Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 294, 2002 г.

А. Н. Фролов

О ВЕРОЯТНОСТЯХ УМЕРЕННЫХ УКЛОНЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Введение

Пусть $\{X_{nk},\ k=1,2,\dots,k_n,\ n=1,2,\dots\}$ – последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин с нулевыми средними и конечными дисперсиями, $S_n = X_{n1}+X_{n2}+\dots+X_{nk_n}$, $B_n = ES_n^2$. Вероятностями умеренных уклонений будем называть вероятности $P(S_n \geq x\sqrt{B_n})$, где $x = O(\sqrt{\log B_n})$.

Асимптотическое поведение вероятностей умеренных уклонений исследовалось Линником [1], Ибрагимовым и Линником [2], Нагаевым С. В. [3], Амосовой [4], Розовским [5] в случае одинаково распределенных слагаемых и Рубином и Сетураманом [6], Амосовой [7], Сластниковым [8], Амосовой [9] для схемы серий. В работах упомянутых авторов найдены условия, необходимые и (или) достаточные для того, чтобы вероятности умеренных уклонений сумм независимых случайных величин были эквивалентны соответствующим нормальным уклонениям равномерно по x из области $0 \leq x \leq c\sqrt{\log B_n}$. В частности, в результатах Рубина и Сетурамана [6] и Сластникова [8] достаточные для нормальной сходимости условия сформулированы в терминах сумм абсолютных моментов рассматриваемых случайных величин. В односторонних результатах Амосовой [7, 9] такие условия сформулированы либо в терминах сумм моментов положительных частей, либо в терминах сумм правых хвостов распределений рассматриваемых случайных величин. При этом также предполагается выполненным некоторое дополнительное условие на урезанные вторые моменты типа условия Линдеберга.

Предельное поведение вероятностей $P(S_n \geq x_n\sqrt{B_n})$, $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$, изучалось Нагаевым А. В. [10], Михелем [11], Фроловым [12] для одинаково распределенных случайных величин

Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, грант 02-01-00779 и гранта ведущих научных школ 00-15-96019.

и Рыхликом [13] и Петровым [14] для последовательности независимых неодинаково распределенных случайных величин. В частности, в двух последних работах граница зоны нормальной сходимости вероятностей умеренных уклонений выражается через дробь Ляпунова. Отметим, что в [11, 12] получены также оценки скорости убывания $P(S_n \geq x_n\sqrt{B_n})$ вне области нормальной сходимости. Такие оценки для распределений с правильно меняющимися хвостами получены в [10].

Таким образом, в теории умеренных уклонений выделяются два направления исследований. Задача первого направления состоит в отыскании условий (обычно выражающихся в терминах моментов), необходимых и (или) достаточных для того, чтобы вероятности умеренных уклонений сумм независимых случайных величин были эквивалентны соответствующим нормальным уклонениям равномерно по x из некоторой заданной области. Задача второго направления состоит в том, чтобы при заданных моментных ограничениях, во-первых, указать зону нормальной сходимости, во-вторых, получить оценки для вероятностей умеренных уклонений за пределами этой зоны. При этом в первом направлении полностью отсутствуют результаты, в которых зона нормальной сходимости выражалась бы в терминах дробей Ляпунова или их аналогов. Во втором направлении не рассмотрен случай схемы серий. Здесь также оставался открытым вопрос о точном размере зоны нормальной сходимости, так как эта зона должна в большей степени зависеть от правых хвостов распределений слагаемых, а дробь Ляпунова в этом смысле симметрична. Заметим также, что результаты второго типа могут быть полезнее в приложениях, зачастую не требующих равномерных оценок. Например, они позволяют получать оптимальные результаты, обобщающие сильные предельные теоремы типа законов Чёргё–Ревеса для приращений сумм независимых случайных величин (см. [12]). Кроме того, представляет интерес вопрос о логарифмической асимптотике вероятностей умеренных уклонений.

В настоящей работе исследовано асимптотическое поведение вероятностей умеренных уклонений сумм и логарифмов этих вероятностей в схеме серий независимых случайных величин. При этом сделаны более слабые моментные предположения о левых хвостах распределений слагаемых. Показано, что ширина зоны нормальной сходимости выражается через дроби Ляпунова, построенные только по положительным частям рассматриваемых случайных величин. В настоящей работе получены как равномерные, так и неравномерные оценки.

Остальная часть статьи организована следующим образом. В §1 рассмотрен случай последовательности серий независимых в каждой серии случайных величин. Для одинаково распределенных случайных величин удается доказать более сильные результаты, которые приведены в §2. Доказательства содержатся в §3.

Всюду, где использованы символы $\sim$, o, O, $\to$, $\limsup$ и $\liminf$ считаем, что $n\to\infty$, если не оговорено противное.

§1. Предельные теоремы в схеме серий

Пусть $\{X_{nk},\ k=1,2,\dots,k_n,\ n=1,2,\dots\}$ – последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин с $F_{nk}(y)=P(X_{nk}<y)$, $EX_{nk}=0$, $EX_{nk}^2=\sigma_{nk}^2<\infty$ $(k=1,2,\dots,k_n,\ n=1,2,\dots)$. Обозначим

$$S_n=\sum_{k=1}^{k_n}X_{nk},\qquad B_n=\sum_{k=1}^{k_n}\sigma_{nk}^2.$$

Предположим, что $B_n\to\infty$. Пусть для некоторого $p>2$

$$\beta_{pnk}=\int\limits_0^\infty y^p\,dF_{nk}(y)<\infty\quad (k=1,2,\dots,k_n,\ n=1,2,\dots).$$

Положим

$$M_{pn}=\sum_{k=1}^{k_n}\beta_{pnk},\qquad L_{pn}=\frac{1}{B_n^{p/2}}M_{pn},$$

$$\Lambda_n(t,s,\varepsilon)=\frac{t}{B_n}\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon\sqrt{B_n}/s}y^2\,dF_{nk}(y),$$

$$M_{pn}(t,\varepsilon)=\frac{1}{M_{pn}}\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{\varepsilon t\sqrt{B_n}}^{\infty}y^p\,dF_{nk}(y).$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что

$$L_{pn}\to 0.$$

Обозначим

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Сформулирем сначала результаты, содержащие неравномерные оценки вероятностей умеренных уклонений.

Теорема 1.1. *Пусть выполнено условие* (1.1). *Пусть* $x = x_n$, $x_n \to \infty$, *удовлетворяет условию*

$$\Lambda_n(x^4, x^5, \varepsilon) \to 0 \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0. \tag{1.2}$$

Если $x^2 - 2\log(1/L_{pn}) - (p-1)\log\log(1/L_{pn}) \to -\infty$, *то*

$$P(S_n \geq x\sqrt{B_n}) = (1 - \Phi(x))(1 + o(1)). \tag{1.3}$$

Если $x^2 = 2\log(1/L_{pn}) + (p-1)\log\log(1/L_{pn}) + M$, $M = \text{const}$, *то*

$$P(S_n \geq x\sqrt{B_n}) = (1 - \Phi(x))(1 + o(1)) + \alpha_n, \tag{1.4}$$

где $0 \leq \alpha_n \leq A(1 - \Phi(x))$, A *– некоторая постоянная. Если дополнительно предположить, что*

$$M_{pn}(x, \varepsilon) \to 0 \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0, \tag{1.5}$$

то имеет место соотношение (1.3).

Если $x^2 - 2\log(1/L_{pn}) - (p-1)\log\log(1/L_{pn}) \to \infty$, *то*

$$P(S_n \geq x\sqrt{B_n}) = O(x^{-p} L_{pn}). \tag{1.6}$$

Если $\liminf x^2/\log(1/L_{pn}) > 2$, *то соотношение* (1.6) *выполнено без предположения* (1.2). *Если дополнительно выполнено условие* (1.5), *то в соотношении* (1.6) *можно заменить* O *на* o.

Теорема 1.1 представляет собой усиление теорем 5 и 6 из [13]. Подчеркнем, что L_{pn} может иметь совершенно иной порядок убывания, чем дробь Ляпунова, а это дает более широкую зону нормальной сходимости.

Отметим, что условие (1.2) можно рассматривать и как условие на распределения слагаемых. Это условие тем более ограничительно, чем быстрее возрастает x_n. Так, например, если

$$L_{qn}^{-} = \frac{1}{B_n^{q/2}} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{0} |y|^q dF_{nk}(y) < \infty$$

для некоторого $q > 2$, то достаточным для (1.2) условием будет $x^{5q-6}L_{qn}^{-} \to 0$. Так как $x^2 = O(\log(1/L_{pn}))$, то последнее условие будет выполнено для достаточно широкого класса распределений.

Из доказательства теоремы 1.1 можно выписать следующую оценку для α_n.

Замечание 1.1. В условиях теоремы 1.1

$$\alpha_n \leq \sum_{k=1}^{k_n} P(X_{nk} \geq dx\sqrt{B_n}),$$

где $d < 1$ – некоторая положительная постоянная, зависящая от p.

Доказательство теоремы 1.1 дает несколько больше, чем (1.4) и (1.6).

Замечание 1.2. Пусть выполнены условия Теоремы 1.1. Пусть $x^2 - 2\log(1/L_{pn}) - (p-1)\log\log(1/L_{pn}) \to \infty$, $x^2 = O(\log(1/L_{pn}))$. Тогда имеют место соотношения (1.4) и (1.6), а если дополнительно выполнено условие (1.5), то в соотношении (1.6) можно заменить O на o.

Перейдем теперь к теоремам о грубой асимптотике вероятностей умеренных уклонений.

Теорема 1.2. *Пусть выполнено условие* (1.1). *Пусть* $x = x_n$, $x_n \to \infty$, *удовлетворяет условию*

$$\Lambda_n(x^2, x^3, \varepsilon) \to 0 \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0. \tag{1.7}$$

Если $\limsup x^2/\log(1/L_{pn}) \leq 2$, *то*

$$\log P(S_n \geq x\sqrt{B_n}) = -\frac{x^2}{2}(1 + o(1)). \tag{1.8}$$

Замечание 1.3. Если выполнены условия теоремы т3 и $x^2 = O(\log(1/L_{pn}))$, то

$$P(S_n \geq x\sqrt{B_n}) = \exp\{-\frac{x^2}{2}(1 + o(1))\} + \alpha_n,$$

а для α_n, $\alpha_n \geq 0$, справедлива оценка из замечания 1.1.

Сформулируем теперь результаты, содержащие равномерные по x оценки.

В следующих двух теоремах считаем $x \geq 0$.

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия* (1.1) *и*

$$\Lambda_n((\log(1/L_{pn}))^2, (\log(1/L_{pn}))^{5/2}, \varepsilon) \to 0 \quad \textit{для любого} \quad \varepsilon > 0. \tag{1.9}$$

Тогда соотношение (1.3) *имеет место равномерно относительно* x *в области* $x^2 \le 2\log(1/L_{pn}) + (p-1)\log\log(1/L_{pn}) - \gamma_n$, *где* $\{\gamma_n\}$ *– последовательность положительных чисел такая, что* $\gamma_n \to \infty$, $2\log(1/L_{pn}) + (p-1)\log\log(1/L_{pn}) - \gamma_n \to \infty$. *Если дополнительно предположить, что*

$$M_{pn}(1, \varepsilon) \to 0 \quad \textit{для любого} \quad \varepsilon > 0, \tag{1.10}$$

то соотношение (1.3) *выполнено равномерно относительно* x *в области* $x^2 \le 2\log(1/L_{pn}) + (p-1)\log\log(1/L_{pn}) + M$, $M = \mathrm{const}$.

Теорема 1.3 является усилением результатов работ [6, 8], полученных при двусторонних моментных ограничениях, и работ [7, 9], в которых предложены более жесткие чем (1.1) ограничения на правые хвосты распределений слагаемых.

В заключении, сформулируем аналог теоремы 1.2.

Теорема 1.4. *Пусть выполнены условия* (1.1) *и*

$$\Lambda_n(\log(1/L_{pn}), (\log(1/L_{pn}))^{3/2}, \varepsilon) \to 0 \quad \textit{для любого} \quad \varepsilon > 0. \tag{1.11}$$

Тогда соотношение (1.8) *выполнено равномерно относительно* x *в области* $x^2 \le 2(1+\theta_n)\log(1/L_{pn})$, *где* $\{\theta_n\}$ *– последовательность положительных чисел такая, что* $\theta_n \to 0$.

§2. Предельные теоремы для одинаково распределенных случайных величин

Пусть $\{X_k\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = \sigma^2 < \infty$, $F(y) = P(X_1 < y)$,

$$\int_0^\infty y^p\, dF(y) < \infty \quad \text{для некоторого} \quad p > 2. \tag{2.1}$$

Пусть $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Теорема 2.1. *Пусть* $x = x_n$, $x_n \to \infty$, *удовлетворяет условию*

$$x^2 \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon\sqrt{n}/x^3} y^2 dF(y) \to 0 \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0. \tag{2.2}$$

Если $x^2 \le (p-2)\log n + (p-1)\log\log n + M$, $M = \mathrm{const}$, *то*

$$P(S_n \ge \sigma x\sqrt{n}) = (1 - \Phi(x))(1 + o(1)). \tag{2.3}$$

Если $x^2 - (p-2)\log n - (p-1)\log\log n \to \infty$, *то*

$$P(S_n \ge \sigma x\sqrt{n}) = o(x^{-p} n^{-(p-2)/2}). \tag{2.4}$$

Если $\liminf x^2/\log n > p - 2$, *то соотношение* (2.4) *выполнено без предположения* (2.2).

Эта теорема не является следствием теоремы 1.1, так как условие (2.2) получается в случае одинаково распределенных слагаемых из условия (1.7), а не из (1.2).

Теорема 2.2. *Пусть* $x = x_n$, $x_n \to \infty$, $\limsup x^2/\log n \le p-2$. *Тогда*

$$\log P(S_n \ge \sigma x\sqrt{n}) = -\frac{x^2}{2}(1 + o(1)). \tag{2.5}$$

Аналогично случаю разнораспределенных случайных величин имеет место следующее утверждение.

Замечание 2.1. В условиях теорем 2.1 и 2.2 верны аналоги замечаний 1.1. 1.2 и 1.3.

Перейдем к теоремам, содержащим равномерные оценки.

В следующих двух теоремах считаем, что $x \ge 0$.

Теорема 2.3. *Пусть выполнено условие*

$$(\log z) \int\limits_{-\infty}^{-z} y^2 dF(y) \to 0 \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{2.6}$$

Тогда соотношение (2.3) *выполнено равномерно относительно* x *в области* $x^2 \le (p-2)\log n + (p-1)\log\log n + M$, $M = \mathrm{const}$.

Отметим, что условие (2.6) является необходимым, а условие (2.1) близко к необходимому для того, чтобы (2.3) выполнялось в области $x^2 \le (p-2)\log n$ (см. [4]).

Теорема 2.4. *Соотношение* (2.5) *имеет место равномерно относительно* x *в области* $x^2 \leq (p-2)(1+\theta_n)\log n$, *где* $\{\theta_n\}$ – *последовательность положительных чисел такая, что* $\theta_n \to 0$.

§3. Доказательства

Доказательство теоремы 1.1. Предположим, что $x^2 \leq c\log(1/L_{pn})$ для всех достаточно больших n. Из условия (1.1) следует, что

$$L_{pn} = o(x^q) \tag{3.1}$$

для любого действительного q.

Пусть $d \in (0,1)$ – фиксированное число, выбором которого мы распорядимся в дальнейшем. Положим $l_n = dx\sqrt{B_n}$, $Y_{nk} = X_{nk}I\{X_{nk} \leq l_n\}$, где $I\{\cdot\}$ – индикатор события, указанного в фигурных скобках. Пусть

$$\varphi_{nk} = Ee^{xY_{nk}/\sqrt{B_n}}, \quad \varphi_{nk}\overline{m}_{nk} = EY_{nk}e^{xY_{nk}/\sqrt{B_n}},$$

$$(\overline{\sigma}^2_{nk} + \overline{m}^2_{nk})\varphi_{nk} = EY^2_{nk}e^{xY_{nk}/\sqrt{B_n}},$$

$$\widetilde{m}_{nk} = EY_{nk}, \quad \widetilde{\sigma}^2_{nk} = EY^2_{nk}.$$

Пусть $\{\overline{Y}_{nk},\ k = 1,2,\ldots,k_n,\ n = 1,2,\ldots\}$ – последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин с функциями распределения

$$P(\overline{Y}_{nk} < z) = \frac{1}{\varphi_{nk}}\int\limits_{-\infty}^{z} e^{xy/\sqrt{B_n}}\,dP(Y_{nk} < y).$$

Тогда $\overline{m}_{nk} = E\overline{Y}_{nk}$, $\overline{\sigma}^2_{nk} = D\overline{Y}_{nk}$.

Обозначим

$$\overline{M}_n = \sum_{k=1}^{k_n}\overline{m}_{nk}, \quad \overline{B}_n = \sum_{k=1}^{k_n}\overline{\sigma}^2_{nk}, \quad z_n = \frac{x\sqrt{B_n} - \overline{M}_n}{\sqrt{\overline{B}_n}}.$$

Используя разложение Тейлора, имеем

$$\varphi_{nk} = 1 + \frac{x}{\sqrt{B_n}}\widetilde{m}_{nk} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{B_n}\widetilde{\sigma}^2_{nk} + A'_{nk}\frac{x^2}{B_n}\delta_{nk},$$

$$\overline{m}_{nk}\varphi_{nk} = \widetilde{m}_{nk} + \frac{x}{\sqrt{B_n}}\widetilde{\sigma}^2_{nk} + A''_{nk}\frac{x}{\sqrt{B_n}}\delta_{nk},$$

$$(\overline{\sigma}^2_{nk}+\overline{m}^2_{nk})\varphi_{nk}=\widetilde{\sigma}^2_{nk}+A'''_{nk}\delta_{nk},$$

где

$$\delta_{nk}=\frac{x}{\sqrt{B_n}}\int\limits_0^{l_n}y^3e^{xy/\sqrt{B_n}}dF_{nk}(y)+\int\limits_{-\infty}^{0}y^2(1-e^{xy/\sqrt{B_n}})dF_{nk}(y),$$

A'_{nk}, A''_{nk}, A'''_{nk} – некоторые ограниченные величины.

Учитывая (3.1), находим, что

$$-\sum_{k=1}^{k_n}\widetilde{m}_{nk}=\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{l_n}^{\infty}ydF_{nk}(y)\le l_n^{-(p-1)}\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{l_n}^{\infty}y^pdF_{nk}(y)=o(x^{-3}\sqrt{B_n}),$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\widetilde{\sigma}^2_{nk}=B_n-\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{l_n}^{\infty}y^2dF_{nk}(y)=B_n(1+O(x^{-(p-2)}L_{pn}))$$
$$=B_n(1+o(x^{-2})). \qquad (3.3)$$

Далее,

$$\sigma^2_{nk}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}y^2dF_{nk}(y)=\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon\sqrt{B_n}/x^5}y^2dF_{nk}(y)+\int\limits_{-\varepsilon\sqrt{B_n}/x^5}^{0}y^2dF_{nk}(y)$$
$$+\int\limits_0^{l_n}y^2dF_{nk}(y)+\int\limits_{l_n}^{\infty}y^2dF_{nk}(y)=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

В силу условия (1.2) и (3.1) имеем

$$I_1=o(x^{-4}B_n),\quad I_2\le\int\limits_{-\varepsilon\sqrt{B_n}/x^5}^{0}y^2dF_{nk}(y)\le\varepsilon^2\frac{B_n}{x^{10}}=o(x^{-4}B_n),$$

$$I_4\le l_n^{-(p-2)}\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{l_n}^{\infty}y^pdF_{nk}(y)=o(x^{-4}B_n).$$

Применяя неравенство Ляпунова, получим

$$I_3=EY^2_{nk}I\{Y_{nk}\ge 0\}\le(EY^p_{nk}I\{Y_{nk}\ge 0\})^{2/p}\le(\beta_{pnk})^{2/p}\le B_nL_{pn}^{2/p}.$$

Отсюда и из (3.1) следует, что

$$I_3 = o(x^{-4}B_n).$$

Полученные для I_1–I_4 оценки влекут соотношение

$$\sigma_{nk}^2 = o(x^{-4}B_n). \tag{3.4}$$

Пусть $p < 3$. В силу условия (1.2) для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_{k=1}^{k_n} \delta_{nk} \le \sum_{k=1}^{k_n} \Big(\frac{x}{\sqrt{B_n}} e^{dx^2} \int\limits_0^{l_n} y^3 \, dF_{nk}(y) + \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon\sqrt{B_n}/x^5} y^2 \, dF_{nk}(y) +$$

$$+ \int\limits_{-\varepsilon\sqrt{B_n}/x^5}^{0} y^2 (1 - e^{xy/\sqrt{B_n}}) dF_{nk}(y) \Big) \le \frac{x}{\sqrt{B_n}} e^{dx^2} l_n^{3-p} \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_0^{l_n} y^p \, dF_{nk}(y) +$$

$$+ \varepsilon x^{-4} B_n + (1 - e^{-\varepsilon/x^4}) \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{-\varepsilon\sqrt{B_n}/x^5}^{0} y^2 \, dF_{nk}(y)$$

$$\le d^{3-p} x^{4-p} e^{dx^2} L_{pn} B_n + 2\varepsilon x^{-4} B_n$$

$$\le d^{3-p} x^{4-p} L_{pn}^{1-cd} B_n + 2\varepsilon x^{-4} B_n \le 3\varepsilon x^{-4} B_n,$$

при достаточно больших n, если выбрать $d < 1/c$.

Пусть $p \ge 3$. Положим $V(y) = \sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(y)$. По неравенству Гёльдера

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_0^{l_n} y^3 \, dF_{nk}(y) = \int\limits_0^{l_n} y^3 \, dV(y)$$

$$\le \Big(\int\limits_0^{l_n} y^p \, dV(y) \Big)^{1/(p-2)} \Big(\int\limits_0^{l_n} y^2 \, dV(y) \Big)^{(p-3)/(p-2)} \le L_{pn}^{1/(p-2)} B_n^{3/2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{k_n} \delta_{nk} = o(x^{-4} B_n). \tag{3.5}$$

Из соотношений (3.2)–(3.5) вытекают следующие оценки:

$$\varphi_{nk} = 1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{B_n}\sigma_{nk}^2 + o(x^{-2}) = 1 + o(x^{-2}), \tag{3.6}$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}(\varphi_{nk} - 1) = \frac{x^2}{2} + o(1), \tag{3.7}$$

$$\overline{m}_{nk} = o(x^{-3}\sqrt{B_n}), \tag{3.8}$$

$$\overline{B}_n = B_n(1 + o(x^{-2})), \tag{3.9}$$

$$\overline{M}_n = x\sqrt{B_n}(1 + o(x^{-2})), \tag{3.10}$$

$$z_n = o(x^{-1}). \tag{3.11}$$

Положим $T_n = \sum_{k=1}^{k_n} Y_{nk}$, $\overline{T}_n = \sum_{k=1}^{k_n} \overline{Y}_{nk}$. Имеем

$$P(T_n \ge x\sqrt{B_n}) = \Bigl(\prod_{k=1}^{k_n}\varphi_{nk}\Bigr)\int\limits_{x\sqrt{B_n}}^{\infty} e^{-xy/\sqrt{B_n}}\,dP(\overline{T}_n < y)$$

$$= \Bigl(\prod_{k=1}^{k_n}\varphi_{nk}\Bigr)e^{-x\overline{M}_n/\sqrt{B_n}}\int\limits_{z_n}^{\infty} e^{-xy\sqrt{\overline{B}_n/B_n}}\,dG_n(y), \tag{3.12}$$

где $G_n(y) = P(\overline{T}_n < y\sqrt{\overline{B}_n} + \overline{M}_n)$.

Воспользуемся тем, что $\log(1+z) = z + \theta z^2$ при $z \le 1/2$, где $|\theta| \le 1$. В силу (3.6) и (3.7)

$$\sum_{k=1}^{k_n}\log\varphi_{nk} = \sum_{k=1}^{k_n}((\varphi_{nk} - 1) + \theta_{nk}(\varphi_{nk} - 1)^2)$$

$$= (1 + o(x^{-2}))\sum_{k=1}^{k_n}(\varphi_{nk} - 1) = \frac{x^2}{2} + o(1).$$

С учетом (3.10) получаем

$$\Bigl(\prod_{k=1}^{k_n}\varphi_{nk}\Bigr)e^{-x\overline{M}_n/\sqrt{B_n}} = e^{-x^2/2}(1 + o(1)). \tag{3.13}$$

Положим $r_n(y) = G_n(y) - \Phi(y)$, $\Delta = \sup_y |r_n(y)|$.

В силу неравенства Эссеена и известных соотношений между абсолютным и абсолютным центральным моментами третьего порядка справедливо неравенство

$$\Delta \le C\overline{B}_n^{-3/2} \sum_{k=1}^{k_n} E|\overline{Y}_{nk}|^3. \tag{3.14}$$

Учитывая (3.6), получим

$$\sum_{k=1}^{k_n} E|\overline{Y}_{nk}|^3 = \sum_{k=1}^{k_n} \frac{1}{\varphi_{nk}} \int\limits_{-\infty}^{l_n} |y|^3 e^{xy/\sqrt{B_n}} dF_{nk}(y)$$

$$= (1+o(x^{-2}))\Big(\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon\sqrt{B_n}/x^5} |y|^3 e^{xy/\sqrt{B_n}} dF_{nk}(y) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{-\varepsilon\sqrt{B_n}/x^5}^{0} |y|^3 e^{xy/\sqrt{B_n}} dF_{nk}(y) + \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{0}^{l_n} y^3 e^{xy/\sqrt{B_n}} dF_{nk}(y)\Big)$$

$$= (1+o(x^{-2}))(R_1+R_2+R_3).$$

Функция $f(y) = |y|e^{xy/\sqrt{B_n}}$, $y<0$, достигает максимума в точке $-\sqrt{B_n}/x$. Поэтому, принимая во внимание условие (1.2), заключаем, что $R_1 = o(x^{-4}B_n^{3/2})$. Ясно также, что $R_2 \le \varepsilon x^{-4} B_n^{3/2}$ для любого $\varepsilon > 0$. Действуя так же, как при получении оценки (3.5), получим $R_3 = o(x^{-4}B_n^{3/2})$. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{k_n} E|\overline{Y}_{nk}|^3 = o(x^{-4}B_n^{3/2}).$$

Подставляя последнюю оценку в (3.14), находим, что

$$\Delta = o(x^{-4}). \tag{3.15}$$

Положим $y_n = \sqrt{\overline{B}_n/B_n}$. Учитывая (3.9), (3.11), а также $1-\Phi(t) \sim (2\pi)^{-1/2}t^{-1}e^{-t^2/2}$ при $t\to\infty$, имеем

$$\int\limits_{z_n}^{\infty} e^{-xyy_n} dG_n(y)$$

$$= \int_{z_n}^{\infty} e^{-xyy_n} d\Phi(y) + \int_{z_n}^{\infty} e^{-xyy_n} dr_n(y)$$

$$= \exp\{y_n^2/2\}(1 - \Phi(z_n + xy_n)) - e^{-xz_ny_n} r_n(z_n) + xy_n \int_{z_n}^{\infty} r_n(y) e^{-xyy_n} dy$$

$$\leq \exp\{y_n^2/2\}(1 - \Phi(z_n + xy_n)) + \Delta(e^{-xz_ny_n} + xy_n \int_{z_n}^{\infty} e^{-xyy_n} dy)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}(1 + o(1)). \tag{3.16}$$

Подстановка последней оценки и (3.13) в (3.12) дает

$$P(T_n \geq x\sqrt{B_n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2}(1 + o(1)). \tag{3.17}$$

Так как $\{T_n \geq x\sqrt{B_n}\} \subset \{S_n \geq x\sqrt{B_n}\}$ и $\{S_n \geq x\sqrt{B_n}, T_n < x\sqrt{B_n}\} \subset \cup_{k=1}^{k_n}\{X_{nk} \geq l_n\}$, справедливо неравенство

$$P(T_n \geq x\sqrt{B_n})$$

$$\leq P(S_n \geq x\sqrt{B_n}) \leq P(T_n \geq x\sqrt{B_n}) + \sum_{k=1}^{k_n} P(X_{nk} \geq l_n). \tag{3.18}$$

Положим $\alpha_n = P(S_n \geq x\sqrt{B_n}) - P(T_n \geq x\sqrt{B_n})$. В силу (3.18) и неравенства Чебышева

$$\alpha_n \leq \sum_{k=1}^{k_n} P(X_{nk} \geq l_n) \leq l_n^{-p} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{l_n}^{\infty} y^p dF_{nk}(y) \leq d^{-p} x^{-p} L_{pn}. \tag{3.19}$$

Заметим, что функция $f(y) = y^{-(p-1)} e^{y^2/2}$ строго возрастает при $y > (p-1)^{1/2}$. Поэтому, если $x^2 \leq \log(1/L_{pn})$, то

$$f(x) \leq (\log(1/L_{pn}))^{-(p-1)/2} L_{pn}^{-1/2}.$$

Если $x^2 \geq \log(1/L_{pn})$, то

$$f(x) \leq (\log(1/L_{pn}))^{-(p-1)/2} e^{x^2/2} = L_{pn}^{-1} e^{M_n},$$

где $M_n = x^2 - 2\log(1/L_{pn}) - (p-1)\log\log(1/L_{pn})$. Значит, если $M_n \to -\infty$, то

$$f(x) = o(L_{pn}^{-1}). \tag{3.20}$$

Следовательно,

$$\alpha_n x e^{x^2/2} = o(1). \tag{3.21}$$

Последнее неравенство и (3.17) влекут (1.3).

Если $x^2 = 2\log(1/L_{pn}) + (p-1)\log\log(1/L_{pn}) + M$, $M = \mathrm{const}$, то в (3.20) и (3.21) вместо o будет O, и мы получим (1.4). Если дополнительно выполняется условие (1.5), то вместо (3.19) будет иметь место оценка

$$\alpha_n = o(x^{-p}L_{pn}). \tag{3.22}$$

В этом случае опять будет верна оценка (3.21), и мы снова придем к (1.3).

Пусть теперь $x^2 - 2\log(1/L_{pn}) - (p-1)\log\log(1/L_{pn}) \to \infty$.

Если $x^2 \le c\log(1/L_{pn})$, то из (3.19) и (3.17) получим (1.6), а при выполнении условия (1.5) в (1.6) можно заменить O на o. Отсюда вытекает утверждение замечания 1.2, а также оценка (1.6) при $x^2 \le c\log(1/L_{pn})$, где c – произвольная положительная постоянная.

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать (1.6) в случае $\liminf x^2/\log(1/L_{pn}) = L > 2$.

В неравестве (21) из работы [15] положим $x = x\sqrt{B_n}$, $y_j = dx\sqrt{B_n}$, $t = p$, $\alpha = a$, $\beta = 2d$, $c = \log b$. Получим

$$P(S_n \ge x\sqrt{B_n}) < \sum_{k=1}^{k_n} P(X_{nk} \ge dx\sqrt{B_n}) +$$

$$+ A_1 \exp\{-\frac{a}{2b}x^2\} + A_2 x^{-2p} L_{pn}^2 = J_1 + J_2 + J_3,$$

где $a \in (0,1)$, $b > 1$, а d, A_1, A_2 – положительные постоянные, зависящие только от a и b.

Возьмем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $L > 2(1+\varepsilon)$. Тогда $x^2 > 2(1+\varepsilon)(\log(1/L_{pn}) + p\log x)$ для всех достаточно больших n. Выберем теперь a и b столь близкими к 1, чтобы $a(1+\varepsilon)/b > 1$. Тогда $J_2 = o(x^{-p}L_{pn})$. Ясно, что и $J_3 = o(x^{-p}L_{pn})$. Оценку $J_1 = O(x^{-p}L_{pn})$ получаем так же, как (3.19). Из полученных оценок следует (1.6).

Доказательство теоремы 1.2 практически не отличается от доказательства теоремы 1.1. Замена условия (1.2) условием (1.7) изменит точность полученных в ходе доказательства теоремы 1.1 оценок, что и приведет к более грубым результатам.

Доказательства теорем 1.3 и 1.4 при $x \geq A$ отличаются от доказательств теорем 1.1 и 2.1 только использованием равномерных условий (1.9) и (1.11) вместо (1.2) и (1.7) соответственно. При $0 \leq x \leq A$ утверждения теорем 1.3 и 1.4 следуют из теоремы Линдеберга.

Доказательства теорем 2.1–2.4 проводятся по той же схеме что доказательства теорем 1.1–1.4. Ослабление условий достигается за счет того, что в случае одинаково распределенных слагаемых не требуется оценивать σ_{nk}^2 для получения нужной точности в оценке φ_{nk}.

Учитывая это, мы опускаем доказательства теорем 1.2–2.4.

Литература

1. Ю. В. Линник , *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, I, II, III.* — Теория вероятн. и ее примен. **6**, No. 2, (1961), 145–163; **6**, No. 4, (1961), 377–391; **7**, No. 2 (1962), 121–134 .
2. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник , *Независимые и стационарно связанные случайные величины.* Наука, М. (1965) .
3. С. В. Нагаев , *Некоторые предельные теоремы для больших уклонений.* — Теория вероятн. и ее примен. **10**, No. 2 (1965), 231–254 .
4. Н. Н. Амосова , *О вероятностях умеренных уклонений сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **24**, No. 4 (1979), 858–865 .
5. Л. В. Розовский , *О предельных теоремах для больших уклонений в узких зонах.* — Теория вероятн. и ее примен. **26**, No. 4 (1981), 847–857 .
5. H. Rubin, J. Sethuraman , *Probabilities of moderate deviations.* — Sankhya, Ser. A **27**, Nos. 2–4 (1965), 325–346 .
6. Н. Н. Амосова , *О предельных теоремах для вероятностей умеренных уклонений.* — Вестн. ЛГУ No. 13 (1972), 5–14 .
7. А. Д. Сластников , *Предельные теоремы для вероятностей умеренных уклонений.* Теория вероятн. и ее примен. **23**, No. 2 (1978), 340–357 .
9. Н. Н. Амосова , *Об узких зонах интегральной нормальной сходимости.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **97** (1980), 4–14 .
10. А. В. Нагаев , *Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, при нарушении условия Крамера.* — Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук No. 6 (1969), 17–22 .
11. R. Michel R. , *Nonuniform central limit bounds with applications to probabilities of deviations.* — Ann. Probab. **4**, No. 1 (1976), 102–106 .
12. A. N. Frolov , *On one-sided strong laws for large increments of sums.* — Statist. and Probab. Lett. **37** (1998), 155–165 .

13. Z. Rychlik , *Nonuniform central limit bounds with applications to probabilities of deviations.* — Теория вероятн. и ее примен. **28**, No. 4 (1983), 646–652 .
14. В. В. Петров , *О вероятностях умеренных уклонений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **260** (1999), 214–217 .
15. С. В. Нагаев , *Некоторые уточнения вероятностных и моментных неравенств.* — Теория вероятн. и ее примен. **42**, No. 4 (1997), 832–838 .
16. А. Д. Сластников , *Узкие зоны нормальной сходимости для сумм неодинаково распределенных случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **29**, No. 3 (1984), 551–554 .

Frolov A. N. On probabilities of moderate deviations of sums of independent random variables.

The asymptotics of probabilities of moderate deviations and their logarithm are investigated for an array of row-wise independent random variables with finite variations and finite one-sided moments of order $p > 2$. The range of a zone of normal convergence is calculated in terms of Lyapunov ratios constructed from positive parts of the random variables. Bounds for probabilities of moderate deviations are also derived when the normal convergence fails.

Поступило 10 июля 2002 г.