Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 295, 2003 г.

Г. И. Бижанова

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ Г. АМАННА В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА

**Посвящается
академику О. А. Ладыженской
к ее юбилею**

1. Постановка задачи

Г. Аманном в работе [1] была поставлена нелинейная задача для системы уравнений параболо-эллиптического типа, описывающая следующий физический процесс. В сосуде находится раствор N веществ, каждое из которых имеет концентрацию $u_r(x,t)$ и заряд $z_r(x,t)$, $r = 1,\dots,N$, причем суммарный заряд раствора $\sum_{r=1}^N z_r u_r$ равен нулю. Под действием электрического поля с потенциалом φ происходит химическая реакция на электродах и процесс диффузии, в результате чего наблюдается изменение концентрации веществ.

Г. Аманном и М. Ренарди [2] было доказано существование и единственность решения задачи

$$u_r(x,t) \in C(\overline{\Omega} \times [0,t^+)) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega} \times (0,t^+)) \cap C^{2,1}(\Omega \times (0,t^+)),$$
$$r = 1,\dots,N, \quad \varphi(x,t) \in C^{2,0}(\overline{\Omega} \times (0,t^+)).$$

С. Н. Похожаев изучил задачу для эллиптических уравнений в пространстве Соболева [3]. Отметим также, что эта задача не вкладывается в общую теорию задач для параболических и эллиптических уравнений [4–7].

В настоящей работе будет доказана однозначная разрешимость задачи Г. Аманна в пространствах Гельдера для $t \le T_0$, получены оценки решения, установлена гладкость функции φ по t (§3). В §2 изучена линеаризованная задача, а в §4 – модельные линейные задачи.

Будем использовать следующие обозначения. Пусть $\Omega \in R^n$ – ограниченная область с границей S, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = S \times [0,T]$. Обозначим $\mathcal{C} = \{c_{ri}\}_{\substack{1\le r\le N\\ 1\le i\le n}}$, $K_{N,n} = \{\mathcal{C} | |c_{ri}| < d_1,\ c_{ri} \in R^1,\ i = 1,\dots,n,$

$r{=}1,\dots,N\}$, $K_N{=}\{p{=}(p_1,\dots,p_N)\,|d_2{<}|p_r|{<}d_1,\ p_r{\in}R^1,\ r{=}1,\dots,N\}$, d_1, d_2 – положительные постоянные. Пусть $a = (a_1,\dots,a_N)$ – вектор-строка, $b^T = \mathrm{colon}(b_1,\dots,b_N)$ – вектор-столбец, $a^T b = \{a_r b_s\}_{1\le r,s\le N}$ – квадратная матрица, $a\,b^T = a_1 b_1 + \dots + a_N b_N$. Пусть E – единичная $N\times N$матрица, $A(x,t,u) = \{a_{rs}\}_{1\le r,s\le N}$; A^{-1} – обратная матрица, A^T – транспонированная матрица, $m(x,t,u) = (m_1,\dots,m_N)$, $f(x,t,u,\partial_x u) = (f_1,\dots,f_N)$, $\partial_x u = \{\partial_{x_i} u_r\}_{\substack{1\le r\le N\\ 1\le i\le n}}$, $g(x,t,u,\varphi) = (g_1,\dots,g_N)$, $u_0(x) = (u_{01},\dots,u_{0N})$, $z = (z_1,\dots,z_N) \in R^N$, $z^2 = z_1^2 + \ldots + z_N^2 \ne 0$.

Рассмотрим задачу Г. Аманна. Требуется найти функции $u(x,t) = (u_1,\dots,u_N)$ и $\varphi(x,t)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\partial_t u^T - A(x,t,u)\,\Delta u^T - m^T(x,t,u)\Delta\varphi = f^T(x,t,u,\partial_x u) \quad \text{в} \quad \Omega_T, \tag{1.1}$$

$$z u^T = 0 \quad \text{в} \quad \overline{\Omega}_T, \tag{1.2}$$

начальным и краевым условиям

$$u|_{t=0} = u_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.3}$$

$$A(x,t,u)\partial_\nu u^T + m^T(x,t,u)\,\partial_\nu\varphi = g^T(x,t,u,\varphi) \quad \text{на} \quad S_T, \tag{1.4}$$

где ν – внешняя нормаль к поверхности S, коэффициенты матрицы A подчиняются условиям

$$\sum_{r,s=1}^N a_{rs}(x,t,p)\xi_r\xi_s \ge \mu_0\xi^2, \quad a_{rs} = a_{sr}, \tag{1.5}$$

$$\forall\xi\in R^N, \quad \forall(x,t,p)\in\Omega_T\times K_N, \quad \mu_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Задача (1.1)–(1.4) будет изучаться в пространствах Гельдера [5, 6].

Через $C_x^l(\overline{\Omega}_T)$, l – нецелое положительное число, будем обозначать пространство функций $u(x,t)$ с нормой

$$|u|^{(l)}_{x,\Omega_T} = \sum_{|m|\le[l]} |\partial_x^m u|_{\Omega_T} + \sum_{|m|=[l]} [\partial_x^m u]^{(\alpha)}_{x,\Omega_T},$$

где $\alpha = l - [l]$,

$$|f|_{\Omega_T} = \max_{(x,t)\in\overline{\Omega}_T} |f|, \quad [f]^{(\alpha)}_{x,\Omega} = \sup_{(x,t),(z,t)\in\overline{\Omega}_T} \frac{|f(x,t)-f(z,t)|}{|x-z|^\alpha}.$$

$C_{x\ t}^{l,\,l/2}(\overline{\Omega}_T)$ – пространство функций $u(x,t)$ с нормой

$$|u|_{\Omega_T}^{(l)} = \sum_{2k+|m|\le[l]} |\partial_t^k \partial_x^m u|_{\Omega_T} +$$

$$+ \sum_{2k+|m|=[l]} \left([\partial_t^k \partial_x^m u]_{x,\Omega_T}^{(\alpha)} + [\partial_t^k \partial_x^m u]_{t,\Omega_T}^{(\alpha/2)} \right) + \sum_{2k+|m|=[l]-1} [\partial_t^k \partial_x^m u]_{t,\Omega_T}^{((1+\alpha)/2)},$$

при $[l] = 0$ последнее слагаемое в норме отсутствует. Здесь

$$[f]_{t,\Omega_T}^{(\alpha)} = \sup_{(x,t),(x,\tau)\in\overline{\Omega}_T} \frac{|f(x,t) - f(x,\tau)|}{|t-\tau|^\alpha}.$$

$C_t^\alpha(\overline{\Omega}_T)$, $\alpha \in (0,1)$, – пространство функций $u(x,t)$ с нормой

$$|u|_{t,\Omega_T}^{(\alpha)} = |u|_{\Omega_T} + [u]_{t,\Omega_T}^{(\alpha)}.$$

$C_{x\ t}^{l,\,l/2}(\overline{\Omega}_T;\, R^N)$ – пространство функций $u(x,t) = (u_1, \ldots, u_N)$ с нормой

$$|u|_{C_{x\ t}^{l,\,l/2}(\overline{\Omega}_T; R^N)} = \sum_{r=1}^N |u_r|_{\Omega_T}^{(l)}.$$

$\overset{\circ}{C}{}_{x\ t}^{l,\,l/2}(\overline{\Omega}_T)$, $\overset{\circ}{C}{}_{x\ t}^{l,\,l/2}(\overline{\Omega}_T;\, R^N)$ и $\overset{\circ}{C}{}_x^l(\overline{\Omega}_T)$, $\overset{\circ}{C}{}_t^\alpha(\overline{\Omega}_T)$ – пространства функций, принадлежащих пространствам $C_{x\ t}^{l,\,l/2}(\overline{\Omega}_T)$, $C_{x\ t}^{l,\,l/2}(\overline{\Omega}_T;\, R^N)$ и $C_x^l(\overline{\Omega}_T)$, $C_t^\alpha(\overline{\Omega}_T)$ и удовлетворяющих условиям $\partial_t^k u\ |_{t=0} = 0$, $2k \le [l]$, и $u|_{t=0} = 0$, соответственно.

Найдем функцию $\varphi(x,0)$. Для этого продифференцируем уравнение (1.2) по t:

$$z\partial_t u^T = 0 \quad \text{в} \quad \overline{\Omega}_T, \tag{1.6}$$

умножим слева обе части уравнения (1.1) и условия (1.4) на вектор z

$$z\partial_t u^T - zA\,\Delta u^T - zm^T \Delta\varphi = zf^T \quad \text{в} \quad \Omega_T, \tag{1.7}$$

$$zA\partial_\nu u^T + zm^T\,\partial_\nu \varphi = zg^T \quad \text{на} \quad S_T. \tag{1.8}$$

Положив $t = 0$ в (1.7), (1.8) и приняв во внимание, что первое слагаемое в (1.7) равно нулю в силу (1.6), мы получим для функции $\varphi_0(x) = \varphi(x,0)$ уравнение Пуассона

$$\Delta\,\varphi_0 = f_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega \tag{1.9}$$

с квазилинейным граничным условием

$$\partial_\nu \varphi_0 - G_0(x, \varphi_0) = p_0(x) \quad \text{на} \quad S, \tag{1.10}$$

где

$$\begin{aligned} f_0 = &- \frac{1}{\kappa_0(x)} zA(x, 0, u_0(x))\Delta u_0^T(x) \\ &- \frac{1}{\kappa_0(x)} zf^T(x, 0, u_0(x), \partial_x u_0(x)), \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$p_0(x) = -\frac{1}{\kappa_0(x)} zA(x, 0, u_0(x))\partial_\nu u_0^T(x), \tag{1.12}$$

$$G_0(x, \varphi_0) = \frac{1}{\kappa_0(x)}\, z\, g^T(x, 0, u_0(x), \varphi_0(x)),$$

$$\kappa_0(x) = zm^T(x, 0, u_0(x)) \neq 0 \quad \text{в} \quad \overline{\Omega}.$$

Справедлива лемма [2, 5, 7].

Лемма 1.1. *Пусть* $S \in C^{2+\alpha}$, $G_0(x, q) \in C^3(R^1; C^{1+\alpha}(S))$. *Предположим, что*

$$|\kappa_0(x)| \geq d_3, \ \forall\, x \in \overline{\Omega}, \quad \partial_q G_0(x, q) \leq -d_4 \quad \forall x \in S, \quad q \in R^1,$$

$$d_3, \ d_4 = \mathrm{const} > 0.$$

Тогда для любых функций $f_0 \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $p_0 \in C^{1+\alpha}(S)$ *задача* (1.9), (1.10) *имеет единственное решение* $\varphi_0(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *и оно удовлетворяет оценке*

$$|\varphi_0|_\Omega^{(2+\alpha)} \leq c_1 \Big(|f_0|_\Omega^{(\alpha)} + |p_0|_S^{(1+\alpha)} \Big). \tag{1.13}$$

Следствие 1.1. *В условиях теоремы* 1.1 *(см. далее) имеет место оценка*

$$|\varphi_0|_\Omega^{(2+\alpha)} \leq c_2 \sum_{r=1}^{N} |u_{0r}|_\Omega^{(2+\alpha)}. \tag{1.14}$$

Эта оценка выводится из неравенства (1.13) с привлечением формул (1.11), (1.12).

Определим необходимые условия согласования задачи (1.1)–(1.4). Условия согласования нулевого порядка вытекают из уравнения (1.2) и условия (1.4) при $t = 0$:

$$zu_0^T(x) = 0 \quad \text{на} \quad S, \tag{1.15}$$

$$\sum_{s=1}^{N} a_{rs}(x,0,u_0(x))\partial_\nu u_{0s}(x) + m_r(x,0,u_0(x))\,\partial_\nu\varphi_0(x) =$$

$$= g_r(x,0,u_0(x),\varphi_0(x)) \quad \text{на} \quad S, \quad r = 1,\dots,N. \tag{1.16}$$

После подстановки вектора $\partial_t u^T\,|_{t=0}$, выраженного из уравнения (1.1), в уравнение (1.6) мы получим условие согласования первого порядка

$$zA(x,0,u_0(x))\Delta u_0^T(x) + \kappa_0(x)\,\Delta\varphi_0(x) +$$

$$+ zf^T(x,0,u_0(x),\partial_x u_0(x)) = 0 \quad \text{на} \quad S. \tag{1.17}$$

Мы установили $N+2$ условия согласования (1.15)–(1.17), но в действительности их N, т.к. условие (1.17) есть уравнение (1.9) для функции $\varphi_0(x)$, а граничное условие (1.10) для нее является линейной комбинацией N условий (1.16). Мы определили φ_0 как решение задачи (1.9), (1.10) для любых функций $u_{0r}(x)$, значит, условия (1.9) (1.17), (1.10) выполнены. Далее, $z_1^2+\ldots+z_N^2 \neq 0$, тогда найдется $z_{r_0} \neq 0$. Из N условий (1.16) возьмем в качестве необходимых условий согласования условия с $r = 1,\dots,r_0-1,r_0+1,\dots,N$, а условие с $r = r_0$ будет следовать из них и из условия (1.10).

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 1.1. *Пусть* $S \in C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$. *Предположим, что*
$a_{rs}(x,t,p),\ m_r(x,t,p) \in C^3(\overline{K}_N;\, C_x^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}{}_t(\overline{\Omega}_T))$;
$f_r(x,t,p,\mathcal{C}) \in C^2(\overline{K}_N \times \overline{K}_{N,n};\, C_x^{\alpha,\alpha/2}{}_t(\overline{\Omega}_T))$;
$g_r(x,t,p,q) \in C^4(\overline{K}_N \times [0,d_0];\, C_x^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}{}_t(\overline{\Omega}_T))$,
$d_0 = \mathrm{const} > 0$, $r,\ s = 1,\dots,N$.

Пусть

(1) $\delta_1 \le u_{0r}(x) \le \delta_2 < 1$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, $r = 1,\dots,N$, δ_1, δ_2 – *положительные константы;*

(2) $z = (z_1,\dots,z_N) \in R^N$, $z^2 = z_1^2+\ldots+z_N^2 \neq 0$;

(3) $|\kappa(x,t,p)| = \left|\sum\limits_{r=1}^{N} z_r\, m_r(x,t,p)\right| \geq d_5 = \mathrm{const} > 0,$
$\forall (x,t,p) \in \overline{\Omega}_T \times \overline{K}_N$;

(4) $|\text{æ}(x,t,p,q)| \geq d_6 = \mathrm{const} > 0$, $\forall (x,t,p,q) \in \overline{\Omega}_T \times \overline{K}_N \times [0, d_0]$, *где*

$$\text{æ} = z\, A^{-1}(x,t,p)\left(E - \frac{m^T(x,t,p)\, z}{\kappa(x,t,p)}\right) \partial_q\, g^T(x,t,p,q)$$

$(\partial_q\, g^T \neq c(x,t) m^T$, c *– произвольная скалярная функция).*

Тогда для любых функций $u_{0r}(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $r = 1, \ldots, N$, *удовлетворяющих* N *условиям согласования* (1.15)–(1.17), *существует* $T_0 \in (0, T]$ *такое, что задача* (1.1)–(1.4) *имеет единственное решение*

$u_r \in C_{x\ \ t}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_{T_0})$,

$\varphi_1 = \varphi(x,t) - \varphi_0(x) \in \overset{\circ}{C}{}_x^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_{T_0})$,

$\Delta\varphi_1 \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{\alpha, \alpha/2}(\overline{\Omega}_{T_0})$,

$\varphi_1|_S$, $\partial_\nu \varphi_1|_S \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ \ \ t}^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}(S_{T_0})$, *и справедлива оценка*

$$\sum_{r=1}^{N} |u_r|_{\Omega_t}^{(2+\alpha)} + |\varphi_1|_{x,\Omega_t}^{(2+\alpha)} + |\Delta\varphi_1|_{\Omega_t}^{(\alpha)} + |\varphi_1|_{S_t}^{(1+\alpha)} + |\partial_\nu \varphi_1|_{S_t}^{(1+\alpha)} \leq$$

$$\leq c_3 \left(\sum_{r=1}^{N} |u_{0r}|_{\Omega}^{(2+\alpha)} + |\varphi_0|_{\Omega}^{(2+\alpha)}\right) \leq c_4 \sum_{r=1}^{N} |u_{0r}|_{\Omega}^{(2+\alpha)}, \quad \forall t \leq T_0. \quad (1.18)$$

Здесь $\varphi_0 = \varphi(x, 0)$ *– решение задачи* (1.9), (1.10).

Кроме того, для любого компакта $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ *функции* $\varphi_1, \partial_x \varphi_1$ *принадлежат пространству* $\overset{\circ}{C}{}_t^{\alpha/2}(\overline{\Omega}'_{T_0})$, *вторые производные* $\partial_x^2 \varphi_1$ *– пространству* $\overset{\circ}{C}{}_t^{(\alpha-\beta)/2}(\overline{\Omega}'_{T_0})$ *и выполняется оценка*

$$[\varphi_1]_{t,\Omega'_t}^{(\alpha/2)} + [\partial_x \varphi_1]_{t,\Omega'_t}^{(\alpha/2)} + [\partial_x^2 \varphi_1]_{t,\Omega'_t}^{(\frac{\alpha-\beta}{2})} \leq$$

$$\leq c_5 \left(\sum_{r=1}^{N} |u_{0r}|_{\Omega}^{(2+\alpha)} + |\varphi_0|_{\Omega}^{(2+\alpha)}\right) \leq c_6 \sum_{r=1}^{N} |u_{0r}|_{\Omega}^{(2+\alpha)},$$

где $\beta \in (0, \alpha)$.

Замечание 1.1. 1. Вместо (1.5) можно взять более широкое условие, предположив, что все собственные значения матрицы

$A(x,t,p)$ положительны, и она может быть приведена к диагональному виду. Этому условию будут подчиняться, например, матрицы, удовлетворяющие условию (1.5), треугольные матрицы с различными положительными членами на главной диагонали. Кроме того, теорема 1.1 будет верна, если матрица A имеет вид $E - m^T z/\kappa$ и ее ранг равен $N-1$.

2. Если $\partial_q g^T = c(x,t)\, m^T$, где c – произвольная скалярная функция, то æ $= z\, A^{-1}(E - m^T z/\kappa)\, \partial_q\, g^T = c\, z\, A^{-1}(E - m^T z/\kappa)\, m^T = 0$, т.к. $\kappa = z\, m^T$.

3. При $N=1$, в силу условия $z^2 \neq 0$, из уравнения (1.2) следует, что функция u_1 равна нулю, и задача (1.1)–(1.4) становится краевой задачей для уравнения Пуассона относительно неизвестной функцией φ. Поэтому будем считать, что $N \geq 2$.

Сведем задачу (1.1)–(1.4) к задаче с нулевыми начальными данными. Заметим, что можно построить такие вспомогательные функции $V_1(x,t),\dots,V_N(x,t) \in C_{x\ \ t}^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(R^n_T)$, $R^n_T = R^n \times (0,T)$, что они будут удовлетворять условиям:

$$V_r\mid_{t=0} = \tilde{u}_{0r}(x) \in C^{2+\alpha}(R^n),$$

$$\partial_t\, V_r\mid_{t=0} = \sum_{s=1}^N \tilde{a}_{rs}(x,0,\tilde{u}_0(x))\Delta\tilde{u}_{0s} + \tilde{m}_r(x,0,\tilde{u}_0)\Delta\tilde{\varphi}_0 +$$

$$+\tilde{f}_r(x,0,\tilde{u}_0(x),\partial_x\tilde{u}_0(x)) \in C^\alpha(R^n), \quad r = 1,\dots,N,$$

где символ $\sim$ означает продолжение функции во все пространство R^n с сохранением класса, и их нормы будут подчиняться оценке

$$|V_r|^{(2+\alpha)}_{R^n_T} \leq c_7\left(\sum_{r=1}^N |u_{0r}|^{(2+\alpha)}_\Omega + |\varphi_0|^{(2+\alpha)}_\Omega\right) \leq c_8 \sum_{r=1}^N |u_{0r}|^{(2+\alpha)}_\Omega. \quad (1.19)$$

В задаче (1.1)–(1.4) произведем замену:

$$u_r = v_r(x,t) + V_r(x,t), \quad r = 1,\dots,N, \quad \varphi(x,t) = \varphi_1(x,t) + \varphi_0(x), \quad (1.20)$$

где v_r, φ_1 – новые неизвестные функции.

Граничную функцию $g_r(x,t,u,\varphi)$ представим в виде:

$$g_r(x,t;v+V,\,\varphi_1+\varphi_0) = g_r(x,t;V,\,\varphi_0) + \varphi_1\partial_{\varphi_0} g_r(x,t,V,\,\varphi_0) +$$

$$+g_r(x,t;v+V,\,\varphi_1+\varphi_0) - g_r(x,t;V,\,\varphi_1+\varphi_0) +$$

$$+\varphi_1 \int\limits_0^1 [\partial_{\varphi_0} g_r(x,t,V,\,\varphi_0+\lambda\varphi_1) - \partial_{\varphi_0} g_r(x,t,V,\,\varphi_0)]\,d\lambda,$$

где $v=(v_1,\ldots,v_N)$, $V=(V_1,\ldots,V_N)$.

После замены (1.20) мы получим задачу с неизвестными функциями $v_1,\ldots,v_N$, φ_1, удовлетворяющими нулевым начальным условиям:

$$\partial_t v^T - A(x,t,V)\,\Delta v^T - m^T(x,t,V)\Delta\varphi_1 =$$

$$= p^T(x,t) + P^T(x,t,v,\partial_x v,\Delta v,\Delta\varphi_1) \ \text{ в } \ \Omega_T, \tag{1.21}$$

$$z v^T = F(x,t) \ \text{ в } \ \overline{\Omega}_T, \tag{1.22}$$

$$A(x,t,V)\partial_\nu v^T + m^T(x,t,V)\,\partial_\nu\varphi_1 - G^T(x,t)\varphi_1 =$$

$$= q^T(x,t) + Q^T(x,t,v,\partial_\nu v,\varphi_1,\partial_\nu\varphi_1) \ \text{ на } \ S_T, \tag{1.23}$$

где $p=(p_1,\ldots,p_N)$, $P=(P_1,\ldots,P_N)$, $q=(q_1,\ldots,q_N)$, $Q=(Q_1,\ldots,Q_N)$, $G=(\partial_{\varphi_0} g_1(x,t,V,\varphi_0)\big|_S,\ldots,\partial_{\varphi_0} g_N(x,t,V,\varphi_0)\big|_S)$,

$$p_r(x,t) = -\partial_t V_r + \sum_{s=1}^N a_{rs}(x,t,V)\,\Delta\,V_s +$$

$$+ m_r(x,t,V)\,\Delta\,\varphi_0 + f_r(x,t,V,\partial_x V); \tag{1.24}$$

$$P_r(x,t,v,\partial_x v,\Delta v,\Delta\varphi_1) = \sum_{s=1}^N \Big(a_{rs}(x,t,v{+}V) - a_{rs}(x,t,V)\Big)\,\Delta\,(v_s{+}V_s) +$$

$$+ \Big(m_r(x,t,v+V) - m_r(x,t,V)\Big)\,\Delta\,(\varphi_1+\varphi_0) +$$

$$+ f_r(x,t,v+V,\partial_x v+\partial_x V) - f_r(x,t,V,\partial_x V); \tag{1.25}$$

$$F(x,t) = -\sum_{r=1}^N z_r\,V_r(x,t); \tag{1.26}$$

$$q_r(x,t) =$$

$$= g_r(x,t,V,\varphi_0) - \sum_{s=1}^N a_{rs}(x,t,V)\,\partial_\nu V_s - m_r(x,t,V)\,\partial_\nu\varphi_0\big|_S; \tag{1.27}$$

$$Q_r(x,t,v,\partial_\nu v,\varphi_1,\partial_\nu\varphi_1)=$$

$$=-\sum_{s=1}^{N}\Big(a_{rs}(x,t,v+V)-a_{rs}(x,t,V)\Big)\,\partial_\nu\,(v_s+V_s)-$$

$$-\Big(m_r(x,t,v+V)-m_r(x,t,V)\Big)\,\partial_\nu(\varphi_1+\varphi_0)+$$

$$+g_r(x,t,v+V,\varphi_1+\varphi_0)-g_r(x,t,V,\varphi_1+\varphi_0)+$$

$$+\varphi_1\int\limits_0^1[\partial_{\varphi_0}g_r(x,t,V,\,\varphi_0+\lambda\varphi_1)-\partial_{\varphi_0}g_r(x,t,V,\,\varphi_0)]\,d\lambda. \tag{1.28}$$

Заметим, что в силу условий согласования и способа построения функций $V_1,\dots,V_N,\varphi_0$ известные функции задачи p_r, F, q_r тоже удовлетворяют нулевым начальным условиям, более того, $p_r\in\overset{\circ}{C}{}^{\alpha,\alpha/2}_{x\ \ t}(\overline{\Omega}_T)$, $F\in\overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\ \ \ \ \ t}(\overline{\Omega}_T)$, $q_r\in\overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}_{x\ \ \ \ \ \ t}(S_T)$, $r=1,\dots,N$.

Преобразуем задачу (1.21)–(1.23) к эквивалентной.

Умножим слева уравнение (1.21) на вектор z, а граничное условие (1.23) на векторы z и zA^{-1}. Принимая во внимание, что $z\,\partial_t v^T=\partial_t F$, $z\partial_\nu v^T=\partial_\nu F$ на S_T, получаем

$$\Delta\varphi_1(x,t)=-\frac{1}{\kappa}zA\Delta v^T+\frac{1}{\kappa}\partial_t F-\frac{1}{\kappa}\,z\,(p^T+P^T)\quad\text{в}\quad\Omega_T,$$

$$\partial_\nu\varphi_1-\frac{1}{\kappa}z\,G^T\,\varphi_1=-\frac{1}{\kappa}\,z\,A\partial_\nu v^T+\frac{1}{\kappa}\,z\,(q^T+Q^T)\quad\text{на}\quad S_T, \tag{1.29}$$

$$z\,A^{-1}\,m^T\,\partial_\nu\varphi_1-z\,A^{-1}\,G^T\,\varphi_1=z\,A^{-1}\,(q^T+Q^T)-\partial_\nu F\quad\text{на}\quad S_T, \tag{1.30}$$

где $\kappa(x,t,V)=z\,m^T\neq 0$. Заметим, что условия (1.29), (1.30) линейно независимы, т.к. второе из них получено при помощи уравнения (1.22), а условие (1.29) есть линейная комбинация компонент граничного условия (1.23).

Из условий (1.29) и (1.30) найдем φ_1 на S_T:

$$\varphi_1=-\frac{1}{æ}z\,A^{-1}\,\frac{m^T\,z}{\kappa}\,A\partial_\nu v^T-$$

$$-\frac{1}{æ}\,z\,A^{-1}\Big(E-\frac{m^T\,z}{\kappa}\Big)(q^T+Q^T)+\frac{1}{æ}\partial_\nu F\quad\text{на}\quad S_T,$$

где $æ(x,t,V,\varphi_0) = z\,A^{-1}(E - m^T z/\kappa)\,G^T \neq 0$ на S_T.

Подставим производную $\partial_\nu \varphi_1$ из (1.29) в граничное условие (1.23):

$$\left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right) A\,\partial_\nu v^T - \left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right) G^T \varphi_1 = \\ = \left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right)(q^T + Q^T) \quad \text{на} \quad S_T, \tag{1.31}$$

$\Delta\varphi_1$ – в уравнение (1.21), а φ_1 – в граничное условие (1.31). Тогда задача (1.21)–(1.23) приобретет вид:

$$\partial_t v^T - \left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right) A\Delta v^T = \\ = \frac{m^T}{\kappa}\,\partial_t F + \left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right)(p^T + P^T) \quad \text{в} \quad \Omega_T, \tag{1.32}$$

$$z\,v^T = F \quad \text{в} \quad \overline{\Omega}_T, \tag{1.33}$$

$$\left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right)\left[E + \frac{1}{æ}\,G^T\,z\,A^{-1}\,\frac{m^T z}{\kappa}\right] A\,\partial_\nu v^T = \\ = \left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right)\left[\frac{1}{æ}\,G^T\,\partial_\nu F + \left(E - \frac{1}{æ}\,G^T\,z\,A^{-1}\left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right)\right)\times \right. \\ \left. \times (q^T + Q^T)\right] \quad \text{на} \quad S_T, \tag{1.34}$$

$$\Delta\varphi_1 = -\frac{1}{\kappa}\,z\,A\,\Delta v^T + \frac{1}{\kappa}\partial_t\,F - \frac{1}{\kappa}z\,(p^T + P^T) \quad \text{в} \quad \Omega_T, \tag{1.35}$$

$$\partial_\nu\varphi_1 - \frac{1}{\kappa}\,z\,G^T\,\varphi_1 + \frac{1}{\kappa}\,z\,A\partial_\nu v^T = \frac{1}{\kappa}\,z\,(q^T + Q^T) \quad \text{на} \quad S_T, \tag{1.36}$$

$$\varphi_1 + \frac{1}{æ}\,z\,A^{-1}\,\frac{m^T z}{\kappa}\,A\,\partial_\nu v^T = \\ = -\frac{1}{æ}z\,A^{-1}\left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right)(q^T + Q^T) + \frac{1}{æ}\partial_\nu F \quad \text{на} \quad S_T. \tag{1.37}$$

Отметим, что в задаче (1.32)–(1.37) функции P и Q являются нелинейными. Граничное условие (1.34) содержит $N-1$ линейно независимых условий, т.к. ранг матрицы $E - m^T z/\kappa$, являющейся проектором, равен $N-1$. Кроме того, как видно из уравнения

(1.33), одна из неизвестных функций $v_1, \dots, v_N$, в силу условия $z^2 \neq 0$, линейно зависит от остальных.

Задачу (1.32)–(1.37) представим в операторной форме:

$$K\, w^T = h^T + N\, w^T, \tag{1.38}$$

где $w = (v_1, \dots, v_N, \varphi)$; линейный оператор K определяется операторами в левых частях уравнений и условий; h – заданный вектор, выражающийся через функции p, F, q; $N w^T$ содержит нелинейные функции P_r, Q_r, $r = 1, \dots, N$.

2. Линейная задача

Рассмотрим задачу (1.32)–(1.37) с $P = (0, \dots, 0)$, $Q = (0, \dots, 0)$. Требуется найти функции $u(x,t) = (u_1, \dots, u_N)$, $\varphi(x,t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$L(x,t,\partial_x,\partial_t)\, u^T := \partial_t u^T - \left(E - \frac{m^T(x,t)\, z}{\kappa(x,t)}\right) A(x,t)\Delta u^T =$$

$$= \frac{m^T(x,t)}{\kappa(x,t)}\, \partial_t F(x,t) + \left(E - \frac{m^T(x,t)\, z}{\kappa(x,t)}\right) f^T(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega_T, \tag{2.1}$$

$$z u^T = F(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega_T, \tag{2.2}$$

а также начальным и краевым условиям

$$u_r|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, r = 1, \dots, N, \tag{2.3}$$

$$B(x,t)\partial_\nu u^T := \left(E - \frac{m^T(x,t)\, z}{\kappa(x,t)}\right) \times$$

$$\times \left[E + \frac{1}{æ(x,t)}\, G^T(x,t) z A^{-1}(x,t) \frac{m^T(x,t) z}{\kappa(x,t)}\right] A(x,t)\partial_\nu u^T =$$

$$= \left(E - \frac{m^T(x,t) z}{\kappa(x,t)}\right) q^T(x,t) \quad \text{на} \quad S_T, \tag{2.4}$$

$$\Delta\varphi(x,t) = b(x,t)\Delta u^T + f_0(x,t) \text{ в } \Omega_T, \tag{2.5}$$

$$\varphi|_{t=0} = 0, \tag{2.6}$$

$$\partial_\nu \varphi - d_0(x,t)\, \varphi = d(x,t)\, \partial_\nu u^T + q_0(x,t) \quad \text{на} \quad S_T, \tag{2.7}$$

$$\varphi = l(x,t)\, \partial_\nu u^T + p_0(x,t) \quad \text{на} \quad S_T, \tag{2.8}$$

при этом коэффициенты матрицы A подчиняются соотношениям

$$\sum_{r,s=1}^{N} a_{rs}(x,t)\xi_r\xi_s \geq \mu_0\xi^2, \quad a_{rs} = a_{sr} \quad \text{для} \quad \forall\xi \in R^N, \quad \forall(x,t) \in \Omega_T;$$

E – единичная матрица; A^{-1} – обратная матрица; $f = (f_1, \dots, f_N)$, $G = (G_1, \dots, G_N)$, $q = (q_1, \dots, q_N)$, $b = (b_1, \dots, b_N)$, $m = (m_1, \dots, m_N)$, $d = (d_1, \dots, d_N)$, $l = (l_1, \dots, l_N)$ – вектор-функции; $z = (z_1, \dots, z_N) \in R^N$, $z^2 \neq 0$; $\kappa = z\,m^T \neq 0$ в $\overline{\Omega}_T$, æ $= z\,A^{-1}\left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right)G^T \neq 0$ на S_T.

Теорема 2.1. *Пусть* $S \in C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$. *Предположим, что* $b_r \in C_{x\ t}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$; a_{rs}, m_r, G_r, d_0, d_r, $l_r \in C_{x\ t}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T)$, r, $s = 1, \dots, N$; $|\kappa| \geq d_7 = \mathrm{const} > 0$ *в* $\overline{\Omega}_T$; $|$æ$| \geq d_7$ *на* S_T.

Тогда для любых функций $f_r \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ t}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, $F \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, q_r, $p_0 \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ t}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(S_T)$, $r = 0, 1, \dots, N$, *существует* $T_1 \in (0,T]$ *такое, что задача* (2.1)–(2.8) *имеет единственное решение*

$u_r \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_{T_1})$, $r = 1, \dots, N$, $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}_{x}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_{T_1})$,

$\Delta\varphi \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ t}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_{T_1})$; $\varphi|_S$, $\partial_\nu\varphi|_S \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ t}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(S_{T_1})$, *и оно удовлетворяет неравенствам*

$$||u||_t := |u|_{C_{x\ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_t;R^N)} \equiv \sum_{r=1}^{N} |u_r|_{\Omega_t}^{(2+\alpha)} \leq$$

$$\leq c_1\left(\left|\left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right)f^T\right|_{C_{x\ t}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_t;R^N)} +\right.$$

$$\left. + \left|\left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right)q^T\right|_{C_{x\ t}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(S_t;R^N)} + |F|_{\Omega_t}^{(2+\alpha)}\right) \leq$$

$$\leq c_2\left(\sum_{r=1}^{N}(|f_r|_{\Omega_t}^{(\alpha)} + |q_r|_{S_t}^{(1+\alpha)}) + |F|_{\Omega_t}^{(2+\alpha)}\right), \quad \forall\, t \leq T_1, \tag{2.9}$$

$$|\varphi|_{x,\Omega_t}^{(2+\alpha)} + |\Delta\varphi|_{\Omega_t}^{(\alpha)} + |\varphi|_{S_t}^{(1+\alpha)} + |\partial_\nu\varphi|_{S_t}^{(1+\alpha)} \leq$$

$$\leq c_3\left(\left|\left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right)f^T\right|_{C_{x\ t}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_t;R^N)} +\right.$$

$$+\left|\left(E-\frac{m^T z}{\kappa}\right)q^T\right|_{C_x^{1+\alpha,}{}_t^{(1+\alpha)/2}(S_t;R^N)}+|F|_{\Omega_t}^{(2+\alpha)}+$$

$$+|f_0|_{\Omega_t}^{(\alpha)}+|q_0|_{S_t}^{(1+\alpha)}+|p_0|_{S_t}^{(1+\alpha)}\Bigg)\leq$$

$$\leq c_4\left(\sum_{r=0}^{N}(|f_r|_{\Omega_t}^{(\alpha)}+|q_r|_{S_t}^{(1+\alpha)})+|p_0|_{S_t}^{(1+\alpha)}+|F|_{\Omega_t}^{(2+\alpha)}\right),\quad \forall\, t\leq T_1. \quad (2.10)$$

Кроме того, для $\forall\beta\in(0,\alpha)$ *и для любого компакта* $\overline{\Omega}'\in\Omega$ *функция* φ *и ее первые производные* $\partial_x\varphi$ *принадлежат пространству* $\overset{\circ}{C}{}_t^{\alpha/2}(\overline{\Omega}'_{T_1})$*, вторые производные* $\partial_x^2\varphi$ *– пространству* $\overset{\circ}{C}{}_t^{(\alpha-\beta)/2}(\overline{\Omega}'_{T_1})$*, и выполняется оценка*

$$[\varphi]_{t,\Omega'_t}^{(\alpha/2)}+[\partial_x\varphi]_{t,\Omega'_t}^{(\alpha/2)}+[\partial_x^2\varphi]_{t,\Omega'_t}^{(\frac{\alpha-\beta}{2})}\leq$$

$$\leq c_5\Bigg(\left|(E-\frac{m^T z}{\kappa})f^T\right|_{C_x^{\alpha,}{}_t^{\alpha/2}(\overline{\Omega}_t;R^N)}+\left|(E-\frac{m^T z}{\kappa})q^T\right|_{C_x^{1+\alpha,}{}_t^{(1+\alpha)/2}(S_t;R^N)}+$$

$$+|F|_{\Omega_t}^{(2+\alpha)}+|f_0|_{\Omega_t}^{(\alpha)}+|q_0|_{S_t}^{(1+\alpha)}+|p_0|_{S_t}^{(1+\alpha)}\Bigg)\leq$$

$$\leq c_6\left(\sum_{r=0}^{N}(|f_r|_{\Omega_t}^{(\alpha)}+|q_r|_{S_t}^{(1+\alpha)})+|p_0|_{S_t}^{(1+\alpha)}+|F|_{\Omega_t}^{(2+\alpha)}\right),\quad \forall\, t\leq T_1. \quad (2.11)$$

Заметим, что задача (2.1)–(2.8) неразрешима, если в правых частях уравнения (2.1) и граничного условия (2.4) будут стоять векторы f^T, q^T вместо векторов $(E-m^T z/\kappa)f^T$, $(E-m^T z/\kappa)q^T$ соответственно. Теорема 2.1 остается справедливой, если $A=E-m^T z/\kappa$, т.к. $(E-m^T z/\kappa)^2=E-m^T z/\kappa$. В этом случае $rkA=N-1$.

Рассмотрим параболическую задачу (2.1)–(2.4). Докажем существование ее решения методом продолжения по параметру. Для этого сначала установим оценку решения (2.9) и разрешимость задачи (2.1)–(2.4) с постоянными коэффициентами.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *и задача* (2.1)–(2.4) *имеет решение* $u_r\in\overset{\circ}{C}{}_x^{2+\alpha,}{}_t^{1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_{T_1})$*,* $r=1,\ldots,N$*. Тогда оно удовлетворяет оценке* (2.9).

Доказательство. Пусть ξ_0 – произвольная точка в $\overline{\Omega}$. Рассмотрим шары B_λ и $B_{2\lambda}$ с радиусами λ и 2λ и общим центром в точке ξ_0. Обозначим через $\zeta_\lambda(x)$ гладкую функцию, равную 1 внутри шара B_λ и 0 вне шара $B_{2\lambda}$, и такую, что $|\partial^\alpha \zeta_\lambda| \le c_\alpha \lambda^{-|\alpha|}$.

Положим:

$$u_\lambda = (u_{1,\lambda}, \dots, u_{N,\lambda}) = \zeta_\lambda u, \quad u_{r,\lambda} = \zeta_\lambda\, u_r \tag{2.12}$$

и продолжим функции $u_{r,\lambda}$ нулем вне шара $B_{2\lambda}$.

Допустим сначала, что шар B_λ целиком содержится в Ω. Умножим обе части уравнения (2.1) на $\zeta_\lambda(x)$, тогда после несложных преобразований с учетом формул

$$\left(E - \frac{m^T(\xi_0,0)z}{\kappa(\xi_0,0)}\right)\left(E - \frac{m^T(x,t)z}{\kappa(x,t)}\right) = E - \frac{m^T(x,t)z}{\kappa(x,t)}, \tag{2.13}$$

$$\left(E - \frac{m^T(\xi_0,0)z}{\kappa_0(\xi_0,0)}\right)\left(E - \frac{m^T(\xi_0,0)z}{\kappa(\xi_0,0)}\right) =$$

$$= E - \frac{m^T(\xi_0,0)z}{\kappa(\xi_0,0)} \quad (\kappa = zm^T) \tag{2.14}$$

мы получим для функций (2.12) задачу Коши

$$\partial_t u_\lambda^T - \left(E - \frac{m^T(\xi_0,0)z}{\kappa(\xi_0,0)}\right) A(\xi_0,0)\Delta u_\lambda^T =$$

$$= \zeta_\lambda(x)\frac{m^T(x,t)}{\kappa(x,t)}\partial_t F(x,t) + \zeta_\lambda(x)\left(E - \frac{m^T(x,t)z}{\kappa(x,t)}\right) f^T(x,t) +$$

$$+ \left(E - \frac{m^T(\xi_0,0)z}{\kappa(\xi_0,0)}\right) P_{1,\lambda}^T \equiv \zeta_\lambda\, \frac{m^T}{\kappa}\partial_t F +$$

$$+ \left(E - \frac{m^T(\xi_0,0)z}{\kappa(\xi_0,0)}\right)\left[\zeta_\lambda \left(E - \frac{m^T(x,t)z}{\kappa(x,t)}\right) f^T + P_{1,\lambda}^T\right]$$

$$\text{в} \quad R_T^n = R^n \times (0,T), \tag{2.15}$$

$$u_{r,\lambda}|_{t=0} = 0, \quad r = 1, \dots, N, \quad \text{в} \quad R^n, \tag{2.16}$$

где

$$P_{1,\lambda}^T = -\left(E - \frac{m^T(x,t)z}{\kappa(x,t)}\right) A(x,t)\left(u^T\, \Delta\zeta_\lambda + 2\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\zeta_\lambda\, \partial_{x_i} u^T\right) -$$

$$-\left(\frac{m^T(x,t)z}{\kappa(x,t)}-\frac{m^T(\xi_0,0)z}{\kappa(\xi_0,0)}\right)A(x,t)\,\Delta u_\lambda^T+(A(x,t)-A(\xi_0,0))\,\Delta u_\lambda^T,$$

а функции в правых частях уравнения (2.15) продолжены нулем во все пространство R^n.

Задача (2.15), (2.16) есть задача Коши (4.5), (4.6). Согласно теореме 4.2 (см. далее) задача (2.15), (2.16) имеет единственное решение $u_{r,\lambda}\in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(R_T^n)$, $r=1,\dots,N$, и оно подчиняется оценке (4.8):

$$\sum_{r=1}^N |u_{r,\lambda}|_{R_T^n}^{(2+\alpha)}\le c_7\Biggl(\left|\zeta_\lambda(E-\frac{m^Tz}{\kappa})f^T\right|_{C_{x\ \ t}^{\alpha,\alpha/2}(R_T^n;R^N)}+$$

$$+|\zeta_\lambda F|_{R_T^n}^{(2+\alpha)}+|P_{1,\lambda}^T|_{C_{x\ \ t}^{\alpha,\alpha/2}(R_T^n;R^N)}\Biggr). \tag{2.17}$$

Пусть теперь шар B_λ пересекает границу S. Перенесем начало координат в точку $\xi_0'\in B_\lambda\cap S$ так, чтобы ось $\overline{y}_n$ местной системы координат $\{\overline{y}\}$ совпадала с нормалью ν к поверхности S в точке ξ_0' и была направлена внутрь Ω. Выберем величину λ такой малой, чтобы в окрестности точки ξ_0' поверхность S можно было задать уравнением $\overline{y}_n=\mu(\overline{y}')$. Так как $S\in C^{2+\alpha}$, то существует такая постоянная $M>0$, что $|\mu|_{K_d}^{(2+\alpha)}\le M$, где K_d – круг радиуса $d\le 2\lambda$ на плоскости $\overline{y}_n=0$ с центром в начале координат ξ_0'. При этом

$$\mu(0)=0,\quad \nabla\mu(0)=0,\quad |\partial_{\overline{y}'}\mu|\le M\,|\overline{y}'|,\quad \overline{y}'\in K_d. \tag{2.18}$$

Продолжим функцию $\mu(\overline{y}')$ в R^{n-1} с сохранением класса. Затем произведем замену переменных

$$y'=\overline{y}',\quad y_n=\overline{y}_n-\mu(\overline{y}'). \tag{2.19}$$

Пусть $y=Y(x)$ – преобразование координат, состоящее из параллельного переноса, вращения и замены (2.19). Тогда для вектора

$$v_\lambda(y,t)=u_\lambda(x,t)|_{x=Y^{-1}(y)}=\zeta_\lambda(x)u(x,t)|_{x=Y^{-1}(y)}$$

мы получим задачу в полупространстве $y_n>0$

$$\partial_t v_\lambda^T-\left(E-\frac{m^T(\xi_0,0)z}{\kappa(\xi_0,0)}\right)A(\xi_0,0)\Delta v_\lambda^T=$$

$$= \zeta_\lambda(x)\,\frac{m^T(x,t)}{\kappa(x,t)}\partial_t F(x,t)|_{x=Y^{-1}(y)} + \left(E - \frac{m^T(\xi_0,0)z}{\kappa(\xi_0,0)}\right)\times$$

$$\times\left[\zeta_\lambda(x)\left(E - \frac{m^T(x,t)z}{\kappa(x,t)}\right)f^T(x,t)\Big|_{x=Y^{-1}(y)} +\right.$$

$$\left. + P^T_{1,\lambda}\Big|_{x=Y^{-1}(y)} + P^T_{2,\lambda}\right] \quad \text{в} \quad D_T, \tag{2.20}$$

$$z v^T_\lambda|_{t=0} = \zeta_\lambda F(x,t)|_{x=Y^{-1}(y)} \ \text{в} \ D_T, \tag{2.21}$$

$$\left(E - \frac{m^T(\xi_0',0)z}{\kappa(\xi_0',0)}\right)\times$$

$$\times\left[E + \frac{1}{æ(\xi_0',0)}\,G^T(\xi_0',0)\,z\,A^{-1}(\xi_0',0)\frac{m^T(\xi_0',0)z}{\kappa(\xi_0',0)}\right]A(\xi_0',0)\partial_{y_n}v^T_\lambda =$$

$$= -\left(E - \frac{m^T(\xi_0',0)z}{\kappa(\xi_0',0)}\right)\times$$

$$\times\left[\zeta_\lambda(x)\left(E - \frac{m^T(x,t)z}{\kappa(x,t)}\right)q^T(x,t)\Big|_{x=Y^{-1}(y)} - Q^T_\lambda\right] \quad \text{на} \quad R_T, \tag{2.22}$$

где $D_T = R^n_+ \times (0,T)$, R – плоскость $y_n = 0$, $R_T = R^{n-1} \times [0,T]$,

$$P^T_{2,\lambda} = -A(\xi_0',0)\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left(\partial^2_{y_\alpha}\mu\partial_{y_n}v^T_\lambda + 2\partial_{y_\alpha}\mu\partial^2_{y_\alpha y_n}v^T_\lambda - \partial^2_{y_n}v^T(\partial_{y_\alpha}\mu)^2\right);$$

$$Q^T_\lambda = -\left(E - \frac{m^T(x,t)\,z}{\kappa(x,t)}\right)\times$$

$$\times\left[E + \frac{1}{æ(x,t)}\,G^T(x,t)zA^{-1}(x,t)\frac{m^T(x,t)z}{\kappa(x,t)}\right]A(x,t)\,u^T\partial_\nu\zeta_\lambda\Big|_{x=Y^{-1}(y)} +$$

$$+\left\{\left(E - \frac{m^T(x,t)\,z}{\kappa(x,t)}\right)\left[E + \frac{1}{æ(x,t)}\,G^T(x,t)zA^{-1}(x,t)\frac{m^T(x,t)z}{\kappa(x,t)}\right]A(x,t) -\right.$$

$$-\left(E - \frac{m^T(\xi_0',0)z}{\kappa(\xi_0',0)}\right)\left[E + \frac{1}{æ(\xi_0',0)}\,G^T(\xi_0',0)\,z\,A^{-1}(\xi_0',0)\frac{m^T(\xi_0',0)z}{\kappa(\xi_0',0)}\right]\times$$

$$\left.\times A(\xi_0',0)\right\}\partial_\nu u^T_\lambda(x,t)\Big|_{x=Y^{-1}(y)} - \left(E - \frac{m^T(\xi_0',0)\,z}{\kappa(\xi_0',0)}\right)\times$$

$$\times\left[E+\frac{1}{\text{æ}(\xi_0',0)}\,G^T(\xi_0',0)zA^{-1}(\xi_0',0)\frac{m^T(\xi_0',0)z}{\kappa(\xi_0',0)}\right]A(\xi_0',0)\times$$

$$\times\left\{\left[1-\left(1+\sum_{\alpha=1}^{n-1}(\partial_{y_\alpha}\mu)^2\right)^{1/2}\right]\partial_{y_n}v_\lambda^T-\sum_{\alpha=1}^{n-1}\partial_{y_\alpha}\mu\partial_{y_\alpha}v_\lambda^T\right\}\times$$

$$\times\left(1+\sum_{\alpha=1}^{n-1}(\partial_{y_\alpha}\mu)^2\right)^{-1/2}.$$

Здесь мы воспользовались равенствами (2.13), (2.14). Все функции в уравнениях (2.20), (2.21) и условии (2.22) мы продолжили нулем в полупространство R_+^n и на плоскость $y_n=0$ соответственно.

Задача (2.20)–(2.22) есть задача (4.1)–(4.4). Для нее будет доказана теорема 4.1, в соответствии с которой она имеет единственное решение $v_{r,\lambda}\in \overset{\circ}{C}{}_{x}^{2+\alpha,}{}_{t}^{1+\alpha/2}(D_T)$, $r=1,\dots,N$, удовлетворяющее оценке (4.7)

$$\sum_{r=1}^N|v_{r,\lambda}|_{D_T}^{(2+\alpha)}\le c_8\Bigg[\ \Bigg|\left(\zeta_\lambda(E-\frac{m^Tz}{\kappa})f^T+P_{1,\lambda}^T\right)\Bigg|_{x=Y^{-1}(y)}+$$

$$+P_{2,\lambda}^T\Bigg|_{C_x^{\alpha,}{}_t^{\alpha/2}(D_T;R^N)}+|\zeta_\lambda F|_{x=Y^{-1}(y)}|_{D_T}^{(2+\alpha)}+$$

$$+\Bigg|\zeta_\lambda(E-\frac{m^Tz}{\kappa})q^T\Bigg|_{x=Y^{-1}(y)}+Q_\lambda^T\Bigg|_{C_x^{1+\alpha,}{}_t^{(1+\alpha)/2}(R_T;R^N)}\Bigg]. \tag{2.23}$$

Но тогда функция $u_{r,\lambda}(x,t)=v_{r,\lambda}(y,t)\ |_{y=Y(x)}$, $r=1,\dots,N$, принадлежит пространству $\overset{\circ}{C}{}_{x}^{2+\alpha,}{}_{t}^{1+\alpha/2}(\omega_{2\lambda,T})$ и

$$\sum_{r=1}^N|u_{r,\lambda}|_{\omega_{2\lambda,T}}^{(2+\alpha)}\le c_9\sum_{r=1}^N|v_{r,\lambda}|_{D_T}^{(2+\alpha)}\le$$

$$\le c_{10}\Bigg[\Bigg|\left(\zeta_\lambda(E-\frac{m^Tz}{\kappa})f^T+P_{1,\lambda}^T\right)\Bigg|_{x=Y^{-1}(y)}+P_{2,\lambda}^T\Bigg|_{C_x^{\alpha,}{}_t^{\alpha/2}(D_T;R^N)}+ \tag{2.24}$$

$$+|\zeta_\lambda F|_{D_T}^{(2+\alpha)}+\Bigg|\zeta_\lambda(E-\frac{m^Tz}{\kappa})q^T|_{x=Y^{-1}(y)}+Q_\lambda^T\Bigg|_{C_x^{1+\alpha,}{}_t^{(1+\alpha)/2}(R_T;R^N)}\Bigg],$$

где $\omega_{2\lambda,T}=(B_{2\lambda}\cap\Omega)\times(0,T)$.

Заметим, что $u_{r,\lambda} \equiv u_r\zeta_\lambda = u_r$ в $\omega_\lambda \equiv \{B_\lambda \cap \Omega\}$. Оценим функции $P^T_{1,\lambda}$, $P^T_{2,\lambda}$, Q^T_λ в (2.17) и (2.24), используя (2.18) и "интерполяционные неравенства"

$$|\partial_t^k \partial_x^m u|_{\Omega_T} \le \varepsilon^{l-2k-|m|}[u]^{(l)}_{\Omega_T} + c\varepsilon^{-2k-|m|}|u|_{\Omega_T},$$

$$[u]^{(s)}_{\Omega_T} \le \varepsilon^{l-s}[u]^{(l)}_{\Omega_T} + c\varepsilon^{-s}|u|_{\Omega_T},$$

где $0 < 2k + |m| < l$, $0 < s < l$, $\varepsilon > 0$. Выбрав λ и T_1 достаточно малыми, мы получим следующие оценки:

$$\sum_{r=1}^N |u_r|^{(2+\alpha)}_{\omega_{\lambda,t}} \le c_{11}\left(\left|\left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right)f^T\right|_{C_x^{\alpha},{}_t^{\alpha/2}(\overline{\omega}_{\lambda,t};R^N)} + |F|^{(2+\alpha)}_{\omega_{\lambda,t}}\right) +$$
$$+\varepsilon_1 \sum_{r=1}^N |u_r|^{(2+\alpha)}_{\omega_{\lambda,t}}, \quad 0 < \varepsilon_1 < 1,$$

если $B_\lambda \in \Omega$, и

$$\sum_{r=1}^N |u_r|^{(2+\alpha)}_{\omega_{\lambda,t}} \le c_{12}\left(\left|\left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right)f^T\right|_{C_x^{\alpha},{}_t^{\alpha/2}(\overline{\omega}_{\lambda,t};R^N)} + \right.$$
$$\left. |F|^{(2+\alpha)}_{\omega_{\lambda,t}} + \left|\left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right)q^T\right|_{C_x^{1+\alpha},{}_t^{(1+\alpha)/2}(s_{\lambda,t};R^N)}\right) + \varepsilon_2 \sum_{r=1}^N |u_r|^{(2+\alpha)}_{\omega_{\lambda,t}},$$
$$0 < \varepsilon_2 < 1,$$

если $B_\lambda \cap S \ne \phi$. Здесь $s_{\lambda,t} = (B_\lambda \cap S) \times [0,t]$, $\omega_{\lambda,t} = \omega_\lambda \times [0,t]$.

Отсюда мы получим требуемые оценки для функций u_r в области $\omega_{\lambda,t}$ при $t \le T_1$:

$$\sum_{r=1}^N |u_r|^{(2+\alpha)}_{\omega_{\lambda,t}} \le c_{13}\left(\left|\left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right)f^T\right|_{C_x^{\alpha},{}_t^{\alpha/2}(\overline{\omega}_{\lambda,t};R^N)} + |F|^{(2+\alpha)}_{\omega_{\lambda,t}}\right),$$
$$B_\lambda \in \Omega, \tag{2.25}$$

$$\sum_{r=1}^N |u_r|^{(2+\alpha)}_{\omega_{\lambda,t}} \le c_{14}\left(\left|\left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right)f^T\right|_{C_x^{\alpha},{}_t^{\alpha/2}(\overline{\omega}_{\lambda,t};R^N)} + |F|^{(2+\alpha)}_{\omega_{\lambda,t}} + \right.$$
$$\left. + \left|\left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right)q^T\right|_{C_x^{1+\alpha},{}_t^{(1+\alpha)/2}(s_{\lambda,t};R^N)}\right), \quad B_\lambda \cap S \ne \phi. \tag{2.26}$$

Покроем область Ω шарами $B_{\lambda,i}$ и получим оценки (2.25), (2.26) для каждого такого шара:

$$\sum_{r=1}^{N} |u_r|^{(2+\alpha)}_{\omega_{\lambda,i,t}} \le c_{15}\left(\left|(E-\frac{m^T z}{\kappa})f^T\right|_{C_x^{\alpha,\alpha/2}{}_t(\overline{\omega}_{\lambda,i,t};R^N)} + |F|^{(2+\alpha)}_{\omega_{\lambda,i,t}} + \right.$$

$$\left. + \left|(E-\frac{m^T z}{\kappa})q^T\right|_{C_x^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}{}_t(s_{\lambda,i,t};R^N)}\right), \tag{2.27}$$

где $\omega_{\lambda,i,t} = (B_{\lambda,i} \cap \Omega) \times (0,t)$, $s_{\lambda,i,t} = (B_{\lambda,i} \cap S) \times [0,t]$. В неравенстве (2.27) возьмем максимум по i. Тогда, учтя, что норма $\max_i |u_r|^{(2+\alpha)}_{\omega_{\lambda,i,t}}$ эквивалентна норме $|u_r|^{(2+\alpha)}_{\Omega_t}$[6], мы придем к оценке (2.9). □

Рассмотрим задачу (2.1)–(2.4) с постоянными коэффициентами

$$L_0 u^T := \partial_t u^T - \left(E - \frac{m_0^T z}{\kappa_0}\right) A_0 \Delta u^T = \frac{m^T(x,t)}{\kappa(x,t)}\,\partial_t F(x,t) +$$

$$+\left(E - \frac{m_0^T z}{\kappa_0}\right)\left(E - \frac{m^T(x,t)\,z}{\kappa(x,t)}\right) f^T(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega_T, \tag{2.28}$$

$$z u^T = F(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega_T, \tag{2.29}$$

$$u_r|_{t=0} = 0, \quad r = 1, \dots, N, \tag{2.30}$$

$$B_0 \partial_\nu u^T := \left(E - \frac{m_0^T z}{\kappa_0}\right)\left[E + \frac{1}{æ_0} G_0^T z A_0^{-1} \frac{m_0^T z}{\kappa_0}\right] A_0 \partial_\nu u^T =$$

$$= \left(E - \frac{m_0^T z}{\kappa_0}\right)\left(E - \frac{m^T(x,t) z}{\kappa(x,t)}\right) q^T(x,t) \quad \text{на} \quad S_T. \tag{2.31}$$

В правых частях уравнения (2.28) и граничного условия (2.31) мы записали произведения проекторов на основании равенства (2.13). Индекс 0 в (2.28), (2.31) означает, что κ_0, $æ_0$, векторы m_0, G_0 и матрица A_0 постоянны.

Лемма 2.2. *При выполнении условий теоремы* 2.1 *задача* (2.28)–(2.31) *имеет единственное решение* $u_r \in \overset{\circ}{C}{}_x^{2+\alpha,1+\alpha/2}{}_t(\Omega_{T_1})$, $r = 1, \dots, N$, *и оно удовлетворяет оценке* (2.9).

В п. 4 будет доказана теорема 4.1 для задачи (4.1)–(4.4) с постоянными коэффициентами в полупространстве $x_n > 0$. Как видно из доказательства этой теоремы, она остается справедливой и для задачи (2.28)–(2.31) в произвольной области Ω. Оценка решения (2.9) задачи (2.1)–(2.4) верна и для задачи (2.28)-(2.31) с постоянными коэффициентами. $\square$

Доказательство теоремы 2.1. Докажем существование решения задачи (2.1)–(2.4) при помощи метода продолжения по параметру.

Рассмотрим семейство задач

$$L_\lambda u^T := \lambda L u^T + (1-\lambda)\, L_0 u^T =$$

$$= \frac{m^T(x,t)}{\kappa_(x,t)}\partial_t F + \left(E - \frac{m^T(x,t)z}{\kappa(x,t)}\right) F^T \quad \text{в} \quad \Omega_{T_1}, \tag{2.32}$$

$$z\, u^T = F \quad \text{в} \quad \overline{\Omega}_{T_1}, \tag{2.33}$$

$$B_\lambda u^T := \lambda B \partial_\nu u^T + (1-\lambda)\, B_0 \partial_\nu u^T =$$

$$= \left(E - \frac{m^T(x,t)z}{\kappa(x,t)}\right) q^T \quad \text{на} \quad S_{T_1}, \tag{2.34}$$

где $\lambda \in [0,1]$, операторы L, L_0, B, B_0 определены в (2.1), (2.28), (2.4), (2.31).

Обозначим через Σ множество всех значений $\lambda \in [0,1]$, при которых задача (2.32)–(2.34) имеет решение $u \in \overset{\circ}{C}{}_{x}^{2+\alpha,}{}_{t}^{1+\alpha/2}(\Omega_{T_1}; R^N)$, удовлетворяющее оценке (2.9).

При $\lambda = 0$ задача (2.32)–(2.34) есть задача (2.28)–(2.31), для которой имеет место лемма 2.2.

Пусть $\lambda = \lambda_0 \in \Sigma$. Докажем, что λ_0 является внутренней точкой множества Σ, т.е. найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что интервал $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$ целиком содержится в Σ. Иными словами, при всех λ из этого интервала задача (2.32)–(2.34) имеет решение $u \in \overset{\circ}{C}{}_{x}^{2+\alpha,}{}_{t}^{1+\alpha/2}(\Omega_{T_1}; R^N)$.

Пусть $C_{T_1}(M) = \{u | u \in \overset{\circ}{C}{}_{x}^{2+\alpha,}{}_{t}^{1+\alpha/2}(\Omega_{T_1}; R^N),\ ||u||_{T_1} \le M\}$, $M = c_2(1-q)^{-1}||h||_{T_1}$, $q \in (0,1)$, где c_2 постоянная – из оценки (2.9),

$$||u||_t := |u|_{C_x^{2+\alpha,}{}_t^{1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_t; R^N)} = \sum_{r=1}^{N} |u_r|_{\Omega_t}^{(2+\alpha)},$$

$$||h||_t := \sum_{r=1}^{N} (|f_r|_{\Omega_t}^{(\alpha)} + |q_r|_{S_t}^{(1+\alpha)}) + |F|_{\Omega_t}^{(2+\alpha)}.$$

Представим задачу (2.32)–(2.34) в операторной форме

$$K_{\lambda_0}\,u^T = h^T + (\lambda - \lambda_0)\,Hu^T, \tag{2.35}$$

где

$$K_{\lambda_0}u^T = (L_{\lambda_0}u^T; zu^T; B_{\lambda_0}\partial_\nu u^T|_{S_T}), \quad h^T = (m^T/\kappa\partial_t F + Q\,f^T; F; Q\,q^T)$$

$$Hu^T = \Big(Q(QA - Q_0A_0)\Delta u^T;\, 0; -Q(B - B_0)\partial_\nu u^T|_{S_T}\Big),$$

$Q = E - m^T(x,t)z/\kappa(x,t)$, $Q_0 = E - m_0^T z/\kappa_0$. Здесь мы использовали равенства: $Q_0 = Q\,Q_0$, $Q^2 = Q$.

Согласно предположению, задача $K_{\lambda_0}u^T = h^T$ разрешима при любых правых частях, и для ее решения выполняется оценка (2.9), поэтому задачу (2.35) мы можем представить в виде:

$$u^T = K_{\lambda_0}^{-1}h^T + (\lambda - \lambda_0)K_{\lambda_0}^{-1}Hu^T \equiv Pu^T, \tag{2.36}$$

где $K_{\lambda_0}^{-1}$ – обратный оператор.

Оценим Pu^T и $Pu^T - P\tilde{u}^T$ при $\forall u,\, \tilde{u} \in C_{T_1}(M)$ в норме пространства $\overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega_{T_1}; R^N)$, используя неравенство $||K_{\lambda_0}^{-1}h^T||_{T_1} \le c_2||h||_{T_1}$:

$$\begin{aligned} ||Pu^T||_{T_1} \le c_2||h||_{T_1} + c_2c_{16}|\lambda - \lambda_0|\,||u||_{T_1} \le \\ \leqslant M(1-q) + c_2c_{16}|\lambda - \lambda_0|M, \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$||Pu^T - P\tilde{u}^T||_{T_1} \le c_2c_{16}|\lambda - \lambda_0|\,||u - \tilde{u}||_{T_1}. \tag{2.38}$$

Пусть λ таково, что выполняется неравенство $|\lambda - \lambda_0| \le q/(c_2c_{16})$, где $q \in (0,1)$. Тогда из (2.37), (2.38) мы получим:

$$||Pu^T||_{T_1} \le M,\ ||Pu^T - P\tilde{u}^T||_{T_1} \le q||u - \tilde{u}||_{T_1}.$$

Отсюда на основании принципа сжимающих отображений при $\lambda \in [0,1]$, $|\lambda - \lambda_0| \le q/(c_2c_{16})$ следует, что задача (2.36), или (2.35) имеет единственное решение в замкнутом шаре $C_{T_1}(M)$. Следовательно, существует $0 < \varepsilon_0 \le q/(c_2c_{16})$ такое, что окрестность точки λ_0 : $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$, целиком содержится в Σ. Значит, Σ – открытое множество.

Докажем, что Σ – замкнутое множество. Пусть λ^* – произвольная предельная точка множества Σ, тогда существует последовательность $\{\lambda_k\} \subset \Sigma$, сходящаяся к λ^*. Пусть $\{u_k\}$ – соответствующая ей последовательность решений задач (2.32)–(2.34) с $\lambda = \lambda_k$. По теореме Арцела из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$, сходящуюся в $\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_{x\ t}(\overline{\Omega}_{T_1}; R^N)$ к решению u^* задачи (2.32)–(2.34) с $\lambda = \lambda^*$. Покажем, что $u^* \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\quad\ t}(\Omega_{T_1}; R^N)$. Для этого установим оценки констант Гельдера

$$[\partial_t^k \partial_x^m u_r^*]^{(\alpha)}_{x,\Omega_{T_1}}, [\partial_t^k \partial_x^m u_r^*]^{(\alpha/2)}_{t,\Omega_{T_1}}, [\partial_x u_r^*]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,\Omega_{T_1}} \le c_2||h||_{T_1}, \tag{2.39}$$

$r = 1, \dots, N$, $2k + |m| = 2$.

Оценим, например, константу Гельдера $[\partial_x^2 u_r^*]^{(\alpha)}_{x,\Omega_{T_1}}$. Принимая во внимание, что каждая функция подпоследовательности $u_{k_m} = (u_{1,k_m} \dots, u_{N,k_m})$ подчиняется неравенству $||u_{k_m}||_{T_1} \le c_2||h||_{T_1}$, имеем:

$$\frac{|\partial_x^2 u_r^*(x,t) - \partial_z^2 u_r^*(z,t)|}{|x-z|^\alpha}| \le \frac{|\partial_x^2 u_r^*(x,t) - \partial_x^2 u_{r,k_m}(x,t)|}{|x-z|^\alpha} +$$

$$+|\frac{|\partial_z^2 u_r^*(z,t) - \partial_z^2 u_{r,k_m}(z,t)|}{|x-z|^\alpha} + \frac{|\partial_x^2 u_{r,k_m}(x,t) - \partial_z^2 u_{r,k_m}(z,t)|}{|x-z|^\alpha} \le$$

$$\le \frac{|\partial_x^2 u_r^*(x,t) - \partial_x^2 u_{r,k_m}(x,t)|}{|x-z|^\alpha}| + \frac{|\partial_z^2 u_r^*(z,t) - \partial_z^2 u_{r,k_m}(z,t)|}{|x-z|^\alpha} + c_2||h||_{T_1}.$$

Перейдем к пределу при $k_m \to \infty$, учитывая, что $u_{r,k_m} \to u_r^*$ в $\overset{\circ}{C}{}^{2,1}_{x\ t}(\overline{\Omega}_{T_1})$, и возьмем супремум по (x,t), $(z,t) \in \overline{\Omega}_{T_1}$. Тогда мы получим требуемое неравенство

$$\left[\partial_x^2 u_r^*\right]^{(\alpha)}_{x,\Omega_{T_1}} = \sup_{(x,t),(z,t)\in\overline{\Omega}_{T_1}} \frac{|\partial_x^2 u_r^*(x,t) - \partial_z^2 u_r^*(z,t)|}{|x-z|^\alpha} \le c_2||h||_{T_1}.$$

Аналогично устанавливаются остальные оценки в (2.39).

Итак, мы показали, что функция u^* принадлежит пространству $\overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\quad\ t}(\Omega_{T_1}; R^N)$, отсюда следует, что произвольная предельная точка λ^* множества Σ принадлежит этому множеству. Значит, Σ – замкнутое множество. Оно содержит 1, следовательно, задача (2.32)–(2.34) при $\lambda = 1$, или задача (2.1)–(2.4) имеет решение $u \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\ \ t}(\Omega_{T_1}; R^N)$.

Рассмотрим эллиптическую задачу (2.5)–(2.8), учитывая, что вектор-функция u принадлежит пространству $\overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\ \ t}(\Omega_{T_1}; R^N)$ и подчиняется неравенству (2.9). Подставим функцию φ, определяемую формулой (2.8), в (2.7)

$$\partial_\nu \varphi = (d_0\, l + d)\, \partial_\nu\, u^T + d_0\, p_0 + q_0 \quad \text{на} \quad S_T. \tag{2.40}$$

Задача Неймана (2.5), (2.40) с нулевым начальным условием (2.6) имеет единственное решение $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha}_x(\overline{\Omega}_{T_1})$, оно удовлетворяет оценке

$$|\varphi|^{(2+\alpha)}_{x,\Omega_t} \le c_{17}\Bigl(|f_0|^{(\alpha)}_{\Omega_t} + |q_0|^{(1+\alpha)}_{S_t} + |p_0|^{(1+\alpha)}_{S_t} + \sum_{r=1}^{N} |u_r|^{(2+\alpha)}_{\Omega_t}\Bigr). \tag{2.41}$$

Из уравнения (2.5) и граничных условий (2.8), (2.40) получим $\Delta\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\alpha,\alpha/2}_{x\ \ t}(\overline{\Omega}_{T_1})$; $\varphi|_S$, $\partial_\nu \varphi|_S \in \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}_{x\ \ \ t}(S_{T_1})$ и

$$|\Delta\varphi|^{(\alpha)}_{\Omega_t} \le |f_0|^{(\alpha)}_{\Omega_t} + c_{18} \sum_{r=1}^{N} |u_r|^{(2+\alpha)}_{\Omega_t}, \tag{2.42}$$

$$|\varphi|^{(1+\alpha)}_{S_t} \le c_{19}\Bigl(|p_0|^{(1+\alpha)}_{S_t} + \sum_{r=1}^{N} |u_r|^{(2+\alpha)}_{\Omega_t}\Bigr), \tag{2.43}$$

$$|\partial_\nu\varphi|^{(1+\alpha)}_{S_t} \le c_{20}\Bigl(|q_0|^{(1+\alpha)}_{S_t} + |p_0|^{(1+\alpha)}_{S_t} + \sum_{r=1}^{N} |u_r|^{(2+\alpha)}_{\Omega_t}\Bigr), t \le T_1. \tag{2.44}$$

Подставив оценку (2.9) для u_r в (2.41)–(2.44), будем иметь неравенство (2.10).

Докажем вторую часть теоремы. Для функции $\varphi \in C^{2+\alpha}_x(\overline{\Omega}_{T_1})$ имеет место следующее интегральное представление [8]:

$$\varphi(x,t) = \int_S \Bigl[\partial_\nu \varphi(\xi,t)\mathcal{E}_n(x-\xi) - \varphi(\xi,t)\partial_\nu \mathcal{E}_n(x-\xi)\Bigr]\, d_\xi S -$$

$$- \int_\Omega \Delta\varphi(\xi,t)\mathcal{E}_n(x-\xi)\, d\xi \equiv I_1(x,t) - I_2(x,t), \quad x \in \Omega, \tag{2.45}$$

где $\mathcal{E}_n(x-\xi)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа $-\Delta\mathcal{E}_n(x-\xi)=\delta(x-\xi)$,

$$\mathcal{E}_n(x-\xi)=\frac{1}{(n-2)æ_n}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}, \qquad n\geq 3;$$
$$\mathcal{E}_n(x-\xi)=\frac{1}{2\,\pi}\ln\frac{1}{|x-\xi|}, \qquad n=2,$$

$æ_n=2\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2})$, ν – внешняя нормаль к поверхности S, δ – дельта-функция Дирака, Γ – гамма-функция Эйлера.

В любом компакте $\overline{\Omega}'\subset\Omega$ поверхностный потенциал $I_1(x,t)$ является гармонической функцией и для него справедлива оценка

$$|\partial_x^m I_1(x,t)-\partial_x^m I_1(x,t_1)|\leq\int\limits_S|\partial_\nu\varphi(\xi,t)-\partial_\nu\varphi(\xi,t_1)|\,|\partial_x^m\mathcal{E}_n(x-\xi)|\,d_\xi S+$$
$$+\int\limits_S|\varphi(\xi,t)-\varphi(\xi,t_1)|\,|\partial_x^m\partial_\nu\mathcal{E}_n(x-\xi)|\,d_\xi S\leq$$
$$\leq c_{21}\left([\partial_\nu\varphi]_{t,S_1}^{(\frac{1+\alpha}{2})}+[\varphi]_{t,S_1}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\right)|t-t_1|^{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad \forall x\in\overline{\Omega}', \quad |m|=0,1,2.$$

Рассмотрим объемный потенциал $I_2(x,t)$ в (2.45). Так как этот потенциал и его первые производные по x непрерывны в $\overline{\Omega}$, то

$$|\partial_x^m I_2(x,t)-\partial_x^m I_2(x,t_1)|\leq\int\limits_\Omega|\Delta\varphi(\xi,t)-\Delta\varphi(\xi,t_1)|\,|\partial_x^m\mathcal{E}_n(x-\xi)|\,d\xi\leq$$
$$\leq c_{22}[\Delta\varphi]_{t,\Omega_{T_1}}^{(\alpha/2)}|t-t_1|^{\frac{\alpha}{2}}, \quad \forall\, x\in\overline{\Omega}, \quad |m|=0,1.$$

Представим вторую производную потенциала в виде:

$$\partial^2_{x_ix_j}I_2(x,t)=\int\limits_{\Omega\setminus K_\varepsilon}\Delta\varphi(\xi,t)\partial^2_{x_ix_j}\mathcal{E}_n(x-\xi)\,d\xi+$$
$$+\int\limits_{K_\varepsilon}(\Delta_\xi\varphi(\xi,t)-\Delta_x\varphi(x,t))\partial^2_{x_ix_j}\mathcal{E}_n(x-\xi)\,d\xi- \tag{2.46}$$
$$-\frac{\Delta\varphi(x,t)}{æ_n}\int\limits_{S_1}\cos(r,x_i)\,\cos(r,x_j)\,d_\theta S_1, \quad i,j=1,\dots,n, \quad x\in\Omega,$$

где K_ε – шар с центром в точке x и радиуса ε, такой, что $K_\varepsilon \subset \Omega$; S_1 – сфера радиуса $r = 1$ с центром в начале координат $\{x\}$. Первый и третий члены в равенстве (2.46) удовлетворяют условию Гельдера по t с показателем $\alpha/2$ за счет функции $\Delta\varphi$. Рассмотрим второй интеграл

$$J(x,t) = \int\limits_{K_\varepsilon} (\Delta_\xi \varphi(\xi,t) - \Delta_x \varphi(x,t)) \partial^2_{x_i x_j} \mathcal{E}_n(x-\xi)\, d\xi.$$

Сформируем разность и оценим ее:

$$|J(x,t) - J(x,t_1)| \le$$

$$\leqslant \int\limits_{K_\varepsilon} \Big| \big(\Delta_\xi \varphi(\xi,t) - \Delta_x \varphi(x,t)\big) - \big(\Delta_\xi \varphi(\xi,t_1) - \Delta_x \varphi(x,t_1)\big) \Big|^{\gamma} \times$$

$$\times \Big| \big(\Delta_\xi \varphi(\xi,t) - \Delta_\xi \varphi(\xi,t_1)\big) - \big(\Delta_x \varphi(x,t) - \Delta_x \varphi(x,t_1)\big) \Big|^{1-\gamma} \times$$

$$\times \big|\partial^2_{x_i x_j} \mathcal{E}_n(x-\xi)\big|\, d\xi \le c_{23} \Big(\big[\Delta\varphi\big]^{(\alpha)}_{x,\Omega_{T_1}} \Big)^{\gamma} \Big(\big[\Delta\varphi\big]^{(\alpha/2)}_{t,\Omega_{T_1}} \Big)^{1-\gamma} \times$$

$$\times \big|t - t_1\big|^{\frac{\alpha(1-\gamma)}{2}} \int\limits_{K_\varepsilon} \frac{1}{|x-\xi|^{n-\alpha\gamma}}\, d\xi,$$

где $\gamma = \beta/\alpha \in (0,1)$, $0 < \beta < \alpha$. Применим неравенство Юнга к произведению констант Гельдера, тогда получим:

$$|J(x,t) - J(x,t_1)| \le c_{24} \Big(\big[\Delta\varphi\big]^{(\alpha)}_{x,\Omega_{T_1}} + \big[\Delta\varphi\big]^{(\alpha/2)}_{t,\Omega_{T_1}} \Big) \big|t - t_1\big|^{\frac{\alpha-\beta}{2}} =$$

$$= c_{24} \big[\Delta\varphi\big]^{(\alpha)}_{\Omega_{T_1}} \big|t - t_1\big|^{\frac{\alpha-\beta}{2}}, \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{2.47}$$

Итак, для второй производной $\partial^2_{x_i x_j} I_2$ имеет место оценка (2.47). Учитывая вышеизложенное и собирая все установленные оценки, мы получим, что φ, $\partial_x \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\alpha/2}_t(\overline{\Omega}'_{T_1})$, $\partial^2_x \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{(\alpha-\beta)/2}_t(\overline{\Omega}'_{T_1})$ и

$$[\varphi]^{(\alpha/2)}_{t,\Omega'_t} + [\partial_x \varphi]^{(\alpha/2)}_{t,\Omega'_t} + [\partial^2_x \varphi]^{(\frac{\alpha-\beta}{2})}_{t,\Omega'_t} \le$$

$$\le c_{25} \Big(|\varphi|^{(1+\alpha)}_{S_t} + |\partial_\nu \varphi|^{(1+\alpha)}_{S_t} + |\Delta\varphi|^{(\alpha)}_{\Omega_t} \Big), \quad t \le T_1.$$

Отсюда с учетом оценки (2.10) для $\Delta\varphi$, $\varphi|_S$, $\partial_\nu \varphi|_S$, мы выводим неравенство (2.11). □

3. Доказательство теоремы 1.1

В п. 1 мы свели задачу (1.1)–(1.4) к эквивалентной задаче (1.32)–(1.37), в левых частях уравнений и условий которой находятся линейные члены, и записали ее в операторной форме (1.38)

$$K\,w^T = h^T + N\,w^T, \tag{3.1}$$

где $w = (v_1, \dots, v_N, \varphi)$; K – линейный оператор; h – заданный вектор, выражающийся через функции p, F, q; Nw^T содержит нелинейные функции P_r, Q_r, $r = 1, \dots, N$. На основании теоремы 2.1 задачу (3.1) представим в виде:

$$w^T = K^{-1}(h^T + Nw^T), \tag{3.2}$$

где K^{-1} – обратный оператор. Справедлива оценка

$$||w||_t := \sum_{r=1}^{N} |v_r|_{\Omega_t}^{(2+\alpha)} + |\varphi_1|_{x,\Omega_t}^{(2+\alpha)} + |\Delta\varphi_1|_{\Omega_t}^{(\alpha)} + |\varphi_1|_{S_t}^{(1+\alpha)} + |\partial_\nu\varphi_1|_{S_t}^{(1+\alpha)} \leq$$

$$\leq c_1\left(||h||_t + \sum_{r=1}^{N}(|P_r|_{\Omega_t}^{(\alpha)} + |Q_r|_{S_t}^{(1+\alpha)})\right), \quad t \leq T_1, \tag{3.3}$$

где

$$||h||_t := \sum_{r=1}^{N}(|p_r|_{\Omega_t}^{(\alpha)} + |q_r|_{S_t}^{(1+\alpha)}) + |F|_{\Omega_t}^{(2\alpha)}. \tag{3.4}$$

Обозначим через $\overset{\circ}{\mathcal{B}}_t$, $t \leq T_0$, пространство вектор-функций w таких, что $v \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\Omega_t; R^N)$, $\varphi_1 \in \overset{\circ}{C}{}_x^{2+\alpha}(\Omega_t)$, $\Delta\varphi_1 \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{\alpha, \alpha/2}(\Omega_t)$, φ_1, $\partial_\nu\varphi_1 \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}(S_t)$ с нормой $||w||_t$, которая определена в формуле (3.3). Пусть $C_{T_0}(M)$ – замкнутый шар в $\overset{\circ}{\mathcal{B}}_{T_0} : C_{T_0}(M) := \{w \,|\, w \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}_{T_0}, ||w||_{T_0} \leq M\}$, $M = c_1\,||h||_{T_1}(1-q)^{-1}$, $q \in (0,1)$, c_1 – константа из оценки (3.3). (Напомним, что величина T_1 была получена в теореме 2.1).

Покажем, что существует $T_0 \in (0, T_1]$ такое, что нелинейный оператор $K^{-1}(h^T + Nw^T)$ действует из замкнутого шара $C_{T_0}(M)$ в него же и является в нем сжимающим.

Для этого оценим нормы

$$||K^{-1}(h^T + Nw)||_t \leq c_1\left(||h||_t + \sum_{r=1}^{N}\left(|P_r|_{\Omega_t}^{(\alpha)} + |Q_r|_{S_t}^{(1+\alpha)}\right)\right), \tag{3.5}$$

$$||K^{-1}(h^T+Nw)-K^{-1}(h^T+N\tilde{w})||_t\equiv||K^{-1}(Nw-N\tilde{w})||_t\le$$

$$\le c_1\sum_{r=1}^{N}\left(\Big|P_r(x,t,v,\,\partial_x v,\Delta v,\Delta\varphi_1)-P_r(x,t,\tilde{v},\,\partial_x\tilde{v},\Delta\tilde{v},\Delta\tilde{\varphi}_1)\Big|_{\Omega_t}^{(\alpha)}+\right.$$

$$\left.+\Big|Q_r(x,t,v,\,\partial_\nu v,\varphi_1,\partial_\nu\varphi_1)-Q_r(x,t,\tilde{v},\,\partial_\nu\tilde{v},\tilde{\varphi}_1,\partial_\nu\tilde{\varphi}_1)\Big|_{S_t}^{(1+\alpha)}\right),\quad(3.6)$$

$\forall w,\ \tilde{w}\in C_{T_0}(M)$.

Функции P_r, Q_r определены формулами (1.25), (1.28). Представим их и их приращения в виде:

$$\begin{aligned}P_r=&\sum_{s,k=1}^{N}v_k\int_0^1\partial_{V_k}a_{rs}(x,t,V+\lambda\,v)\,d\lambda\,\Delta(v_s+V_s)+\\&+\sum_{k=1}^{N}v_k\int_0^1\partial_{V_k}m_r(x,t,V+\lambda\,v)\,d\lambda\,\Delta(\varphi_1+\varphi_0)+\\&+\sum_{k=1}^{N}v_k\int_0^1\partial_{V_k}f_r(x,t,V+\lambda\,v,\partial_x v+\partial_x V)\,d\lambda+\\&+\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\partial_{x_i}v_k\int_0^1\partial_{\xi_{ki}}\,f_r(x,t,V,\partial_x V+\lambda\partial_x v)|_{\xi_{ki}=\partial_{x_i}V_k}\,d\lambda;\end{aligned}\qquad(3.7)$$

$$\begin{aligned}Q_r=&-\sum_{s,k=1}^{N}v_k\int_0^1\partial_{V_k}a_{rs}(x,t,V+\lambda\,v)\,d\lambda\,\partial_\nu(v_s+V_s)-\\&-\sum_{k=1}^{N}v_k\int_0^1\partial_{V_k}m_r(x,t,V+\lambda\,v)\,d\lambda\,\partial_\nu(\varphi_1+\varphi_0)+\\&+\sum_{k=1}^{N}v_k\int_0^1\partial_{V_k}g_r(x,t,V+\lambda\,v,\varphi_1+\varphi_0))\,d\lambda+\\&+\varphi_1^2\int_0^1\lambda\,d\lambda\int_0^1\partial^2_{\varphi_0}g_r(x,t,V,\,\varphi_0+\lambda\lambda_1\varphi_1)\,d\lambda_1;\end{aligned}\qquad(3.8)$$

$$P_r(\cdot, v,\ \partial_x v, \Delta v, \Delta\varphi_1) - P_r(\cdot, \tilde v,\ \partial_x \tilde v, \Delta\tilde v, \Delta\tilde\varphi_1) =$$

$$= \sum_{s,k=1}^{N} (v_k - \tilde v_k) \int\limits_0^1 \partial_{V_k} a_{rs}(\cdot, V + \tilde v + \lambda(v - \tilde v))\, d\lambda\, \Delta(v_s + V_s) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \tilde v_k \int\limits_0^1 \partial_{V_k} a_{rs}(\cdot, V + \lambda\tilde v))\, d\lambda\, \Delta(v_s - \tilde v_s) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} (v_k - \tilde v_k) \int\limits_0^1 \partial_{V_k} m_r(\cdot, V + \tilde v + \lambda(v - \tilde v))\, d\lambda\, \Delta(\varphi_1 + \varphi_0) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \tilde v_k \int\limits_0^1 \partial_{V_k} m_r(\cdot, V + \lambda\tilde v))\, d\lambda\, \Delta(\varphi_1 - \tilde\varphi_1) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} (v_k - \tilde v_k) \int\limits_0^1 \partial_{V_k} f_r\Big(\cdot, V + \tilde v + \lambda(v - \tilde v), \partial_x v + \partial_x V\Big)\, d\lambda +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} v_k - \partial_{x_i} \tilde v_k) \int\limits_0^1 \partial_{\xi_{ki}} f_r(\cdot, V + \tilde v, \partial_x V + \partial_x \tilde v +$$

$$+ \lambda(\partial_x v - \partial_x \tilde v))|_{\xi_{ki} = \partial_{x_i} V_k}\, d\lambda; \qquad (3.9)$$

$$Q_r(\cdot, v,\ \partial_\nu v, \varphi_1, \partial_\nu \varphi_1) - Q_r(\cdot, \tilde v,\ \partial_\nu \tilde v, \tilde\varphi_1, \partial_\nu \tilde\varphi_1) =$$

$$= - \sum_{s,k=1}^{N} (v_k - \tilde v_k) \int\limits_0^1 \partial_{V_k} a_{rs}(\cdot, V + \tilde v + \lambda(v - \tilde v))\, d\lambda\, \partial_\nu(v_s + V_s) -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} \tilde v_k \int\limits_0^1 \partial_{V_k} a_{rs}(\cdot, V + \lambda\tilde v))\, d\lambda\, \partial_\nu(v_s - \tilde v_s) -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} (v_k - \tilde v_k) \int\limits_0^1 \partial_{V_k} m_r(\cdot, V + \tilde v + \lambda(v - \tilde v))\, d\lambda\, \partial_\nu(\varphi_1 + \varphi_0) -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} \tilde v_k \int\limits_0^1 \partial_{V_k} m_r(\cdot, V + \lambda\tilde v))\, d\lambda\, \partial_\nu(\varphi_1 - \tilde\varphi_1) +$$

$$+\sum_{k=1}^{N}(v_k-\tilde v_k)\int\limits_0^1 \partial_{V_k} g_r(\cdot, V+\tilde v+\lambda(v-\tilde v), \varphi_1+\varphi_0)\,d\lambda+$$

$$+(\varphi_1-\tilde\varphi_1)\sum_{k=1}^{N}\tilde v_k\int\limits_0^1 d\lambda\int\limits_0^1 \partial^2_{V_k\varphi_0} g_r(\cdot, V+\lambda_1\tilde v, \varphi_0+\tilde\varphi_1+\lambda(\varphi_1-\tilde\varphi_1))\,d\lambda_1+$$

$$+(\varphi_1-\tilde\varphi_1)\,\varphi_1\int\limits_0^1 \lambda\,d\lambda\int\limits_0^1 \partial^2_{\varphi_0} g_r(\cdot, V, \varphi_0+\lambda\lambda_1\tilde\varphi_1))\,d\lambda_1+ \tag{3.10}$$

$$+(\varphi_1-\tilde\varphi_1)\,\tilde\varphi_1\int\limits_0^1 \lambda\,d\lambda\int\limits_0^1 \partial^2_{\varphi_0} g_r(\cdot, V, \varphi_0+\lambda\tilde\varphi_1+\lambda\lambda_1(\varphi_1-\tilde\varphi_1))\,d\lambda_1.$$

Как видно из формул (3.7)–(3.10), нам нужно уметь оценивать произведения неизвестных функций v_r, φ_1 и композиции от этих функций. В [9] были установлены оценки произведений и композиций функций в весовых пространствах Гельдера $C^l_s(\Omega_T)$, $s \le l$. Пространство $C^l_s(\Omega_T)$ при $s = l$ совпадает с обычным анизотропным пространством Гельдера $C^{l,l/2}_{x\ \,t}(\Omega_T)$. Приведем необходимые оценки для пространств Гельдера.

Лемма 3.1 [9, лемма 2.1]. *Пусть l, $l{+}r$ – нецелые, положительные числа, $r \ge 0$, $f(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{l+r,(l+r)/2}_{x\ \ \ \ \ t}(\overline{\Omega}_T)$. Тогда*

$$|f|^{(l)}_{\Omega_t} \le c_2\, t^{r/2} |f|^{(l+r)}_{\Omega_t}. \tag{3.11}$$

Лемма 3.2 [9, лемма 2.2]. *Пусть l, $l{+}r$ – нецелые, положительные числа, $r \ge 0$, $p(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{l+r,(l+r)/2}_{x\ \ \ \ \ t}(\overline{\Omega}_T)$, $q(x,t) \in C^{l,l/2}_{x\ \,t}(\overline{\Omega}_T)$. Тогда произведение функций pq принадлежит пространству $\overset{\circ}{C}{}^{l,l/2}_{x\ \,t}(\overline{\Omega}_T)$ и удовлетворяет оценке*

$$|p\,q|^{(l)}_{\Omega_t} \le c_3\,|p|^{(l+r)}_{\Omega_t}\left(\sup_{\tau\le t}\tau^{r/2}|q|_\Omega + t^{\frac{l+r}{2}}\,|q|^{(l)}_{\Omega_t}\right), \quad \forall t \le T. \tag{3.12}$$

Следствие. *Пусть $f(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{l,l/2}_{x\ \,t}(\overline{\Omega}_T)$. Тогда произведение функций $p\,f$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{C}{}^{l,l/2}_{x\ \,t}(\overline{\Omega}_T)$ и подчиняется неравенству*

$$|p\,f|^{(l)}_{\Omega_t} \le c_4\, t^{\frac{l+r}{2}}\,|p|^{(l+r)}_{\Omega_t}\,|f|^{(l)}_{\Omega_t} \quad \forall t \le T. \tag{3.13}$$

Лемма 3.3 [9, лемма 2.5, следствие 1]. *Пусть l, $l+r$ – нецелые, положительные числа, $l+r>1$, $q(x,t)\in C_{x\ t}^{l,l/2}(D_T)$, $\rho(x',t)\in \overset{\circ}{C}{}_{x'\ \ \ t}^{l+r,(l+r)/2}(R_T)$.*

Тогда композиция функций $q\circ\rho = q(x', x_n+\rho, t)$ принадлежит пространству $C_{x\ t}^{l,l/2}(D_T)$ и удовлетворяет оценке

$$|q\circ\rho|_{D_t}^{(l)} \le c_5(T)\,|q|_{D_t}^{(l)}\,(1+M_t)(1+N_t)^{[l]}, \quad \forall t\le T, \tag{3.14}$$

где $M_t = t^{\frac{l+r-1}{2}}|\rho|_{R_t}^{(l+r)}$, $N_t = t^{\frac{\gamma+r-1}{2}}|\rho|_{R_t}^{(l+r)}$, $\gamma=\min(1,l)$. Здесь $D=R^n$, R – плоскость $\{x_n=0\}$, $D_T = D\times(0,T)$, $R_T = R\times[0,T]$.

Оценим нормы в неравенствах (3.5), (3.6), привлекая оценки (3.11)–(3.14),

$$||K^{-1}(h^T+Nw)||_t \le c_1||h||_t + c_6 t^{\frac{1+\alpha}{2}}||w||_t||w||_t(1+t^{\frac{\alpha}{2}}||w||_t),$$

$$||K^{-1}(Nw-N\tilde{w})||_t \le$$

$$\le c_7 t^{\frac{1+\alpha}{2}}||w-\tilde{w}||_t(||w||_t+||\tilde{w}||_t)(1+t^{\frac{\alpha}{2}}||w||_t+t^{\frac{\alpha}{2}}||\tilde{w}||_t).$$

Применим оценки $||w||_t$, $||\tilde{w}||_t\le M$, зафиксируем $T_2\le T_1$ такое, чтобы выполнялось неравенство $T_2^{\alpha/2}M\le 1$. Тогда мы сможем избавиться от нелинейностей и получить неравенства

$$||K^{-1}(h^T+Nw)||_t \le c_1\,||h||_{T_1} + c_8\,t^{1/2}\,||w||_t,$$
$$||K^{-1}(Nw-N\tilde{w})||_t \le c_9\,t^{1/2}\,||w-\tilde{w}||_t.$$

Выберем теперь $0<T_3\le T_1$ из условий $c_m\,T_3^{1/2}\le q$, $m=8,9$, и примем во внимание, что $M = c_1||h||_{T_1}(1-q)^{-1}$, тогда будем иметь:

$$||K^{-1}(h^T+Nw)||_t \le (1-q)\,M + q\,M = M, \tag{3.15}$$

$$||K^{-1}(Nw-N\tilde{w})||_t \le q||w-\tilde{w}||_t, \tag{3.16}$$

$\forall\, t\le T_0=\min(T_2,T_3)$, $\forall w,\ \tilde{w}\in C_{T_0}(M)$, $q\in(0,1)$.

Из оценок (3.15), (3.16) следует, что нелинейный оператор $K^{-1}(h^T+Nw)$ действует из замкнутого шара $C_{T_0}(M)$ в него же и является в нем сжимающим. Но тогда на основании принципа сжимающих отображений задача (3.2) или (1.32)–(1.37) имеет единственное решение $w=\{v_1,\dots,v_N,\varphi_1\}$ в шаре $C_{T_0}(M)$, удовлетворяющее оценке

$$||w||_{T_0} \le c_1\,(1-q)^{-1}||h||_{T_0}, \tag{3.17}$$

где нормы $||w||_t$, $||h||_t$ определены формулами (3.3), (3.4), вектор h содержит функции p_r (1.24), F (1.26), q_r (1.27), $r = 1, \dots, N$, которые выражаются через вспомогательные функции $V_1, \dots, V_N \in C_{x\ t}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$ и $\varphi_0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Учитывая это, из (3.4) мы получим

$$||h||_{T_0} \leq c_{10}\bigg(\sum_{r=1}^{N} |V_r|_{T_0}^{(2+\alpha)} + |\varphi_0|_{\Omega}^{2+\alpha)}\bigg). \tag{3.18}$$

Затем, применяя оценки (1.19) и (1.14) для функций V_r, φ_0 соответственно

$$|V_r|_{\Omega_T}^{(2+\alpha)} \leq c_8 \sum_{r=1}^{N} |u_{0r}|_{\Omega}^{(2+\alpha)}, \quad |\varphi_0|_{\Omega}^{(2+\alpha)} \leq c_2 \sum_{r=1}^{N} |u_{0r}|_{\Omega}^{(2+\alpha)},$$

ввиду неравенств (3.17) и (3.18) имеем

$$||w||_{T_0} \leq c_{11}\bigg(\sum_{r=1}^{N} |u_{0r}|_{\Omega}^{(2+\alpha)} + |\varphi_0|_{\Omega}^{(2+\alpha)}\bigg) \leq c_{12} \sum_{r=1}^{N} |u_{0r}|_{\Omega}^{(2+\alpha)}.$$

Вспоминая замену (1.20): $u_r(x,t) = v_r(x,t) + V_r(x,t)$, $r = 1, \dots, N$, мы заключаем, что задача (1.1)–(1.4) имеет единственное решение $u_1, \dots, u_N$, φ_1, принадлежащее пространству $\mathcal{B}_{T_0}$ и удовлетворяющее оценке (1.18).

Первая часть теоремы 1.1 доказана. Вторая часть доказывается точно так же, как и вторая часть теоремы 2.1, при помощи интегрального представления (2.45) функции φ_1. $\square$

4. Линейные модельные параболические задачи

Пусть $D = R_+^n$, $D_T = D \times (0,T)$, $R = \{x | x' \in R^{n-1}, x_n = 0\}$, $R_T = R \times [0,T]$, $R_T^n = R^n \times (0,T)$.

Рассмотрим краевую задачу с неизвестной функцией $u = (u_1, \dots, u_N)$

$$\partial_t u^T - \left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right) A\, \Delta u^T = \frac{m^T}{\kappa} \partial_t F(x,t) +$$

$$+ \left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right) f^T(x,t) \quad \text{в} \quad D_T, \tag{4.1}$$

$$z u^T = F(x,t) \quad \text{в} \quad D_T, \tag{4.2}$$

$$u_r|_{t=0} = 0, \quad r = 1, \ldots, N, \tag{4.3}$$

$$\left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right)\left[E + \frac{1}{æ}\, G^T z A^{-1} \frac{m^T z}{\kappa}\right] A\, \partial_{x_n} u^T =$$

$$= \left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right) q^T(x', t) \quad \text{на} \quad R_T \tag{4.4}$$

и задачу Коши

$$\partial_t u^T - \left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right) A\, \Delta u^T = \frac{m^T}{\kappa} \partial_t F(x,t) +$$

$$+ \left(E - \frac{m^T z}{\kappa}\right) f^T(x,t) \quad \text{в} \quad R^n_T, \tag{4.5}$$

$$u_r|_{t=0} = 0, \quad r = 1, \ldots, N, \tag{4.6}$$

где $G = \{G_1, \ldots, G_N\}$, m – постоянные векторы, $f = \{f_1, \ldots, f_N\}$, $q = \{q_1, \ldots, q_N\}$ – вектор-функции, $m^T = \mathrm{colon}(m_1, \ldots, m_N)$ – вектор-столбец, E – единичная матрица, $A = \{a_{rs}\}_{1 \le r,s \le N}$ – матрица с постоянными элементами, удовлетворяющими условию эллиптичности (1.5), A^{-1} – обратная к ней матрица, $z \in R^N$, $z^2 \neq 0$, $\kappa = z m^T \neq 0$, $æ = z\, A^{-1}(E - m^T z/\kappa)\, G^T \neq 0$.

Теорема 4.1. *Пусть* $\kappa \neq 0$, $æ \neq 0$. *Тогда для любых функций* $f_r \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ t}^{\alpha,\,\alpha/2}(\overline{D}_T)$, $q_r \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{1+\alpha,\,\frac{1+\alpha}{2}}(R_T)$, $r = 1, \ldots, N$, $F \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ \ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D_T)$ *задача* (4.1)–(4.4) *имеет единственное решение* $u_r \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ \ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D_T)$, $r = 1, \ldots, N$, *и оно удовлетворяет оценке*

$$\sum_{r=1}^N |u_r|^{(2+\alpha)}_{D_t} \le c_1 \left(\sum_{r=1}^N (|f_r|^{(\alpha)}_{D_t} + |q_r|^{(1+\alpha)}_{R_t}) + |F|^{(2+\alpha)}_{D_t} \right), \quad \forall t \le T. \tag{4.7}$$

Теорема 4.2. *Пусть* $\kappa \neq 0$, $æ \neq 0$. *Тогда для любых функций* $f_r \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ t}^{\alpha,\alpha/2}(R^n_T)$, $r = 1, \ldots, N$, $F \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ \ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(R^n_T)$ *задача Коши* (4.5), (4.6) *имеет единственное решение* $u_r \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ \ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(R^n_T)$, $r = 1, \ldots, N$, *и оно удовлетворяет оценке*

$$\sum_{r=1}^N |u|^{(2+\alpha)}_{R^n_t} \le c_2 \left(\sum_{r=1}^N |f_r|^{(\alpha)}_{R^n_t} + |F|^{(2+\alpha)}_{D_t} \right), \quad t \le T. \tag{4.8}$$

Заметим, что система уравнений (4.1) была получена при помощи уравнения (4.2) после исключения функции $\Delta\varphi$, поэтому решение уравнения (4.1) удовлетворяет также и уравнению (4.2). Действительно, умножив обе части уравнения (4.1) слева на вектор z, мы получим уравнение $z\,\partial_t u^T = \partial_t F$, т.к. $z\,(E - m^T\, z/\kappa) = 0$ $(z\, m^T = \kappa)$, и после интегрирования его по t будем иметь $z\, u^T = F$, т.е. уравнение (4.2).

Докажем теорему для более общего случая, когда матрица A имеет положительные собственные значения и может быть приведена к диагональному виду. К таким матрицам относятся положительно определенные, симметрические матрицы, а также диагональные матрицы с различными положительными элементами на главной диагонали.

Доказательство теоремы 4.1. Известно, что существует невырожденная матрица Q, при помощи которой матрица A может быть преобразована к диагональному виду по формуле

$$Q^{-1}\,A\,Q = \Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \tag{4.9}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ – положительные собственные значения матрицы A.

Умножим слева матрицу $(E - m^T z/\kappa)\,A$ на матрицу Q^{-1}

$$Q^{-1}\left(E - \frac{m^T\,z}{\kappa}\right)A =$$

$$= Q^{-1}\left(E - \frac{m^T\,z}{\kappa}\right)Q\,Q^{-1}\,A = \left(E - Q^{-1}\,\frac{m^T\,z}{\kappa}\,Q\right)Q^{-1}\,A. \tag{4.10}$$

Матрица $m^T\,z/\kappa$ является проектором, ее след равен $z\,m^T/\kappa = 1$, ранг – единице, а собственные значения $\mu_1 = \dots = \mu_{N-1} = 0$, $\mu_N = 1$ [10]. Эти же собственные значения имеет подобная ей матрица $Q^{-1}(m^T z/\kappa)Q$, являющаяся также проектором. Поэтому существует ортогональная матрица P, приводящая матрицу $Q^{-1}(m^T z/\kappa)Q$ к диагональному виду

$$P^T Q^{-1}\frac{m^T z}{\kappa}QP = \mathrm{diag}\,(\underbrace{0, \dots, 0}_{N-1}, 1) = E^1, \tag{4.11}$$

здесь P^T – транспонированная матрица, $P^T = P^{-1}$. Умножим слева матрицу $Q^{-1}(E - m^T z/\kappa)A$ в (4.10) на матрицу P^T и примем во внимание равенство (4.11):

$$\begin{aligned} P^T Q^{-1}(E - \frac{m^T z}{\kappa})A &= P^T(E - Q^{-1}\frac{m^T z}{\kappa}Q)P\,P^T Q^{-1}A = \\ &= (E - P^T Q^{-1}\frac{m^T z}{\kappa}Q\,P)P^T Q^{-1}A = \\ &= (E - E^1)P^T Q^{-1}A = E_{N-1}P^T Q^{-1}A, \end{aligned} \tag{4.12}$$

где

$$E_{N-1} = E - E^1 = \operatorname{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{N-1},0). \tag{4.13}$$

Матрицу $(E - m^T z/\kappa)(E + 1/æG^T zA^{-1}m^T z/\kappa)A$ в граничном условии (4.4) умножим слева на матрицу $P^T Q^{-1}$. Привлекая формулы (4.11), (4.13), получим

$$\begin{aligned} &P^T Q^{-1}\left(E - \left(\frac{m^T z}{\kappa}Q\,P\right)P^T Q^{-1}\right)\times \\ &\times\left[E + \frac{1}{æ}G^T z A^{-1}Q\,P\left(P^T Q^{-1}\frac{m^T z}{\kappa}Q\,P\right)P^T Q^{-1}\right]Q\,P\,P^T Q^{-1}A = \\ &= P^T Q^{-1}\left(Q\,P - \left(\frac{m^T z}{\kappa}Q\,P\right)\right)P^T Q^{-1}\times \\ &\times\left[Q\,P + \frac{1}{æ}G^T zA^{-1}Q\,P\left(P^T Q\frac{m^T z}{\kappa}Q\,P\right)\right]P^T Q^{-1}A = \\ &= \left(E - P^T Q^{-1}\frac{m^T z}{\kappa}QP\right)\left[E + \frac{1}{æ}P^T Q^{-1}G^T zA^{-1}QP\left(P^T Q\frac{m^T z}{\kappa}QP\right)\right]\times \\ &\times P^T Q^{-1}A = E_{N-1}\left[E + \frac{1}{æ}(P^T Q^{-1}G^T zA^{-1}Q\,P)E^1\right]P^T Q^{-1}A. \end{aligned} \tag{4.14}$$

В задаче (4.1)–(4.4) произведем замену

$$u^T = A^{-1}QPv^T \quad (v^T = P^T Q^{-1}Au^T), \tag{4.15}$$

где $v = (v_1,\dots,v_N)$ – новая неизвестная функция. Умножим слева обе части уравнения (4.1) и граничного условия (4.4) на матрицу

P^TQ^{-1} и, учитывая формулы (4.12), (4.14), получим задачу с неизвестными функциями $v_1, \dots, v_N$

$$P^TQ^{-1}A^{-1}QP\partial_t v^T - E_{N-1}\,\Delta v^T =$$

$$= \frac{1}{\kappa}(P^TQ^{-1}m^T)\partial_t F + E_{N-1}(P^TQ^{-1}f^T) \quad \text{в} \quad D_T, \tag{4.16}$$

$$zA^{-1}QPv^T = F \quad \text{в} \quad D_T,$$

$$E_{N-1}\left(E + \frac{1}{æ}P^TQ^{-1}G^TzA^{-1}QPE^1\right)\partial_{x_n}v^T =$$

$$= E_{N-1}(P^TQ^{-1}q^T) \quad \text{на} \quad R_T.$$

Обозначим

$$y = (y_1, \dots, y_N) = z\,A^{-1}\,Q\,P,\ l^T = P^T\,Q^{-1}\,G^T, \quad p^T(x,t) =$$

$$= \mathrm{colon}(p_1, \dots, p_N) = P^T\,Q^{-1}f^T(x,t),\ h^T(x',t) = \mathrm{colon}\,(h_1, \dots, h_N) =$$

$$= P^T\,Q^{-1}\,q^T(x',t),\ d^T = \mathrm{colon}\,(d_1, \dots, d_N) = P^T\,Q^{-1}\,A\,m^T. \tag{4.17}$$

Из формулы (4.9) следует, что $Q^{-1}\,A^{-1}\,Q = \Lambda^{-1}$, поэтому в уравнении (4.16) имеем $P^TQ^{-1}A^{-1}QP = P^T\Lambda^{-1}P$. Умножим слева обе части первого уравнения задачи (4.16) на матрицу $(P^T\,Q^{-1}\,A^{-1}\,Q\,P)^{-1} = P^TQ^{-1}AQP = P^T\Lambda P$ и воспользуемся обозначениями (4.17), тогда получим задачу (4.16) в виде:

$$\partial_t v^T - P^T\Lambda P E_{N-1}\,\Delta v^T = \frac{1}{\kappa}d^T\partial_t F + P^T\Lambda P E_{N-1}\,p^T \quad \text{в} \quad D_T, \tag{4.18}$$

$$y\,v^T = F \quad \text{в} \quad D_T, \tag{4.19}$$

$$E_{N-1}\left(E + \frac{1}{æ}l^TyE^1\right)\partial_{x_n}v^T = E_{N-1}h^T \quad \text{на} \quad R_T. \tag{4.20}$$

Здесь матрица $P^T\Lambda P$ симметрическая: $(P^T\Lambda P)^T = P^T\Lambda P$ $(\Lambda^T = \Lambda)$, она имеет те же самые собственные значения, что и матрица Λ. Пусть $P^T\Lambda P = \{b_{rs}\}_{1\le r,s\le N}$, тогда

$$P^T\Lambda P E_{N-1} = P^T\Lambda P\,\mathrm{diag}\,(\underbrace{1, \dots, 1}_{N-1}, 0) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1N-1} & 0 \\ . & . & . & . \\ b_{N1} & \dots & b_{NN-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Положив $B = \{b_{rs}\}_{1\le r,s\le N-1}$, $b' = (b_{N1},\dots,b_{NN-1})$, $v' = (v_1,\dots,v_{N-1})$, запишем систему уравнений (4.18) следующим образом:

$$\partial_t v'^T - B\,\Delta v'^T = \frac{1}{\kappa} d'^T \partial_t F + B p'^T \quad \text{в} \quad D_T, \tag{4.21}$$

$$\partial_t v_N - b'\,\Delta v'^T = \frac{1}{\kappa} d_N \partial_t F + b' p'^T \quad \text{в} \quad D_T. \tag{4.22}$$

Так как матрица $P^T \Lambda P$ симметрическая, положительно определенная, то матрица B также симметрическая и, согласно критерию Сильвестра, положительно определенная, но тогда все $N-1$ собственных значений матрицы B вещественны и положительны, и система (4.21), состоящая из $N-1$ уравнений, параболическая.

Преобразуем теперь уравнение (4.22). Так как обратная матрица B^{-1} существует, найдем вектор $\Delta v'^T$ из уравнения (4.21)

$$\Delta v'^T = B^{-1}\partial_t v'^T - \frac{1}{\kappa} B^{-1} d'^T \partial_t F - p'^T$$

и подставим его в уравнение (4.22). Тогда мы получим уравнение для функции v_N

$$\partial_t v_N = \frac{1}{\kappa}\left(d_N - b' B^{-1}\, d'^T\right)\partial_t F + b' B^{-1}\,\partial_t v'^T \quad \text{в} \quad D_T. \tag{4.23}$$

При помощи равенств $E^1 = E - E_{N-1}$, $E_{N-1} = (E_{N-1})^2$ преобразуем граничное условие (4.20):

$$\left((E_{N-1})^2 - \frac{1}{æ}(E_{N-1})^2 l^T y E_{N-1}\right)\partial_{x_n} v^T = E_{N-1}\left(h^T - \frac{1}{æ} l^T\, y\,\partial_{x_n} v^T\right),$$

тогда, учитывая равенство $y\partial_{x_n} v^T = \partial_{x_n} F$, которое следует из уравнения (4.19), мы получим граничное условие в виде:

$$E_{N-1}\left(E - \frac{1}{æ} E_{N-1} l^T y\right) E_{N-1}\,\partial_{x_n} v^T =$$

$$= E_{N-1}\left(h^T - \frac{1}{æ} l^T\,\partial_{x_n} F\right) \quad \text{на} \quad R_T, \tag{4.24}$$

где на основании формул (4.17), (4.11), (4.13)

$$æ = z\,A^{-1}(E - \frac{m^T z}{\kappa})\,G^T = y\,(E - P^T Q^{-1}\frac{m^T z}{\kappa} QP)\,l^T = y\,E_{N-1}\,l^T \ne 0.$$

Матрица $1/æE_{N-1}l^T y$ является проектором ранга 1, как и матрица $m^T z/\kappa$, поэтому существует ортогональная (не единственная) матрица $M = \{m_{rs}\}_{1\le r,s\le N}$, которая приводит матрицу $1/æE_{N-1}l^T y$ к диагональному виду:

$$M^T \frac{1}{æ} E_{N-1} l^T y\, M = \operatorname{diag}(\underbrace{0,\dots,0}_{N-1},1) = E^1 \quad (M^T = M^{-1}).$$

Преобразуем левую часть условия (4.24)

$$\begin{aligned} &E_{N-1}\Big(E - \frac{1}{æ}E_{N-1}l^T y\Big)E_{N-1}\,\partial_{x_n} v^T = \\ &= E_{N-1}\,M\,M^T\Big(E - \frac{1}{æ}E_{N-1}l^T y\Big)M\,M^T\,E_{N-1}\,\partial_{x_n} v^T = \\ &= E_{N-1}\,M\Big(E - \frac{1}{æ}\,M^T\,E_{N-1}\,l^T\,y\,M\Big)M^T\,E_{N-1}\partial_{x_n} v^T = \\ &= E_{N-1}\,M\Big(E - E^1\Big)M^T\,E_{N-1}\,\partial_{x_n} v^T, \end{aligned}$$

тогда граничное условие (4.24) примет вид:

$$\begin{aligned} &E_{N-1}\,M\,E_{N-1}\,M^T\,E_{N-1}\,\partial_{x_n} v^T = \\ &= E_{N-1}\Big(h^T - \frac{1}{æ}l^T\,\partial_{x_n} F\Big) \quad \text{на} \quad R_T. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Здесь

$$E_{N-1}\,M\,E_{N-1}M^T E_{N-1} = (E_{N-1}\,M\,E_{N-1})(E_{N-1}M^T E_{N-1}).$$

Матрицы $E_{N-1}\,M\,E_{N-1}$, $E_{N-1}M^T E_{N-1}$ представляют собой матрицы с нулями в N-ом столбце и в N-ой строке. Это означает, что система граничных условий (4.25) состоит из $N-1$ условий, которые запишем в виде:

$$M_1\,M_1^T \partial_{x_n} v'^T = h' - \frac{1}{æ}\,l'^T \partial_{x_n} F \quad \text{на} \quad R_T, \tag{4.26}$$

где $M_1 = \{m_{rs}\}_{1\le r,s\le N-1}$. Детерминант произведения матриц $M_1\,M_1^T$ равен $\det^2 M_1$. Известно, что существует множество ортогональных матриц M, приводящих матрицу $1/æE_{N-1}l^T y$ к диагональному виду. Выберем среди них такую матрицу M, главный минор $N-1$-порядка которой $\det M_1$ отличен от нуля.

Таким образом, мы получили граничную задачу (4.21), (4.26) для параболических уравнений с неизвестными функциями $v_1, \dots,$ v_{N-1}. Эта задача имеет единственное решение $v_r \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\ \ \ t}(D_T)$, $r = 1, \dots, N-1$. Далее, интегрируя уравнение (4.23) по t и подставляя в него найденные функции $v' = (v_1, \dots, v_{N-1})$, мы определим последнюю неизвестную функцию v_N

$$v_N = \frac{1}{\kappa}\left(d_N - b' B^{-1} d'^T\right) F + b' B^{-1} v'^T \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\ \ \ t}(D_T).$$

Для функций $v_1, \dots, v_N$ справедлива оценка

$$\sum_{r=1}^{N} |v_r|^{(2+\alpha)}_{D_T} \le c_3\left(\sum_{r=1}^{N-1}(|p_r|^{(\alpha)}_{D_T} + |h_r|^{(1+\alpha)}_{R_T}) + |F|^{(2+\alpha)}_{D_T}\right). \tag{4.27}$$

Вспоминая обозначения (4.15): $u^T = A^{-1}\, Q\, P\, v^T$, и (4.17): $p^T = P^T\, Q^{-1}\, f^T$, $h^T = P^T\, Q^{-1}\, q^T$, мы получим, что $u_r \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\ \ \ t}(D_T)$, $r = 1, \dots, N$, при этом из неравенства (4.27) вытекает оценка (4.7):

$$\sum_{r=1}^{N} |u_r|^{(2+\alpha)}_{D_T} \le c_4 \sum_{r=1}^{N} |v_r|^{(2+\alpha)}_{D_T} \le c_1\left(\sum_{r=1}^{N}(|f_r|^{(\alpha)}_{D_T} + |q_r|^{(1+\alpha)}_{R_T}) + |F|^{(2+\alpha)}_{D_T}\right).$$

Теорема 4.1 доказана. □

Теорема 4.2 доказывается аналогично. Действительно, задача Коши (4.5), (4.6) сводится к задаче для уравнений (4.21), (4.23) в R^n с нулевыми начальными данными. Параболическая система уравнений (4.21) имеет единственное решение $v_r \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\ \ \ t}(R^n_T)$, $r = 1, \dots, N-1$. Из уравнения (4.23) будет следовать, что $v_N \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\ \ \ t}(R^n_T)$. Для найденных функций справедлива оценка

$$\sum_{r=1}^{N} |v_r|^{(2+\alpha)}_{R^n_T} \le c_5\left(\sum_{r=1}^{N-1} |p_r|^{(\alpha)}_{R^n_T} + |F|^{(2+\alpha)}_{R^n_T}\right). \tag{4.28}$$

Как и выше, учитывая обозначения (4.15), (4.17), при помощи неравенства (4.28) мы получим оценку (4.8) и теорему 4.2. □

Автор выражает глубокую благодарность профессору Г. Аманну за внимание к работе и ценные советы.

Литература

1. H. Amann, *Nonhomogeneous linear and quasi-linear elliptic and parabolic boundary value problems.* – Function Spaces, Differential Operator and Nonlinear Analysis. Teubner-Texte zur Math., Stuttgart-Leipzig, **133** (1993), 9–126.
2. H. Amann, M. Renardy, *Reaction-diffusion problems in electrolysis.* — NoDEA, **1** (1994), 91–117.
3. С. Н. Похожаев, *Об одной нелинейной эллиптической задаче Г. Аманна.* — Дифф. уравн., **30**, No. 4 (1994), 675–691.
4. H. Amann, *Linear and quasi-linear parabolic problems.* — Volume I. Monographs in Mathematics. Vol.89. Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin (1995), p. 335.
5. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* Наука, М. (1964).
6. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* Наука, М. (1967).
7. Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* Наука, М. (1989).
8. С. Г. Михлин, *Линейные уравнения в частных производных.* Высш. школа, М. (1977).
9. Г. И. Бижанова, *Исследование разрешимости многомерных двухфазных задач Стефана и нестационарной фильтрации Флорина для параболических уравнений второго порядка в весовых гельдеровских пространствах функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **213** (1994), 14–47.
10. А. И. Мальцев, *Основы линейной алгебры.* Наука, М. 1970.

Bizhanova G. I. On solvability of H. Amann's problem in Hölder spaces.

We prove local (in time) unique solvability of the nonlinear Amann problem in Hölder spaces of functions. Solution estimates are obtained in these spaces.

Алматинский
государственный
университет им. Абая
E-mail:galya@math.kz

Поступило 21 апреля 2002 г.