Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 296, 2003 г.

Л. Ю. Колотилина

ОЦЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПЕРРОНОВСКОГО КОРНЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МАТРИЦЫ. II. КОНТУРНЫЕ ОЦЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА

§1. Введение

В первой части статьи [3] многочисленные оценки и неравенства для перроновского корня $\rho(A)$ неотрицательной матрицы A были установлены на основе следующего простого, но весьма существенного свойства монотонности.

Теорема 1.1. *Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ – неотрицательные матрицы порядка $n \geqslant 1$ и пусть $A \geqslant B$, т.е.*

$$a_{ij} \geqslant b_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\rho(A) \geqslant \rho(B),$$

причем если матрица A неприводима и $B \neq A$, то

$$\rho(A) > \rho(B).$$

В этой второй части работы мы выводим оценки и неравенства для перроновского корня $\rho(A)$, зависящие от множества контуров $\mathfrak{C}(A)$ в ориентированном графе $D(A)$ матрицы A. Заметим, что большинство приводимых ниже результатов будет базироваться на обобщении теоремы 1.1 в терминах так называемых контурных произведений элементов A, предложенном Фидлером и Птаком [6] (см. теорему 1.2 ниже).

В §2 будут представлены двусторонние контурные оценки и неравенства, обобщающие, в частности, известные теоремы Альпина [1] и Бруальди [5].

На заключительном этапе работа была поддержана грантами РФФИ, 03-01-00349 и НШ-2268.2003.1.

В §3 рассматриваются верхние контурные оценки, которые в простейшем случае сводятся к “смешанным” верхним оценкам Островского

$$\rho(A) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \{r_i(A)^\alpha c_i(A)^{1-\alpha}\}$$

и

$$\rho(A) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \{a_{ii} + r_i'(A)^\alpha c_i'(A)^{1-\alpha}\},$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, а строчные и столбцовые суммы $r_i(A)$, $c_i(A)$, $r_i'(A)$ и $c_i'(A)$ определены в конце §1.

В §4 получено контурное обобщение нижней оценки Фробениуса

$$\rho(A) \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ii},$$

из которого, в частности, легко следуют две нижние оценки, предложенные Брауэром и Джентри [4].

Напомним некоторые понятия, определения и обозначения, используемые в этой статье. Пусть G – ориентированный граф с множеством вершин $\{1,\ldots,n\} = \langle n\rangle$, $n \geqslant 1$. *Контуром* в G длины k, $k \geqslant 1$, называется упорядоченная последовательность его вершин $\gamma = (i_1,\ldots,i_k,i_{k+1})$, где $i_1,\ldots,i_k \in \langle n\rangle$ все различны, $i_{k+1} = i_1$ и для каждого $j = 1,\ldots,k$ в G существует дуга, идущая из i_j в i_{j+1}. Множество $\{i_1,\ldots,i_k\}$ различных вершин в γ называется *носителем* γ и обозначается через $\overline{\gamma}$. Длина k контура γ также обозначается через $|\gamma|$.

Через $\mathfrak{C}_n$ мы обозначаем множество всех контуров в ориентированном графе G_n^* с множеством вершин $\langle n\rangle$, $n \geqslant 1$, и полным множеством дуг, так что для любых $i, j \in \langle n\rangle$ в графе G_n^* существует дуга из i в j.

Если $D(A)$ – ориентированный граф, ассоциированный с матрицей A порядка n, то множество всех контуров в $D(A)$ обозначается через $\mathfrak{C}(A)$.

Для произвольного $\gamma \in \mathfrak{C}_n$, $\gamma = (i_1,\ldots,i_k,i_{k+1})$, $i_{k+1} = i_1$, *контурное произведение* $\Pi_\gamma(A)$ определяется по формуле

$$\Pi_\gamma(A) = a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_ki_{k+1}} = \prod_{j=1}^{|\gamma|} a_{i_ji_{j+1}}.$$

Ясно, что $\Pi_\gamma(A) \neq 0$, где $\gamma \in \mathfrak{C}_n$, тогда и только тогда, когда $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$.

Следующее утверждение об инвариантности контурных произведений относительно диагонального сопряжения тривиально, но важно.

Лемма 1.1. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *и пусть*

$$D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n), \quad d_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\Pi_\gamma(A) = \Pi_\gamma(D^{-1}AD), \quad \gamma \in \mathfrak{C}_n.$$

Пусть A, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. В соответствии с [6] мы говорим, что *A больше либо равна B в слабом смысле*, и используем обозначение $A \overset{w}{\geqslant} B$, если все контурные произведения $\Pi_\gamma(A)$ и $\Pi_\gamma(B)$, где $\gamma \in \mathfrak{C}_n$, вещественны и справедливы неравенства

$$\Pi_\gamma(A) \geqslant \Pi_\gamma(B), \quad \gamma \in \mathfrak{C}_n.$$

В частности, данное определение требует, чтобы все диагональные элементы a_{ii} и b_{ii}, $i = 1, \dots, n$, матриц A и B были вещественными и удовлетворяли соотношениям

$$a_{ii} \geqslant b_{ii}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если обе матрицы A и B неотрицательны и $A \geqslant B$, то, очевидно,

$$\Pi_\gamma(A) \geqslant \Pi_\gamma(B), \quad \gamma \in \mathfrak{C}_n,$$

а значит $A \overset{w}{\geqslant} B$. Таким образом, условие $A \overset{w}{\geqslant} B$ является более слабым, чем условие $A \geqslant B$.

Следует также отметить, что если матрицы A и B из $\mathbb{C}^{n\times n}$ имеют одинаковый шаблон разреженности, то их ориентированные графы $D(A)$ и $D(B)$ совпадают, так что, в частности, $\mathfrak{C}(A) = \mathfrak{C}(B)$. Следовательно, для таких матриц неравенство $A \overset{w}{\geqslant} B$ справедливо тогда и только тогда, когда

$$\Pi_\gamma(A) \geqslant \Pi_\gamma(B), \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A).$$

Теперь мы готовы сформулировать уже упоминавшееся обобщение теоремы 1.1, которое вытекает из более общих результатов Фидлера и Птака [6, утверждения (3.8) и (4.1)] и на котором базируются результаты §2 и §3 данной работы.

Теорема 1.2. *Пусть A и B – неотрицательные матрицы порядка $n \geqslant 1$ и пусть*

$$A \overset{w}{\geqslant} B.$$

Тогда

$$\rho(A) \geqslant \rho(B),$$

причем если матрица B неприводима, то равенство

$$\rho(A) = \rho(B)$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$B = D^{-1}AD,$$

где D – это диагональная матрица порядка n с положительными диагональными элементами.

В заключение этого вводного параграфа мы приводим обозначения, используемые в работе.

- I_n – единичная матрица порядка n.
- $e = [1, \dots 1]^T \in \mathbb{R}^n$ – единичный вектор.
- $\langle n \rangle = \{1, 2, \dots, n\}$.
- Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Тогда

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad c_i(A) = \sum_{j=1}^{n} |a_{ji}|, \quad i = 1, \dots, n;$$
$$r_i'(A) = r_i(A) - |a_{ii}|, \quad c_i'(A) = c_i(A) - |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

а векторы $r(A)$, $c(A)$, $r'(A)$ и $c'(A)$ определяются следующим образом:

$$r(A) = (r_i(A))_{i=1}^n, \quad c(A) = (c_i(A))_{i=1}^n,$$
$$r'(A) = (r_i'(A))_{i=1}^n, \quad c'(A) = (c_i'(A))_{i=1}^n.$$

- Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, то $D_A = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ – диагональная часть матрицы A.
- Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $J \subseteq \langle n \rangle$, то $A[J] = (a_{ij})_{i,j \in J}$ – главная подматрица матрицы A, специфицируемая множеством J.
- Если $x = (x_i)_{i=1}^n$, то $D_x = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n)$.

§2. Двусторонние оценки и неравенства

Базовым результатом этого параграфа является следующий контурный аналог теоремы 3.1 из [3].

Теорема 2.1. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть*

$$\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n), \quad \delta_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\min_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \left(\prod_{i \in \overline{\gamma}} \delta_i \right)^{1/|\gamma|} \rho(\Delta^{-1}A) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \left(\prod_{i \in \overline{\gamma}} \delta_i \right)^{1/|\gamma|} \rho(\Delta^{-1}A), \tag{2.1}$$

причем если матрица A неприводима, то либо оба неравенства в (2.1) *строгие, либо оба они являются равенствами.*

Доказательство. Обозначим $B = \Delta^{-1}A$. Тогда $A = \Delta B$, и мы имеем:

$$\Pi_\gamma(A) = \Big(\prod_{i \in \overline{\gamma}} \delta_i\Big) \Pi_\gamma(B) \leqslant \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \Big(\prod_{i \in \overline{\gamma}} \delta_i\Big) \Pi_\gamma(B) = \Pi_\gamma(\alpha B),$$
$$\gamma \in \mathfrak{C}(A), \tag{2.2}$$

где мы используем обозначение

$$\alpha = \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \left(\prod_{i \in \overline{\gamma}} \delta_i \right)^{1/|\gamma|}. \tag{2.3}$$

Соотношения (2.2) означают, что

$$A \overset{w}{\leqslant} \alpha B,$$

так что по теореме 1.2 мы имеем

$$\rho(A) \leqslant \rho(\alpha B) = \alpha \rho(\Delta^{-1}A),$$

что и доказывает верхнюю оценку в (2.1). Нижняя оценка из (2.1) устанавливается аналогично.

Пусть теперь матрица A неприводима. Предположим, что

$$\rho(A) = \alpha \rho(\Delta^{-1}A) = \rho(\alpha B),$$

где α определяется в (2.3). В этом случае теорема 1.2 гарантирует нам, что

$$\alpha B = \alpha \Delta^{-1} A = D^{-1} A D, \tag{2.4}$$

где D – некоторая диагональная матрица с положительными диагональными элементами. Принимая во внимание (2.4) и используя лемму 1.1, мы выводим:

$$\Pi_\gamma(A) = \Pi_\gamma(D^{-1}AD) = \Pi_\gamma(\alpha\Delta^{-1}A) = \frac{\alpha^{|\gamma|}}{\prod\limits_{i\in\overline{\gamma}} \delta_i} \Pi_\gamma(A), \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A).$$

Из этих равенств очевидно следует, что

$$\Big(\prod_{i\in\overline{\gamma}} \delta_i\Big)^{1/|\gamma|} = \alpha \quad \text{для каждого} \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A).$$

В частности,

$$\min_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)} \Big(\prod_{i\in\overline{\gamma}} \delta_i\Big)^{1/|\gamma|} = \alpha,$$

так что левое неравенство в (2.1) также выполняется с равенством.

Случай, когда левое неравенство в (2.1) является равенством, рассматривается аналогично. □

Замечание 2.1. В том случае, когда

$$a_{ii} > 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то есть

$$(i,i) \in \mathfrak{C}(A), \quad i = 1, \ldots, n,$$

мы, очевидно, имеем:

$$\max_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)} \Big(\prod_{i\in\overline{\gamma}} \delta_i\Big)^{1/|\gamma|} = \max_{i\in\langle n\rangle} \delta_i$$

и

$$\min_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)} \Big(\prod_{i\in\overline{\gamma}} \delta_i\Big)^{1/|\gamma|} = \min_{i\in\langle n\rangle} \delta_i,$$

так что неравенства (2.1) сводятся к оценкам

$$\min_{i\in\langle n\rangle} \delta_i \rho(\Delta^{-1}A) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \delta_i \rho(\Delta^{-1}A), \tag{2.5}$$

установленным в [3]. Однако, в любом случае оценки (2.1) по крайней мере не хуже, чем оценки (2.5), и действительно улучшают последние для некоторых матриц, имеющих нулевые диагональные элементы.

Замечание 2.2. Как нетрудно убедиться, оценки (2.1), вообще говоря, улучшают так называемые путевые оценки (см. теорему 6.1 в [3], где $\alpha = 1/2$)

$$\min_{(i_1,\dots,i_k,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(A)} (\delta_{i_1}^{1/2}\delta_{i_2}\cdots\delta_{i_k}\delta_{i_{k+1}}^{1/2})^{1/k}\rho(\Delta^{-1}A) \leqslant \rho(A)$$
$$\leqslant \max_{(i_1,\cdots,i_k,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(A)} (\delta_{i_1}^{1/2}\delta_{i_2}\cdots\delta_{i_k}\delta_{i_{k+1}}^{1/2})^{1/k}\rho(\Delta^{-1}A), \qquad (2.6)$$

где $k \geqslant 1$ – фиксированное натуральное число и $\mathcal{P}_k(A)$ – множество всех (необязательно простых) путей в $D(A)$ длины k. В частности, при $k = 1$ оценки (2.6) сводятся к так называемым дуговым оценкам (см. теорему 5.1 в [3], где $\alpha = 1/2$)

$$\min_{i,j:a_{ij}\neq 0}(\delta_i\delta_j)^{1/2}\rho(\Delta^{-1}A) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i,j:a_{ij}\neq 0}(\delta_i\delta_j)^{1/2}\rho(\Delta^{-1}A). \qquad (2.7)$$

Легко понять, что для структурно симметричной матрицы A, для которой

$$a_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow a_{ji} \neq 0, \quad i,j = 1,\dots,n,$$

оценки (2.1) совпадают с оценками (2.7). Кроме того, для такой матрицы из включения

$$(i_1,\dots,i_k,i_{k+1}) \in \mathcal{P}_k(A)$$

следует, что

$$(i_j, i_{j+1}, i_j) \in \mathfrak{C}(A), \quad j = 1,\dots,k,$$

а значит

$$(\delta_{i_j}\delta_{i_{j+1}})^{1/2} \leqslant \max_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)}\left(\prod_{i\in\overline{\gamma}}\delta_i\right)^{1/|\gamma|}, \quad j = 1,\dots,k,$$

откуда следует, что

$$(\delta_{i_1}^{1/2}\delta_{i_2}\cdots\delta_{i_k}\delta_{i_{k+1}}^{1/2})^{1/k} = \left[\prod_{j=1}^{k}(\delta_{i_j}\delta_{i_{j+1}})^{1/2}\right]^{1/k} \leqslant \max_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)}\left(\prod_{i\in\overline{\gamma}}\delta_i\right)^{1/|\gamma|},$$
$$(i_1,\dots,i_k,i_{k+1}) \in \mathcal{P}_k(A).$$

Аналогично устанавливается неравенство

$$(\delta_{i_1}^{1/2}\delta_{i_2}\cdots\delta_{i_k}\delta_{i_{k+1}}^{1/2})^{1/k} \geqslant \min_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)}\left(\prod_{i\in\overline{\gamma}}\delta_i\right)^{1/|\gamma|},$$
$$(i_1,\ldots,i_k,i_{k+1})\in\mathcal{P}_k(A).$$

Последние два неравенства показывают, что для любой структурно симметричной матрицы A и для произвольного $k\geqslant 1$ путевые оценки (2.6) не хуже, чем контурные оценки (2.1). Таким образом, в рассматриваемом случае контурные оценки (2.1) совпадают с путевыми оценками (2.6) при любом $k\geqslant 1$. В частности, путевые оценки (2.6) при всех $k\geqslant 1$ одинаковы.

Заменяя в (2.1) матрицу A на ΔA, мы немедленно получаем следующий результат.

Следствие 2.1. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n\geqslant 1$ и пусть*

$$\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1,\ldots,\delta_n),\quad \delta_i>0,\quad i=1,\ldots,n.$$

Тогда

$$\min_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)}\left(\prod_{i\in\overline{\gamma}}\delta_i\right)^{1/|\gamma|}\rho(A)\leqslant\rho(\Delta A)\leqslant\max_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)}\left(\prod_{i\in\overline{\gamma}}\delta_i\right)^{1/|\gamma|}\rho(A). \quad (2.8)$$

Следствие 2.1 дает двусторонние оценки для перроновского корня произведения ΔA. Эти оценки нетривиальны для матриц A, имеющих нулевые диагональные элементы, и являются альтернативными по отношению к нижней оценке

$$\rho(\Delta A)\geqslant\prod_{i=1}^{n}\delta_i^{u_iv_i/(v^Tu)}\rho(A), \quad (2.9)$$

где u и v – это правый и левый перроновские векторы матрицы A, которая была установлена в [7] в неприводимом случае и обобщена на неотрицательные матрицы A, такие что $v^Tu>0$, в [2].

Другое следствие теоремы 2.1 дает контурные аналоги обобщенных двусторонних оценок Фробениуса (см., например, следствие 3.1 в [3])

$$\min_{i\in\langle n\rangle} r_i(D^{-1}AD)\leqslant\rho(A)\leqslant\max_{i\in\langle n\rangle} r_i(D^{-1}AD), \quad (2.10)$$

где D – произвольная диагональная матрица с положительными диагональными элементами. В доказательстве этого результата, так же как и в других доказательствах, приводимых ниже, будет использоваться следующая тривиальная лемма (см., например, лемму 3.1 в [3]).

Лемма 2.1. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть D – произвольная диагональная матрица с положительными диагональными элементами. Если $r_i(A) > 0$, $i = 1, \ldots, n$, то*

$$\rho(D^{-1}_{r(D^{-1}AD)}A) = 1,$$

а если $c_i(A) > 0$, $i = 1, \ldots, n$, то

$$\rho(D^{-1}_{c(D^{-1}AD)}A) = 1.$$

Следствие 2.2. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ без нулевых строк и пусть D – диагональная матрица порядка n с положительными диагональными элементами. Тогда*

$$\min_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \left[\prod_{i \in \overline{\gamma}} r_i(D^{-1}AD) \right]^{1/|\gamma|} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \left[\prod_{i \in \overline{\gamma}} r_i(D^{-1}AD) \right]^{1/|\gamma|}, \tag{2.11}$$

причем если матрица A неприводима, то либо оба неравенства в (2.11) строгие, либо оба являются равенствами.

Доказательство. Поскольку A не имеет нулевых строк, матрица

$$\Delta = D_{r(D^{-1}AD)}$$

невырождена, и утверждения следствия 2.2 немедленно следуют из теоремы 2.2 и леммы 2.1. $\square$

Конечно же, для неотрицательной матрицы A, не имеющей нулевых столбцов, справедливы столбцовые аналоги оценок (2.11), то есть оценки

$$\min_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \left[\prod_{i \in \overline{\gamma}} c_i(D^{-1}AD) \right]^{1/|\gamma|} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \left[\prod_{i \in \overline{\gamma}} c_i(D^{-1}AD) \right]^{1/|\gamma|}. \tag{2.12}$$

Заметим, что для $D = I_n$ оценки (2.11) и анализ случая равенства в них для неприводимой матрицы A впервые были представлены Альпиным в работе [1], где использовался совершенно иной подход. Ясно, что переход от случая $D = I_n$ к произвольной диагональной матрице D с положительными диагональными элементами тривиален, поскольку $\rho(A) = \rho(D^{-1}AD)$.

Если матрица A не имеет нулевых строк, то, как легко убедиться, все строки матриц A^k, $k \geqslant 0$, также ненулевые. Следовательно, векторы $r(A^k)$ все положительны, и диагональные матрицы

$$D_k = D_{r(A^k)}$$

невырождены. Принимая во внимание, что

$$r_i(D_k^{-1}A^sD_k) = \frac{r_i[A^sD_{r(A^k)}]}{r_i(A^k)} = \frac{r_i(A^{k+s})}{r_i(A^k)}, \quad s \geqslant 1, k \geqslant 0, i = 1, \ldots, n,$$

и применяя следствие 2.2 с такими D_k к матрице A^s, мы приходим к следующим двусторонним оценкам.

Следствие 2.3. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ без нулевых строк. Тогда*

$$\min_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)}\left[\prod_{i\in\overline{\gamma}}\frac{r_i(A^{k+s})}{r_i(A^k)}\right]^{\frac{1}{s|\gamma|}} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)}\left[\prod_{i\in\overline{\gamma}}\frac{r_i(A^{k+s})}{r_i(A^k)}\right]^{\frac{1}{s|\gamma|}}, \quad k \geqslant 0, \quad s \geqslant 1, \tag{2.13}$$

причем если матрица A неприводима, то либо оба неравенства в (2.13) строгие, либо оба они являются равенствами.

Заметим, что оценки (2.13) являются контурными аналогами оценок [9] (см. также [3])

$$\min_{i\in\langle n\rangle}\left[\frac{r_i(A^{k+s})}{r_i(A^k)}\right]^{1/s} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle}\left[\frac{r_i(A^{k+s})}{r_i(A^k)}\right]^{1/s}. \tag{2.14}$$

Предположим теперь, что оба вектора $r(A)$ и $c(A)$ положительны и положим

$$D = D_{c(A^k)}, \quad k \geqslant 0.$$

Используя соотношения

$$r_i[D_{c(A^k)}^{-1}A^sD_{c(A^k)}] = \frac{r_i(A^sA^{T^k})}{c_i(A^k)}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad s \geqslant 1,$$

и применяя следствие 2.2 к матрице A^s, мы получаем контурные оценки

$$\min_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)}\left[\prod_{i\in\overline{\gamma}}\frac{r_i(A^sA^{T^k})}{c_i(A^k)}\right]^{\frac{1}{s|\gamma|}}\leqslant\rho(A)\leqslant\max_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)}\left[\prod_{i\in\overline{\gamma}}\frac{r_i(A^sA^{T^k})}{c_i(A^k)}\right]^{\frac{1}{s|\gamma|}}. \tag{2.15}$$

Применив оценки (2.15) к матрице A^T, мы придем к строчным аналогам неравенств (2.15):

$$\min_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)}\left[\prod_{i\in\overline{\gamma}}\frac{r_i(A^{T^s}A^k)}{r_i(A^k)}\right]^{\frac{1}{s|\gamma|}}\leqslant\rho(A)\leqslant\max_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)}\left[\prod_{i\in\overline{\gamma}}\frac{r_i(A^{T^s}A^k)}{r_i(A^k)}\right]^{\frac{1}{s|\gamma|}}. \tag{2.16}$$

Тем самым нами установлен следующий результат.

Следствие 2.4. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n\geqslant 1$ с ненулевыми строками и столбцами. Тогда для произвольных $s\geqslant 1$ и $k\geqslant 0$ перроновский корень $\rho(A)$ удовлетворяет двусторонним оценкам (2.15) и (2.16). Кроме того, если матрица A неприводима, то либо оба неравенства в (2.15) (или (2.16)) строгие, либо оба они являются равенствами.*

Очевидно, что из следствия 2.4 вытекает, что $\rho(A)$ также удовлетворяет оценкам типа Фробениуса

$$\min_{i\in\langle n\rangle}\left[\frac{r_i(A^{T^s}A^k)}{r_i(A^k)}\right]^{1/s}\leqslant\rho(A)\leqslant\max_{i\in\langle n\rangle}\left[\frac{r_i(A^{T^s}A^k)}{r_i(A^k)}\right]^{1/s} \tag{2.17}$$

и

$$\min_{i\in\langle n\rangle}\left[\frac{r_i(A^sA^{T^k})}{c_i(A^k)}\right]^{1/s}\leqslant\rho(A)\leqslant\max_{i\in\langle n\rangle}\left[\frac{r_i(A^sA^{T^k})}{c_i(A^k)}\right]^{1/s}. \tag{2.18}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие две простые леммы.

Лемма 2.2 [3]. *Пусть $A=(a_{ij})=D_A+P$ – неотрицательная матрица порядка $n\geqslant 2$, такая что*

$$\rho(A)>\max_{i\in\langle n\rangle}a_{ii}.$$

Тогда

$$\rho([\rho(A)I_n-D_A]^{-1}P)=1.$$

Напомним, что $n\times n$ матрица A называется *слабо неприводимой*, если для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, в $\mathfrak{C}(A)$ содержится контур γ_i длины $|\gamma_i| \geqslant 2$, такой что $i \in \overline{\gamma}_i$. Из этого определения очевидно следует, что для слабо неприводимой матрицы A оба вектора $r'(A)$ и $c'(A)$ положительны.

Лемма 2.3. *Пусть $A = (a_{ij})$ – слабо неприводимая неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$. Тогда*

$$\rho(A) > \max_{i\in\langle n\rangle} a_{ii}.$$

Доказательство. Пусть индекс i, $1 \leqslant i \leqslant n$, фиксирован и пусть $J \subseteq \langle n\rangle$ – такое подмножество индексного множества $\langle n\rangle$, что $i \in J$ и $A[J]$ – неприводимая компонента матрицы A. Как хорошо известно (см. [8, §6.4, упр. 5]), из слабой неприводимости A следует, что $|J| \geqslant 2$. Следовательно, a_{ii} – это собственная подматрица неприводимой матрицы $A[J]$, так что по свойству монотонности перроновского корня мы имеем

$$\rho(A) \geqslant \rho(A[J]) > a_{ii}.$$

□

Следующая теорема является аналогом теоремы 2.1 для того случая, когда матрица A представлена в виде суммы $A = D_A + P$.

Теорема 2.2. *Пусть $A = (a_{ij}) = D_A + P$ – слабо неприводимая неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$ и пусть*

$$\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n), \quad \delta_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда неравенства

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}_1} [\rho(A) - a_{ii}] \leqslant \prod_{i\in\overline{\gamma}_1} \delta_i \rho(\Delta^{-1}P)^{|\gamma_1|} \tag{2.19}$$

и

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}_2} [\rho(A) - a_{ii}] \geqslant \prod_{i\in\overline{\gamma}_2} \delta_i \rho(\Delta^{-1}P)^{|\gamma_2|} \tag{2.20}$$

справедливы для некоторых контуров γ_1, $\gamma_2 \in \mathfrak{C}(A)$ длины не меньшей, чем 2. Кроме того, если матрица A неприводима, то либо существуют такие контуры γ_1 и γ_2, что оба неравенства (2.19) *и (2.20) являются строгими, либо для любого $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$, справедливо равенство*

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}} \frac{\rho(A)-a_{ii}}{\delta_i} = \rho(\Delta^{-1}P)^{|\gamma|}. \tag{2.21}$$

Доказательство. По лемме 2.3 матрица

$$D = \rho(A)I_n - D_A$$

имеет положительные диагональные элементы. Следовательно, по лемме 2.2

$$\rho(D^{-1}P) = 1. \tag{2.22}$$

Применяя теорему 2.1 к матрице $D^{-1}P$, где в качестве Δ берется матрица $D^{-1}\Delta$, и используя (2.22), мы приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \min_{\gamma\in\mathfrak{C}(P)} \left[\prod_{i\in\overline{\gamma}} \frac{\delta_i}{\rho(A)-a_{ii}}\right]^{1/|\gamma|} \rho(\Delta^{-1}P) \leqslant 1 \\ \leqslant \max_{\gamma\in\mathfrak{C}(P)} \left[\prod_{i\in\overline{\gamma}} \frac{\delta_i}{\rho(A)-a_{ii}}\right]^{1/|\gamma|} \rho(\Delta^{-1}P), \end{aligned} \tag{2.23}$$

из которых следует, что неравенства (2.19) и (2.20) справедливы для некоторых γ_1 и γ_2 из $\mathfrak{C}(A)$, причем $|\gamma_1| \geqslant 2$ и $|\gamma_2| \geqslant 2$.

Далее, если матрица A неприводима, то, в силу теоремы 2.1, либо оба неравенства в (2.23) являются строгими, либо оба они являются равенствами. В первом случае неравенства (2.19) и (2.20) являются строгими для некоторых γ_1 и γ_2, тогда как в последнем случае мы имеем:

$$\min_{\gamma\in\mathfrak{C}(P)} \left[\prod_{i\in\overline{\gamma}} \frac{\delta_i}{\rho(A)-a_{ii}}\right]^{1/|\gamma|} = \max_{\gamma\in\mathfrak{C}(P)} \left[\prod_{i\in\overline{\gamma}} \frac{\delta_i}{\rho(A)-a_{ii}}\right]^{1/|\gamma|} = \rho(\Delta^{-1}P)^{-1},$$

что и доказывает (2.21). □

Если A – слабо неприводимая матрица, то для любой диагональной матрицы D с положительными диагональными элементами матрица $D^{-1}AD$ также слабо неприводима, а следовательно, как было отмечено выше,

$$r_i'(D^{-1}AD) > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, матрица

$$\Delta = D_{r'(D^{-1}AD)}$$

имеет положительные диагональные элементы. Применяя теорему 2.2 с этой матрицей Δ и используя лемму 2.1, мы приходим к следующему результату.

Следствие 2.5. *Пусть A – слабо неприводимая неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$ и пусть D – диагональная матрица с положительными диагональными элементами. Тогда существуют такие контуры $\gamma_i \in \mathfrak{C}(A)$, $|\gamma_i| \geqslant 2$, $i = 1, 2$, что*

$$\prod_{i \in \overline{\gamma}_1} [\rho(A) - a_{ii}] \leqslant \prod_{i \in \overline{\gamma}_1} r'_i(D^{-1}AD) \tag{2.24}$$

и

$$\prod_{i \in \overline{\gamma}_2} [\rho(A) - a_{ii}] \geqslant \prod_{i \in \overline{\gamma}_2} r'_i(D^{-1}AD). \tag{2.25}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то либо для некоторых γ_1 и γ_2 оба неравенства (2.24) *и* (2.25) *являются строгими, либо*

$$\prod_{i \in \overline{\gamma}} [\rho(A) - a_{ii}] = \prod_{i \in \overline{\gamma}} r'_i(D^{-1}AD)$$

для всех $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$, таких что $|\gamma| \geqslant 2$.

Заметим, что для $D = I_n$ неравенства (2.24) и (2.25) впервые были установлены Бруальди [5], причем неравенство (2.24) было доказано для слабо неприводимых матриц, а неравенство (2.25) – для неприводимых матриц.

Если в следствии 2.5 положить

$$D = D_{r(A^k)}, \quad k \geqslant 0,$$

и воспользоваться соотношениями

$$r'_i(D^{-1}_{r(A^k)} A D_{r(A^k)}) = \frac{r_i(A^{k+1})}{r_i(A^k)} - a_{ii}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то мы придем к следующему результату.

Следствие 2.6. *Пусть A – слабо неприводимая матрица порядка $n \geqslant 2$. Тогда для любого $k \geqslant 0$ найдутся такие контуры $\gamma_i \in \mathfrak{C}(A)$, $|\gamma_i| \geqslant 2$, $i = 1, 2$, что*

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}_1} [\rho(A) - a_{ii}] \leqslant \prod_{i\in\overline{\gamma}_1} \left[\frac{r_i(A^{k+1})}{r_i(A^k)} - a_{ii}\right] \tag{2.26}$$

и

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}_2} [\rho(A) - a_{ii}] \geqslant \prod_{i\in\overline{\gamma}_2} \left[\frac{r_i(A^{k+1})}{r_i(A^k)} - a_{ii}\right]. \tag{2.27}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то либо оба неравенства (2.26) и (2.27) являются строгими для некоторых γ_1 и γ_2, либо

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}} [\rho(A) - a_{ii}] = \prod_{i\in\overline{\gamma}} \left[\frac{r_i(A^{k+1})}{r_i(A^k)} - a_{ii}\right]$$

для всех $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$, таких что $|\gamma| \geqslant 2$.

Следующий результат вытекает из следствия 2.5, если положить

$$D = D_{c(A^k)}, \quad k \geqslant 0.$$

Следствие 2.7. *Пусть A – слабо неприводимая неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$. Тогда для любого $k \geqslant 0$ найдутся такие контуры $\gamma_i \in \mathfrak{C}(A)$, $|\gamma_i| \geqslant 2$, $i = 1, 2$, что*

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}_1} [\rho(A) - a_{ii}] \leqslant \prod_{i\in\overline{\gamma}_1} \left[\frac{r_i(AA^{T^k})}{c_i(A^k)} - a_{ii}\right] \tag{2.28}$$

и

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}_2} [\rho(A) - a_{ii}] \geqslant \prod_{i\in\overline{\gamma}_2} \left[\frac{r_i(AA^{T^k})}{c_i(A^k)} - a_{ii}\right]. \tag{2.29}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то либо оба неравенства (2.28) и (2.29) являются строгими для некоторых γ_1 и γ_2, либо

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}} [\rho(A) - a_{ii}] = \prod_{i\in\overline{\gamma}} \left[\frac{r_i(AA^{T^k})}{c_i(A^k)} - a_{ii}\right]$$

для всех $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$, таких что $|\gamma| \geqslant 2$.

Ясно, что, применив неравенства (2.28) и (2.29) к матрице A^T, можно получить аналоги неравенств (2.16) для $s = 1$.

Другими естественными способами выбора матрицы D в следствии 2.5 являются, например,

$$D = D_{r(P^k)} \quad \text{и} \quad D = D_{c(P^k)}, \quad k \geqslant 0, \quad \text{где } P = A - D_A.$$

В завершение этого параграфа мы приведем результат другого типа, также вытекающий из следствия 2.5.

Следствие 2.8. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$, причем $\mathfrak{C}(A)$ состоит из единственного контура γ такого, что $\overline{\gamma} = \langle n \rangle$. Тогда для любой диагональной матрицы D с положительными диагональными элементами справедливо равенство*

$$\prod_{i=1}^{n} [\rho(A) - a_{ii}] = \prod_{i=1}^{n} r_i'(D^{-1}AD). \tag{2.30}$$

Доказательство. Поскольку $\overline{\gamma} = \langle n \rangle$, матрица A очевидно неприводима, и равенство (2.30) вытекает из следствия 2.5, так как γ – это единственный контур в $\mathfrak{C}(A)$. $\square$

§3. Верхние оценки

В этом параграфе представлена серия верхних контурных оценок для перроновского корня неотрицательной матрицы.

Вывод предлагаемых ниже оценок базируется на следующем результате.

Лемма 3.1 [3, лемма 4.1]. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть*

$$\Delta_j, \quad j = 1, \dots, k, \quad k \geqslant 1,$$

– диагональные матрицы с положительными диагональными элементами. Если

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1, \quad 0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1, \quad j = 1, \dots, k,$$

то

$$\rho\left(\prod_{j=1}^{k} \Delta_j^{-\alpha_j} A\right) \leqslant \prod_{j=1}^{k} \rho(\Delta_j^{-1} A)^{\alpha_j}.$$

Первая теорема этого параграфа обобщает верхнюю оценку теоремы 2.1 на тот случай, когда задействовано несколько диагональных матриц.

Теорема 3.1. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть*

$$\Delta_j = \mathrm{diag}(\delta_1^{(j)}, \ldots, \delta_n^{(j)}), \quad j = 1, \ldots, k, \quad k \geqslant 1,$$

– диагональные матрицы с положительными диагональными элементами. Если

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1, \quad 0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1, \quad j = 1, \ldots, k,$$

то

$$\rho(A) \leqslant \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \left[\prod_{i \in \overline{\gamma}} \prod_{j=1}^{k} (\delta_i^{(j)})^{\alpha_j} \right]^{1/|\gamma|} \prod_{j=1}^{k} \rho(\Delta_j^{-1} A)^{\alpha_j}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Обозначим

$$\Delta = \prod_{j=1}^{k} \Delta_j^{\alpha_j} = \mathrm{diag}(\delta_1, \ldots \delta_n). \tag{3.2}$$

Тогда по лемме 3.1 мы имеем

$$\rho(\Delta^{-1} A) \leqslant \prod_{j=1}^{k} \rho(\Delta_j^{-1} A)^{\alpha_j}. \tag{3.3}$$

Используя теорему 2.1, определение (3.2) и неравенство (3.3), мы выводим требуемое неравенство (3.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(A) &\leqslant \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \big(\prod_{i \in \overline{\gamma}} \delta_i \big)^{1/|\gamma|} \rho(\Delta^{-1} A) \\ &\leqslant \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \left[\prod_{i \in \overline{\gamma}} \prod_{j=1}^{k} (\delta_i^{(j)})^{\alpha_j} \right]^{1/|\gamma|} \prod_{j=1}^{k} \rho(\Delta_j^{-1} A)^{\alpha_j}. \end{aligned}$$

□

Из теоремы 3.1 и леммы 2.1 вытекает следующий контурный аналог верхней оценки (4.8) из [3].

Следствие 3.1. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ без нулевых строк и столбцов и пусть*

$$D_j, \quad j = 1, \dots, k+l, \quad k, l \geqslant 0, \quad k+l \geqslant 1,$$

– диагональные матрицы с положительными диагональными элементами. Если

$$\sum_{j=1}^{k+l} \alpha_j = 1, \quad 0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1, \quad j = 1, \dots, k+l,$$

то

$$\rho(A) \leqslant \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \left[\prod_{i \in \overline{\gamma}} \prod_{j=1}^{k+l} (v_i^{(j)})^{\alpha_j} \right]^{1/|\gamma|}, \tag{3.4}$$

где

$$v_i^{(j)} = \begin{cases} r_i(D_j^{-1} A D_j), & j = 1, \dots, k, \\ c_i(D_j^{-1} A D_j), & j = k+1, \dots, k+l, \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Обозначим

$$\Delta_j = \operatorname{diag}(v_1^{(j)}, \dots, v_n^{(j)}), \quad j = 1, \dots, k+l.$$

Тогда

$$\prod_{j=1}^{k+l} (\delta_i^{(j)})^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^{k+l} (v_i^{(j)})^{\alpha^j}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.5}$$

а по лемме 2.1 мы имеем

$$\rho(\Delta_j^{-1} A) = 1, \quad j = 1, \dots, k+l. \tag{3.6}$$

Используя теорему 3.1 и соотношения (3.5) и (3.6), мы выводим:

$$\begin{aligned} \rho(A) &\leqslant \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \left[\prod_{i \in \overline{\gamma}} \prod_{j=1}^{k+l} (\delta_i^{(j)})^{\alpha_j} \right]^{1/|\gamma|} \prod_{j=1}^{k+l} \rho(\Delta_j^{-1} A)^{\alpha_j} \\ &= \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \left[\prod_{i \in \overline{\gamma}} \prod_{j=1}^{k+l} (v_i^{(j)})^{\alpha_j} \right]^{1/|\gamma|}. \end{aligned}$$

□

Полагая в следствии 3.1 $k = l = 1$ и $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 1 - \alpha$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, мы приходим к “смешанному” аналогу верхних оценок из (2.11) и (2.12).

Следствие 3.2. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ без нулевых строк и столбцов. Тогда для произвольных диагональных матриц D_1 и D_2 с положительными диагональными элементами и для любого α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,*

$$\rho(A) \leqslant \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \left[\prod_{i \in \overline{\gamma}} r_i(D_1^{-1} A D_1)^{\alpha} c_i(D_2^{-1} A D_2)^{1-\alpha} \right]^{1/|\gamma|}. \tag{3.7}$$

В частности, взяв в (3.7) $D_1 = D_2 = I_n$, мы приходим к контурному аналогу верхней оценки Островского

$$\rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \{ r_i(A)^{\alpha} c_i(A)^{1-\alpha} \}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

а именно к оценке

$$\rho(A) \leqslant \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \left[\prod_{i \in \overline{\gamma}} r_i(A)^{\alpha} c_i(A)^{1-\alpha} \right]^{1/|\gamma|}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{3.8}$$

Приводимый ниже результат является “смешанным” аналогом верхней оценки из следствия 2.3.

Следствие 3.3. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ без нулевых строк и столбцов. Тогда для любого α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, и произвольных $k, l \geqslant 0$ и $s \geqslant 1$, справедливо неравенство*

$$\rho(A) \leqslant \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \left[\prod_{i \in \overline{\gamma}} \frac{r_i(A^{k+s})^{\alpha} c_i(A^{l+s})^{1-\alpha}}{r_i(A^k)^{\alpha} c_i(A^l)^{1-\alpha}} \right]^{\frac{1}{s|\gamma|}}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Положим

$$D_1 = D_{r(A^k)}, \quad D_2 = D_{c(A^l)}^{-1},$$

воспользуемся следствием 3.2 в применении к A^s и учтем соотношения

$$r_i[D_{r(A^k)}^{-1} A^s D_{r(A^k)}] = \frac{r_i(A^{k+s})}{r_i(A^k)}, \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$c_i[D_{c(A^l)} A^s D_{c(A^l)}^{-1}] = \frac{c_i(A^{l+s})}{c_i(A^l)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

□

“Смешанный” аналог верхних оценок из следствия 2.4 имеет следующий вид.

Следствие 3.4. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ без нулевых строк и столбцов. Тогда для любого α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, и любых $s \geqslant 1$ и $k, l \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$\rho(A) \leqslant \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \left[\prod_{i \in \overline{\gamma}} \frac{r_i(A^s A^{T^k})^\alpha r_i(A^{T^s} A^l)^{1-\alpha}}{c_i(A^k)^\alpha r_i(A^l)^{1-\alpha}} \right]^{\frac{1}{s|\gamma|}}. \qquad (3.10)$$

Доказательство. Положим

$$D_1 = D_{c(A^k)}, \quad D_2 = D^{-1}_{r(A^l)}.$$

Тогда, поскольку

$$r_i[D^{-1}_{c(A^k)} A^s D_{c(A^k)}] = \frac{r_i(A^s A^{T^k})}{c_i(A^k)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и

$$c_i[D_{r(A^l)} A^s D^{-1}_{r(A^l)}] = \frac{c_i(A^{T^l} A^s)}{r_i(A^l)} = \frac{r_i(A^{T^s} A^l)}{r_i(A^l)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

требуемая оценка (3.10) может быть получена применением следствия 3.2 к матрице A^s. □

Следующая теорема является аналогом теоремы 3.1 для представления A в виде $A = D_A + P$ и, одновременно, контурным аналогом верхней оценки (4.5) из [3].

Теорема 3.2. *Пусть $A = (a_{ij}) = D_A + P$ – слабо неприводимая неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$ и пусть*

$$\Delta_j = \operatorname{diag}(\delta_1^{(j)}, \ldots, \delta_n^{(j)}), \quad j = 1, \ldots, k, \quad k \geqslant 1,$$

– диагональные матрицы с положительными диагональными элементами. Если

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1, \quad 0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1, \quad j = 1, \ldots, k,$$

то для некоторого контура $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$, справедливо неравенство

$$\prod_{i \in \overline{\gamma}} [\rho(A) - a_{ii}] \leqslant \prod_{j=1}^k \left[\prod_{i \in \overline{\gamma}} \delta_i^{(j)} \rho(\Delta_j^{-1} P)^{|\gamma|} \right]^{\alpha_j}. \qquad (3.11)$$

Доказательство. В силу леммы 2.3 выполнено неравенство

$$\rho(A) > \max_{i \in \langle n \rangle} a_{ii},$$

так что матрица

$$D = \rho(A) I_n - D_A$$

невырождена, а тогда, по лемме 2.2,

$$\rho(D^{-1}P) = 1. \tag{3.12}$$

С другой стороны, применяя теорему 3.1 к матрице $D^{-1}P$ с заменой Δ_j на $D^{-1}\Delta_j$, $j = 1, \dots, k$, мы приходим к неравенству

$$\rho(D^{-1}P) \leqslant \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(P)} \left[\prod_{i \in \overline{\gamma}} \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{\delta_i^{(j)}}{\rho(A) - a_{ii}} \right)^{\alpha_j} \right]^{1/|\gamma|} \prod_{j=1}^{k} \rho(\Delta_j^{-1} P)^{\alpha_j}. \tag{3.13}$$

Из соотношений (3.12) и (3.13) следует, что для некоторого контура $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \prod_{i \in \overline{\gamma}} [\rho(A) - a_{ii}] &\leqslant \left[\prod_{i \in \overline{\gamma}} \prod_{j=1}^{k} (\delta_i^{(j)})^{\alpha_j} \right] \prod_{j=1}^{k} \rho(\Delta_j^{-1} P)^{\alpha_j |\gamma|} \\ &= \prod_{j=1}^{k} \left[\prod_{i \in \overline{\gamma}} \delta_i^{(j)} \rho(\Delta_j^{-1} P)^{|\gamma|} \right]^{\alpha_j}. \end{aligned}$$

□

Нижеследующий результат является контурным аналогом оценки (4.9) из [3].

Следствие 3.5. *Пусть $A = (a_{ij})$ – слабо неприводимая неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$ и пусть D_j, $j = 1, \dots, k+l$, $k, l \geqslant 0$, $k + l \geqslant 1$, – диагональные матрицы с положительными диагональными элементами. Если*

$$\sum_{j=1}^{k+l} \alpha_j = 1, \quad 0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1, \quad j = 1, \dots, k+l,$$

то для некоторого контура $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$, справедливо неравенство

$$\prod_{i \in \overline{\gamma}} [\rho(A) - a_{ii}] \leqslant \prod_{i \in \overline{\gamma}} \prod_{j=1}^{k+l} (v_i^{(j)})^{\alpha_j}, \tag{3.14}$$

где

$$v_i^{(j)} = \begin{cases} r'_i(D_j^{-1}AD_j), & j = 1,\dots,k, \\ c'_i(D_j^{-1}AD_j), & j = k+1,\dots,k+l, \end{cases} \qquad i = 1,\dots,n.$$

Доказательство. Поскольку матрица A слабо неприводима, мы имеем

$$v_i^{(j)} > 0, \quad i = 1,\dots,n, \quad j = 1,\dots,k+l,$$

так что матрицы

$$\Delta_j = \mathrm{diag}(v_1^{(j)},\dots v_n^{(j)}), \quad j = 1,\dots,k+l,$$

имеют положительные диагональные элементы.

Ясно, что

$$\prod_{j=1}^{k+l}(\delta_i^{(j)})^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^{k+l}(v_i^{(j)})^{\alpha_j}, \quad i = 1,\dots,n. \tag{3.15}$$

Если же $A = D_A + P$, то по лемме 2.1 мы имеем

$$\rho(\Delta_j^{-1}P) = 1, \quad j = 1,\dots,k+l. \tag{3.16}$$

Теперь требуемый результат вытекает из теоремы 3.2 с учетом соотношений (3.15) и (3.16). $\square$

В том частном случае, когда $k = l = 1$ и $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 1-\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, следствие 3.5 дает следующий "смешанный" аналог оценки (2.24).

Следствие 3.6. *Пусть $A = (a_{ij})$ – слабо неприводимая неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$. Тогда для произвольных диагональных матриц D_1 и D_2 с положительными диагональными элементами и для любого α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, найдется такой контур $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$, что*

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}}[\rho(A) - a_{ii}] \leqslant \prod_{i\in\overline{\gamma}} r'_i(D_1^{-1}AD_1)^\alpha c'_i(D_2^{-1}AD_2)^{1-\alpha}. \tag{3.17}$$

В частности, при $D_1 = D_2 = I_n$ неравенство (3.17) сводится к верхней оценке

$$\prod_{i\in\overline{\gamma}}[\rho(A) - a_{ii}] \leqslant \prod_{i\in\overline{\gamma}} r'_i(A)^\alpha c'_i(A)^{1-\alpha}, \tag{3.18}$$

где $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$. Этот результат является контурным аналогом верхней оценки Островского

$$\rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \{a_{ii} + r_i'(A)^{\alpha} c_i'(A)^{1-\alpha}\}$$

и вытекает из более общего результата Бруальди (см. [5, следствие 2.13]).

Приводимый ниже "смешанный" аналог оценки (2.26) вытекает из следствия 3.6, если положить в нем

$$D_1 = D_{r(A^k)}, \quad D_2 = D^{-1}_{c(A^l)}, \quad k, l \geqslant 0.$$

Следствие 3.7. *Пусть* $A = (a_{ij}) = D_A + P$ *– слабо неприводимая неотрицательная матрица порядка* $n \geqslant 2$. *Тогда для произвольных* $k, l \geqslant 0$ *и любого* α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *неравенство*

$$\prod_{i \in \overline{\gamma}} [\rho(A) - a_{ii}] \leqslant \prod_{i \in \overline{\gamma}} \left[\frac{r_i(A^{k+1})}{r_i(A^k)} - a_{ii}\right]^{\alpha} \left[\frac{c_i(A^{l+1})}{c_i(A^l)} - a_{ii}\right]^{1-\alpha} \qquad (3.19)$$

справедливо для некоторого контура $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 2$.

Для того, чтобы получить "смешанный" аналог оценки (2.28), в следствии 3.6 следует взять

$$D_1 = D_{c(A^k)}, \quad D_2 = D^{-1}_{r(A^l)}, \quad k, l \geqslant 0.$$

Другие естественные способы выбора масштабирующих матриц D_1 и D_2 в следствии 3.6 – это

$$D_1 = D_{r(P^k)}, \quad D_2 = D^{-1}_{c(P^l)}, \quad k, l \geqslant 0,$$

и

$$D_1 = D_{c(P^k)}, \quad D_2 = D^{-1}_{r(P^l)}, \quad k, l \geqslant 0.$$

§4. Нижние оценки

В этом параграфе мы устанавливаем контурную версию нижней оценки Фробениуса

$$\rho(A) \geqslant \max_{i \in \langle n \rangle} a_{ii}. \qquad (4.1)$$

Введем следующее определение. Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть $\gamma = (i_1, \dots i_k, i_{k+1})$,

$i_{k+1} = i_1$, $|\gamma| = k \geqslant 1$, – контур из $\mathfrak{C}(A)$. Матрица A_γ порядка $|\gamma|$ определяется следующим образом: для $r, s \in \overline{\gamma}$

$$(A_\gamma)_{rs} = \begin{cases} a_{rs}, & \text{если} \quad r = i_j \quad \text{и} \quad s = i_{j+1}, \quad j = 1, \ldots, k, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, A_γ – это часть главной подматрицы $A[\overline{\gamma}]$, соответствующая ее диагонали, определяемой контуром γ.

Теорема 4.1. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$. Тогда*

$$\prod_{i \in \overline{\gamma}} [\rho(A) - a_{ii}] \geqslant \Pi_\gamma(A - D_A), \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A), \quad |\gamma| \geqslant 1. \tag{4.2}$$

Далее, неравенство (4.2) для некоторого контура γ обращается в равенство тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(i) $\rho(A[\overline{\gamma}]) = \rho(A)$;

(ii) *если* $|\gamma| \geqslant 2$, *то*

$$(A - D_A)[\overline{\gamma}] = A_\gamma. \tag{4.3}$$

Замечание 4.1. Контуры $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$ длины $|\gamma| = 1$ включены в формулировку теоремы 4.1 с целью получить обобщение оценки (4.1).

Замечание 4.2. Ввиду теоремы 1.1, из условия (i) теоремы 4.1 следует, что $A[\overline{\gamma}]$ – неприводимая компонента матрицы A.

Доказательство. Пусть $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$. Если $|\gamma| = 1$, то $\overline{\gamma} = \{i\}$ для некоторого $i \in \langle n \rangle$, и неравенство (4.2), принимающее вид

$$\rho(A) \geqslant a_{ii},$$

следует из (4.1). Далее, последнее неравенство является равенством тогда и только тогда, когда выполнено условие (i).

Пусть теперь $|\gamma| \geqslant 2$. Предположим сперва, что матрица A неприводима. В этом случае мы имеем

$$Au = \rho(A)u,$$

где правый перроновский вектор $u = (u_i)$ матрицы A положителен. Определим матрицу

$$B = D_u^{-1} A D_u, \quad \text{где} \quad D_u = \operatorname{diag}(u_1, \ldots, u_n).$$

Очевидно,

$$r_i(B) = [D_u^{-1} A D_u e]_i = \rho(A), \quad i = 1, \ldots, n,$$

так что

$$r_i'(B) = r_i(B) - b_{ii} = \rho(A) - a_{ii}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.4}$$

Пусть $\gamma = (i_1, \ldots, i_k, i_{k+1})$, $i_{k+1} = i_1$, $k = |\gamma| \geqslant 2$. С помощью леммы 1.1 и соотношений (4.4) мы выводим:

$$\begin{aligned} \Pi_\gamma(A - D_A) = \Pi_\gamma(A) = \Pi_\gamma(B) = \prod_{j=1}^{k} b_{i_j i_{j+1}} \\ \leqslant \prod_{j=1}^{k} r'_{i_j}(B[\overline{\gamma}]) \leqslant \prod_{j=1}^{k} r'_{i_j}(B) = \prod_{i \in \overline{\gamma}} [\rho(A) - a_{ii}], \end{aligned} \tag{4.5}$$

что и доказывает неравенство (4.2) в неприводимом случае. Кроме того, из (4.5) следует, что неравенство (4.2) является равенством в том и только том случае, когда

$$b_{i_j i_{j+1}} = r'_{i_j}(B[\overline{\gamma}]), \quad j = 1, \ldots, k, \tag{4.6}$$

и

$$r_i'(B[\overline{\gamma}]) = r_i'(B), \quad i \in \overline{\gamma}. \tag{4.7}$$

Поскольку матрица B неприводима, из равенств (4.7) следует соотношение

$$\overline{\gamma} = \langle n \rangle, \tag{4.8}$$

которое, ввиду теоремы 1.1, равносильно (i), поскольку A неприводима. Равенства (4.6) с учетом (4.8) равносильны равенству

$$B - D_B = B_\gamma,$$

которое, в свою очередь, равносильно равенству (4.3), где $\overline{\gamma} = \langle n \rangle$. Доказательство в неприводимом случае на этом завершается.

Если же матрица A приводима, то найдется такое подмножество $J_\gamma \subsetneqq \langle n \rangle$, что $\overline{\gamma} \subseteq J_\gamma$ и подматрица $A[J_\gamma]$ является неприводимой компонентой A. По первой части доказательства мы имеем

$$\Pi_\gamma(A - D_A) = \Pi_\gamma(A - D_A)[J_\gamma] \leqslant \prod_{i \in \overline{\gamma}} [\rho(A[J_\gamma]) - a_{ii}], \tag{4.9}$$

тогда как из монотонности перроновского корня относительно главных подматриц следует, что

$$\rho(A[J_\gamma]) \leqslant \rho(A). \tag{4.10}$$

Неравенства (4.9) и (4.10) доказывают (4.2) для приводимой матрицы A.

Далее, ввиду (4.9) и (4.10), неравенство (4.2) обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$\Pi_\gamma(A - D_A)[J_\gamma] = \prod_{i\in\overline{\gamma}}[\rho(A[J_\gamma]) - a_{ii}] \tag{4.11}$$

и

$$\rho(A[J_\gamma]) = \rho(A). \tag{4.12}$$

По первой части доказательства равенство (4.11) равносильно соотношениям

$$\rho(A[\overline{\gamma}]) = \rho(A[J_\gamma]) \tag{4.13}$$

и

$$(A - D_A)[\overline{\gamma}] = (A[J_\gamma])_\gamma = A_\gamma. \tag{4.14}$$

Равенство (4.14) совпадает с (4.3). Наконец, равенства (4.12) и (4.13) в точности означают, что

$$\rho(A[\overline{\gamma}]) = \rho(A).$$

Теорема 4.1 доказана полностью. □

Пусть S_n – симметрическая группа порядка n и пусть $\pi \in S_n$ – некоторая перестановка. Как хорошо известно, π может быть представлена в виде произведения независимых циклов, которые можно отождествить с некоторыми $\gamma_j \in \mathfrak{C}_n$, $j = 1, \ldots, s$. Обозначим

$$\Pi_\pi(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)}, \tag{4.15}$$

так что $\Pi_\pi(A)$ – это диагональное произведение элементов $A = (a_{ij})$, соответствующее перестановке π. Очевидно, что

$$\Pi_\pi(A - D_A) = \Pi_{\gamma_1}(A - D_A) \cdots \Pi_{\gamma_s}(A - D_A),$$

и, в силу теоремы 4.1, для неотрицательной матрицы A мы имеем неравенство

$$\prod_{i=1}^{n}[\rho(A) - a_{ii}] \geqslant \max_{\pi \in S_n} \Pi_\pi(A - D_A). \tag{4.16}$$

Ясно, что максимум в правой части (4.16) достигается на некоторой перестановке π такой, что $\pi(i) \neq i$, $i = 1, \ldots, n$. Для перестановки, удовлетворяющей этим условиям, мы очевидно имеем

$$\Pi_\pi(A - D_A) = \Pi_\pi(A),$$

так что неравенство (4.16) равносильно неравенству

$$\prod_{i=1}^{n}[\rho(A) - a_{ii}] \geqslant \max_{\substack{\pi \in S_n:\\ \pi(i) \neq i,\, i=1,\ldots,n}} \Pi_\pi(A). \tag{4.17}$$

Тем самым нами установлен следующий результат, обобщающий теорему 3 из [4] на случай произвольных (необязательно неприводимых) неотрицательных матриц.

Следствие 4.1. *Неравенство (4.17), где $\Pi_\pi(A)$ определено в соответствии с (4.15), справедливо для любой неотрицательной матрицы A порядка $n \geqslant 2$.*

Следует отметить, что из теоремы 4.1 также следует и другой результат Брауэра и Джентри, а именно теорема 2 из [4] (см. также [3]). Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$. Если $a_{ij}a_{ji} > 0$ при некоторых $i \neq j$, то, применяя теорему 4.1 к A и контуру $\gamma = (i, j, i)$, мы приходим к неравенству

$$[\rho(A) - a_{ii}][\rho(A) - a_{jj}] \geqslant a_{ij}a_{ji}, \tag{4.18}$$

которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$\rho(A) = \rho(A[i, j]).$$

В частности, если A – неприводимая матрица порядка $n \geqslant 3$ (это случай, рассмотренный в [4]), то

$$\rho(A) > \rho(A[i, j]) = \rho(A[\overline{\gamma}]),$$

так что в силу теоремы 4.1 неравенство (4.18) является строгим и равносильно нижней оценке

$$\rho(A) > \frac{1}{2}\{a_{ii} + a_{jj} + [(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4a_{ij}a_{ji}]^{1/2}\}, \quad i \neq j,$$

предложенной Брауэром и Джентри.

Замечание 4.3. Следствие 2.5, установленное в §2, легко может быть выведено и из теоремы 4.1. Действительно, если γ – единственный контур в $\mathfrak{C}(A)$ и $\overline{\gamma} = \langle n \rangle$, то

$$A - D_A = (A - D_A)[\overline{\gamma}] = A_\gamma,$$

т.е. выполнено условие (ii) теоремы 4.1, тогда как при $\overline{\gamma} = \langle n \rangle$ условие (i) выполняется тривиальным образом. Значит, по теореме 4.1, справедливо равенство

$$\prod_{i=1}^{n} [\rho(A) - a_{ii}] = \Pi_\gamma (A - D_A),$$

и, принимая во внимание, что

$$\Pi_\gamma (A - D_A) = \Pi_\gamma (A) = \prod_{i=1}^{n} r'_i(A),$$

мы приходим к соотношению

$$\prod_{i=1}^{n} [\rho(A) - a_{ii}] = \prod_{i=1}^{n} r'_i(A). \tag{4.19}$$

Наконец, если D – произвольная диагональная матрица с положительными диагональными элементами, то, применяя (4.19) к матрице $B = D^{-1}AD$, мы получаем требуемое равенство

$$\prod_{i=1}^{n} [\rho(A) - a_{ii}] = \prod_{i=1}^{n} r'_i(D^{-1}AD).$$

Литература

1. Ю. А. Альпин, *Границы для перронова корня неотрицательной матрицы, учитывающие свойства ее графа.* — Мат. заметки, **58** (1995), 635–637.
2. Л. Ю. Колотилина, *Нижние оценки перроновского корня суммы неотрицательных матриц.*— Зап. научн. семин. ПОМИ, **268** (2000), 49–71.
3. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **284** (2002), 77–122.
4. A. Brauer, I. C. Gentry, *Bounds for the greatest characteristic root of an irreducible nonnegative matrix.* II. — Linear Algebra Appl., **13** (1976), 109–114.

5. R. Brualdi, *Matrices, eigenvalues, and directed graphs.* — Linear and Multilinear Algebra, **11** (1982), 143–165.
6. M. Fiedler, V. Pták, *Cyclic products and an inequality for determinants.* — Czechoslovak Math. J., **19** (1969), 428–450.
7. S. Friedland, S. Karlin, *Some inequalities for the spectral radius of non-negative matrices and applications.* — Duke Math. J., **42** (1975), 459–490.
8. R. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis.* — Cambridge University Press (1985).
9. Shu-Lin Liu, *Bounds for the greatest characteristic root of a nonnegative matrix.* — Linear Algebra Appl., **239** (1996), 151–160.

Kolotilina L. Yu. Bounds and inequalities for the Perron root of a nonnegative matrix. II. Circuit bounds and inequalities.

The paper suggests two-sided, upper, and lower circuit bounds for the Perron root of a nonnegative matrix, most of which are derived based on an extension of the monotonicity property of the Perron root established by Fiedler and Pták.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 17 апреля 2003 г.