частям в Ω^T, интегралы по Γ^T аннулируются в силу (1.1):

$$0 = \int\limits_{N^T} d\Omega dt\,[u^f_{tt} - \Delta_g u^f]v^y = \int\limits_{\Omega^T} d\Omega_x \int\limits_{\tau(x)}^{T} dt\; u^f_{tt} v^y$$

$$-\int\limits_0^T dt \int\limits_{\Omega^t} d\Omega\, \Delta_g u^f\, v^y \;= \int\limits_{\Omega^T} d\Omega_x\,[u^f_t\, v^y \,-\, u^f\, v^y_t]|^{t=T}_{t=\tau(x)}$$

$$-\int\limits_0^T dt \int\limits_{\Gamma} d\Gamma\,[\frac{\partial u^f}{\partial\nu}\, v^y - u^f\,\frac{\partial v^y}{\partial \nu}\,] + \int\limits_{N^T} d\Omega dt\; u^f\,[v^y_{tt} - \Delta_g v^y]$$

$$= -\int\limits_{\Omega^T} d\Omega\, u^f(\cdot, T) y - \int\limits_{\Sigma^T} d\Gamma dt\, f\, v^y\,,$$

что ведёт к (1.6).

В силу плотности вложений $\mathcal{M}^T \subset \mathcal{F}^T$ и $C_0^\infty(\mathrm{int}\;\Omega^T) \subset \mathcal{H}^T$, соотношение (1.6) справедливо для всех $f \in \mathcal{F}^T$ и $y \in \mathcal{H}^T$. $\rhd$

Записывая (1.6) в виде

$$(W^T f, y)_{\mathcal{H}^T} = (f, -v^y\,|_{\Sigma^T})_{\mathcal{F}^T}\,,$$

получаем:

$$(W^T)^*\, y = -v^y\,|_{\Sigma^T}. \tag{1.7}$$

1.3. Спектральное представление. Здесь мы рассмотрим разложения решений u^f и v^y по собственным функциям задачи (0.1)–(0.3). В связи с тем, что поверхность Γ^T , вообще говоря, не является гладкой, уточним, что понимается под решениями этой задачи. Рассмотрим линеал $\{y \in C^\infty(\Omega^T)|\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0$ на Γ, $\mathrm{supp}\ y \subset \Omega^T\} \subset \mathcal{H}^T$, элементы которого аннулируются вблизи Γ^T . На этом линеале оператор $-\Delta_g$ симметричен и полуограничен (положителен); пусть $-\Delta_g^T$ есть его расширение по Фридрихсу. Под решениями задачи (0.1)–(0.3) мы понимаем собственные функции оператора $-\Delta_g^T$. Введём пространство

$$\mathcal{H}_1^T := \mathrm{clos}_{H^1(\Omega)}\{y \in C^\infty(\Omega^T)|\,\mathrm{supp}\ y \subset \Omega^T\}$$

с нормой

$$||y||^2_{\mathcal{H}_1^T} = \int\limits_{\Omega^T} d\Omega\,[|\nabla_g y|^2 + y^2]$$

и отметим компактность вложения $\mathcal{H}_1^T \subset \mathcal{H}^T$ (см. [8], Теорема 1.6.3(1)). Собственные функции $\{\varphi_k^T\}_{k=1}^\infty$ суть элементы $\mathcal{H}_1^T$, гладкие в Ω^T и удовлетворяющие условию Неймана на Γ в классическом смысле. Напомним, что они образуют ортонормированный базис пространства $\mathcal{H}^T$ и отметим, что $\{\varphi_k^T\}_{k=1}^\infty$ есть ортогональный базис в $\mathcal{H}_1^T$.

Рассмотрим вспомогательную систему $\alpha_*^{T,\infty}$:

$$v_{tt} - \Delta_g v = 0 \quad \text{в} \quad \operatorname{int}\Omega^T \times \mathbf{R}; \tag{1.8}$$

$$v|_{t=T} = 0,\ \ v_t|_{t=T} = y \quad \text{в} \quad \Omega^T; \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \times \mathbf{R}; \quad v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma^T \times \mathbf{R}; \tag{1.10}$$

с $y \in \mathcal{H}^T$. Её решение $v = v^y(x,t)$ класса $H^1_{\text{loc}}(\Omega^T \times \mathbf{R})$, определяемое адекватным интегральным тождеством, попадает в класс $C(\mathbf{R};\mathcal{H}_1^T)$ и имеет известное спектральное представление

$$v^y(\cdot,t) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\sin\sqrt{\lambda_k^T}(t-T)}{\sqrt{\lambda_k^T}}(y,\varphi_k^T)_{\mathcal{H}^T}\,\varphi_k^T. \tag{1.11}$$

Отметим следующее: если y в (1.9) и в (1.4) одно и то же, то решения задач (1.8)–(1.10) и (1.3)–(1.5) совпадают в N^T по гиперболичности. В этом смысле систему α_*^T можно считать подсистемой $\alpha_*^{T,\infty}$. Полагая в (1.9) $y = \varphi_k^T$, имеем

$$v^{\varphi_k^T}(\cdot,t) = \frac{\sin\sqrt{\lambda_k^T}(t-T)}{\sqrt{\lambda_k^T}}\varphi_k^T. \tag{1.12}$$

Обозначая

$$s_k^T(\cdot,t) := -\frac{\sin\sqrt{\lambda_k^T}(T-t)}{\sqrt{\lambda_k^T}}\,\varphi_k^T|_\Gamma,$$

согласно (1.7) и (1.12), получаем:

$$(W^T)^*\varphi_k^T = s_k^T. \tag{1.13}$$

Перейдём к спектральному представлению решения системы α^T. Для $f \in \mathcal{M}^T$ имеем:

$$
\begin{aligned}
u^f(\cdot,t) &= \sum_{k=1}^{\infty}(u^f(\cdot,t),\varphi_k^T)_{\mathcal{H}^T}\varphi_k^T = \langle \text{см.}\,(1.2) \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(W^T\mathcal{T}_{T-t}^T f,\varphi_k^T)_{\mathcal{H}^T}\varphi_k^T = \langle \text{см.}\,(1.13) \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(\mathcal{T}_{T-t}^T f, s_k^T)_{\mathcal{F}^T}\varphi_k^T, \qquad 0 \le t \le T\,;
\end{aligned}
$$

по непрерывности W^T это представление распространяется на все $f \in \mathcal{F}^T$.

Лемма 2. *Если $f \in \mathcal{F}^T$ таково, что $u^f \in C([0,T];\mathcal{H}_1^T)$, то справедливо представление*

$$
(R^T f)(\cdot,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(\mathcal{T}_{T-t}^T f, s_k^T)_{\mathcal{F}^T}\varphi_k|_\Gamma, \tag{1.14}
$$

в виде ряда, сходящегося в $C([0,T];H^{1/2}(\Gamma))$.

◁ Поскольку $u^f(\cdot,t) \in \mathcal{H}_1^T$, а ряд

$$
u^f(\cdot,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(\mathcal{T}_{T-t}^T f, s_k^T)_{\mathcal{F}^T}\varphi_k^T
$$

ортогонален в $\mathcal{H}_1^T$, то он сходится к $u^f(\cdot,t)$ в $\mathcal{H}_1^T$. Переходя в этом представлении к следам на Γ, легко получаем утверждение леммы. ▷

1.4. Управляемость. Как и всякий вариант BC-метода, настоящий использует управляемость системы α^T. В нашем случае речь идёт о *приближенной управляемости* в $\mathcal{H}_1^T$. Обозначим

$$
\mathcal{M}_0^T := \{f \in \mathcal{M}^T \,|\, f(\cdot,T) = 0\}.
$$

Лемма 3. *При любом $T > 0$ справедливо соотношение*

$$
\operatorname{clos}_{\mathcal{H}_1^T}\{u^f(\cdot,T)|\, f \in \mathcal{M}_0^T\} = \mathcal{H}_1^T. \tag{1.15}
$$

$\triangleleft$ Пусть $h \in \mathcal{H}_1^T$ таково, что

$$(h, u^f(\cdot, T))_{\mathcal{H}_1^T} = \int\limits_{\Omega^T} d\Omega\, [\nabla_g h \cdot \nabla_g u^f(\cdot, T) + h u^f(\cdot, T)] = 0; \qquad (1.16)$$

для всех $f \in \mathcal{M}_0^T$; мы покажем, что $h = 0$.

Интегрируя в (1.16) по частям с учётом соотношения (1.1) и равенства

$$\frac{\partial u^f}{\partial \nu}(\cdot, T)|_\Gamma = f(\cdot, T) = 0,$$

имеем:

$$0 = \int\limits_{\Omega^T} d\Omega\, h\, [-\Delta_g u^f(\cdot, T) + u^f(\cdot, T)] =< \text{см.}\,(1.2) >$$

$$= \int\limits_{\Omega^T} d\Omega\, h\, [-u^{f_{tt}}(\cdot, T) + u^f(\cdot, T)] = \int\limits_{\Omega^T} d\Omega\, h\, u^{-f_{tt}+f}(\cdot, T) =$$

$$=< \text{см.}\,(1.6) >= \int\limits_{\Sigma^T} d\Gamma dt\, v^h [f_{tt} - f],$$

где v^h — решение задачи (1.8)–(1.10) с $y = h$. Из последнего, в силу произвольности f, легко заключаем: $v^h|_{\Sigma^T} = a(\cdot)e^t + b(\cdot)e^{-t}$ с некоторыми $a, b \in L_2(\Gamma)$; первое из условий (1.4) приводит к соотношению $v^h|_{\Sigma^T} = c(\cdot)\,\mathrm{sh}\,(t - T)$; наконец, в силу нечётности v^h по времени относительно $t = T$ имеем:

$$v^h(\cdot, t) = c(\cdot)\,\mathrm{sh}\,(t - T) \quad \text{на} \quad \Sigma^{2T} \qquad (1.17)$$

с некоторым $c \in L_2(\Gamma)$.

Фиксируем (малое) $\varepsilon > 0$ и выберем функцию $\eta = \eta(t) \in C^\infty(\mathbf{R})$ со свойствами:

$$\mathrm{supp}\ \eta \subset [-1, 1], \quad \eta(-t) = \eta(t), \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta(s)\, ds = 1;$$

обозначим

$$\eta_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon}\,\eta(\frac{t}{\varepsilon})\,, \qquad \alpha_k^\varepsilon := \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} ds\,\eta_\varepsilon(s)\cos\sqrt{\lambda_k^T}\,s\,,$$

$$\beta^\varepsilon := \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} ds\,\eta_\varepsilon(s)\,\mathrm{ch}\,s\,, \qquad h_\varepsilon := \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^\varepsilon\,(h,\varphi_k^T)_{\mathcal{H}^T}\,\varphi_k^T\,.$$

Отметим, что, в силу быстрого убывания $\alpha_k^\varepsilon \to 0$ при $k \to \infty$ выполнено включение $h_\varepsilon \in \mathrm{Dom}\,(-\Delta_g^T)^n$ с любым $n > 0$.

Используя спектральное представление (1.11), нетрудно показать, что регуляризация

$$v_\varepsilon^h := v^h * \eta_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{\lambda_k^T}(t-T)}{\sqrt{\lambda_k^T}}\,\alpha_k^\varepsilon(h,\varphi_k^T)_{\mathcal{H}^T}\,\varphi_k^T = v^{h_\varepsilon}$$

является гладким в $\Omega^T \times \mathbf{R}$ решением задачи (1.8)–(1.10) с $y = h_\varepsilon$ и удовлетворяет условию

$$v^{h_\varepsilon}(\cdot,t) = \beta^\varepsilon\,c(\cdot)\,\mathrm{sh}\,(t-T) \quad \text{на} \quad \Gamma\times(\varepsilon, 2T-\varepsilon), \tag{1.18}$$

следующему из (1.17).

Дифференцируя по времени и обозначая $w^{h_\varepsilon} := v_{tt}^{h_\varepsilon}$, нетрудно получить, что w^{h_ε} есть решение задачи (1.8)–(1.10) с $y = \Delta_g^T h_\varepsilon$, удовлетворяющее условию

$$w^{h_\varepsilon}(\cdot,t) = \beta^\varepsilon\,c(\cdot)\,\mathrm{sh}\,(t-T) \quad \text{на} \quad \Gamma\times(\varepsilon, 2T-\varepsilon). \tag{1.19}$$

Из совпадения данных Коши

$$\begin{aligned}\frac{\partial v^{h_\varepsilon}}{\partial\nu} = \frac{\partial w^{h_\varepsilon}}{\partial\nu} = 0, \quad v^{h_\varepsilon} &=< \text{см.}\,(1.18),(1.19) > \\ &= w^{h_\varepsilon} \quad \text{на} \quad \Gamma\times(\varepsilon,2T-\varepsilon),\end{aligned}$$

в силу известной теоремы единственности Хольмгрена–Йона–Татару (см. [2], [9]), следует совпадение решений в области влияния данных:

$$w^{h_\varepsilon} = v^{h_\varepsilon} \quad \text{в} \quad \{(x,t)\,|\,x\in\Omega^T\,,\ \tau(x)+\varepsilon \le t \le 2T-\tau(x)-\varepsilon\}.$$

Из последнего, взяв $t=T$, получаем

$$\Delta_g^T h_\varepsilon = w^{h_\varepsilon}(\cdot,T) = v^{h_\varepsilon}(\cdot,T) = h_\varepsilon \quad \text{в} \quad \{x\in\Omega^T \mid \tau(x)\le T-\varepsilon\},$$

то есть

$$\Delta_g^T h_\varepsilon = h_\varepsilon \quad \text{в} \quad \Omega^{T-\varepsilon}.$$

Устремляя $\varepsilon\to 0$ и используя сходимость $h_\varepsilon\to h$ в $\mathcal{H}^T$, без труда получим $h\in \operatorname{Dom}(-\Delta_g^T)$ и $-\Delta_g^T h = -h$. Последнее соотношение, в силу положительности $-\Delta_g^T$, с необходимостью влечёт $h=0$. $\triangleright$

2. Извлечение спектральных данных

2.1. Форма c^T. Оператор $C^T:\mathcal{F}^T\mapsto\mathcal{F}^T$,

$$C^T := (W^T)^* W^T$$

называется *связывающим*. Важная роль этого оператора в BC-методе определяется следующим обстоятельством: он явно и просто выражается через продолженный оператор реакции. Именно, если $S^T:\mathcal{F}^T\mapsto\mathcal{F}^{2T}$,

$$(S^T f)(\cdot,t) := \begin{cases} f(\cdot,t), & 0\le t<T;\\ -f(\cdot,2T-t), & T\le t\le 2T;\end{cases}$$

есть оператор нечётного продолжения, а $J^{2T}:\mathcal{F}^{2T}\mapsto\mathcal{F}^{2T}$,

$$(J^{2T}f)(\cdot,t) := \int\limits_0^t f(\cdot,s)\,ds, \qquad 0\le t\le 2T$$

— оператор интегрирования, то справедливо равенство

$$C^T = -\frac{1}{2}(S^T)^* R^{2T} J^{2T} S^T \tag{2.1}$$

(см. [2], [3]).

Пусть $c^T(f,g) := (C^T f,g)_{\mathcal{H}^T}$ есть билинейная форма связывающего оператора; из определения имеем:

$$c^T(f,g) = ((W^T)^* W^T f, g)_{\mathcal{F}^T} = (u^f(\cdot,T), u^g(\cdot,T))_{\mathcal{H}^T}. \tag{2.2}$$

Если при этом $f\in\mathcal{M}_0^T$ и $g\in\mathcal{M}^T$, то

$$-c^T(f_{tt},g) = \int\limits_{\Omega^T} d\Omega\, \nabla_g u^f(\cdot,T)\cdot\nabla_g u^g(\cdot,T). \tag{2.3}$$

В самом деле,

$$-c^T(f_{tt},g) = <\text{ см.}\,(2.2)> = -\int\limits_{\Omega^T} d\Omega\, u^{f_{tt}}(\cdot,T)\, u^g(\cdot,T)$$

$$= <\text{ см.}\,(1.2)> = -\int\limits_{\Omega^T} d\Omega\, \Delta_g u^f(\cdot,T)\, u^g(\cdot,T),$$

откуда, интегрируя по частям с учётом соотношений $\frac{\partial u^f}{\partial \nu}(\cdot,T) = f(\cdot,T) = 0$ и (1.1), получаем (2.3).

Установим вспомогательное предложение. Скажем, что последовательность $\{f_p\}_{p=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}^T$ *c^T-фундаментальна*, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $N(\varepsilon)$ такое, что $c^T(f_p - f_q, f_p - f_q) < \varepsilon^2$ для всех $q, p > N(\varepsilon)$. Сразу отметим, что если $\{f_p\}_{p=1}^{\infty}$ c^T-фундаментальна, то, согласно (2.2), последовательность $\{u^{f_p}(\cdot,T)\}_{p=1}^{\infty}$ фундаментальна (и, следовательно, сходится) в $\mathcal{H}^T$.

Лемма 4. *Если последовательность $\{f_p\}_{p=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}_0^T$ такова, что $c^T(f_p,f_p) - c^T((f_p)_{tt},f_p) \le \text{const}$, то из неё можно извлечь c^T-фундаментальную подпоследовательность.*

◃ Для $f \in \mathcal{M}_0^T$, в силу (2.2), (2.3) имеем:

$$c^T(f,f) - c^T(f_{tt},f) = \int\limits_{\Omega^T} d\Omega\, \{[u^f(\cdot,T)]^2 + |\nabla_g u^f(\cdot,T)|^2\} = ||u^f(\cdot,T)||^2_{\mathcal{H}_1^T}.$$

Отсюда и из условий леммы следует, что последовательность $\{u^{f_p}(\cdot,T)\}_{p=1}^{\infty}$ ограничена в $\mathcal{H}_1^T$. По компактности вложения $\mathcal{H}_1^T \subset \mathcal{H}^T$, из неё извлекается подпоследовательность $\{u^{f_{p_j}}(\cdot,T)\}_{j=1}^{\infty}$, фундаментальная в норме $\mathcal{H}^T$. В силу (2.2), соответствующие $\{f_{p_j}\}_{j=1}^{\infty}$ образуют c^T-фундаментальную подпоследовательность. ▹

2.2. Вариационный принцип. Собственные значения и собственные функции задачи (0.1)–(0.3) могут быть найдены с помощью известного вариационного принципа (см., например, [6]):

$$\lambda_k^T = \min_{\substack{y \in \mathcal{H}_1^T;\ ||y||^2_{\mathcal{H}^T} = 1;\\ (y,\varphi_j^T)_{\mathcal{H}^T} = 0,\ j = 1,2,\dots k-1}} \int\limits_{\Omega^T} d\Omega\, |\nabla_g y|^2 \tag{2.4}$$

(при $k = 1$ условия ортогональности отсутствуют).

Лемма 5. *Справедливо представление*

$$\lambda_k^T = \inf_{\substack{f\in\mathcal{M}_0^T;\ c^T(f,f)=1;\\ (f,s_j^T)_{\mathcal{F}^T}=0,\ j=1,2,\dots k-1}} -c^T(f_{tt},f)\,. \qquad (2.5)$$

◃ В силу (1.15), поиск минимума на подмножестве $\mathcal{H}_1^T$ в (2.4) можно заменить на поиск точной нижней грани на соответствующем подмножестве плотного линеала $\{u^f(\cdot,T)|\, f\in\mathcal{M}_0^T\}$, что позволяет записать правую часть (2.4) в виде

$$\inf_{\substack{f\in\mathcal{M}_0^T;\ ||u^f(\cdot,T)||^2_{\mathcal{H}^T}=1;\\ (u^f(\cdot,T),\varphi_j^T)_{\mathcal{H}^T}=0, j=1,2,\dots k-1}} \int\limits_{\Omega^T} d\Omega\, |\nabla_g u^f(\cdot,T)|^2.$$

Согласно (2.3), минимизируемая величина есть $-c^T(f_{tt},f)$; условие нормировки имеет вид:

$$1=||u^f(\cdot,T)||^2_{\mathcal{H}^T} =<\text{см.}\,(2.2)>= c^T(f,f),$$

а условие ортогональности записывается в виде

$$0=(u^f(\cdot,T),\varphi_j^T)_{\mathcal{H}^T}=(W^Tf,\varphi_j^T)_{\mathcal{H}^T}=<\text{см.}(1.7),(1.12)>=(f,s_k^T)_{\mathcal{F}^T},$$

что и приводит к (2.5). ▹

Пусть $\{f_p^{(k)}\}_{p=1}^\infty$ есть минимизирующая последовательность в (2.5), так что

$$-\lim_{p\to\infty} c^T((f_p^{(k)})_{tt},f_p^{(k)})=\lambda_k^T\,.$$

Согласно Лемме 4, эту последовательность можно считать c^T-фундаментальной. Следовательно, последовательность $\{u^{f_p^{(k)}}(\cdot,T)\}_{p=1}^\infty$ минимизирует правую часть (2.4) и сходится в $\mathcal{H}^T$; поэтому

$$\lim_{p\to\infty} u^{f_p^{(k)}}(\cdot,T)=:\varphi_k^T$$

есть собственная функция задачи (0.1)–(0.3). Из последнего имеем:

$$\lim_{p\to\infty} C^Tf_p^{(k)}=\lim_{p\to\infty}(W^T)^*W^Tf_p^{(k)}=(W^T)^*\lim_{p\to\infty}u^{f_p^{(k)}}(\cdot,T)$$
$$=(W^T)^*\varphi_k^T=<\text{см.}\,(1.13)>=s_k^T,$$

откуда, вспоминая определение s_k^T, находим

$$-[\frac{\partial}{\partial t} \lim_{p\to\infty} C^T f_p^{(k)}]|_{t=T} = \varphi_k^T|_\Gamma. \tag{2.6}$$

Представления (2.5), (2.6) позволяют восстановить текущие спектральные данные по продолженному оператору реакции.

Шаг 0. По заданному R^{2T} найдём, согласно (2.1), оператор C^T и его билинейную форму c^T.

Шаг 1. Подобрав c^T-фундаментальную последовательность $\{f_p^{(1)}\}_{p=1}^\infty$, минимизирующую правую часть (2.5) (при $k = 1$), определим λ_1^T и найдём $\varphi_1^T|_\Gamma$ по (2.6).

....

Продолжая эту процедуру, восстановим все $\{\lambda_k^T; \varphi_k^T|_\Gamma\}_{k=1}^\infty$.

3. Приложения

3.1. Система $\alpha^{T,\infty}$. Рассмотрим систему

$$u_{tt} - \Delta_g u = 0 \quad \text{в} \quad \operatorname{int} \Omega^T \times (0,\infty); \tag{3.1}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^T; \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f \quad \text{на} \quad \Gamma \times [0,\infty); \tag{3.3}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma^T \times [0,\infty) \tag{3.4}$$

с управлением $f \in \mathcal{M}^\infty := \{f \in C^\infty(\Gamma\times[0,\infty)) | \operatorname{supp} f \subset \Gamma\times(0,\infty)\}$, аннулирующимся вблизи $\Gamma \times \{t = 0\}$. В связи с тем, что поверхность Γ^T может не быть гладкой, необходимо уточнить, что понимается под решением. С этой целью рассмотрим вспомогательную систему

$$w_{tt} - \Delta_g w = 0 \quad \text{в} \quad \operatorname{int} \Omega^T \times (\tau,\infty); \tag{3.5}$$

$$w|_{t=\tau} = a, \ w_t|_{t=\tau} = b \quad \text{в} \quad \Omega^T; \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \times [\tau,\infty); \tag{3.7}$$

$$w = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma^T \times [\tau,\infty) \tag{3.8}$$

($\tau \in \mathbf{R}$ - параметр), решение которой $w = w^{a,b}(x,t)$ определим рядом:

$$E_\tau^{t,1}\{a,b\} = w^{a,b}(\cdot,t) :=$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\, (a,\varphi_k^T)_{\mathcal{H}^T} \cos\sqrt{\lambda_k^T}(t-\tau) + (b,\varphi_k^T)_{\mathcal{H}^T}\ \frac{\sin\sqrt{\lambda_k^T}(t-\tau)}{\sqrt{\lambda_k^T}}\,\Big]\ ,$$

где

$$E_\tau^t : \{a,b\} \mapsto \{w^{a,b}(\cdot,t), w_t^{a,b}(\cdot,t)\}$$

— оператор эволюции, а $E_\tau^{t,1}\{a,b\}$ — первая компонента полного состояния. При $a \in \mathcal{H}_1^T$ и $b \in \mathcal{H}^T$ легко имеем $w^{a,b} \in C([0,\infty);\mathcal{H}_1^T)$. Решение $u = u^f(x,t)$ задачи (3.1)–(3.4) будет определено ниже, через решение $w^{a,b}$.

Фиксируем положительное $T_0 < T$ и выберем (малое) $\delta > 0$. Рассмотрим систему отрезков $I_j := [\alpha_j, \beta_j]\,,\ j = 0,1,\ldots : \alpha_0 = 0\,,\ \beta_j = \alpha_j + T_0\,,\ \alpha_j = \beta_{j-1} - \delta$. Эта система покрывает полуось: $\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} I_j = [0,\infty)$; пусть $\{\chi_j(\cdot)\}_{j=0}^{\infty}$ есть разложение единицы, подчинённое этому покрытию: $\operatorname{supp}\chi_j \subset I_j\,,\ \sum\limits_{j=0}^{\infty}\chi_j(t) = 1\,,\ t \in [0,\infty)$.

Для f из (3.3) обозначим $f_0(\cdot,t) := \chi_0(t)f(\cdot,t)$ и отметим, что $f_0|_{t\ge T_0} = 0$. При временах $0 \le t \le T_0$ корректно определено классическое решение u^{f_0} задачи (0.4)–(0.6); при $t > T_0$ управление f_0 аннулируется и дальнейшая эволюция системы описывается свободной динамикой с данными Коши $\{u^{f_0}(\cdot,T_0), u_t^{f_0}(\cdot,T_0)\}$. В соответствии со сказанным, мы определяем решение задачи (3.1)–(3.4) с управлением f_0 следующим образом:

$$u_0^f(\cdot,t) := \begin{cases} u^{f_0}(\cdot,t), & 0 \le t < T_0\,; \\ E_{T_0}^{t,1}\{u^{f_0}(\cdot,T_0), u_t^{f_0}(\cdot,T_0)\}\,, & T_0 \le t < \infty. \end{cases}$$

Продолжая аналогично, определим управления $f_j(\cdot,t) := \chi_j(t+\alpha_j)f(\cdot,t+\alpha_j)\,,\ 0 \le t \le T_0\,,\ j = 1,2,\ldots$ и, затем, решения задачи (3.1)–(3.4) с управлениями $\chi_j f$:

$$u_j^f(\cdot,t) := \begin{cases} 0\,, & 0 \le t < \alpha_j\,; \\ u^{f_j}(\cdot,t-\alpha_j), & \alpha_j \le t < \beta_j\,; \\ E_{\beta_j}^{t,1}\{u^{f_j}(\cdot,T_0), u_t^{f_j}(\cdot,T_0)\}\,, & \beta_j \le t < \infty. \end{cases}$$

Наконец, определим (полное) решение $u = u^{f,T}(x,t)$ задачи (3.1)–(3.4):

$$u^{f,T}(\cdot,t) := \sum_{j=0}^{\infty} u_j^f(\cdot,t)$$

и отметим, что при любом $t \in [0,\infty)$ в этом ряде отлично от нуля лишь конечное число членов, поскольку $\operatorname{supp} u_j^f \subset \Omega^T \times [\alpha_j, \infty)$ и $\alpha_j \to \infty$.

В случае $f \in \mathcal{F}^\infty := L_2^{\rm loc}(\Gamma \times [0,\infty))$ обобщённое решение $u^{f,T}$ определяется с помощью того же приёма, – разложения $f = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \chi_j f$, через обобщённые решения u^{f_j} задачи (0.4)–(0.6). Используя непрерывность отображения $f \mapsto \{u^f, u_t^f\}$ из $\mathcal{F}^T$ в $C([0,T]; H^s(\Omega)) \times C([0,T]; H^{s-1}(\Omega))$ с $s < \frac{3}{5}$ (см. [7]), нетрудно показать, что $u^{f,T} \in C([0,\infty); \mathcal{H}^T)$.

Решение $u^{f,T}$ с $f \in \mathcal{F}^\infty$ можно представить в виде ряда Фурье

$$u^{f,T}(\cdot,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^f(t)\, \varphi_k^T\,; \tag{3.9}$$

стандартные вычисления дают:

$$c_k^f(t) = -\int_0^t ds\, \frac{\sin\sqrt{\lambda_k^T}(t-s)}{\sqrt{\lambda_k^T}} \int_\Gamma d\Gamma_\gamma\, f(\gamma,s)\varphi_k^T(\gamma)\,.$$

Отметим, что, при заданном f , коэффициенты Фурье определяются спектральными данными $\{\lambda_k^T;\, \varphi_k^T|_\Gamma\}_{k=1}^\infty$.

3.2. Продолжение R^{2T}**.** Обозначим $\Sigma^\infty := \Gamma \times [0,\infty)$; пусть $R^{T,\infty} : \mathcal{F}^\infty \to \mathcal{F}^\infty$,

$$R^{T,\infty} f := u^{f,T}|_{\Sigma^\infty}$$

есть оператор реакции системы $\alpha^{T,\infty}$. Представление (3.9) и соображения, использованные при доказательстве Леммы 2, легко приводят к следующему результату: если $f \in \mathcal{F}^\infty$ таково, что $u^{f,T} \in C([0,\infty); \mathcal{H}_1^T)$, то справедливо представление

$$(R^{T,\infty} f)(\cdot,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, s_k^{T,t})_{\mathcal{F}^t}\, \varphi_k^T|_\Gamma \tag{3.10}$$

с
$$s_k^{T,t}(\cdot,\tau) := -\frac{\sin\sqrt{\lambda_k^T}(t-\tau)}{\sqrt{\lambda_k^T}}\,\varphi_k^T|_\Gamma$$
в виде ряда, сходящегося в $C^{\rm loc}([0,\infty); H^{1/2}(\Gamma))$.

Выберем управление $f\in\mathcal{F}^\infty$ и обозначим $f_{2T} := f|_{\Sigma^{2T}}$. Сравнивая решение $u^{f,T}$ задачи (3.1)–(3.4) с решением $u^{f_{2T}}$ задачи (0.7)–(0.8), по гиперболичности волнового уравнения будем иметь:
$$u^{f,T} = u^{f_{2T}} \quad \text{в} \quad P^{2T},$$
откуда
$$(R^{T,\infty}f)|_{\Sigma^{2T}} = R^{2T}(f|_{\Sigma^{2T}}).$$
В смысле последнего равенства, оператор $R^{T,\infty}$ является *продолжением* оператора R^{2T} с Σ^{2T} на Σ^∞. Примечательное обстоятельство состоит в том, что это продолжение определяется оператором R^{2T} и может быть построено по схеме: $R^{2T}\Rightarrow$ <см. Процедуру п.2.2> $\Rightarrow$ $\{\lambda_k^T;\varphi_k^T|_\Gamma\}_{k=1}^\infty$ $\Rightarrow<$ см.(3.10) $>\Rightarrow$ $R^{T,\infty}$.

Отметим, что при $T\le T_*$ оператор R^{2T} допускает и другие продолжения на Σ^∞, отвечающие постановке разных краевых условий в (3.4) (например, $\frac{\partial u}{\partial\nu}|_{\Gamma^T}=0$). Продолжение $R^{T,\infty}$ выделено среди прочих тем, что его удаётся построить, *не решая обратной задачи*.

При $T>T_*$ продолжение R^{2T}, очевидно, оказывается единственным.

3.3. Об обратной задаче. Наметим, как можно использовать полученные результаты в обратной задаче; этой теме мы планируем посвятить отдельную публикацию. Оговоримся, что обратная задача, состоящая в восстановлении подмногообразия (Ω^T, g) по оператору реакции R^{2T}, решена (см. [2], [5]) и речь идёт лишь об упрощении (весьма, однако, существенном) процедуры её решения.

Итак, пусть R^{2T} задан. Вместе с ним, очевидно, заданы операторы $R^{2\tau}$ с $\tau<T$. Для каждого $R^{2\tau}$, способом, описанным в п.3.2, можно построить продолжение $R^{\tau,\infty}$, отвечающее задаче (3.1)–(3.4) с *закреплённой границей* Γ^τ. Свойства этой границы можно извлечь из $R^{\tau,\infty}$, используя разрывные управления вида $f(\gamma,t)=a(\gamma)1(t)$ ($1(\cdot)$ -функция Хевисайда): отклик системы

$R^{\tau,\infty}(a1)$ будет содержать сингулярности, прошедшие через Ω^τ, отразившиеся от Γ^τ и вернувшиеся на Γ. Эти сингулярности наблюдаются на Σ^{2T} при $t = 2\tau + 0$ и несут информацию о геометрии Γ^τ. Варьируя τ , этой техникой можно восстановить т.н. выкройку многообразия (Ω^T, g) (см. [2]). Мы надеемся, что за счёт подходящего выбора амплитудных множителей $a(\cdot)$ удасться восстановить не только выкройку, но и метрический тензор на ней. Последнее фактически равносильно восстановлению (Ω^T, g) с точностью до изометрии.

Автор благодарен С.В.Белишевой за помощь в оформлении работы.

Литература

1. М. И. Белишев, *Каноническая модель динамической системы с граничным управлением в обратной задаче теплопроводности.* — Алгебра и Анализ, **7(6)** (1995), 3–32.
2. M. I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC-method).* — Inverse Problems, **13(5)** (1997), R1–R45.
3. M. I. Belishev, *Dynamical systems with boundary control: models and characterization of inverse data.* — Inverse Problems, **17** (2001), 659–682.
4. M. I. Belishev, *On relations between spectral and dynamical inverse data.* — Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **9(6)** (2001), 547-565.
5. М. И. Белишев, А. П. Качалов, *Граничное управление и квазифотоны в задаче реконструкции риманова многообразия по динамическим данным.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **203** (1992), 21–51.
6. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве.* — Изд-во Ленингр. университета, Л., 264 с., (1980).
7. I. Lasiecka, R. Triggiani, *Regularity Theory of Hyperbolic Equation with Non-homogeneous Neumann Boundary Conditions. II. General Boundary Data.* — Journal of Diff. Equations, **94** (1991), 112–164.
8. В. Г. Мазья, *Пространства Соболева.* — Л., Изд-во Ленингр. университета (1985).
9. D. Tataru, *Unique continuation for solutions of PDE's: between Hörmander's theorem and Holmgren's theorem.* — Comm. PDE, **20** (1995), 855–894.

Belishev M. I. On relations between data of dynamical and spectral inverse problems.

As is well-known, the boundary spectral data of the compact Riemannian manifold determine its boundary dynamical data (the response operator of the wave equation) corresponding to the arbitrary time interval: the response operator is represented in the form of a series over the spectral data. The converse is true in the following sense: the response operator determines the manifold and, thus, its spectral data. For recovering the last, one can recover the manifold and then solve the (direct) boundary spectral problem. Nevertheless, such the way is not efficient and the question arises whether one can extract the spectral data from the response operator without solving the inverse problem (without recovering the manifold). The paper gives a positive answer and proposes a "direct" time-optimal procedure extracting the spectral data from the response operator. The procedure is based upon a variational principle.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН

E-mail: belishev@pdmi.ras.ru

Поступило 29 января 2003 г.