Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 295, 2003 г.

А. Архипова

ПРОБЛЕМА РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ НЕДИАГОНАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ПО ГРАДИЕНТУ (ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)

**Посвящается
академику О. А. Ладыженской
к ее юбилею**

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть функция $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $N > 1$, $u = (u^1, \dots, u^N)$, определяет решение системы

$$-\frac{d}{dx_\alpha} a_\alpha(x, u, u_x) + b(x, u, u_x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$u_x = \{u^k_{x_\alpha}\}^{k \leqslant N}_{\alpha \leqslant n}$.

Будем считать, что выполнены следующие условия.

a) Функции $a_\alpha = \{a^k_\alpha\}^{k \leqslant N}$ и $b = \{b^k\}^{k \leqslant N}$ определены и имеют указанные ниже непрерывные производные на множестве $(x, u, z) \in \mathcal{M} = \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nN}$, причем на $\mathcal{M}$ выполнены следующие ограничения:

$$\begin{gathered} |a_\alpha(x, a, z)| + \left|(a_\alpha)'_x(x, u, z)\right| + \left|(a_\alpha)'_u(x, u, z)\right| \leqslant \mu_1(1 + |z|); \\ \frac{\partial a^k_\alpha(x, u, z)}{\partial z^l_\beta} \xi^k_\alpha \xi^l_\beta \geqslant \nu|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^{nN}; \quad \left\| \frac{\partial a(x, u, z)}{\partial z} \right\| \leqslant \mu_1; \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} |b(x, u, z)| \leqslant \mu_2|z|^2 + \mu_3, \\ \left|(b)'_x(x, u, z)\right| + \left|(b)'_u(x, u, z)\right| \leqslant \mu_4(1 + |z|)^2; \\ \left|(b)'_z(x, u, z)\right| \leqslant \mu_4(1 + |z|); \end{gathered} \tag{3}$$

в условиях (2) и (3) положительные постоянные $\nu, \mu_1, \dots, \mu_4$ фиксированы произвольно.

Настоящая работа выполнена в рамках проектов РФФИ, грант 02-01-00276 и ФЦП "Интеграция", гос.контракт Б0026.

б) Все функции $\dfrac{\partial a_\alpha^k}{\partial z_\beta^l}$, $\dfrac{\partial a_\alpha^k}{\partial u^m}$, $\dfrac{\partial a_\alpha^k}{\partial x_\alpha}$ и b^k равномерно непрерывны по Гёльдеру по всем аргументам на любом компакте множества $\mathcal{M}$ с каким-либо показателем $\alpha_0 \in (0,1)$, и $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2+\alpha_0}$.

Будем считать, что решение системы (1) удовлетворяет нулевому условию Дирихле

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Условия (2), (3) описывают так называемые "естественные" порядки роста по градиенту функций, образующих систему.

Для систем (1) с *недиагональной* матрицей $\left\{\dfrac{\partial a}{\partial z}\right\}$ и функцией b, имеющей квадратичный рост по градиенту, проблема разрешимости краевых задач остается открытой по сей день. Примеры показывают, что даже при гладких данных речь может идти только об обобщенной разрешимости. Действительно, даже в случае двух пространственных переменных скалярное уравнение такого вида ($n = 2$, $N = 1$) может иметь неограниченные решения из $W_2^1(\Omega)$, а система ($n = 2$, $N > 1$) – ограниченное, но разрывное решение из пространства $W_2^1(\Omega)$ ([1], глава II, §3).

Проблема разрешимости для систем (1)–(3) ставилась, как правило, следующим образом: сформулировать достаточные условия, гарантирующие существование гладкого (хотя бы непрерывного) решения краевой задачи. Такого рода результаты были получены для систем с *диагональной* главной матрицей (см. [2], глава VIII, [3–5] и ссылки в них). В работе [6] рассматривалась недиагональная система (1) в случае двух пространственных переменных. В [6] приведены условия, дополнительные к условиям (2) и (3), при которых существует непрерывное по Гёльдеру в $\overline{\Omega}$ решение из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ задачи (1), (2).

Изучение задач о гармонических отображениях между римановыми многообразиями привело к необходимости допущения сингулярных решений у *диагональных* систем с квадратичной нелинейностью по градиенту. Появилась проблема изучения характера этих сингулярностей (см. [7–9]) и ссылки в них).

В данной работе изучается проблема разрешимости задачи (1), (4) для двух пространственных переменных. Мы не ставим целью выделить класс *непрерывных* обобщенных решений. Наоборот, нас интересуют наиболее общие ситуации, при которых задача разрешима в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. Мы доказываем существование обобщенного решения в смысле распределений из пространств $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и показываем, что это решение является гладким в $\overline{\Omega}$, за исключением, быть может, конечного числа сингулярных точек.

Ранее автором была установлена разрешимость задачи (1), (4) при $n = 2$ в частном случае, когда система (1) имеет вариационную структуру.

Рассмотрим функционал

$$E[u] = \int\limits_{\Omega} f(x, u, u_x)dx, \quad u : \Omega \to \mathbb{R}^N, \quad u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega), \tag{5}$$

и предположим, что $f(x, u, z) \approx |z|^2$, $|z| \gg 1$, а функции $a^k_\alpha = f_{p^k_\alpha}$, $b^k = f_{u^k}$ подчиняются условиям (2), (3). Тогда система уравнений Эйлера

$$-\frac{d}{dx_\alpha} f_{p^k_\alpha}(x, u, u_k) + f_{u^k}(x, u, u_x) = 0, \quad k \leqslant N, \quad x \in \Omega, \tag{6}$$

является системой вида (1).

В работах автора [10–13] доказана глобальная разрешимость начально-краевых задач для параболических сильно нелинейных систем вариационного типа при $n = 2$. Решения $u(x, t)$, $(x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, \infty)$ этих задач сходятся при $t \to +\infty$ к решению $u(x)$ системы (6), Функция u принадлежит пространству $W^1_2(\Omega)$ и является гладкой в $\overline{\Omega}$ функцией, за исключением, быть может, конечного числа сингулярных точек. Вариационная структура системы в работах [10–13] была существенна.

Отметим, что результат о разрешимости задачи (1), (4), полученный в данной работе (теорема 1) базируется на применении теоремы о “квазиобратных” неравенствах Гёльдера (теорема 2), доказанной автором в работе [14].

Для доказательства существования решения задачи (1), (4), построим при произвольно фиксированном $m > 2$ семейство задач с параметром $\varepsilon \in (0, 1]$:

$$\begin{gathered} -\frac{d}{dx_\alpha}\Big(a_\alpha(x, u, u_x) + \varepsilon u_{x_\alpha}\Big(1 + |u_x|^2\Big)^{\frac{m}{2}-1}\Big) + b(x, u, u_x) = 0, \\ x \in \Omega, \quad u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Утверждение 1. *При выполнении условий* а) *и* б) *существует решение* $u^\varepsilon \in \mathbb{C}^{2+\alpha_0}(\overline{\Omega})$ *задачи* (7) *для любого фиксированного* $\varepsilon \in (0,1]$.

Доказательство. Из интегрального тождества для задачи (7) с помощью условий (2) и (3) легко выводится априорная оценка

$$\|u^\varepsilon\|_{W^1_m(\Omega)} \leqslant c_1(\varepsilon^{-1}). \tag{8}$$

В силу теоремы вложения, оценка (8) гарантирует, что

$$\|u^\varepsilon\|_{\mathbb{C}^\beta(\overline{\Omega})} \leqslant c_2(\varepsilon^{-1}), \quad \beta = 1 - \frac{2}{m} > 0. \tag{9}$$

Оценка (9) далее существенно используется, чтобы с помощью стандартной техники показать ограниченность норм $\|u^\varepsilon\|_{W^2_{2+\delta}(\Omega)}$ при некотором $\delta > 0$, а следовательно и $\|u^\varepsilon_x\|_{\mathbb{C}^\gamma(\overline{\Omega})}$, $\gamma = 1 - \dfrac{2}{2+\delta} > 0$, постоянными $c(\varepsilon^{-1})$. Априорная оценка решения u^ε в пространстве $\mathbb{C}^{1+\gamma}(\overline{\Omega})$ позволяет показать разрешимость задачи (7) с пространстве $\mathbb{C}^{2+\alpha_0}(\overline{\Omega})$ (см., например, [2], глава IV, §10). Существенным для доказательства разрешимости задачи (7) является тот факт, что при $m > 2$ квадратичная нелинейность по градиенту функции b не является предельной для данной системы. Таким образом утверждение 1 можно считать доказанным. □

Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть выполнены сформулированные ранее условия* а) *и* б). *Если для решений* u^ε *задачи* (7), $\varepsilon \in (0,1]$, *справедлива оценка*

$$\|u^\varepsilon_x\|^2_{L_2(\Omega)} + \varepsilon \|u^\varepsilon_x\|^m_{L_m(\Omega)} \leqslant \mathbf{e}_0, \tag{10}$$

с постоянной $\mathbf{e}_0$, *не зависящей от* ε, *тогда существует обобщенное решение* $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ *задачи* (1), (4). *Это решение является* $\mathbb{C}^{2+\alpha_0}$*-гладкой функцией в* $\overline{\Omega}$, *за исключением, быть может, конечного числа сингулярных точек.*

Замечание 1. Оценка (10) имеет место, если, например, дополнительно к условиям (2) и (3) предположить, что

$$a_\alpha(x,u,z)z_\alpha + b(x,u,z)u \geqslant \nu_0|z|^2 - \mu_0, \quad (x,u,z) \in \mathcal{M}, \tag{11}$$

с некоторыми постоянными $\nu_0 > 0$, $\mu_0 \geqslant 0$.

Замечание 2. В теореме 1 мы используем специальную аппроксимацию задачи (1), (4). Как было отмечено ранее, в роли регуляризации может выступать решение параболической задачи, если оператор системы имеет вариационную структуру (6). В этом случае решение задачи (6), (4) $u(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$, где $u(x,t)$ является решением параболической задачи в $Q = \Omega\times[0,\infty)$, и роль параметра играет переменная $t\to+\infty$. Вариационная структура оператора гарантирует оценку

$$\|u_t\|^2_{L_2(Q)} + \sup_{t\in[0,\infty)} \|u_x(\,\cdot\,,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \mathbf{e}_0,$$

которая является аналогом условия (10). Кроме того, в работах [10–13] показано, что может существовать не более конечного числа моментов времени $t\in(0,\infty]$, где решение $u(\,\cdot\,,\widehat{t}_j)$ не является гладкой в $\overline{\Omega}$ функций. Таким образом, существует такое число $T>0$, что параболическая задача представляет при $t>T$ гладкую аппроксимацию эллиптической задачи (6), (4). В этом случае не нужно ограничение вида (11).

Далее нам потребуются следующие обозначения.

$B_R(x^0) = \{x\in\mathbb{R}^2 \mid |x-x^0|<R\}$, $Q_R(x^0) = \{x\in\mathbb{R}^2 \mid |x_i-x_i^0|<R$, $i=1,2\}$, $\Omega_R(x^0) = \Omega\cap B_R(x^0)$;

$|A| = \operatorname{meas}_2 A$ – мера Лебега множества $A\subset\mathbb{R}^2$;

$$u_{R,x^0} = \frac{1}{|\Omega_R|}\int\limits_{\Omega_R(x^0)} u(y)dy = \fint\limits_{\Omega_R(x^0)} u(y)dy; \quad \|u\|_{m,A} = \|u\|_{L_m(A)};$$

$\mathcal{L}^{2,\lambda}(D)$ – пространство Кампанато с нормой

$$\|v\|_{2,\lambda;D} = \|v\|_{2,D} + [v]_{2,\lambda;D},$$

где

$$[v]_{2,\lambda;D} = \Bigg(\sup_{\substack{y\in D\\ \rho\leqslant\operatorname{diam} D}} \frac{1}{\rho^\lambda}\int\limits_{\Omega_\rho(y)} |v(x)-v_{\rho,y}|^2dx\Bigg)^{\frac12}.$$

Как было отмечено ранее, при доказательстве теоремы 1 будет существенно использована теорема о квазивариационных неравенствах, доказанная автором в работе [14].

Теорема 2 [14]. *Пусть фиксированы числа* s, $l > 1$ *и* $\varkappa > 0$. *Пусть* $z \in L_m(Q)$, $z \geqslant 0$ *в* Q, $m > sl$, $Q = Q_{\widehat{R}}(\widehat{x}) \subset \mathbb{R}^2$ ($\widehat{x} \in \mathbb{R}^2$ *и* $\widehat{R} > 0$ *фиксированы произвольно). Предположим, что функция* z *удовлетворяет в любом шаре* $B_R \subset Q$ *неравенствам*

$$\fint_{B_{R/2}} z^s dx \leqslant c_0 \left[\left(\fint_{B_R} z dx \right)^s + c(l)\varkappa \left(\fint_{B_R} z^{ls} dx \right)^{1/l} \right], \tag{12}$$

c_0, $c(l) = \text{const} > 0$.

Тогда существует такое число $p_0 > s$, $p_0 = p_0(s, c_0)$, *что для* $p \in (q, \min\{m, p_0\})$ *верно неравенство*

$$\|z\|_{p,Q_r} \leqslant c_* \|z\|_{s,Q}, \quad \forall\, Q_r \Subset Q, \tag{13}$$

если $l \in (1, p/q)$ *и* $\varkappa \leqslant \frac{\varkappa_0}{c(l)}$ *(число* $\varkappa_0$ *определяется параметрами* s, p, l *и* c_0*); постоянная* c_* *зависит от тех же величин, что и* $\varkappa_0$, *а также от* $c(l)\varkappa$ *и* $\operatorname{dist}(Q_r, \partial Q)$.

Для произвольного пока числа $\theta > 0$ определим множество $\mathbb{R}_\theta$ следующим образом:

точка $x^0 \in \mathbb{R}_\theta$, *если* $x^0 \in \overline{\Omega}$ *и для нее найдутся число* $R_0 > 0$ *и последовательность* $\varepsilon_i \to 0$ *такие, что*

$$\int_{\Omega_{R_0}(x^0)} \left|u_x^{\varepsilon_i}\right|^2 + \varepsilon_i \left(1 + \left|u_x^{\varepsilon_i}\right|^2\right)^{m/2} dx < \theta^2. \tag{14}$$

Из неравенства Пуанкаре и определения множества $\mathbb{R}_\theta$ следует, что для точек $y^0 \in \Omega_{R_0/2}(x^0)$ и радиусов $\rho \leqslant R_0/2$ справедливы неравенства

$$\int_{\Omega_\rho(y^0)} \left|u^{\varepsilon_i} - (u^{\varepsilon_i})_{\rho,y^0}\right|^2 dx \leqslant c_1 \rho^2 \int_{\Omega_\rho(y^0)} \left|u_x^{\varepsilon_i}\right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \rho^2 \int_{\Omega_{R_0(x^0)}} \left|u_x^{\varepsilon_i}\right|^2 dx < c_1 \theta^2 \rho^2.$$

Следовательно,

$$\left[u^{\varepsilon_i}\right]^2_{\mathcal{L}^{2,2}(\Omega_{R_0/2}(x^0))} \leqslant c_1 \theta^2. \tag{15}$$

Кроме того, согласно теореме вложения $W_2^1(\Omega_\rho) \hookrightarrow L_r(\Omega_\rho)$, $\forall\, r > 1$, верна оценка

$$\left\| u^{\varepsilon_i} - (u^{\varepsilon_i})_{\rho,y^0} \right\|_{r,\Omega_\rho(y^0)} \leqslant c_2 \rho^{2/r} \left\| u_x^{\varepsilon_i} \right\|_{2,\Omega_\rho(y^0)},$$

откуда получаем, что

$$\begin{gathered} \Bigg(\fint_{\Omega_\rho(y^0)} \left| u^{\varepsilon_i} - (u^{\varepsilon_i})_{\rho,y^0} \right|^r dx \Bigg)^{1/r} \leqslant \\ \leqslant c_3 \Bigg(\int_{\Omega_\rho(y^0)} \left| u_x^{\varepsilon_i} \right|^2 dx \Bigg)^{1/2} \underset{(14)}{\leqslant} c_3 \theta, \\ \forall\, y^0 \in \Omega_{R_0/2}(x^0), \quad \rho \leqslant R_0/2, \quad \forall\, r \geqslant 1. \end{gathered} \tag{16}$$

Теперь, с помощью теоремы 2 мы докажем следующее утверждение.

Утверждение 2. *Существуют такие числа $\theta_0 > 0$ и $p > 2$, определяемые параметрами ν, $\mu_1, \dots, \mu_3$ из условий (2) и (3), что если $x^0 \in \mathbb{R}_\theta$, где $\theta \leqslant \theta_0$, тогда*

$$\left\| u_x^{\varepsilon_i} \right\|_{p,\Omega_{R_0/2}(x^0)} \leqslant c_4, \tag{17}$$

где число $R_0 > 0$ и последовательность $\{\varepsilon_i\}$ – из определения множества $\mathbb{R}_\theta$, и постоянная c_4 определяется также параметрами из условий (2) и (3), а также постоянной $\mathbf{e}_0$ из условия (10).

Доказательство. Пусть $x^0 \in \mathbb{R}_\theta$, где $\theta > 0$ фиксировано пока произвольно. Существуют $R_0 > 0$ и $\varepsilon_i \to 0$ такие, что выполнено условие (14). Зафиксируем произвольно $y^0 \in Q_{R_0/\sqrt{2}} \cap \Omega \subset \Omega_{R_0}(x^0)$ и шар $B_R(y^0) \subset Q_{R_0/\sqrt{2}}(x^0)$. Пусть ζ – срезающая для $B_R(y^0)$ функция, $\zeta = 1$ в $B_{R/2}(y^0)$. Положим в интегральном тождестве, соответствующем задаче (7), пробную функцию $h = \big(u^{\varepsilon_i} - (u^{\varepsilon_i})_{R,y^0}\big)\zeta^m$, считая пока, что $B_R(y^0) \cap \partial\Omega = \varnothing$.

Далее в утверждении 2 пишем для краткости u вместо u^{ε_i}, u_R – вместо $(u^{\varepsilon_i})_{R,y^0}$.

Из тождества с указанной функцией h легко выводится неравенство

$$\int_{\Omega_R(y^0)} \Big(|u_x|^2 + \varepsilon |u_x|^2 \big(1 + |u_x|^2\big)^{m/2-1} \Big) \zeta^m \, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_5\Big\{ \int\limits_{\Omega_R(y^0)} (1+|u_x|)|u-u_R|\zeta^{m-1}|\zeta_x|\,dx+$$

$$+\varepsilon \int\limits_{\Omega_R(y^0)} |u_x|\big(1+|u_x|^2\big)^{m/2-1}|u-u_R|\zeta^{m-1}|\zeta x|\,dx+ \qquad (18)$$

$$+\int\limits_{\Omega_R(y^0)} \big(1+|u_x|\big)^2|u-u_R|\zeta^m\,dx\Big\} = c_5\{J_1+J_2+J_3\}.$$

В неравенстве (18) $c_5 = c_5(\nu,\mu_1,\mu_2,\mu_3)$, а через J_1, J_2 и J_3 обозначены соответствующие интегралы в фигурных скобках. Оценим каждый интеграл J_k, $k\leqslant 3$, отдельно.

Справедливы неравенства

$$J_1 \leqslant \delta \int\limits_{\Omega_R} \big(1+|u_x|\big)^2\zeta^m\,dx + \frac{c(\delta)}{R^2}\int\limits_{\Omega_R}|u-u_R|^2\,dx \underset{\{*\}}{\leqslant}$$

$$\underset{\{*\}}{\leqslant} \delta \int\limits_{\Omega_R} \big(1+|u_x|\big)^2\zeta^m\,dx + \frac{c(\delta)}{R^2}\Big(\int\limits_{\Omega_R}|u_x|\,dx\Big)^2, \quad \forall\,\delta>0.$$

Неравенство $\{*\}$ имеет место в силу теоремы вложения $W_1^1(\Omega_R)\hookrightarrow L_2(\Omega_R)$, $n=2$.

Далее,

$$J_2 \leqslant \frac{\varepsilon c}{R}\int\limits_{\Omega_R}\big(1+|u_x|\big)^{m-1}\zeta^m|u-u_R|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{R}\Big(\int\limits_{\Omega_R}\varepsilon\big(1+|u_x|^2\big)^{m/2}\zeta^m\,dx\Big)^{\frac{m-1}{m}}\Big(\int\limits_{\Omega_R}\varepsilon|u-u_R|^m\,dx\Big)^{1/m} \leqslant \qquad (19)$$

$$\leqslant \delta\int\limits_{\Omega_R}\varepsilon\big(1+|u_x|\big)^{m/2}\zeta^m\,dx + \frac{c(\delta)}{R^m}\int\limits_{\Omega_R}\varepsilon|u-u_R|^m\,dx.$$

Для оценки последнего интеграла в неравенствах (19) мы воспользуемся теоремой вложения $W^1_{m/2}(\Omega_R)\hookrightarrow L_m(\Omega_R)$, а точнее неравенством

$$\|v\|_{m,\Omega_R} \leqslant cR^{1-\frac{2}{m}}\|v_x\|_{m/2,\Omega_R}, \quad v\in W^1_{m/2}(\Omega_R), \quad \int\limits_{\Omega_R} v\,dy = 0,$$

для функции $v = u - u_R$ ($c > 0$ – абсолютная постоянная).

Тогда

$$J_2 \leqslant \delta \int\limits_{\Omega_R} \varepsilon\bigl(1 + |u_x|^2\bigr)^{m/2}\,dx + \frac{c(\delta)\varepsilon}{R^2}\biggl(\int\limits_{\Omega_R} |u_x|^{m/2}\,dx\biggr)^2.$$

Полагая в оценках интегралов J_1 и J_2 $\delta = \frac{1}{2}$, из (18) для функции

$$g(x) = \Bigl(\bigl|u_x^{\varepsilon_i}(x)\bigr| + 1\Bigr) + \sqrt{\varepsilon_i}\Bigl(\bigl|u_x^{\varepsilon_i}(x)\bigr| + 1\Bigr)^{m/2}$$

выводим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\Omega_{R/2}(y^0)} g^2\,dx \leqslant \frac{c_6}{R^2}\biggl(\int\limits_{\Omega_R(y^0)} g\,dx\biggr)^2 + c_7\,J_3. \tag{20}$$

Зафиксируем пока произвольно $l > 1$ и воспользуемся неравенством (16) с $r = \dfrac{l}{l-1}$ для оценки интеграла J_3:

$$J_3 \leqslant \biggl(\fint\limits_{\Omega_R} \bigl(1 + \bigl|u_x\bigr|\bigr)^{2l}\,dx\biggr)^{1/l}\biggl(\fint\limits_{\Omega_R} \bigl|u - u_R\bigr|^{\frac{l}{l-1}}\,dx\biggr)^{\frac{l-1}{l}} |\Omega_R| \leqslant$$

$$\leqslant c_8(l)\theta R^2\biggl(\fint\limits_{\Omega_R} \bigl(1 + \bigl|u_x\bigr|\bigr)^{2l}\,dx\biggr)^{1/l}.$$

Теперь из (20) следует, что

$$\fint\limits_{\Omega_{R/2}} g^2\,dx \leqslant c_9\biggl\{\biggl(\fint\limits_{\Omega_R} g\,dx\biggr)^2 + c(l)\theta\biggl\{\biggl(\fint\limits_{\Omega_R} g^{2l}\,dx\biggr)^{1/l}\biggr\}, \tag{21}$$

если $B_R(y^0) = \Omega_R(y^0) \subset Q_{\frac{R_0}{\sqrt{2}}}(x^0)$. В случае, когда $y^0 \in \partial\Omega$, оценка вида (21) выводится аналогично из интегрального тождества с пробной функцией $h = u^{\varepsilon_i}\zeta^m$. Из оценки (21) для внутренних по отношению к Ω шаров и шаров с центром на $\partial\Omega$, в результате “сшивания”, получаем, что эта оценка справедлива при любом расположении $y^0 \in Q_{R_0/\sqrt{2}}(x^0) \cap \Omega$.

Заметим, что $u^\varepsilon\Big|_{\partial\Omega} = 0$, и в случае, когда $B_R(y^0)\cap(R^2\setminus\Omega)\neq\varnothing$, мы считаем, что $u^\varepsilon = 0$ в $B_R(y^0)\setminus\Omega_R(y^0)$. Очевидно, что функция g определена и суммируема со степенью ql в окрестности области Ω, и неравенства вида (21) справедливы в $B_{R/2}(y^0)$, $B_R(y^0)$ с другой постоянной c_9.

Неравенства (21) при $\theta = 0$ являются обратными неравенствами Гёльдера, из которых, согласно лемме Геринга (модификация M. Giaquinta–G. Modica [1, глава 5]) следует существование чисел $p_0 > 2$ и $c_{10} > 0$ таких, что при $p \in [2, p_0)$

$$\|g\|_{p,\Omega_{R_0/2}(x^0)} \leqslant c_{10}\|g\|_{2,\Omega_{R_0}(x^0)}. \tag{22}$$

Постоянные p_0 и c_{10} определяются в этом случае постоянной c_9 из неравенств (21) с параметром $\theta = 0$, а c_{10} зависит также от R_0.

Оказалось, что если $\theta \neq 0$ в (21), то оценка вида (22) остается справедливой, если считать, что $1 < l < p_0/2$ и $\theta \ll 1$. Действительно, для функции $z = g$ при $s = 2$ из (21) следует оценка (12) в шарах $B_R \subset Q_{R_0/\sqrt{2}}(x^0)$. Согласно теореме 2, существует такое число $p_0 = p_0(c_9) > 2$, что если зафиксировать $p \in (2, p_0)$ и считать, что $l \in (1, p/2)$, а $\theta < \varkappa_0/c(l) \equiv \theta_0$ с неравенствах (21), тогда верна оценка (13) для $z = g$:

$$\|g\|_{p,Q_{R_0/2}(x^0)} \leqslant c_{11}(R_0)\|g\|_{2,Q_{R_0/\sqrt{2}}(x^0)}. \tag{23}$$

Положим теперь $p = \dfrac{p_0+2}{2}$, $l = \dfrac{p+2}{4}$, и отметим, что эти параметры зависят только от постоянной c_9. В определении множества $\mathbb{R}_\theta$ будем считать, что $\theta \leqslant \theta_0$, $\theta_0 = \theta_0(c_9)$, т.е. θ_0 определяется параметрами ν, μ_1, μ_2 и μ_3. Вспоминая определение функции g, из (10) и (23) выводим оценку (17). Утверждение 2 доказано. $\square$

Доказательство теоремы 1. Согласно теореме вложения, из оценки (17) следует, что

$$\|u^{\varepsilon_i}\|_{\mathbb{C}^\beta(\overline{\Omega_{R_0/2}(x^0)})} \leqslant c_{12}, \quad \beta = 1 - \frac{2}{p} > 0. \tag{24}$$

Оценка (24) позволяет оценить равномерно по $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$ вторые производные функции u^{ε_i} в нормах L_2 и $L_{2+\delta}$, $\delta > 0$, и показать, что

$$\|u_x^{\varepsilon_i}\|_{\mathbb{C}^\gamma(\overline{\Omega_{R_0/2}(x^0)})} \leqslant c_{13} \tag{25}$$

для некоторого $\gamma \in (0,1)$.

Вывод оценки (25) осуществляется стандартным образом, в местной системе координат, с помощью "распрямления" части $\partial\Omega$. Этот вывод мы опускаем.

В свою очередь, оценка (25) позволяет посмотреть на задачу (8) как на линейную с непрерывными по Гёльдеру коэффициентами в $\overline{\Omega_{R_0/4}(x^0)}$, и вывести оценку

$$\left\|u^{\varepsilon_i}\right\|_{\mathbb{C}^{2+\alpha_0}(\overline{\Omega_{R_0/8}(x^0)})} \leqslant c_{14}. \tag{26}$$

Осуществляя теперь предельный переход по $\varepsilon_i \to 0$, получаем, что предельная функция $u \in \mathbb{C}^{2+\alpha_0}(\overline{\Omega_{R_0/8}(x^0)})$. Очевидно, что в $\overline{\Omega_{R_0/8}(x^0)}$ функция u удовлетворяет системе и краевому условию.

Таким образом, если $x^0 \in \mathbb{R}_\theta$, $\theta \leqslant \theta_0$, тогда x^0 – точка гладкости функции u. Далее число $\theta \leqslant \theta_0$ считаем фиксированным.

Нетрудно видеть, что $\mathbb{R}_\theta$ – открытое множество. Положим $\Sigma_\theta = \overline{\Omega} \setminus \mathbb{R}_\theta$. Очевидно, что Σ_θ – замкнутое множество, и если $\widehat{x} \in \Sigma_\theta$, то при любых $R > 0$ и последовательности $\varepsilon \to 0$,

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_R(\widehat{x})} \Big(|u_x^\varepsilon|^2 + \varepsilon(1+|u_x^\varepsilon|^2)^{m/2}\Big)dx \geqslant \theta^2. \tag{27}$$

Зафиксируем произвольно M точек $\widehat{x}^1, \dots, \widehat{x}^M \in \Sigma_\theta$, и пусть $R > 0$ фиксировано так, чтобы $B_R(\widehat{x}^i) \cap B_R(\widehat{x}^j) = \varnothing$, $\forall\, i,j \leqslant M$, $i \neq j$. Пусть $\{\varepsilon_k\}$ – произвольная последовательность чисел, стремящихся к нулю. Очевидно, что существует $k_0 \in N$ такое, что $\forall\, k \geqslant k_0$ и $j = 1, \dots, M$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega_R(\widehat{x}_j)} \Big(|u_x^{\varepsilon_k}|^2 + \varepsilon_k(1+|u_x^{\varepsilon_k}|^2)^{m/2}\Big)dx \geqslant \frac{\theta^2}{2}.$$

Откуда следует, что

$$M \cdot \frac{\theta^2}{2} \leqslant \sum_{j=1}^{M} \int\limits_{\Omega_R(\widehat{x}_j)} \Big(|u_x^{\varepsilon_k}|^2 + \varepsilon_k(1+|u_x^{\varepsilon_k}|^2)^{m/2}\Big)dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega} \Big[|u_x^{\varepsilon_k}|^2 + \varepsilon_k(1+|u_x^{\varepsilon_k}|^2)^{m/2}\Big]dx \leqslant \mathbf{e}_0.$$

Таким образом, количество возможных сингулярных точек ограничено и $M \leqslant \frac{2\mathbf{e}_0}{\theta^2}$.

Это означает, что $u \in \mathbb{C}^{2+\alpha_0}(\overline{\Omega} \setminus \Sigma_\theta) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Согласно лемме Де-Джорджи ([1, глава II, лемма 3.1]), u – обобщенное решение задачи (1), (4) в смысле распределений. Теорема 1 полностью доказана. □

Литература

1. M. Giaquinta, *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems.* — Princeton, NJ (1983).
2. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* Наука, М. (1973).
3. S. Hildebrandt, H. Kaul, K.-O. Widman, *An existence theorem for harmonic mappings of Riemannian manifols.* — Acta Math. **138** (1977), 1–16.
4. J. Frehse, *On a class of nonlinear diagonal elliptic systems with critical growth and $\mathbb{C}^\alpha$-regularity.* — Partial differential equations and the calculus of variations **11**, 519–540. Progr. Nonlinear Diff. Eq. Appl. **2**, Birkhäuser Boston, Boston, MA (1989).
5. R. Landes, *On the existence of weak solutions of perturbed systems with critical growth.* — J. Reine Angew. Math. **393** (1989), 21–38.
6. J. Frehse, *On two-dimensional quasi-linear elliptic systems.* — Manuscripta Math. **28** (1979), 21–49.
7. M. Struwe, *Variational Methods.* Springer-Verlag (1990).
8. L. C. Evans, *Partial regularity for stationary harmonic maps into sphere.* — Arch. Rat. Mech. Anal. **116** (1991), 101–113.
9. T. Rivière, *Everywhere discontinuous harmonic maps into spheres.* — Acta Math. **175** (1995), 197–226.
10. А. А. Архипова, *О глобальной разрешимости задачи Коши–Дирихле для недиагональных параболических систем с вариационной структурой при двух пространственных переменных.* — Сб. Проблемы матем. анализа, вып. 16, изд.С.-Петерб. ун-та (1997), 3–40.
11. А. А. Архипова, *Локальная и глобальная по времени разрешимость задачи Коши–Дирихле для класса нелинейных недиагональных параболических систем.* — Алгебра и Анализ **11**, 6 (2001), 69–102.
12. A. Arkhipova, *Cauchy–Neumann problem for a class of nondiagonal parabolic systems with quadratic growth nonlinearities. I. On the continuability of smooth solutions.* — Comment. Math. Univ. Carolonae **41**, 4 (2000), 693–718.
13. A. Arkhipova, *Cauchy–Neumann problem for a class of nondiagonal parabolic systems with quadratic growth nonlinearities. II. Local and global solvability results.* — Comment. Math. Univ. Carolonae **42**, 4 (2001), 53–76.
14. A. Arkhipova, *Quasireverse Hölder inequalities and a priori estimates for strongly nonlinear systems.* в печати.

Arkhipova A. Solvability of nondiagonal elliptic systems with quadratic growth nonlinearities (two-dimensional case).

Existence of a weak solution of the Dirichlet problem to nondiagonal elliptic systems with quadratic growth nonlinearities is proved in the two-dimensional case. It is established that the solution is smooth in the closure of a given domain with exception of at most finitely many points. The result is essentially based upon the theorem on "quasireverse" Hölder inequalities earlier proved by the author.

С.-Петербургский
государственный
университет
e-mail:arina@aa1101.spb.edu

Поступило 10 ноября 2002 г.