Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 297, 2003 г.

В. М. Бабич

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН СОСКАЛЬЗЫВАНИЯ ВДОЛЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ АНИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО ТЕЛА

Работа посвящается Л. А. Молоткову в связи с его семидесятилетием

1. Введение.

Открытые "на кончике пера" в середине 20-го века ползущие "creeping" волны (по русской терминологии "волны соскальзывания") возникают во многих волновых процессах. Эти волны "скользят" вдоль поверхности упругого тела, "соскальзывая" по касательной с этой поверхности (см. рис. 1)

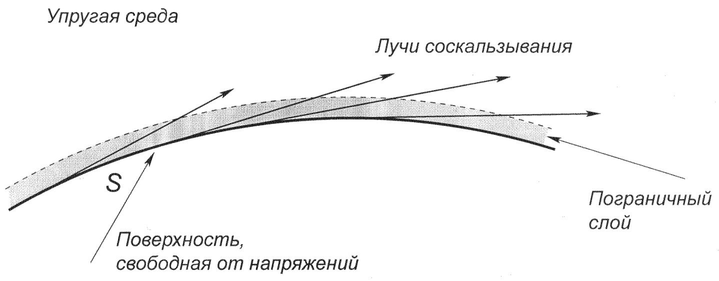

Рис. 1. Лучи соскальзывая и пограничный слой.

Их учет позволил объяснить ряд феноменов [1, 2]. Общую теорию волн соскальзывания проще всего развить, опираясь на теорию дифракционных пограничных слоев. (Для волн, сосредоточенных в окрестности фиксированного луча (см. [3]), для "несосредоточенных волн" (см. [4, 5]), где методом дифракционных

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ No. 02-01-00260.

пограничных слоев в случае изотропной упругой среды находится аналитическое выражение для упругих волн соскальзывания.) Другие варианты волн соскальзывания рассматриваются в работах [6, 7].

Автору неизвестны исследования, аналогичные [4, 5], посвященные анизотропным упругим волнам соскальзывания.

В какой-то степени двойственными по отношению к "теневым" волнам соскальзывания являются волны шепчущей галереи. Им (анизотропная упругая среда) посвящены работы [8–10]. В них на базе так называемого анзаца Кравцова строятся асимптотические разложения этих волн. Такой подход имеет свои преимущества, но усложняет формулы. Имея в виду развить более простой подход к теории волн соскальзывания (упругая среда, анизотропный случай) мы возвращаемся в настоящей работе к методике пограничного слоя [3–7].

Мы ограничимся выводом формул для волнового поля в пограничном слое вблизи поверхности упругого тела вдоль которого волна "скользит". Пункты 2–4 имеют вводный характер. Результаты, там излагаемые, либо известны, либо близки к известным.

2. Исходные формулы.

Для дальнейшего потребуются выражения для компонент тензора деформации и уравнений движения упругой среды в произвольных (вообще говоря неортогональных) координатах. Подобные формулы можно найти, например, в работе [11].

Пусть φ^r, $r = 1, 2, 3$ контрвариантные компоненты вектора смещений в координатной системе q^1, q^2, q^3, квадрат элемента длины в которой имеет вид

$$G_{ij} dq^i dq^j; \tag{2.1}$$

(здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

Компоненты тензора деформаций в системе координат q^1, q^2, q^3 имеют вид:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_{ij}}{\partial q^r}\varphi^r + G_{ir}\frac{\partial \varphi^r}{\partial q^j} + G_{rj}\frac{\partial \varphi^r}{\partial q^i}\right), \tag{2.2}$$

а уравнения движения

$$-G^{i\alpha}\rho\,\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} - G^{\ell\alpha}\frac{1}{2}\sigma^{ij}\frac{\partial G_{ij}}{\partial q^\ell} + \frac{G^{\ell\alpha}}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\sigma^{ij}G_{\ell i}\sqrt{G}\right) = 0, \tag{2.3}$$

где $(G^{i\alpha}) = (G_{i\alpha})^{-1}$, φ_i – ковариантные составляющие вектора смещений, σ^{ij} – контрвариантные компоненты тензора напряжений, связанные законом Гука с тензором деформаций:

$$\sigma^{ij} = a^{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell} \tag{2.4}$$

($a^{ijk\ell} = a^{ijk\ell}(q^1, q^2, q^3)$ – тензор упругих “постоянных”), удовлетворяющий условиям симметрии

$$a^{ijk\ell} = a^{jik\ell} = a^{k\ell ij} = a^{ij\ell k} \tag{2.5}$$

и условию положительной определенности потенциальной энергии деформации:

$$a^{ijk\ell}\eta_{ij}\eta_{k\ell} \geqslant \mathrm{const} \sum_{i,j=1}^{3} \eta_{ij}^2, \quad \eta_{ij} = \eta_{ji}, \quad \mathrm{const} > 0 \tag{2.6}$$

для любых η_{ij}.

3. О групповой скорости упругих волн в анизотропной упругой среде и канонических уравнениях соответствующих лучей.

Если искать формальное решение уравнений (2.2)–(2.4) в виде пространственно временного геометро-оптического ряда (см. [12, 13])

$$\varphi^\alpha \cong e^{\mathrm{i}p\theta(q^j,t)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\varphi_r^\alpha(q', q^2, q^3, t)}{(\mathrm{i}p)^r}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \tag{3.1}$$

(p – большой параметр), то для главных членов (порядка p^2) легко получается система равенств

$$\rho\,\theta_t^2 G^{mi}\varphi_m = \frac{\partial\theta}{\partial q^j}\,\frac{\partial\theta}{\partial q^k} a^{ijkm}\varphi_m, \tag{3.2}$$

где (G^{mi}) – матрица, обратная (G_{mi}). Из (3.2) следует, что ковариантный вектор (φ_m) $m = 1, 2, 3$ является собственным вектором матрицы

$$\frac{1}{\rho}(G_{mi}) \cdot \left(\frac{\partial\theta}{\partial q^j}\,\frac{\partial\theta}{\partial q^k} a^{ijk\ell}\right), \tag{3.3}$$

причем роль собственного числа играет θ_t^2. Из (2.6) и положительной определенности матрицы (G^{mi}) следует, что все три значения θ_t^2 положительны. Для $\dfrac{\partial\theta}{\partial t}$ возможны два значения – положительное и отрицательное. Считая $\dfrac{\partial\theta}{\partial t}$ – отрицательным, получим

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+H(\theta_1,\theta_2,\theta_3,q^1,q^2,q^3)=0; \quad \frac{\partial\theta}{\partial q^j}=\theta_j, \quad H>0 \tag{3.4}$$

($H^2(\theta_i,q^j)$ – собственное число матрицы (3.3)). Очевидно, что H – положительно однородная функция первого порядка от θ_1, θ_2, θ_3:

$$\forall(\zeta)\ \zeta>0 \quad H(\zeta\theta_1,\zeta\theta_2,\zeta\theta_3)=\zeta H(\theta_1,\theta_2,\theta_3). \tag{3.5}$$

Умножая (3.4) на параметр p и полагая $-p\frac{\partial\theta}{\partial t}=\omega$ (частота), $(p\theta_1,p\theta_2,p\theta_3)=(k_1,k_2,k_3):=\mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ – волновой вектор), получим, что (3.4) превращается в дисперсионное уравнение $\omega=\omega(k_1,k_2,k_3)$. Вектор $\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial k_i}\right)$ $i=1,2,3$ – это (контрвариантный) вектор групповой скорости в координатах q^1, q^2, q^3 (см. [12]). Если записать каноническую систему уравнений для уравнения (3.4), имеющую вид уравнения Гамильтона–Якоби, получим

$$\frac{dt}{ds}=1; \quad \frac{dq^j}{ds}=\frac{\partial H}{\partial\theta_j}, \quad \frac{d\theta_j}{ds}=-\frac{\partial H}{\partial q^j}. \tag{3.6}$$

Это уравнение пространственно-временных лучей в системе координат q^1, q^2, q^3. Нетрудно видеть, что $\dfrac{\partial H}{\partial\theta_j}$ – это компоненты групповой скорости в системе координат q^1, q^2, q^3. Чтобы получить обычные декартовы компоненты групповой скорости надо перейти от контрвариантных компонент вектора $\dfrac{\partial H}{\partial\theta_j}$ к декартовым по стандартным формулам векторного анализа. Мы придем к обычным проекциям вектора групповой скорости (“стрелочки с заостренным кончиком”) на прямоугольные оси координат.

Нас будет интересовать в дальнейшем не самый общий вид координатной системы, а специальный, часто употребляющийся в работах по поверхностным волнам. Мы будем предполагать, что точки (x^1, x^2, x^3) на поверхности S, вдоль которой “скользит – соскальзывая” волна, характеризуются координатами q^1, q^2, а точки вне поверхности расстоянием $n=q^3$ до нее. Тогда связь декартовых координат с q^1, q^2, q^3 дается формулой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(q^1, q^2) + n\mathbf{n}, \quad \mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3), \quad n = q^3 \geqslant 0 \tag{3.7}$$

($\mathbf{n}$ ($|\mathbf{n}| = 1$) нормаль, направленная в область, занятую колебаниями. Метрический тензор (G_{ij}) в этом случае имеет как известно вид:

$$\begin{aligned} &G_{31} = G_{13} = G_{32} = G_{23} = 0; \quad G_{33} = 1 \\ &G_{ij} = g_{ij} + 2nb_{ij} + O(n^2) \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Для тензора $(G^{ij}) = (G_{ij})^{-1}$ имеют место аналогичные формулы

$$\begin{aligned} &G^{13} = G^{31} = G^{23} = G^{32} = 0, \quad G^{33} = 1 \\ &G^{ij} = g^{ij} - 2nb^{ij} + O(n^2). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь (g_{ij}) компоненты первой квадратичной формы Гаусса поверхности S (где $q^3 = n = 0$) (b_{ij}) отличаются знаком от компонент второй квадратичной формы Гаусса, b^{ij} – это компоненты b_{ij}, в которых с помощью “поверхностного” тензора $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ “подняты” индексы

$$b^{ij} = g^{ii'} g^{jj'} b_{i'j'}. \tag{3.10}$$

Условием того, что лучи касаются поверхности S, является обращение в нуль компоненты групповой скорости вдоль нормали к поверхности S. Соответствующее равенство можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial\theta_3} \frac{1}{2} H^2(\theta_1, \theta_2, \theta_3, q^1, q^2, q^3)\Big|_{q^3=0} = 0. \tag{3.11}$$

Приведем еще одно равенство, важное для дальнейшего. Умножая (3.2) на φ_i, суммируя по i и заменяя θ_t^2 на $H(\theta_1, \theta_2, \theta_3, q^1, q^2, q^3)$, получим

$$\rho\, H^2 G^{mi} \varphi_m \varphi_i = \frac{\partial\theta}{\partial q^j}\ \frac{\partial\theta}{\partial q^\ell} a^{ijkm} \varphi_m \varphi_i. \tag{3.12}$$

Дифференцируя (3.11) по $\theta_3 = \dfrac{\partial\theta}{\partial q^3}$, учитывая (3.11) и (3.2) придем к искомому соотношению

$$\frac{\partial\theta}{\partial q_j}(a^{i3jm} + a^{ij3m})\varphi_m \varphi_i = 0. \tag{3.13}$$

Если продифференцировать (3.12) по $\dfrac{\partial\theta}{\partial q^j}$ $j = 1, 2$, то получится полезное соотношение

$$2\rho\, HG^{mi}\varphi_m\varphi_i \frac{\partial H}{\partial \dfrac{\partial\theta}{\partial q^j}} = \frac{\partial\theta}{\partial q^\ell}(a^{ij\ell m} + a^{i\ell jm})\varphi_i\varphi_m.$$

Вспоминая, что $\dfrac{\partial H}{\partial\theta_j}$ контрвариантные составляющие вектора групповой скорости и учитывая (2.5), получим:

$$\rho\, HG^{mi}\varphi_m\varphi_i \frac{dq^j}{ds} = \frac{\partial\theta}{\partial q^\ell}a^{ij\ell m}\varphi_i\varphi_m \quad (j = 1, 2). \tag{3.14}$$

Соотношение (3.14) аналогично известному равенству, связывающему групповую скорость с усреднением по периоду вектора потока энергии (см. [12] или [13, гл. 3, §3]), но в случае волн соскальзывания такая интерпретация сталкивается с трудностями.

4. Поверхностное уравнение эйконала, поверхностные лучи и соответствующие волновые фронты.

Придем к традиционному случаю гармонических колебаний, когда зависимость от времени описывается множителем $e^{-i\omega t}$ $\omega > 0$. Формулы пункта 3 сохраняются, если положить $\theta = -t + \psi(q^1, q^2, q^3)$ и потребовать, чтобы φ_r и φ^α не зависели от t.

Вернемся к уравнению (3.4). Если θ имеет вид $\theta = -t + \psi(q^1, q^2, q^3)$, то мы получим $H\Big(\dfrac{\partial\psi}{\partial q^1}, \dfrac{\partial\psi}{\partial q^2}, \dfrac{\partial\psi}{\partial q^3}\Big) = 1$. Уравнение

$$H^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial q^1}, \frac{\partial\psi}{\partial q^2}, \frac{\partial\psi}{\partial q^3}, q^1, q^2, q^3\right) = 1 \tag{4.1}$$

является аналогом классического уравнения эйконала $c^2(\operatorname{grad}\psi)^2 = 1$. Условием того, что лучи касаются поверхности $q^3 = 0$, является равенство (см. (3.11))

$$\left.\frac{\partial H^2}{\partial \dfrac{\partial\psi}{\partial q^3}}\right|_{q^3=0} = 0. \tag{4.2}$$

Равенства (3.13), (3.14) сохраняются (с заменой $\theta_j = \dfrac{\partial\theta}{\partial q^j}$ на $\dfrac{\partial\psi}{\partial q^j}$). Предположим, что из равенства (4.2) можно найти $\dfrac{\partial\psi}{\partial q^3}$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial q^3} = \gamma\left(\frac{\partial\psi}{\partial q^1}, \frac{\partial\psi}{\partial q^2}, q^1, q^2\right). \tag{4.3}$$

Для (локальной) разрешимости равенства (4.2) относительно $\dfrac{\partial\psi}{\partial q^3}$ достаточно потребовать, чтобы выполнялось очередное условие невырожденности

$$\frac{\partial^2 H^2}{\left(\partial\dfrac{\partial\psi}{\partial q^3}\right)^2} \neq 0. \tag{4.4}$$

Подставляя выражение (4.3) в уравнение (4.1) при $q^3 = 0$, получим "поверхностное" уравнение эйконала

$$H^2_{\mathrm{surf}} = H^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial q^1}, \frac{\partial\psi}{\partial q^2}, \gamma\left(\frac{\partial\psi}{\partial q^1}, \frac{\partial\psi}{\partial q^2}, q^1, q^2\right), q^1, q^2\right) = 1. \tag{4.5}$$

Сейчас мы несколько "сменим философию". Мы не будем описывать каким-то образом возникшую совокупность лучей соскальзывания, а *построим* "сами" поверхностные лучи – характеристики поверхностного уравнения эйконала и соответствующие поверхностные волновые фронты, а затем волновое поле соскальзывания, соответствующее построенной лучевой "картине".

Пусть ℓ – некоторая кривая на S и на ней заданы ψ_{00}, $\dfrac{\partial\psi_{00}}{\partial q^1}$, $\dfrac{\partial\psi_{00}}{\partial q^2}$ так, что на ℓ выполнено равенство (4.5) и условие $\mathrm{d}\psi_{00} = \dfrac{\partial\psi_{00}}{\partial q^j} dq^j$. "Выпустим" из каждой точки ℓ кривую $q = q(s)$, на которой при всех s определены $\theta_i^{\mathrm{surf}} = \dfrac{\partial\psi_0}{\partial q_i}$ $i = 1, 2$, причем выполняется каноническая система уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{dq^j}{ds} = \frac{\partial}{\partial\theta_j^{\mathrm{surf}}}\left(\frac{1}{2}H^2_{\mathrm{surf}}\right); \qquad H^2_{\mathrm{surf}} = H^2_{\mathrm{surf}}(\theta_j^{\mathrm{surf}}, q^i) = 1, \\ &\frac{d\theta_j^{\mathrm{surf}}}{ds} = -\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{1}{2}H^2_{\mathrm{surf}}\right); \quad \frac{d\psi_{00}}{ds} = 1; \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Здесь (с учетом специфики задачи) в качестве координатной сетки в частности можно выбрать сетку кривых – (поверхностные) лучи – волновые фронты. Эта координатная сетка уже не будет, вообще говоря, ортогональной, однако лучи некасательны к волновым фронтам. Это следует из равенства, вытекающего из теоремы Эйлера об однородных функциях:

$$\frac{\partial \psi_{00}}{\partial q^j} \cdot \frac{\partial \dfrac{H^2}{2}}{\partial \dfrac{\partial \psi_{00}}{\partial q^j}} = H^2 = 1.$$

(Если бы здесь вместо единицы стоял нуль, то это означало бы, что луч и волновой фронт касаются друг-друга.)

Мы будем предполагать, что сетка координат на поверхности S $(n = q^3 = 0)$ регулярна, что является еще одним предположением о невырожденности. Координатная сетка лучи – волновые фронты теряет регулярность, если поле лучей имеет каустику. Коснемся случая, когда поверхность S цилиндрическая или коническая и среда однородна. Введем координаты q^1, q^2 специальным образом: развернем S на плоскость и под q^1, q^2 будем подразумевать обычные декартовы координаты. Из равенств (3.3), (3.8), (4.5) следует, что $H^2_{\text{surf}} = H^2_{\text{surf}}(\theta_1^{\text{surf}}, \theta_2^{\text{surf}})$ и не зависит от q^1, q^2. Из уравнений (4.6) вытекает, что вдоль луча

$$\frac{dq^j}{ds} = \frac{\partial}{\partial \theta_j^{\text{surf}}} \frac{H^2_{\text{surf}}}{2} = \text{const}, \tag{4.7}$$

т.е.

$$q^j = v^j s + \text{const} \tag{4.8}$$

(v^j $j = 1, 2$ $v^j = \text{const}$ – компоненты групповой скорости). Равенства (4.8) – параметрические уравнения прямой на "плоскости" q^1, q^2. Таким образом в этом случае лучи на плоскости q^1, q^2 – это прямые линии, параметр s, фигурирующий в равенствах (4.6), имеет смысл времени, а $\dfrac{dq^j}{ds}$ $j = 1, 2$ – компоненты групповой скорости волны, распространяющейся вдоль луча (4.8).

5. Анзац. Члены порядка $O(\omega^2)$ и $O(\omega^{5/3})$.

Будем искать асимптотическое решение уравнений движения (2.2)–(2.5) в виде разложения (ср. [4, 7]):

$$\varphi_i \cong e^{\mathrm{i}T} \Phi_i, \tag{5.1}$$

где

$$T = \omega\psi_0 + \omega^{1/3}\psi_1,$$
$$\psi_0 = \psi_{00}(q^1, q^2) + q^3\psi_{01}(q^1, q^2), \quad \psi_1 = \psi_1(q^1, q^2), \tag{5.2}$$

функция $\psi_{00}(q^1, q^2)$ – найдена в п. 4, $\psi_{01} = \gamma\Big(\dfrac{\partial\psi_{00}}{\partial q^1}, \dfrac{\partial\psi_{00}}{\partial q^2}, q^1, q^2\Big)$ – см. формулу (4.3), $\psi_1 = \psi_1(q^1, q^2)$ – подлежит определению,

$$\Phi_i = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Phi_{\ell i}\left(\frac{1}{\omega}\right)^{\ell/3}, \quad \Phi_{\ell i}(q^1, q^2, \nu_1); \quad \nu_1 = \omega^{2/3} n. \tag{5.3}$$

Аналитический вид, в котором ищется асимптотическое разложение волнового поля (в нашем случае он дается формулами (5.1)–(5.3)) по современной терминологии "анзац" – центральный момент во всех дальнейших построениях нашей работы. Будем приравнивать сначала старшие (т.е. порядка ω^2) члены в обоих частях равенства (2.3). Мы получим векторное соотношение:

$$N_0\vec{\Phi}_0 = 0, \quad (N_0\vec{\Phi})^i := \rho\, G^{ij}\Phi_{0j} = a^{ijk\ell}\frac{\partial\psi_0}{\partial q^j}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial q^\ell}\Phi_{0k} = 0. \tag{5.4}$$

Функции ρ, G^{ij}, $a^{ijk\ell}$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial q^j}$ следует рассматривать на S, т.е. при $q^3 = 0$. При $q^3 = n = 0$ матрица (G^{ij}) имеет вид:

$$(\overset{\circ}{G}{}^{ij}) = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & 0 \\ g^{21} & g^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

где (g^{ij}) – матрица, обратная матрице (g_{ij}) первой квадратичной формы Гаусса (т.е. метрического тензора поверхности S). Из (5.4) следует, что

$$\Phi_{0i} = \overset{\circ}{\Phi}_{0i}(q^1, q^2)\Upsilon_0(q^1, q^2, \nu_1), \tag{5.7}$$

где $\overset{\circ}{\Phi}_{0i}(q^1, q^2)$ какое-то фиксированное вещественное, независящее от ν_1, ненулевое решение системы уравнений (5.4), $\Upsilon_0(q^1, q^2, \nu_1)$ – пока произвольная функция своих переменных. Мы предполагаем (невырожденность), что (5.7) с точностью до множителя, – единственное решение системы (5.4). Приравняем теперь нулю члены в левой части равенства (2,3), имеющие порядок $\omega^{5/3}$. Мы получим векторное равенство:

$$N_0\vec{\Phi}_1 + N_1\vec{\Phi}_0 = 0, \tag{5.8}$$

где N_0 имеет тот же смысл, что и в соотношении (5.4)

$$(N_1\vec{\Phi}_0)^i \equiv \mathrm{i}\left(a^{i3k\ell}G_{rk}\frac{\partial\psi_0}{\partial q^\ell}\ \frac{\partial}{\partial\nu_1}\Phi_0^r + a^{ij3k}\frac{\partial\psi_0}{\partial q^j}G_{rk}\frac{\partial}{\partial\nu_1}\Phi_0^r\right). \tag{5.9}$$

На равенства (5.8) можно смотреть как на систему линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора $\vec{\Phi}_1$. Условие разрешимости системы уравнений (5.8) относительно компонент вектора Φ_1 – это ортогональность в соответствующем смысле свободного члена системы (5.8) решению $\mathring{\Phi}_{0i}(q^1,q^2)$ системы (5.4). Этому условию ортогональности можно придать вид

$$\left(a^{i3k\ell}\frac{\partial\psi_0}{\partial q^k} + a^{ik3\ell}\frac{\partial\psi_0}{\partial q^k}\right)\mathring{\Phi}_{0i}\mathring{\Phi}_{0\ell} = 0. \tag{5.10}$$

Равенство (5.10) – аналог равенства (3.13) и, как следует из построений пп. 3 и 4, оно выполняется.

Выясним, какой же вид имеют ковариантные компоненты вектора $\vec{\Phi}_1$. Уравнение для компонент $\vec{\Phi}_1$ можно записать в виде:

$$\begin{gathered}\rho G^{ij}\Phi_{1j} - a^{ijk\ell}\frac{\partial\psi_0}{\partial q^j}\ \frac{\partial\psi_0}{\partial q^\ell}\Phi_{1k} + \mathrm{i}\big(a^{i3k\ell}+a^{ik3\ell}\big)\frac{\partial\psi_0}{\partial q^k}\mathring{\Phi}_{0\ell}\Upsilon_0' = O\\ \left(\Upsilon_0' = \frac{\partial}{\partial\nu_1}\Upsilon_0(\nu_1,q^1,q^2)\right)\end{gathered} \tag{5.11}$$

или в векторной форме:

$$N_0\vec{\Phi}_1 + N_1\vec{\Phi}_0 = 0. \tag{5.12}$$

На подпространстве векторов, ортогональных к $\vec{\Phi}_0 = (\Phi_{01},\Phi_{02},\Phi_{03})$, оператор N_0 имеет обратный $(\widehat{N}_0^{-1})$, поэтому

$$\vec{\Phi}_1 = (-\mathrm{i})\widehat{N}_0^{-1}n_1\vec{\mathring{\Phi}}_0\Upsilon_0'(\nu_1) + \vec{\mathring{\Phi}}_0\Upsilon_1, \tag{5.13}$$

где n_1 – самосопряженный оператор:

$$(n_1\Phi)^i = \left(a^{i3k\ell}+a^{ik3\ell}\right)\frac{\partial\psi_0}{\partial q^k}\Phi_\ell. \tag{5.14}$$

Напоминаем, что здесь и далее функции от q^1, q^2, q^3 (например, $a^{ijk\ell}$ следует рассматривать на поверхности S, т.е. при $q^3 = 0$.

6. Анзац. Члены порядка $\omega^{4/3}$.

Приравняем теперь в левой части равенства (2.3) члены порядка $\omega^{4/3}$ нулю. Мы получим:

$$N_0\vec{\Phi}_2 + N_1\vec{\Phi}_1 + N_2\vec{\Phi}_0 = 0, \tag{6.1}$$

где

$$\begin{aligned}\left(N_2\vec{\Phi}_0\right)^m \equiv \frac{\partial}{\partial n}(G^{\alpha m}\rho)\nu_1\Upsilon_0\mathring{\Phi}_{0\alpha} + \frac{d^2}{d\nu_1^2}\Upsilon_0 a^{m33\ell}\mathring{\Phi}_{0\ell}-\\ -\left(\frac{\partial}{\partial n}a^{mjk\ell}\right)\frac{\partial\psi_0}{\partial q^j}\ \frac{\partial\psi_1}{\partial q^\ell}\mathring{\Phi}_{0\ell}\nu_1\Upsilon_0-\\ -a^{mjk\ell}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial q^j}\ \frac{\partial\psi_1}{\partial q^\ell} + \frac{\partial\psi_0}{\partial q^\ell}\frac{\partial\psi_1}{\partial q^j}\right)\Upsilon_0\mathring{\Phi}_{0k}.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Равенство (6.1) – это система трех уравнений с тремя неизвестными – компонентами вектора $\vec{\Phi}_2$, причем соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальное решение $\vec{\Phi}_0$. Необходимое и достаточное условие разрешимости – это ортогональность $N_1\vec{\Phi}_1+N_2\vec{\Phi}_0$ вектору $\vec{\mathring{\Phi}}_0$. Это условие ортогональности приводит к уравнению Эйри для $\Upsilon_0(\nu_1, q^1, q^2)$ по ν_1. Прежде чем его выписать заметим, что в равенстве (6.1) вектор $\vec{\Phi}_1$ дается формулой (5.13). Условие ортогональности принимает вид уравнения Эйри:

$$A_0\frac{d^2\Upsilon_0}{d\nu^2} + (A_1\nu_1 + A_2)\Upsilon_0 = 0. \tag{6.3}$$

Здесь

$$A_0 = a^{m33\ell}\mathring{\Phi}_{0\ell}\mathring{\Phi}_{0m} + \left(n_1\widehat{N}_0^{-1}n_1\vec{\mathring{\Phi}}_0, \vec{\mathring{\Phi}}_0\right). \tag{6.4}$$

Матрица $(a^{m33\ell})$ – положительно определенная, что следует из положительности плотности потенциальной энергии (см. (2.6)), второе слагаемое – вещественное число. Его знак зависит от оператора $\widehat{N}_0^{-1}$. Пользуясь очевидной самосопряженностью оператора n_1 (см. (5.14)), второе слагаемое в (6.4) можно переписать в виде

$$\left(\widehat{N}_0^{-1}n_1\vec{\mathring{\Phi}}_0, n_1\vec{\mathring{\Phi}}_0\right). \tag{6.5}$$

Так как самосопряженный оператор N_0^{-1} не обязательно является положительно определенным, то о знаке A_0 в общем случае сказать что-либо затруднительно. Мы не можем исключить даже, что при каких-то значениях параметров A_0 будет обращаться в ноль. Мы предположим, что $A_0 \neq 0$ (невырожденность ситуации). Выражение для коэффициента A_1 легко найти из формулы (6.2) для оператора N_2

$$A_1 = \frac{\partial}{\partial n}(G^{ij}\rho)\overset{\circ}{\Phi}_{0i}\overset{\circ}{\Phi}_{0j} - \frac{\partial}{\partial n}a^{ijk\ell}\frac{\partial\psi_0}{\partial q^j}\ \frac{\partial\psi_0}{\partial q^k}\overset{\circ}{\Phi}_{0i}\overset{\circ}{\Phi}_{0\ell}. \tag{6.6}$$

Выражение для $\dfrac{1}{\rho}A_1$ представляется в виде суммы двух слагаемых. Первое

$$\frac{\partial G^{ij}}{\partial n}\overset{\circ}{\Phi}_{0i}\overset{\circ}{\Phi}_{0j} = -2b^{ij}\overset{\circ}{\Phi}_{0i}\overset{\circ}{\Phi}_{0j} \tag{6.7}$$

зависит от кривизн, второе – от нормальных производных при $n = 0$ плотности и упругих констант

$$G^{ij}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial n}\right)\overset{\circ}{\Phi}_{0i}\overset{\circ}{\Phi}_{0j} - \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial n}a^{ijk\ell}\frac{\partial\psi_0}{\partial q^j}\ \frac{\partial\psi_0}{\partial q^k}\overset{\circ}{\Phi}_{0i}\overset{\circ}{\Phi}_{0j}. \tag{6.8}$$

При разных параметрах A_1 может быть положительным, отрицательным или нулем. Мы имеем дело со случаем волн соскальзывания, если A_0 и A_1 отличны от нуля и имеют один и тот же знак. При разных знаках A_0 и A_1 мы имеем дело с волной шепчущей галереи.

В самом деле – при $\dfrac{A_1}{A_0} > 0$ решения уравнения (6.3) с ростом ν_1 – осциллируют, что соответствует характеру волнового поля соскальзывания. При $\dfrac{A_1}{A_0} < 0$ при больших ν_1 решение либо экспоненциально растет, либо экспоненциально убывает. Последнее соответствует случаю волны шепчущей галереи. Волны шепчущей галереи мы здесь не будем рассматривать.

Обратимся к коэффициенту A_2. Свойства симметрии (2.5) позволяют немного упростить формулу для A_2 (см. (6.3)):

$$A_2 = -2a^{mjk\ell}\frac{\partial\psi_0}{\partial q^j}\ \frac{\partial\psi_1}{\partial q^\ell}\overset{\circ}{\Phi}_{0k}\overset{\circ}{\Phi}_{0m}. \tag{6.9}$$

Если обратиться к соотношению (3.13) и учесть, что в рассматриваемом случае $H = 1$, то

$$A_2 = -2\rho G^{mi}\overset{\circ}{\Phi}_{0m}\overset{\circ}{\Phi}_{0i}\frac{\partial\psi_1}{\partial q^\ell}\ \frac{dq^\ell}{ds}\quad \ell = 1, 2. \tag{6.10}$$

(Здесь учтено, что ψ_1 зависит лишь от q^1, q^2.) Равенство (6.10) можно переписать в виде:

$$A_2 = -2\rho G^{mi} \overset{\circ}{\Phi}_{0m} \overset{\circ}{\Phi}_{0i} \frac{d\psi_1}{ds}; \tag{6.11}$$

здесь $\dfrac{d}{ds}$ – дифференцирование вдоль поверхностного луча. Величина s с точностью до постоянного слагаемого совпадает со значением поверхностного эйконала.

7. Удовлетворение краевым условиям

Удовлетворение краевым условиям волной соскальзывания (5.1) означает равенство нулю контрвариантного вектора $\sigma^{i3}\big|_{q^3=0} = 0$. Естественно ожидать, что к асимптотическому решению (5.1)–(5.3) следует добавить "волны срыва", определенные разложениями, аналогичными разложениям работ [4, 5] и разложению Келлера–Фридлендера [14].

$$\varphi_i^\beta = e^{\mathrm{i}T_\beta} \Phi_i^\beta, \quad \beta = 1, 2, \tag{7.1}$$

где

$$T_\beta = \omega \psi_0^\beta (q^1, q^2, q^3) + \omega^{1/3} \psi_1^\beta (q^1, q^2, q^3)$$

$$\Phi_i^\beta \cong \sum_{\ell=0}^{\infty} \Phi_{i\ell}^\beta (q^1, q^2, q^3) \Big(\frac{1}{\omega}\Big)^{\frac{\ell}{3}}. \tag{7.2}$$

Заметим, что квазилучевые разложения нам потребуются лишь в первом приближении в пределах пограничного слоя $q^3 = n = O(\omega^{-2/3})$. При подстановке в уравнения движения (зависимость от времени описывается традиционно множителем $e^{-i\omega t}$) мы придем в случае общего положения к двум уравнениям эйконала

$$H_\beta^2 \left(\frac{\partial \psi_0^\beta}{\partial q^1}, \frac{\partial \psi_0^\beta}{\partial q^2}, \frac{\partial \psi_0^\beta}{\partial q^3}, q^1, q^2, q^3 \right) = 1, \quad \beta = 1, 2. \tag{7.3}$$

H_β^2 – однородная функция второй степени по $\dfrac{\partial \psi_0^\beta}{\partial q^j}$, $j = 1, 2, 3$. Для того, чтобы была возможность удовлетворить краевым условиям, мы предположим, что при $q^3 = 0$

$$\psi_0(q^1, q^2, q^3)\Big|_{q^3=0} = \psi_0^\beta (q^1, q^2, q^3)\Big|_{q^3=0} \quad \beta = 1, 2, \tag{7.4}$$

$$\psi_1(q^1,q^2) = \psi_1^\beta(q^1,q^2,q^3)\Big|_{q^3=0} \quad \beta = 1,2. \tag{7.5}$$

Будем рассматривать (7.3) как уравнение для $\dfrac{\partial \psi_0^\beta}{\partial q^3}$. Мы предполагаем, что при выполнении (6.7) при $q^3 = 0$ существует одно и только одно решение: либо с положительное мнимой частью (что соответствует экспоненциальному убыванию соответствующей волны при заглублении точки наблюдения внутрь упругой среды), либо такое, что

$$\frac{\partial \frac{1}{2} H_\beta^2}{\partial \dfrac{\partial \psi_0^\beta}{\partial q^3}}\Bigg|_{q^3=0} > 0. \tag{7.6}$$

Неравенство (7.6) соответствует тому, что групповая скорость (и значит соответствующий луч) направлена внутрь упругой среды. Для того, чтобы найти в пограничном слое в первом приближении квазилучевое решение (7.1)–(7.2) знание более высоких производных, чем производная $\dfrac{\partial \psi_0^\beta}{\partial q^3}\Big|_{q^3=0}$ не требуется.

Поставим теперь своей целью удовлетворить равенству $\sigma^{i3}\big|_{q^3=0} = 0$ с точностью до членов порядка $O(\omega^{2/3})$, т.е., другими словами, потребует, чтобы в выражении для σ^{i3} $(i = 1,2,3)$ аннулировались члены порядка ω. Это требование приводит к соотношению:

$$\Upsilon_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial q^\ell} a^{i3k\ell} \mathring{\Phi}_{0k}\Big|_{q^3=0} + \sum_{\beta=1}^{2} \gamma_\beta^0 \mathring{\Phi}_{0k}^{(\beta)} \frac{\partial \psi_0^{(\beta)}}{\partial q^\ell} a^{i3k\ell} = O, \quad i = 1,2,3. \tag{7.7}$$

Здесь $\mathring{\Phi}_{0k}^\beta$ $k = 1,2,3$ – аналоги векторов $\mathring{\Phi}_{0k}$ $k = 1,2,3$ для “квазилучевых” решений (7.1). (7.2), γ_β^0 на этом этапе рассмотрений произвольные функции q^1, q^2. Считая векторы

$$\vec{\ell}_0 := \left\{ \frac{\partial \psi_0}{\partial q^\ell} a^{i3k\ell} \mathring{\Phi}_{0k}\Big|_{q^3=0} \right\}, \quad \vec{\ell}_\beta := \left\{ \frac{\partial \psi_0^3}{\partial q^\ell} a^{i3k\ell} \mathring{\Phi}_{0k}^\beta \right\}, \quad \beta = 1,2 \tag{7.8}$$

линейно независимыми (невырожденность ситуации), мы придем к равенствам:

$$\Upsilon_0\Big|_{\nu_1=0} = 0, \quad \gamma_\beta^0 = 0; \quad \beta = 1,2, \tag{7.9}$$

– это важные равенства. Из него, в частности, следует, что "волны срыва" в главном приближении не возникают. Другое важное следствие – это равенство $\Upsilon_0\big|_{\nu_1=0} = 0$. Возвращаясь к уравнению (6.3), получим

$$\Upsilon_0 = \chi_0(q^1, q^2) w_1(\varkappa_s - \nu), \tag{7.10}$$

где $\varkappa_s$ – корень функции Эйри ($w_1(\varkappa_s) = 0$) с номером s,

$$\nu = \sqrt[3]{\frac{A_1}{A_0}}\,\nu_1. \tag{7.11}$$

Подлежащий определению фактор χ_0 назовем комплексной интенсивностью. Из волны соскальзывания, уравнения (6.3), выражений (6.11) и (7.11) следует, что

$$\varkappa_s = -\frac{A_2}{A_1}\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^{2/3} = 2\rho G^{mi}\mathring{\Phi}_{0m}\mathring{\Phi}_{0i}\frac{d\psi_1}{ds}\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^{2/3}\frac{1}{A_0}. \tag{7.12}$$

Из (7.12) с точностью до слагаемого, независящего от s, находится ψ_1.

Потребуем выполнения краевого условия в следующем приближении: т.е. потребуем, чтобы в выражении для σ^{i3} уничтожались члены порядка $\omega^{2/3}$. Мы получим:

$$-\mathrm{i}\big\{a^{i3k3}\mathring{\Phi}_{0k}\big\}\Upsilon_0' + \Upsilon_1\big|_{\nu_1=0}\vec{\ell}_0 + \sum_{\beta=1}^{2}\gamma_\beta^1\vec{\ell}_\beta = 0. \tag{7.13}$$

Векторы $\vec{\ell}_0$, $\vec{\ell}_\beta$ определены формулами (7.8). Вектор $\big\{a^{i3k3}\Upsilon_0'\mathring{\Phi}_{0k}\big\}$ $i = 1, 2, 3$ – известен. На (7.13); можно смотреть как на разложение этого вектора по трем линейно-независимым векторам (или, что то же) решение трех линейных уравнений с тремя неизвестными $\Upsilon_1\big|_{\nu_1=0}$, γ_β^1 $(\beta = 1, 2)$ и с отличным от нуля определителем (что эквивалентно линейной независимости векторов (7.8)).

8. Анзац. Члены порядка ω.

Приравняем наконец нулю в левой части равенства (2.3) члены порядка ω. Мы получим:

$$N_0\vec{\Phi}_3 + N_1\vec{\Phi}_2 + N_2\vec{\Phi}_1 + N_3\vec{\Phi}_0 = 0. \tag{8.1}$$

Здесь N_3 – дифференциальный оператор первого порядка

$$\big(N_3\vec{\Phi}\big)^m = \Big(-\frac{\mathrm{i}}{2}\Big)G^{mr}\frac{\partial G_{ij}}{\partial q^r}a^{ijk\ell}\frac{\partial\psi_0}{\partial q^\ell}\Phi_k + \frac{\mathrm{i}}{2}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial q^j}a^{mjk\ell}\frac{\partial G_{k\ell}}{\partial q^r}\mathring{\Phi}_0^r +$$

$$+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{G}}\,G^{rm}\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\sqrt{G}\,G_{ir}a^{ijk\ell}\Phi_k\frac{\partial\psi_0}{\partial q^\ell}\right)+\mathrm{i}a^{mjk\ell}\frac{\partial\psi_0}{\partial q^\ell}G_{kr}\frac{\partial\Phi^r}{\partial q^\ell}. \qquad (8.2)$$

При вычислении производных от Φ^r, Φ_r не следует дифференцировать по $\nu_1 = \omega^{2/3}q_3$. Это “быстрая” переменная, здесь же производные берутся лишь по медленным переменным q^1, q^2, q^3.

Условие разрешимости системы алгебраических уравнений (8.1) относительно компонент вектора Φ_3 – это условие ортогональности

$$\left(\left(N_1\vec{\Phi}_2+N_2\vec{\Phi}_1+N_3\vec{\Phi}_0\right)\vec{\Phi}_0\right)=0. \qquad (8.3)$$

Скалярное произведение берется здесь без комплексного сопряжения.

Выпишем выражения для $\vec{\Phi}_2$, $\vec{\Phi}_1$, $\vec{\Phi}_0$, следующие из предыдущих построений (см. (5.7), (5.13)):

$$\vec{\Phi}_0=\Upsilon_0\vec{\Phi}_0,\quad \vec{\Phi}_1=(-\mathrm{i})\widehat{N}_0^{-1}n_1\vec{\Phi}_0\frac{d}{d\nu_1}\Upsilon_0(\nu_1)+\vec{\mathring{\Phi}}_0\Upsilon_1,$$

$$(n_1\Phi)^i=\left(a^{i3k\ell}+a^{ik3\ell}\right)\frac{\partial\psi_0}{\partial q^k}\Phi_\ell, \qquad (8.4)$$

$$\vec{\Phi}_2=-\widehat{N}_0^{-1}(N_1\vec{\Phi}_1+N_2\vec{\Phi}_0)+\Upsilon_2\vec{\mathring{\Phi}}_0.$$

Из равенства (5.10) следует, что член с Υ_2 не входит в соотношение (8.3). Выделим те члены, куда входит Υ_1:

$$\Big\{EN_1\widehat{N}_0^{-1}N_1(\vec{\mathring{\Phi}}_0\Upsilon_1)+N_2(\vec{\mathring{\Phi}}_0\Upsilon_1)+$$

$$+N_1\Big(-\widehat{N}_0^{-1}N_1\Big[(-\mathrm{i})\widehat{N}_0^{-1}n_1\vec{\mathring{\Phi}}_0\frac{d}{d\nu_1}\Upsilon_0(\nu_1)\Big]\Big)+ \qquad (8.5)$$

$$+N_2\Big[(-\mathrm{i})\widehat{N}_0^{-1}n_1\vec{\mathring{\Phi}}_0\frac{d}{d\nu_1}\Upsilon_0(\nu_1)\Big]+N_3\Upsilon_0(\nu_1)\vec{\mathring{\Phi}}_0\Big\}\vec{\mathring{\Phi}}_0=0.$$

Первые два члена равенства (8.5) – это оператор Эйри, примененный к Υ_1 и равенство (8.5) можно переписать так (см. (6.3)):

$$A_0\frac{d^2\Upsilon_1}{d\nu^2}+(A_1\nu_1+A_2)\Upsilon_1+\Omega=0. \qquad (8.6)$$

Остальные члены, обозначенные буквой Ω, в равенстве (8.6) не зависят от Υ_1. Как следует из рассмотрений п. 7, значение $\Upsilon_1\big|_{\nu_1=0}$ "известно" – пропорционально Υ_0 (см. (7.13)). Таким образом Υ_1 решение краевой задачи, аналогичной задаче Штурма–Лиувилля: уравнение (8.6), заданное $\Upsilon\big|_{\nu_1=0}$ и фазовый множитель "уходящей волны" $\sim e^{i\frac{2}{3}\nu^{3/2}}$ при $\nu \to +\infty$. Соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение, поэтому неоднородная задача разрешима лишь тогда, когда выполнено условие, связывающее Ω (см. (8.6)) и краевое условие при $\nu_1 = 0$. Чтобы вывести это условие, умножим равенство (8.6) на $z = w_1(\varkappa_s - \nu)$ $\nu = \sqrt[3]{\frac{A_1}{A_0}}\nu_1$ и проинтегрируем результат по ν_1 от 0 до $+\infty$. Интегрируя по частям, перекинем производные на $z = w_1(\varkappa_s - \nu)$. Пользуясь тем, что z удовлетворяет уравнению (6.3), придем к соотношению, являющемуся этим (необходимым и достаточным) условием разрешимости краевой задачи для Υ_1:

$$-A_0\sqrt[3]{\frac{A_1}{A_0}}\,\Upsilon_1\Big|_{\nu_1=0} w_1'(\lambda_s) + \sqrt[3]{\frac{A_0}{A_1}}\int\limits_0^\infty \Omega w_1(\varkappa_s - \nu)d\nu = 0. \qquad (8.7)$$

Из равенства (7.13) следует, что

$$\Upsilon_1\Big|_{\nu_1=0} = Bw_1'(\varkappa_s)\chi_0(q^1, q^2), \qquad (8.8)$$

где B выражается через "известные" величины $a^{ijk\ell}$, $\overset{\circ}{\Phi}{}_0^k$, $\overset{\circ}{\Phi}{}_k^\beta$ и т.п. и не зависит от $\chi_0(q^1, q^2)$.

9. Уравнение переноса и фаза Берри.

Вернемся к соотношению (8.5). Заметим, что операторы $\widehat{N}_0^{-1}$, N_1, N_2 не содержат дифференцирования по q^j $(j = 1, 2, 3)$, а $(N_3\Upsilon_0(\nu_1)\vec{\overset{\circ}{\Phi}}_0, \vec{\overset{\circ}{\Phi}}_0)$ является дифференциальным по q^j оператором первого порядка, примененным к $\chi_0(q^1, q^2)$. Оказывается, что формула (8.7) – это линейное однородное дифференциальное уравнение вдоль поверхностного луча. В самом деле, из формулы (8.2) следует, что

$$\chi_0\Big(N_3\vec{\Phi}_0, \vec{\overset{\circ}{\Phi}}_0\Big) = \Big(N_3\vec{\Phi}_0, \vec{\Phi}_0\Big) =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{G}}G^{rm}\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\sqrt{G}\,G_{ir}a^{ijk\ell}\Phi_{0k}\frac{\partial\psi_0}{\partial q^\ell}\right)\Phi_{0m} + a^{ijk\ell}\Phi_{0k}\frac{\partial\psi_0}{\partial q^j}G_{kr}\frac{\partial\Phi_0^r}{\partial q^\ell}\Phi_{0m}$$

$$\Phi_{0k} = \chi_0(q^1, q^2) w_1\left(\varkappa_s - \sqrt[3]{\frac{A_1}{A_0}}\,\nu_1\right)\overset{\circ}{\Phi}_{0k}. \tag{9.1}$$

(Члены с $\dfrac{i}{2}$ (см. формулу (8.2)) сокращаются.) Выражению (9.1) можно придать дивергентный вид:

$$\left(N_3\vec{\Phi}_0, \overset{\circ}{\vec{\Phi}}_0\right) = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\sqrt{G}\,\Phi_{0i} a^{ijk\ell}\Phi_{0k}\frac{\partial\psi_0}{\partial q^\ell}\right) \tag{9.2}$$

или

$$\left(N_3\vec{\Phi}_0, \vec{\Phi}_0\right) =$$
$$= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\sqrt{G}\,\overset{\circ}{\Phi}_{0r} a^{ijk\ell}\overset{\circ}{\Phi}_{0k}\frac{\partial\psi_0}{\partial q^\ell}\chi_0^2(q^1, q^2) w_1^2\right). \tag{9.3}$$

После интегрирования по ν_1 от 0 до $+\infty$ получим

$$\int\limits_0^\infty \left(N_3\vec{\Phi}_0, \vec{\Phi}_0\right) d\nu_1 =$$

$$= \int\limits_0^\infty w_1^2(\varkappa_s - \nu)d\nu \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\sqrt{G}\,a^{ijk\ell}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial q^\ell}\,\chi^2\,\sqrt[3]{\frac{A_0}{A_1}}\,\chi_0^2\,\overset{\circ}{\Phi}_{0i}, \overset{\circ}{\Phi}_{0k}\right). \tag{9.4}$$

Дифференцирование по q^j и интегрирование по ν_1 перестановочны потому, что q^j и ν_1 выступают здесь как независимые переменные (медленные и быстрая).

Учитывая формулу

$$\int\limits_0^\infty w_1^2(\varkappa_s - \nu)d\nu = -{w'}_1^2(\varkappa_s), \tag{9.5}$$

верную, если $w_1(\varkappa_s) = 0$ и формулы (3.12), (3.13), получим:

$$\int\limits_0^\infty \left(N_3\vec{\Phi}_0, \vec{\Phi}_0\right) d\nu =$$
$$= -\mathrm{i}{w'}_1^2(\varkappa_s)\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\rho G^{mi}\,\overset{\circ}{\Phi}_{0m}\,\overset{\circ}{\Phi}_{0i}\sqrt[3]{\frac{A_0}{A_1}}\,\frac{dq^j}{ds}\chi_0^2(q^1, q^2)\right) \tag{9.6}$$

($\dfrac{dq^j}{ds}$ – контрвариантные составляющие групповой скорости). Таким образом (см. (9.1)–(9.4)):

$$\int\limits_0^\infty \Big(N_3\vec{\Phi}_0, \vec{\overset{\circ}{\Phi}}_0\Big) d\nu = \frac{1}{\chi_0}\int\limits_0^\infty \Big(N_3\vec{\Phi}_0, \vec{\Phi}_0\Big) d\nu_1 =$$

$$= -{w'}_1^2(\varkappa_s)\mathrm{i}\Bigg[2\rho G^{mi}\,\overset{\circ}{\Phi}_{0m}\,\overset{\circ}{\Phi}_{0i}\sqrt[3]{\frac{A_0}{A_1}}\,\frac{\partial\chi_0}{\partial q^j}\,\frac{dq^j}{ds} +$$

$$+\chi_0\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\rho G^{mi}\,\overset{\circ}{\Phi}_m\,\overset{\circ}{\Phi}_{0i}\sqrt[3]{\frac{A_0}{A_1}}\,\frac{dq^j}{ds}\right)\Bigg]. \tag{9.7}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial\chi_0}{\partial q^j}\,\frac{dq^j}{ds} = \frac{d\chi_0}{ds} \tag{9.8}$$

производная вдоль поверхностного луча и что $\Upsilon_1\big|_{\nu_1=0}$ (см. (8.7), (8.8)) и слагаемые, отличные от $(N_3\vec{\Phi}_0, \vec{\Phi}_0)$ и входящие в выражение для Ω (см. (8.4)–(8.6)) – пропорциональны χ_0, мы получим, что равенство (8.7) является уравнением переноса для χ_0, т.е. равенству (8.7) можно придать вид

$$-{w'}_1^2(\varkappa_s)\mathrm{i}\cdot 2\rho\big(\overset{\circ}{\Phi}_{0m}\,\overset{\circ}{\Phi}_{0i}\,G^{mi}\big)\sqrt[3]{\frac{A_0}{A_1}}\,\frac{d\chi_0}{ds} + C\chi_0 = 0. \tag{9.9}$$

Выражение (9.9) является искомым уравнением переноса для комплексной интенсивности лучей соскальзывания.

Равенство (9.9) позволяет найти выражение для фазы Берри, возникающей в процессе распространения волн соскальзывания. Обратимся к формулам для слагаемых, образующих C. Из формул (9.7), (8.5), (8.6) следует, что

$$C = -{w'}^2(\varkappa_s)\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\rho\, G^{mi}\,\overset{\circ}{\Phi}_m\,\overset{\circ}{\Phi}_{0i}\sqrt[3]{\frac{A_0}{A_1}}\,\frac{dq^j}{ds}\right) +$$

$$+\int\limits_0^\infty \Bigg\{N_1\Bigg(-\widehat{N}_0^{-1}\,N_1\Big[(-\mathrm{i})\widehat{N}^{-1}n_1\frac{d}{d\nu_1}\Upsilon_0(\nu_1)\vec{\overset{\circ}{\Phi}}_0\Big]\Bigg) +$$

$$+N_2\Big[(-\mathrm{i})\widehat{N}_0^{-1}n_1\frac{d}{d\nu_1}\Upsilon_0(\nu_1)\vec{\overset{\circ}{\Phi}}_0\Big]\Bigg\}\vec{\overset{\circ}{\Phi}}_0 w_1\left(\varkappa_s - \sqrt[3]{\frac{A_1}{A_0}}\,\nu_1\right)d\nu_1 -$$

$$-Bw'^2(\varkappa_s)\chi_0(q^1,q^2)A_0\sqrt[3]{\frac{A_1}{A_0}}. \qquad (9.10)$$

Из выражений для операторов N_1, $\widehat{N}_0^{-1}n_1$ и N_2 следует, что интеграл в формуле (9.10) является чисто мнимым выражением. Из (9.9) вытекает, что коэффициент при $\dfrac{d\chi_0}{ds}$ там имеет вид $\mathrm{i}w'^2(\varkappa_s)$ умноженной на вещественный множитель. Такой же вид имеет интеграл, входящий в формулу (9.10). Обратимся к выражению для B (см. формулу (8.8)). Как следует из равенств (7.13), (8.8), (9.10) при вещественности $\dfrac{\partial\psi_0^\beta}{\partial q^\ell}$ такой же вид имеет слагаемое $Bw'^2(\varkappa_s)$, т.е. B – чисто мнимо. Коэффициент B может иметь ненулевую вещественную часть лишь в том случае, если хотя бы одна из производных $\dfrac{\partial\psi_0^\beta}{\partial q^3}$ невещественна. Выражение для C (см. (9.9)) имеет таким образом вид:

$$\chi_0 = \mathrm{const}\cdot\exp\int\limits_{s_0}^{s} C_1 ds\cdot\exp\mathrm{i}\int\limits_{s_0}^{s}\frac{(-\operatorname{Re}B)A_0\sqrt[3]{\frac{A_1}{A_0}}\,ds}{2\rho(\overset{\circ}{\Phi}_{0m}\,\overset{\circ}{\Phi}_{0i}\,G^{mi})}. \qquad (9.11)$$

Здесь C_1 – некоторое вещественное выражение, вид которого можно “извлечь” из формулы (9.10). Последний сомножитель в (9.11) дает выражение для так называемой фазы Берри.

Из наших рассуждений следует, что фаза Берри равна нулю, если найденные из соответствующих уравнений эйконала по начальному условию $\psi^\beta\big|_{q^3=0}=\psi_0\big|_{q^3=0}$ производные $\dfrac{\partial\psi^\beta}{\partial q^3}\Big|_{q^3=0}$ вещественны. Так, например, будет в изотропном случае при распространении продольной волны соскальзывания.

Литература

1. В. Г. Грацинский, *Исследование упругих волн в модели скважины.* — Изв. АН СССР, сер. геофиз., No. 3 (1964), 322–338.
2. П. В. Крауклис, Г. Ковалле, *Об асимптотическом подходе к исследованию волн, дифрагированных на ядре Земли.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, **28** (1989), 52–55.
3. Н. Я. Кирпичникова, *О распространении сосредоточенных вблизи лучей поверхностных волн.* — Труды МИАН, **115** (1971).

4. П. В. Крауклис, Н. В. Цепелев, *О построении высокочастотной асимптотики волнового поля, сосредоточенного вблизи границы упругой среды.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **34** (1973), 72–92.
5. П. В. Крауклис, Н. В. Цепелев, *Приповерхностные волны в неоднородном срезе с произвольной гладкой границей.* — Изв. АН СССР, Физика Земли No. 6 (1973), 3–11.
6. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции.* ЛГУ, Л. (1974).
7. D. Bouche, *Etude des ondes rampantes sur un corps convexe vérificant une condition d'impédance par une méthode de développement asymptotique.* — Ann. Télécommun **47**, No. 9–10 (1992).
8. В. Д. Ажоткин, В. М. Бабич, *О распространении волн Лява вдоль поверхности упругого тела произвольной формы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **165** (1983), 9–14.
9. З. А. Янсон, *О распространении волн Релея типа SV в трансверсально-изотропных упругих средах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **230** (1995), 278–292.
10. З. А. Янсон, *Высшие приближения асимптотики поверхностных волн Лява SH в трансверсально-изотропных упругих средах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **257** (1999), 323–345.
11. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, *Дифракция волны шепчущей галереи вблизи разрыва кривизн.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **239** (1997), 95–109.
12. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны.* М (1977).
13. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод.* (*Линейные и нелинейные волны*). Изд. ЛГУ, Ленинград (1985).
14. F. G. Friedlander, J. B. Keller, *Asymptotic expansion of solution of* $(\nabla^2+k^2)u=0$. — Comm. Pure Appl. Math. **8** (1955), 387–394.

Babich V. M. On propagation of creeping waves along the curvilinear surface of an anisotropic elastic body.

An analytical expression for the wave field of a creeping wave, propagating along the curvilinear surface of an anisotropic elastic body is constructed by the boundary layer method.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 января 2003 г.