Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 296, 2003 г.

Л. Ю. Колотилина

ОБ УСИЛЕНИИ АДДИТИВНЫХ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ НЕРАВЕНСТВ ВЕЙЛЯ

§1. Введение

Пусть A и B – комплексные $m \times n$ матрицы и пусть $q = \min\{m, n\}$. Как хорошо известно (см., например, [1, теорема 3.3.16]), сингулярные числа матриц $A + B$ и AB^* удовлетворяют следующим аддитивным и мультипликативным неравенствам Вейля:

$$\sigma_{i+j-1}(A + B) \leqslant \sigma_i(A) + \sigma_j(B), \tag{1.1}$$

$$\sigma_{i+j-1}(AB^*) \leqslant \sigma_i(A)\sigma_j(B), \tag{1.2}$$

где $1 \leqslant i,\ j \leqslant q$ и $i + j - 1 \leqslant q$.

Здесь, как и в последующем изложении, мы предполагаем, что сингулярные числа, а также и собственные значения матриц с вещественным спектром упорядочены в порядке невозрастания, т.е.

$$\sigma_1(A) \geqslant \sigma_2(A) \geqslant \cdots \geqslant \sigma_q(A),$$

если A – $m \times n$ матрица и $q = \min\{m, n\}$, и

$$\lambda_1(A) \geqslant \lambda_2(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A),$$

если A – $n \times n$ матрица с вещественными собственными значениями $\lambda_i(A)$, $i = 1, \ldots, n$.

Для эрмитовых $n \times n$ матриц A и B справедливы следующие аналоги неравенств (1.1) и (1.2) (см., например, [3]):

$$\lambda_{i+j-1}(A + B) \leqslant \lambda_i(A) + \lambda_j(B), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad i + j - 1 \leqslant n, \tag{1.3}$$

$$\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \leqslant \lambda_{i+j-n}(A + B), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad i + j - n \geqslant 1, \tag{1.4}$$

и если матрицы A и B положительно полуопределены, то

$$\lambda_{i+j-1}(AB) \leqslant \lambda_i(A)\lambda_j(B), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad i + j - 1 \leqslant n, \tag{1.5}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке NWO, Нидерланды (грант 047-008-007).

$$\lambda_i(A)\lambda_j(B) \leqslant \lambda_{i+j-n}(AB), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad i+j-n \geqslant 1. \qquad (1.6)$$

Заметим, что случай равенства в неравенствах (1.3)–(1.6) был исследован в статье [3].

В этой работе мы устанавливаем усиленные варианты аддитивных и мультипликативных неравенств Вейля для сингулярных чисел прямоугольных матриц и собственных значений эрмитовых матриц. Предложенные улучшения состоят в том, что если пересечение подпространства, порожденного $r \geqslant 1$ правыми сингулярными векторами $u_1, \dots, u_r$ матрицы A, отвечающими $\sigma_1(A), \dots, \sigma_r(A)$, и подпространства, порожденного $s \geqslant 1$ правыми сингулярными векторами $v_1, \dots, v_s$ матрицы B, отвечающими $\sigma_1(B), \dots, \sigma_s(B)$, имеет размерность не меньше чем $k \geqslant 1$, т.е.

$$\dim\left(\langle u_1, \dots, u_r \rangle \cap \langle v_1, \dots, v_s \rangle\right) \geqslant k, \qquad (1.7)$$

то справедливы уточненные неравенства

$$\begin{gathered} \sigma_{i+j-k-1}(A+B) \leqslant \sigma_i(A) + \sigma_j(B), \\ r+1 \leqslant i \leqslant q, \quad s+1 \leqslant j \leqslant q, \quad i+j-k-1 \leqslant q, \end{gathered} \qquad (1.8)$$

и

$$\begin{gathered} \sigma_{i+j-k-1}(AB^*) \leqslant \sigma_i(A)\sigma_j(B), \\ r+1 \leqslant i \leqslant q, \quad s+1 \leqslant j \leqslant q, \quad i+j-k-1 \leqslant q. \end{gathered} \qquad (1.9)$$

Аналогичные уточнения получены и для неравенств Вейля (1.3)–(1.6), относящихся к случаю эрмитовых матриц. Кроме того, исследованы случаи равенства в усиленных неравенствах Вейля.

Из усиленных неравенств Вейля в частности следует, что если для некоторого $p \geqslant 1$ справедливы равенства

$$\sigma_k(A+B) = \sigma_k(A) + \sigma_k(B), \quad k = 1, \dots, p,$$

или же равенства

$$\sigma_k(AB^*) = \sigma_k(A)\sigma_k(B), \quad k = 1, \dots, p,$$

причем в последнем случае $n \leqslant m$ и хотя бы одна из матриц A и B не имеет нулевых сингулярных значений, то справедливы уточненные неравенства

$$\sigma_{i+j-p-1}(A+B) \leqslant \sigma_i(A) + \sigma_j(B), \quad p+1 \leqslant i, i \leqslant q, \quad i+j-p-1 \leqslant q,$$

и

$$\sigma_{i+j-p-1}(AB^*) \leqslant \sigma_i(A)\sigma_j(B), \quad p+1 \leqslant i,j \leqslant q, \quad i+j-p-1 \leqslant q.$$

Аналогичные утверждения установлены и для собственных значений эрмитовых матриц.

Доказательства, представленные в этой статье, используют подход, предложенный в работе [2] и использованный в работе [3], который основывается на очень простых соображениях размерности, формализованных в лемме 1 из §2. В §2 также приведены еще три элементарные леммы, используемые в §3 при доказательстве основных результатов этой работы.

Мы завершаем это введение пояснением нетрадиционных обозначений, принятых в этой статье. С целью включения классических неравенств Вейля в уточненные формулировки, мы допускаем появление подпространств вида

$$\langle\, x_1, x_0 \,\rangle \quad \text{или} \quad \langle\, x_t, x_{t+1} \,\rangle,$$

где векторы x_0 и x_{t+1} неопределены, и считаем такие подпространства нульмерными по определению.

§2. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе приводятся простые леммы, которые нам понадобятся в §3.

Заметим, что ключевая лемма 1 представляет собой уточненный вариант неравенства

$$\dim(S_1 \cap S_2 \cap S_3) \geqslant \sum_{i=1}^{3} \dim S_i - 2n,$$

где S_i, $i = 1, 2, 3$, – это подпространства n-мерного векторного пространства, которое было использовано в [2] и [3] для очень короткого доказательства классических неравенств Вейля и для исследования случая равенства в них. Лемма 2 является стандартной, а ее формулировка заимствована нами из [3]. Лемма 3 легко следует из леммы 2. Лемма 4 является простым следствием хорошо известной характеризации случая равенства в неравенстве Коши–Шварца

$$|x^* y| \leqslant \|x\|_2 \, \|y\|_2.$$

Лемма 1. *Если S_1, S_2 и S_3 – некоторые подпространства n-мерного векторного пространства, то*

$$\dim(S_1 \cap S_2 \cap S_3) \geqslant \sum_{i=1}^{3} \dim S_i + \dim(S_1^\perp \cap S_2^\perp) - 2n. \tag{2.1}$$

Доказательство. Обозначим

$$S = S_1 \cap S_2.$$

Как хорошо известно,

$$\dim S = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 + S_2)$$

и, аналогично,

$$\dim(S \cap S_3) = \dim S + \dim S_3 - \dim(S + S_3).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dim(S_1 \cap S_2 \cap S_3) &= \dim(S \cap S_3) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \dim S_i - \dim(S_1 + S_2) - \dim(S + S_3). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Поскольку

$$S_1 = (S_1^\perp)^\perp \subseteq (S_1^\perp \cap S_2^\perp)^\perp$$

и

$$S_2 = (S_2^\perp)^\perp \subseteq (S_1^\perp \cap S_2^\perp)^\perp,$$

мы имеем включение

$$S_1 + S_2 \subseteq (S_1^\perp \cap S_2^\perp)^\perp,$$

из которого вытекает, что

$$\dim(S_1 + S_2) \leqslant n - \dim(S_1^\perp \cap S_2^\perp). \tag{2.3}$$

Теперь требуемое неравенство (2.1) следует из (2.2) с учетом (2.3) и тривиального неравенства $\dim(S + S_3) \leqslant n$. $\square$

Лемма 2. *Пусть H – эрмитова $n \times n$ матрица с собственными значениями $\lambda_1(H) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(H)$ и им соответствующими ортогональными собственными векторами $\{x_i\}_{i=1}^n$. Если*

$$x \in \langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_m} \rangle, \quad x \neq 0,$$

где $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n$, то

$$\lambda_{i_m}(H) \leqslant \frac{x^* H x}{x^* x} \leqslant \lambda_{i_1}(H), \tag{2.4}$$

причем правое (левое) неравенство в (2.4) обращается в равенство тогда и только тогда, когда $Hx = \lambda_{i_1}(H)x$ ($Hx = \lambda_{i_m}(H)x$).

Лемма 3. *Пусть G – комплексная $m \times n$ матрица с сингулярными числами $\sigma_1(G) \geqslant \cdots \geqslant \sigma_q(G)$, где $q = \min\{m, n\}$, и им соответствующими правыми сингулярными векторами $\{x_i\}_{i=1}^q$. Если*

$$x \in \langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_m} \rangle, \quad x \neq 0,$$

где $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant q$, то

$$\sigma_{i_m}(G) \leqslant \frac{\|Gx\|_2}{\|x\|_2} \leqslant \sigma_{i_1}(G). \tag{2.5}$$

Кроме того, если $\|x\|_2 = 1$, то правое (левое) неравенство в (2.5) обращается в равенство тогда и только тогда, когда $Gx = \sigma_{i_1}(G)y$ ($Gx = \sigma_{i_m}(G)y$), где $\|y\|_2 = 1$.

Лемма 4. *Пусть x и y – ненулевые комплексные векторы одинаковой размерности. Тогда равенство*

$$\|x + y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$$

выполняется в том и только том случае, когда

$$y = \alpha x, \quad \alpha > 0.$$

§3. Основные результаты

В этом параграфе мы доказываем усиленные варианты аддитивных и мультипликативных неравенств Вейля для сингулярных чисел прямоугольных матриц и собственных значений эрмитовых матриц, а также анализируем случаи, когда эти неравенства обращаются в равенства.

Сперва мы установим аддитивные неравенства для сингулярных чисел.

Теорема 1. *Пусть A и B – $m\times n$ матрицы с сингулярными числами $\{\sigma_i(A)\}_{i=1}^q$ и $\{\sigma_i(B)\}_{i=1}^q$, где $q=\min\{m,n\}$, и правыми сингулярными векторами $\{u_i\}_{i=1}^n$ и $\{v_i\}_{i=1}^n$. Если для некоторых r и s, $0\leqslant r$, $s\leqslant q-1$, выполнено условие*

$$\dim\left(\langle\, u_1,\dots,u_r\,\rangle\cap\langle\, v_1,\dots,v_s\,\rangle\right)\geqslant k,\quad k\geqslant 0, \tag{3.1}$$

то

$$\begin{gathered}\sigma_{i+j-k-1}(A+B)\leqslant\sigma_i(A)+\sigma_j(B),\\ r+1\leqslant i\leqslant q,\quad s+1\leqslant j\leqslant q,\quad i+j-k-1\leqslant q,\end{gathered} \tag{3.2}$$

причем неравенство (3.2) обращается в равенство тогда и только тогда, когда условия

$$\begin{aligned}&Ax=\sigma_i(A)y,\\ &Bx=\sigma_j(B)y, &&\|y\|_2=1,\\ &(A+B)x=\sigma_{i+j-k-1}(A+B)y,\end{aligned} \tag{3.3}$$

выполнены для некоторого вектора

$$x\in\Big(\langle\, u_1,\dots,u_{i-1}\,\rangle+\langle\, v_1,\dots,v_{j-1}\,\rangle\Big)^{\perp},\quad \|x\|_2=1. \tag{3.4}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение следующие подпространства:

$$S=\langle\, u_1,\dots,u_r\,\rangle\cap\langle\, v_1,\dots,v_s\,\rangle,$$

$$S_1=\langle\, u_n,\dots,u_i\,\rangle,\quad S_2=\langle\, v_n,\dots,v_j\,\rangle,$$

$$S_3=\langle\, w_{i+j-k-1},\dots,w_1\,\rangle,$$

где $\{w_i\}_{i=1}^n$ – правые сингулярные векторы суммы $A+B$. Очевидно,

$$\sum_{i=1}^{3}\dim S_i=2n-k+1.$$

Из этого равенства и леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned}\dim(S_1\cap S_2\cap S_3)&\geqslant 2n-k+1+\dim(S_1^{\perp}\cap S_2^{\perp})-2n\\ &=\dim(S_1^{\perp}\cap S_2^{\perp})-k+1.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Поскольку

$$S_1^{\perp}=\langle\, u_1,\dots,u_{i-1}\,\rangle\supseteq\langle\, u_1,\dots,u_r\,\rangle\supseteq S$$

и, аналогично,

$$S_2^\perp = \langle\, v_1, \dots, v_{j-1} \,\rangle \supseteq \langle\, v_1, \dots, v_s \,\rangle \supseteq S,$$

мы заключаем, что

$$S_1^\perp \cap S_2^\perp \supseteq S.$$

Следовательно, с учетом условия (3.1) мы имеем

$$\dim (S_1^\perp \cap S_2^\perp) \geqslant \dim S \geqslant k. \tag{3.6}$$

Теперь из (3.5) и (3.6) следует, что

$$\dim (S_1 \cap S_2 \cap S_3) \geqslant k - k + 1 = 1.$$

Таким образом, пересечение $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ содержит некоторый вектор x, $\|x\|_2 = 1$, причем

$$x \perp \big(\langle\, u_1, \dots, u_{i-1} \,\rangle + \langle\, v_1, \dots, v_{j-1} \,\rangle\big).$$

Используя лемму 3 и неравенство треугольника, мы выводим

$$\begin{aligned} \sigma_{i+j-k-1}(A+B) &\leqslant \|(A+B)x\|_2 \leqslant \|Ax\|_2 + \|Bx\|_2 \\ &\leqslant \sigma_i(A) + \sigma_j(B), \end{aligned} \tag{3.7}$$

что и доказывает (3.2).

Допустим теперь, что неравенство (3.2) является равенством, т.е.

$$\sigma_{i+j-k-1}(A+B) = \sigma_i(A) + \sigma_j(B). \tag{3.8}$$

В этом случае цепочка неравенств (3.7) является цепочкой равенств, а лемма 3 гарантирует нам, что

$$\begin{aligned} Ax &= \sigma_i(A) y, \quad \|y\|_2 = 1, \\ Bx &= \sigma_j(B) z, \quad \|z\|_2 = 1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Из соотношений (3.7), (3.8) и (3.9) вытекает, что

$$\|\sigma_i(A) y + \sigma_j(B) z\|_2 = \sigma_i(A) + \sigma_j(B) = \|\sigma_i(A) y\|_2 + \|\sigma_j(B) z\|_2,$$

так что, применяя лемму 4 и используя условия $\|y\|_2 = \|z\|_2 = 1$, при $\sigma_i(A) > 0$ и $\sigma_j(B) > 0$ мы приходим к равенству

$$z = y.$$

Теперь из соотношений (3.9) и (3.8) следует, что

$$(A+B)x = \big[\sigma_i(A) + \sigma_j(B)\big]\, y = \sigma_{i+j-k-1}(A+B)y,$$

что и доказывает (3.3) в случае, когда $\sigma_i(A) > 0$ и $\sigma_j(B) > 0$.Если же $\sigma_j(B) = 0$, то, в силу (3.9),

$$Bx = 0 = \sigma_j(B)y.$$

Учитывая последнее равенство, а также соотношения (3.9) и (3.8), мы выводим:

$$(A+B)x = \big[\sigma_i(A) + \sigma_j(B)\big]\, y = \sigma_{i+j-k-1}(A+B)y.$$

Случай $\sigma_i(A) = 0$ рассматривается аналогично. Необходимость соотношений (3.3) установлена.

Достаточность условий (3.3) для того, чтобы неравенство (3.2) обращалось в равенство, очевидна. □

Замечание 1. Если $r = s = 0$, то условие (3.1) очевидно выполнено при $k = 0$ для произвольных $m \times n$ матриц A и B, а неравенство (3.2) в этом случае принимает вид

$$\sigma_{i+j-1}(A+B) \leqslant \sigma_i(A) + \sigma_j(B), \quad i, j \geqslant 1, \quad i + j - 1 \leqslant q.$$

Таким образом, классические аддитивные неравенства Вейля следуют из теоремы 1, причем условия (3.3) с $k = 0$ являются необходимыми и достаточными для того, чтобы эти неравенства обращались в равенства. Заметим, что условия (3.3) означают, что матрицы A, B и $A+B$ имеют общую пару сингулярных векторов x и y, ассоциированных с сингулярными числами $\sigma_i(A)$, $\sigma_j(B)$ и $\sigma_{i+j-k-1}(A+B)$ соответственно.

Замечание 2. В теореме 1 правые сингулярные векторы могут быть заменены на левые. Это утверждение следует из теоремы 1, если применить ее к матрицам A^* и B^*.

Неравенства (3.2) для сингулярных чисел матриц A, B и $A+B$ справедливы при определенных предположениях на правые (левые) сингулярные векторы матриц A и B. В рассматриваемом ниже случае усиленный вариант аддитивных неравенств Вейля устанавливается в предположении, что некоторым условиям удовлетворяют p ($p \geqslant 1$) старших сингулярных чисел матриц A, B и $A+B$.

Следствие 1. *Пусть A и B – $m \times n$ матрицы с сингулярными числами $\{\sigma_i(A)\}_{i=1}^q$ и $\{\sigma_i(B)\}_{i=1}^q$ соответственно, где $q = \min\{m, n\}$. Если для некоторого p, $1 \leqslant p \leqslant q-1$,*

$$\sigma_k(A+B) = \sigma_k(A) + \sigma_k(B), \quad k = 1, \dots, p, \tag{3.10}$$

то

$$\begin{aligned} &\sigma_{i+j-p-1}(A+B) \leqslant \sigma_i(A) + \sigma_j(B), \\ &p+1 \leqslant i, j \leqslant q, \quad i+j-p-1 \leqslant q. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Доказательство. Из условий (3.10) следует (при $k = 1$), что

$$\sigma_1(A+B) = \sigma_1(A) + \sigma_1(B),$$

то есть неравенство (3.2) с $k = 0$ и $i = j = 1$ обращается в равенство. Следовательно, по теореме 1 мы имеем

$$Ax_1 = \sigma_1(A)y_1, \quad Bx_1 = \sigma_1(B)y_1, \quad \|x_1\|_2 = \|y_1\|_2 = 1,$$

так что в обозначениях, принятых в теореме 1, мы можем положить

$$u_1 = v_1 = x_1.$$

Теперь теорему 1 можно применить с $k = r = s = 1$. В этом случае неравенство (3.2) с $i = j = 2$ принимает вид

$$\sigma_2(A+B) \leqslant \sigma_2(A) + \sigma_2(B),$$

а в силу (3.10) оно выполняется с равенством. Применяя теорему 1 еще раз, мы приходим к заключению, что существует вектор $x_2 \perp x_1$, $\|x_2\|_2 = 1$, такой что

$$Ax_2 = \sigma_2(A)y_2, \quad Bx_2 = \sigma_2(B)y_2, \quad \|y_2\|_2 = 1.$$

Следовательно, мы можем положить

$$u_2 = v_2 = x_2.$$

Продолжая эти же рассуждения, мы убеждаемся в том, что существуют ортогональные нормированные векторы x_i, $i = 1, \dots, p$, такие что

$$Ax_i = \sigma_i(A)y_i, \quad Bx_i = \sigma_i(B)y_i, \quad \|y_i\|_2 = 1, \quad i = 1, \dots, p.$$

Значит теорема 1 может быть применена с $r = s = k = p$, а в этом случае неравенства (3.2) совпадают с неравенствами (3.11). $\square$

Теперь мы представим усиленный вариант аддитивных неравенств Вейля для собственных значений эрмитовых матриц.

Теорема 2. *Пусть A и B – эрмитовы $n \times n$ матрицы с собственными значениями $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^n$ и $\{\lambda_i(B)\}_{i=1}^n$ и соответствующими ортогональными собственными векторами $\{u_i\}_{i=1}^n$ и $\{v_i\}_{i=1}^n$. Если для некоторых r и s, $0 \leqslant r,\ s \leqslant n-1$,*

$$\dim\left(\langle\, u_1, \dots, u_r \,\rangle \cap \langle\, v_1, \dots, v_s \,\rangle\right) \geqslant k, \quad k \geqslant 0, \tag{3.12}$$

то

$$\begin{gathered}\lambda_{i+j-k-1}(A+B) \leqslant \lambda_i(A) + \lambda_j(B), \\ r+1 \leqslant i \leqslant n, \quad s+1 \leqslant j \leqslant n, \quad i+j-k-1 \leqslant n,\end{gathered} \tag{3.13}$$

причем неравенство (3.13) *обращается в равенство тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор*

$$x \in \left(\langle\, u_1, \dots, u_{i-1} \,\rangle + \langle\, v_1, \dots, v_{j-1} \,\rangle\right)^{\perp}, \tag{3.14}$$

такой что

$$Ax = \lambda_i(A)x, \quad Bx = \lambda_j(B)x, \quad (A+B)x = \lambda_{i+j-k-1}(A+B)x. \tag{3.15}$$

Аналогично, если для некоторых r и s, $2 \leqslant r,\ s \leqslant n+1$,

$$\dim\left(\langle\, u_n, \dots, u_r \,\rangle \cap \langle\, v_n, \dots, v_s \,\rangle\right) \geqslant k, \quad k \geqslant 0, \tag{3.16}$$

то

$$\begin{gathered}\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \leqslant \lambda_{i+j+k-n}(A+B), \\ 1 \leqslant i \leqslant r-1, \quad 1 \leqslant j \leqslant s-1, \quad i+j+k-n \geqslant 1,\end{gathered} \tag{3.17}$$

причем неравенство (3.17) *обращается в равенство тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор*

$$x \in \left(\langle\, u_{i+1}, \dots, u_n \,\rangle + \langle\, v_{j+1}, \dots, v_n \,\rangle\right)^{\perp}, \tag{3.18}$$

такой что

$$Ax = \lambda_i(A)x, \quad Bx = \lambda_j(B)x, \quad (A+B)x = \lambda_{i+j+k-n}(A+B)x. \tag{3.19}$$

Доказательство. Поскольку матрицы A и B являются эрмитовыми, найдутся такие $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$, что матрицы $\widehat{A} = A + \alpha I_n$ и $\widehat{B} = B + \beta I_n$, где I_n – единичная матрица порядка n, положительно определены. Следовательно,

$$\sigma_i(\widehat{A}) = \lambda_i(\widehat{A}) = \lambda_i(A) + \alpha, \quad i = 1, \dots, n,$$

и

$$\sigma_j(\widehat{B}) = \lambda_j(\widehat{B}) = \lambda_j(B) + \beta, \quad j = 1, \dots, n.$$

Поскольку сумма $\widehat{A}+\widehat{B}$ также положительно определена, мы имеем и соотношения

$$\sigma_k(\widehat{A} + \widehat{B}) = \lambda_k(\widehat{A} + \widehat{B}) = \lambda_k(A + B) + \alpha + \beta, \quad k = 1, \dots, n.$$

Кроме того, сингулярные векторы матриц $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ и $\widehat{A} + \widehat{B}$ очевидно совпадают с собственными векторами матриц A, B и $A + B$ соответственно. Таким образом, если условие (3.12) теоремы 2 выполнено для матриц A и B, то для матриц $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ выполнено условие (3.1) теоремы 1. Следовательно, в силу неравенств (3.2) и вышеприведенных соотношений для сингулярных чисел матриц $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ и $\widehat{A} + \widehat{B}$ и собственных значений матриц A, B и $A + B$, мы имеем

$$\begin{gathered}
\lambda_{i+j-k-1}(A + B) + \alpha + \beta = \sigma_{i+j-k-1}(\widehat{A} + \widehat{B}) \\
\leqslant \sigma_i(\widehat{A}) + \sigma_j(\widehat{B}) = \lambda_i(A) + \alpha + \lambda_j(B) + \beta, \\
r + 1 \leqslant i \leqslant n, \quad s + 1 \leqslant j \leqslant n, \quad i + j - k - 1 \leqslant n,
\end{gathered}$$

откуда и следует (3.13).

Условия (3.14) и (3.15), характеризующие случай равенства, очевидно следуют из теоремы 1.

Для того, чтобы доказать неравенства (3.17) в предположении, что выполнено условие (3.16), мы заметим, что для любой эрмитовой $n \times n$ матрицы H справедливы соотношения

$$\lambda_p(-H) = -\lambda_{n-p+1}(H), \quad p = 1, \dots, n. \tag{3.20}$$

Ввиду (3.20), неравенства (3.17) следуют из неравенств (3.13), если последние применить к матрицам $-A$ и $-B$. Аналогично, условия (3.18) и (3.19), характеризующие случай равенства, следуют из условий (3.14) и (3.15). □

Следующий результат является аналогом следствия 1 для собственных значений эрмитовых матриц.

Следствие 2. *Пусть A и B – эрмитовы $n\times n$ матрицы с собственными значениями $\left\{\lambda_i(A)\right\}_{i=1}^n$ и $\left\{\lambda_i(B)\right\}_{i=1}^n$. Если для некоторого p, $1 \leqslant p \leqslant n - 1$,*

$$\lambda_k(A + B) = \lambda_k(A) + \lambda_k(B), \quad k = 1, \dots, p, \tag{3.21}$$

то

$$\lambda_{i+j-p-1}(A+B) \leqslant \lambda_i(A) + \lambda_j(B), \qquad (3.22)$$
$$p+1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad i+j-p-1 \leqslant n.$$

Аналогично, если для некоторого p, $2 \leqslant p \leqslant n$,

$$\lambda_k(A+B) = \lambda_k(A) + \lambda_k(B), \quad k = n, \dots, p, \qquad (3.23)$$

то

$$\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \leqslant \lambda_{i+j-p+1}(A+B), \qquad (3.24)$$
$$1 \leqslant i,j \leqslant p-1, \quad i+j \geqslant p.$$

Доказательство. Переходя, если это необходимо, к положительно определенным матрицам $\widehat{A} = A + \alpha I_n$ и $\widehat{B} = B + \beta I_n$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, мы можем вывести неравенства (3.22) из следствия 1 аналогично тому, как теорема 2 была выведена из теоремы 1.

Если же выполнены условия (3.23), то неравенства (3.24) следуют из неравенств (3.22), если последние применить к матрицам $-A$ и $-B$ (см. соотношения (3.20)). $\square$

Усиленные варианты мультипликативных неравенств Вейля будут установлены сперва для собственных значений эрмитовых матриц, а соответствующие неравенства для сингулярных чисел прямоугольных матриц будут получены как их следствия.

Теорема 3. *Пусть* A *и* B *– эрмитовы положительно полуопределенные* $n \times n$ *матрицы с собственными значениями* $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^n$ *и* $\{\lambda_i(B)\}_{i=1}^n$ *и им соответствующими ортогональными собственными векторами* $\{u_i\}_{i=1}^n$ *и* $\{v_i\}_{i=1}^n$. *Если для некоторых* r *и* s, $0 \leqslant r$, $s \leqslant n-1$,

$$\dim\left(\langle u_1, \dots, u_r \rangle \cap \langle v_1, \dots, v_s \rangle\right) \geqslant k, \quad k \geqslant 0, \qquad (3.25)$$

то

$$\lambda_{i+j-k-1}(AB) \leqslant \lambda_i(A)\lambda_j(B), \qquad (3.26)$$
$$r+1 \leqslant i \leqslant n, \quad s+1 \leqslant j \leqslant n, \quad i+j-k-1 \leqslant n,$$

а если хотя бы одна из матриц A *и* B *положительно определена, то неравенство* (3.26) *обращается в равенство тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор*

$$x \in \left(\langle u_1, \dots, u_{i-1} \rangle + \langle v_1, \dots, v_{j-1} \rangle\right)^{\perp} \qquad (3.27)$$

такой, что

$$Ax = \lambda_i(A)x, \quad Bx = \lambda_j(B)x, \quad ABx = \lambda_{i+j-k-1}(AB)x. \tag{3.28}$$

Аналогично, если для некоторых r и s, $2 \leqslant r,\ s \leqslant n+1$,

$$\dim\left(\langle\, u_n, \dots, u_r \,\rangle \cap \langle\, v_n, \dots, v_s \,\rangle\right) \geqslant k, \quad k \geqslant 0, \tag{3.29}$$

то

$$\begin{gathered} \lambda_i(A)\lambda_j(B) \leqslant \lambda_{i+j+k-n}(AB), \\ 1 \leqslant i \leqslant r-1, \quad 1 \leqslant j \leqslant s-1, \quad i+j+k-n \geqslant 1, \end{gathered} \tag{3.30}$$

а если хотя бы одна из матриц A и B положительно определена, то неравенство (3.30) обращается в равенство тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор

$$x \in \left(\langle\, u_n, \dots, u_{i+1} \,\rangle + \langle\, v_n, \dots, v_{j+1} \,\rangle\right)^{\perp} \tag{3.31}$$

такой, что

$$Ax = \lambda_i(A)x, \quad Bx = \lambda_j(B)x, \quad ABx = \lambda_{i+j+k-n}(AB)x. \tag{3.32}$$

Доказательство. Чтобы доказать неравенства (3.26), мы сперва предположим, что матрица A положительно определена. Введем в рассмотрение подпространства

$$S = \langle\, u_1, \dots, u_r \,\rangle \cap \langle\, v_1, \dots, v_s \,\rangle,$$

$$S_1 = \langle\, u_n, \dots, u_i \,\rangle, \quad S_2 = \langle\, v_n, \dots, v_j \,\rangle,$$

$$S_3 = A^{1/2}\langle\, z_{i+j-k-1}, \dots, z_1 \,\rangle,$$

где $\{z_i\}_{i=1}^{n}$ – ортогональные собственные векторы эрмитовой матрицы $A^{1/2}BA^{1/2}$. Применяя лемму 1, как при доказательстве теоремы 1, мы немедленно получаем, что

$$\dim(S_1 \cap S_2 \cap S_3) \geqslant 1.$$

Следовательно, существует ненулевой вектор

$$x \in S_1 \cap S_2 \cap S_3,$$

очевидно удовлетворяющий условию (3.27).

Поскольку $x \in S_3$, мы имеем

$$x = A^{1/2}y,$$

где

$$y \in \langle\, z_{i+j-k-1}, \dots , z_1 \,\rangle, \tag{3.33}$$

а поскольку матрица A обратима, то верно и соотношение

$$y = A^{-1/2}x.$$

Учитывая тривиальные соотношения

$$\lambda_p^{-1}(A^{-1}) = \lambda_{n-p+1}(A), \quad 1 \leqslant p \leqslant n,$$

и используя лемму 2, для $x \in S_1 \cap S_2 \cap S_3 \subseteq S_1$ мы выводим

$$\frac{x^*A^{-1}x}{x^*x} \geqslant \lambda_{n-i+1}(A^{-1}) = \lambda_i^{-1}(A),$$

откуда следует, что

$$\frac{x^*x}{y^*y} = \frac{x^*x}{x^*A^{-1}x} \leqslant \lambda_i(A). \tag{3.34}$$

Используя лемму 2 и соотношения (3.33) и (3.34), мы выводим неравенства (3.26) следующим образом:

$$\begin{aligned}\lambda_{i+j-k-1}(AB) = \lambda_{i+j-k-1}(A^{1/2}BA^{1/2}) &\leqslant \frac{(y^*A^{1/2})B(A^{1/2}y)}{y^*y} \\ &= \frac{x^*x}{y^*y}\,\frac{x^*Bx}{x^*x} \leqslant \lambda_i(A)\lambda_j(B).\end{aligned}$$

Необходимость условий (3.28) для того, чтобы выполнялось равенство

$$\lambda_{i+j-k-1}(AB) = \lambda_i(A)\lambda_j(B)$$

устанавливается с помощью леммы 2.

Случай, когда матрица B является положительно определенной, рассматривается аналогично.

Справедливость неравенств (3.26) в предположении, что обе матрицы A и B положительно полуопределены, следует из рассмотренных случаев по непрерывности.

Достаточность условий (3.28) для того, чтобы соответствующее неравенство в (3.26) обращалось в равенство, тривиальна.

Наконец, неравенства (3.30) и условия равенства (3.31) и (3.32) устанавливаются так же, как неравенства (3.26) и условия (3.27) и (3.28), если ввести в рассмотрение подпространства

$$S = \langle\, u_n, \dots , u_r \,\rangle \cap \langle\, v_n, \dots , v_s \,\rangle,$$

$$S_1 = \langle\, u_i, \dots , u_1 \,\rangle, \quad S_2 = \langle\, v_j, \dots , v_1 \,\rangle,$$

$$S_3 = A^{1/2}\langle\, z_n, \dots , z_{i+j+k-n} \,\rangle.$$

□

Следствие 3. *Пусть A и B – эрмитовы положительно полуопределенные $n\times n$ матрицы и пусть хотя бы одна из них положительно определена. Если для некоторого p, $1 \leqslant p \leqslant n-1$,*

$$\lambda_k(AB) = \lambda_k(A)\lambda_k(B), \quad k = 1, \dots , p, \tag{3.35}$$

то

$$\lambda_{i+j-p-1}(AB) \leqslant \lambda_i(A)\lambda_j(B),\ p+1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i+j-p-1 \leqslant n. \tag{3.36}$$

Аналогично, если для некоторого p, $2 \leqslant p \leqslant n$,

$$\lambda_k(AB) = \lambda_k(A)\lambda_k(B), \quad k = n, \dots , p, \tag{3.37}$$

то

$$\lambda_i(A)\lambda_j(B) \leqslant \lambda_{i+j-p+1}(AB),\ 1 \leqslant i, j \leqslant p-1,\ i+j \geqslant p. \tag{3.38}$$

Доказательство. Сперва мы выведем неравенства (3.36) из равенств (3.35). Поскольку в силу (3.35) мы имеем

$$\lambda_1(AB) = \lambda_1(A)\lambda_1(B),$$

то по теореме 3 существует ненулевой вектор x_1, такой что

$$Ax_1 = \lambda_1(A)x_1, \quad Bx_1 = \lambda_1(B)x_1.$$

Следовательно, мы можем положить

$$u_1 = v_1 = x_1$$

и применить теорему 3 с $k = r = s = 1$. Таким образом мы приходим к неравенству

$$\lambda_2(AB) \leqslant \lambda_2(A)\lambda_2(B).$$

Поскольку в силу (3.35) это неравенство является равенством, то теорема 3 гарантирует нам существование ненулевого вектора $x_2 \perp x_1$, такого что

$$Ax_2 = \lambda_2(A)x_2, \quad Bx_2 = \lambda_2(B)x_2.$$

Эти равенства позволяют нам положить

$$u_2 = v_2 = x_2.$$

Продолжая те же рассуждения, мы установим существование ненулевых ортогональных векторов $x_1, \ldots, x_p$, таких что

$$Ax_i = \lambda_i(A)x_i, \quad Bx_i = \lambda_i(B)x_i, \quad i = 1, \ldots, p.$$

Теперь, применяя теорему 3 с $r = s = k = p$, мы приходим к требуемым неравенствам (3.36).

Неравенства (3.38) выводятся из равенств (3.37) аналогично. □

Теорема 4. *Пусть A и B – $m\times n$ матрицы с сингулярными числами $\{\sigma_i(A)\}_{i=1}^q$ и $\{\sigma_i(B)\}_{i=1}^q$, $q = \min\{m, n\}$, и правыми сингулярными векторами $\{u_i\}_{i=1}^n$ и $\{v_i\}_{i=1}^n$. Если для некоторых r и s, $0 \leqslant r$, $s \leqslant q-1$,*

$$\dim\left(\langle u_1, \ldots, u_r \rangle \cap \langle v_1, \ldots, v_s \rangle\right) \geqslant k, \quad k \geqslant 0, \tag{3.39}$$

то

$$\begin{gathered} \sigma_{i+j-k-1}(AB^*) \leqslant \sigma_i(A)\sigma_j(B), \\ r+1 \leqslant i \leqslant q, \quad s+1 \leqslant j \leqslant q, \quad i+j-k-1 \leqslant q, \end{gathered} \tag{3.40}$$

причем если $n \leqslant m$ и хотя бы одна из матриц A и B не имеет нулевых сингулярных чисел, то неравенство (3.40) обращается в равенство тогда и только тогда, когда условия

$$\begin{aligned} Ax &= \sigma_i(A)y, \quad \|y\|_2 = 1, \\ Bx &= \sigma_j(B)z, \quad \|z\|_2 = 1, \\ AB^*z &= \sigma_{i+j-k-1}(AB^*)y \end{aligned} \tag{3.41}$$

справедливы для некоторого вектора

$$x \in \left(\langle u_1, \ldots, u_{i-1} \rangle + \langle v_1, \ldots, v_{j-1} \rangle\right)^{\perp}, \quad \|x\|_2 = 1. \tag{3.42}$$

Аналогично, если для некоторых r и s, $2 \leqslant r$, $s \leqslant q+1$,

$$\dim\left(\langle u_n, \ldots, u_r \rangle \cap \langle v_n, \ldots, v_s \rangle\right) \geqslant k, \quad k \geqslant 0, \tag{3.43}$$

то

$$\begin{gathered} \sigma_i(A)\sigma_j(B) \leqslant \sigma_{i+j+k-n}(AB^*), \\ 1 \leqslant i \leqslant r-1, \quad 1 \leqslant j \leqslant s-1, \quad i+j+k-n \geqslant 1, \end{gathered} \tag{3.44}$$

причем если $n \leqslant m$ и хотя бы одна из матриц A и B не имеет нулевых сингулярных чисел, то неравенство (3.44) обращается в равенство тогда и только тогда, когда условия

$$\begin{aligned} &Ax = \sigma_i(A)y, \quad \|y\|_2 = 1, \\ &Bx = \sigma_j(B)z, \quad \|z\|_2 = 1, \\ &AB^*z = \sigma_{i+j+k-n}(AB^*)y \end{aligned} \tag{3.45}$$

справедливы для некоторого вектора

$$x \in \big(\langle\, u_n, \dots, u_{i+1}\,\rangle + \langle\, v_n, \dots, v_{j+1}\,\rangle\big)^{\perp}, \quad \|x\|_2 = 1. \tag{3.46}$$

Доказательство. Очевидно, мы имеем

$$\begin{aligned} \sigma^2_{i+j-k-1}(AB^*) = \lambda_{i+j-k-1}(AB^*\,BA^*) = \lambda_{i+j-k-1}(A^*A\,B^*B), \\ 1 \leqslant i+j-k-1 \leqslant q. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Поскольку обе $n \times n$ матрицы A^*A и B^*B эрмитовы и положительно полуопределены, мы можем применить к ним теорему 3, что приводит к неравенствам

$$\begin{gathered} \lambda_{i+j-k-1}(A^*A\,B^*B) \leqslant \lambda_i(A^*A)\lambda_j(B^*B) = \sigma_i^2(A)\sigma_j^2(B), \\ r+1 \leqslant i \leqslant q, \;\; s+1 \leqslant j \leqslant q, \;\; i+j-k-1 \leqslant q, \end{gathered}$$

из которых следуют неравенства (3.40), если учесть соотношения (3.47).

Предположим, что

$$\sigma_{i+j-k-1}(AB^*) = \sigma_i(A)\sigma_j(B). \tag{3.48}$$

Тогда ввиду (3.47) мы имеем

$$\lambda_{i+j-k-1}(A^*AB^*B) = \lambda_i(A^*A)\lambda_j(B^*B). \tag{3.49}$$

Если $n \leqslant m$ и хотя бы одна из матриц A и B не имеет нулевых сингулярных чисел, то хотя бы одна из матриц A^*A, B^*B является положительно определенной. Следовательно, по теореме 3 из равенства (3.49) следует, что существует вектор

$$x \in \big(\langle\, u_{i-1}, \dots, u_1\,\rangle + \langle\, v_{j-1}, \dots, v_1\,\rangle\big)^{\perp}, \quad \|x\|_2 = 1, \tag{3.50}$$

такой что

$$A^*Ax = \sigma_i^2(A)x, \quad B^*Bx = \sigma_j^2(B)x. \tag{3.51}$$

На основании (3.51) мы заключаем, что

$$\|Ax\|_2 = \sigma_i(A).$$

Поскольку ввиду (3.50) $x \in \langle u_n, \ldots, u_i \rangle$, то по лемме 3 мы имеем

$$Ax = \sigma_i(A)y, \quad \|y\|_2 = 1. \tag{3.52}$$

Аналогично,

$$Bx = \sigma_j(B)z, \quad \|z\|_2 = 1. \tag{3.53}$$

Таким образом, необходимость (3.42) и первых двух условий из (3.41) установлена.

Из соотношений (3.51) и (3.53) вытекает, что

$$\sigma_j^2(B)x = B^*Bx = \sigma_j(B)B^*z.$$

Следовательно, если $\sigma_j(B) > 0$, то

$$B^*z = \sigma_j(B)x. \tag{3.54}$$

Используя соотношения (3.54), (3.52) и (3.48), мы выводим

$$AB^*z = \sigma_j(B)Ax = \sigma_i(A)\sigma_j(B)y = \sigma_{i+j-k-1}(AB^*)y,$$

что и доказывает справедливость третьего из условий (3.41).

Если же $\sigma_j(B) = 0$, то в силу (3.48) мы имеем

$$\sigma_{i+j-k-1}(AB^*) = 0,$$

и, ввиду (3.52) и (3.53), условия (3.41) очевидно справедливы для векторов x, y и $\widehat{z}$, где $\widehat{z}$ – левый сингулярный вектор матрицы B, отвечающий $\sigma_j(B) = 0$.

Теперь мы покажем, что равенство (3.48) следует из условий (3.41) и (3.42). Допустим сперва, что $\sigma_j(B) > 0$. В этом случае, поскольку $x \in \langle v_j, \ldots, v_n \rangle$ и, ввиду (3.41),

$$x^*B^*Bx = \sigma_j^2(B),$$

применение леммы 2 к матрице B^*B приводит нас к соотношению

$$B^*Bx = \sigma_j^2(B)x.$$

Из этого равенства и второго соотношения из (3.41) следует, что

$$B^*z = \sigma_j(B)x,$$

так что ввиду третьего и первого равенств из (3.41) мы имеем

$$\sigma_{i+j-k-1}(AB^*)y = AB^*z = \sigma_j(B)Ax = \sigma_i(A)\sigma_j(B)y,$$

откуда очевидно следует равенство (3.48).

Если же $\sigma_j(B) = 0$, то по предположению матрица A не имеет нулевых сингулярных чисел, и, в частности, $\sigma_i(A) \neq 0$. В этом случае, как и выше, мы убеждаемся в справедливости равенства

$$A^*y = \sigma_i(A)x.$$

Ввиду второго соотношения из (3.41), из последнего равенства следует, что

$$y^*AB^*z = \sigma_i(A)(Bx)^*z = \sigma_i(A)\sigma_j(B).$$

Поскольку в силу последнего соотношения из (3.41) также справедливо и равенство

$$y^*AB^*z = \sigma_{i+j-k-1}(AB^*),$$

то справедливость (3.48) установлена и в этом случае.

Оставшаяся часть теоремы 4 доказывается аналогично. □

Замечание 3. При $r = s = 0$ в (3.39) мы имеем $k = 0$, и неравенства (3.40) сводятся к классическим мультипликативным неравенствам Вейля (1.2), но характеризация случая равенства, предложенная в теореме 4, по-видимому является новой даже и в этом случае.

Замечание 4. Аналоги неравенств (3.40) и (3.44) для сингулярных значений произведения A^*B могут быть получены применением теоремы 4 к сопряженным матрицам A^* и B^*. В этом случае условия (3.39) и (3.43) будут формулироваться в терминах левых сингулярных векторов матриц A и B.

Следующий результат, который легко может быть получен из следствия 3, является мультипликативным аналогом следствия 1.

Следствие 4. *Пусть A и B – $m \times n$ матрицы ($n \leqslant m$) с сингулярными числами $\{\sigma_i(A)\}_{i=1}^n$ и $\{\sigma_i(B)\}_{i=1}^n$ соответственно и пусть хотя бы одна из них не имеет нулевых сингулярных чисел. Если для некоторого p, $1 \leqslant p \leqslant n-1$,*

$$\sigma_k(AB^*) = \sigma_k(A)\sigma_k(B), \quad k = 1, \dots, p, \tag{3.55}$$

то

$$\begin{gathered}\sigma_{i+j-p-1}(AB^*) \leqslant \sigma_i(A)\sigma_j(B),\\ p+1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad i+j-p-1 \leqslant n.\end{gathered} \tag{3.56}$$

Аналогично, если для некоторого p, $2 \leqslant p \leqslant n$,

$$\sigma_k(AB^*) = \sigma_k(A)\sigma_k(B), \quad k = n, \dots, p, \tag{3.57}$$

то

$$\begin{gathered}\sigma_i(A)\sigma_j(B) \leqslant \sigma_{i+j-p+1}(AB^*),\\ 1 \leqslant i,j \leqslant p-1, \quad i+j \geqslant p.\end{gathered} \tag{3.58}$$

Доказательство. Поскольку равенства (3.55) очевидно равносильны равенствам

$$\lambda_k(A^*A\,B^*B) = \lambda_k(A^*A)\lambda_k(B^*B), \quad k = 1, \dots, p,$$

а $n \times n$ матрицы A^*A и B^*B положительно полуопределены, причем хотя бы одна из них положительно определена, то по следствию 3 мы имеем неравенства

$$\lambda_{i+j-p-1}(A^*A\,B^*B) \leqslant \lambda_i(A^*A)\lambda_j(B^*B),$$

$$p+1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad i+j-p-1 \leqslant n,$$

совпадающие с неравенствами (3.56), возведенными в квадрат.

Неравенства (3.58) в предположении, что выполнены условия (3.57), выводятся аналогично. □

Замечание 5. Утверждения следствий 1 и 2 легко следуют из полученных в [4] неравенств, устанавливающих взаимоотношения между специального вида суммами сингулярных чисел прямоугольных матриц A, B и $A+B$, и полученных в [5] неравенств, связывающих суммы собственных значений эрмитовых матриц A, B и $A+B$.

Аналогично, в том частном случае, когда обе матрицы A и B являются квадратными и невырожденными, утверждения следствия 4 легко могут быть доказаны на основе установленных в [6] неравенств, связывающих определенные произведения сингулярных чисел матриц A, B и AB.

Литература

1. R. Horn, C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge Univ. Press (1991).
2. Y. Ikebe, T. Inagaki, S. Miyamoto, *The monotonicity theorem, Cauchy's interlace theorem, and the Courant–Fischer theorem.* — Amer. Math. Monthly **94** (1987), 352–354.
3. W. So, *Commutativity and spectra of Hermitian matrices.* — Linear Algebra Appl. **212/213** (1994), 121–129.
4. R. C. Thompson, *Singular value inequalities for matrix sums and minors.* — Linear Algebra Appl. **11** (1975), 251–269.
5. R. C. Thompson, L. J. Freede, *On the eigenvalues of sums of Hermitian matrices.* — Linear Algebra Appl. **4** (1971), 369–376.
6. R. C. Thompson, S. Therianos, *On the singular values of matrix products.* I. — Scripta Math. **XXIX** (1973), 99–110.

Kolotilina L. Yu. The strengthened versions of the additive and multiplicative Weyl inequalities.

The strengthened versions of the classical additive and multiplicative Weyl inequalities for the singular values of $A+B$ and AB^*, where A and B are rectangular matrices, and for the eigenvalues of $A+B$ and AB, where A and B are Hermitian matrices, are established under certain assumptions on the subspaces spanned by some singular vectors or eigenvectors of A and B.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 6 сентября 2002 г.