Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 294, 2002 г.

Ю. И. Ингстер, И. А. Суслина

ОБ ОБНАРУЖЕНИИ СИГНАЛА ИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ В МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

1. Постановка задачи

В этой статье мы изучаем задачу обнаружения сигнала в многоканальной системе, каждый из каналов которой может содержать или не содержать сигнал $f(t),\ t \in (0,1)$, наблюдаемый в гауссовском белом шуме. Задача состоит в обнаружении факта наличия сигнала в наблюдаемых данных.

Задачи такого типа возникают при разработке и исследовании различных систем технической или медицинской диагностики, радиолокационных систем, систем передачи информации и т.д.

Нас интересует случай, когда число каналов n велико и мы рассматриваем асимптотику при $n \to \infty$.

Точная постановка задачи состоит в следующем. Будем рассматривать модель гауссовского белого шума, т.е. наблюдаются n независимых случайных процессов $X_i(t),\ t \in (0,1)$, каждый из которых соответствует i-му каналу системы и удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dX_i(t) = \xi_i f(t) + \varepsilon dW_i(t),\ t \in (0,1),\ i = 1, ..., n.$$

$W_i(t)$ – независимые винеровские процессы, $\varepsilon = \varepsilon_n > 0$ – известный уровень шума, $\xi_i \in \{0,1\}$ – параметры, соответствующие наличию сигнала $f \in L_2(0,1)$ в i-ом канале $(\xi_i = 1)$, или отсутствию сигнала $(\xi_i = 0)$. Мы рассматриваем случай сигнала известной формы $f(t) = c\phi(t),\ \phi \in L_2(0,1),\ \|\phi\| = 1$; здесь ϕ – известная функция, определяющая форму сигнала, а величина $c = c_n = \|f\| > 0$ определяет уровень сигнала.

Обозначим $\bar f = (\xi_1 f, ..., \xi_n f) \in L_2^n(0,1)$ набор функций, характеризующих наличие или отсутствие сигнала f в каналах. Вели-

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, гранты 02-01-00262, 00-15-96019, 02-01-04001.

чина $K(\bar{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ есть число каналов, содержащих сигналы; $0 \le K(\bar{\xi}) \le n$.

Пусть $\mathcal{F}_n = \{\bar{f}\} \subset L_2^n(0,1)$ – заданное множество наборов сигналов в каналах. Задачу обнаружения сигнала можно рассматривать как задачу проверки гипотезы $H_0 : \ \bar{f} = 0$ против альтернативы $H_{1,\mathcal{F}_n} : \ \bar{f} \in \mathcal{F}_n$.

Мы изучаем эту задачу с точки зрения минимаксного подхода в его асимптотическом варианте при $n \to \infty$. Именно, пусть $\psi_n = \psi_n(X_1, ..., X_n)$ – тест, т.е. измеримая функция от наблюдений со значениями в интервале $[0,1]$. Пусть $\alpha_n(\psi_n) = E_{n,0}(\psi_n)$ есть вероятность ошибок I рода и $\beta_n(\psi_n, \bar{f}) = E_{n,\bar{f}}(1-\psi_n)$ есть вероятность ошибок II рода теста ψ_n (здесь и ниже $E_{n,\bar{f}}$ есть математическое ожидание по мере $P_{n,\bar{f}}$, соответствующей наблюдениям (1.1); мера $P_{n,0}$ соответствует отсутствию сигналов в системе). Обозначим $\gamma_n(\psi_n, \mathcal{F}_n)$ сумму вероятности ошибок I рода и максимальной вероятности ошибок II рода

$$\gamma_n(\psi_n, \mathcal{F}_n) = \alpha_n(\psi_n) + \max_{\bar{f} \in \mathcal{F}_n} \beta_n(\psi_n, \bar{f}).$$

Положим

$$\gamma_n = \gamma_n(\mathcal{F}_n) = \inf_{\psi_n} \gamma_n(\psi_n, \mathcal{F}_n).$$

Величину $\gamma_n(\mathcal{F}_n)$ будем называть *минимаксной ошибкой обнаружения для альтернативы* $H_1 = H_{1,\mathcal{F}_n}$. Легко видеть, что $0 \le \gamma_n \le 1$.

Будем говорить, что тест ψ_n является *минимаксным для альтернативы* $H_{1,\mathcal{F}_n}$, если $\gamma_n(\psi_n, \mathcal{F}_n) = \gamma_n(\mathcal{F}_n)$. Будем говорить, что последовательность тестов ψ_n является *асимптотически минимаксной для альтернативы* $H_{1,\mathcal{F}_n}$, если $\gamma_n(\psi_n, \mathcal{F}_n) = \gamma_n(\mathcal{F}_n) + o(1)$, и *состоятельной для альтернативы* $H_{1,\mathcal{F}_n}$, если $\gamma_n(\psi_n, \mathcal{F}_n) \to 0$. Здесь и далее пределы рассматриваются при $n \to \infty$.

Рассматриваемую задачу можно представить в несколько другой форме. Рассмотрим статистики

$$x_i = \varepsilon^{-1} \int_0^1 \phi(t) dX_i(t), \ \ i = 1, ..., n. \qquad (1.2)$$

Легко видеть, что это достаточные статистики в рассматриваемой задаче, и они независимы как при гипотезе, так и при альтернативе, соответствующей любому набору $\bar{\xi}_n = (\xi_1, ..., \xi_n)$. Переход к статистикам x_i вида (1.2) в радиотехнике часто называют фильтрацией сигналов в каналах, согласованной с известной формой сигнала. При гипотезе H_0 статистики x_i имеют стандартное гауссовское распределение $N(0, 1)$. Пусть $b_n = c_n/\varepsilon$ есть отношение "сигнал-шум". Тогда при альтернативе, соответствующей набору $\bar{\xi}_n = (\xi_1, ..., \xi_n)$, статистики x_i имеют гауссовское распределение $N(v_i, 1)$, $v_i = b_n\xi_i$. Переходя к статистикам (1.2), мы получаем вектор наблюдений вида

$$x = v + \eta, \quad v \in R^n, \tag{1.3}$$

где $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$ – стандартный n-мерный нормальный вектор, а $v = (b_n\xi_1, ..., b_n\xi_n)$ – n-мерный вектор, соответствующий наличию или отсутствию сигнала уровня c_n в каналах. Мы получаем эквивалентную задачу проверки гипотез о среднем n-мерного нормального распределения:

$$H_0: \ v = 0, \quad H_{1,V_n}: \ v \in V_n,$$

где $V_n \subset R^n$ – множество, соответствующее множеству $\mathcal{F}_n \subset L_2^n(0,1)$. Величины $\alpha_n(\psi_n)$, $\beta_n(\psi_n, v)$, $\gamma_n(\psi_n) = \gamma_n(\psi_n, V_n)$, $\gamma_n = \gamma_n(V_n)$ в этой задаче определяются аналогично.

2. Основные результаты

2.1. Известное число каналов, содержащих сигналы. Пусть число каналов, содержащих сигналы и отношение сигнал-шум $b_n > 0$ известны. Именно, пусть k_n - заданная последовательность, $1 \le k_n \le n$. Положим

$$V_n(b,k) = \{v = (\xi_1 b, ..., \xi_n b), \ \xi_i \in \{0,1\}, \ \sum_{i=1}^n \xi_i = k\} \tag{2.1}$$

и будем рассматривать эквивалентную задачу проверки гипотез о среднем n-мерного нормального распределения $H_0 : v = 0$ против альтернативы $H_{1,V_n(b_n,k_n)} : v \in V_n(b_n, k_n)$.

Нас интересуют следующие вопросы:

1) какой вид имеют условия различимости в задаче, т.е. насколько большими должны быть отношения сигнал-шум b_n в зависимости от общего числа каналов n и числа каналов k_n, содержащих сигналы, чтобы минимаксные ошибки обнаружения γ_n стремились к 0?

2) как построить асимптотически минимаксные и состоятельные тесты ψ_n при выполнении соответствующих условий различимости, и как их структура зависит от параметров b_n, k_n?

Задачи проверки гипотез аналогичного вида изучались в работах [2–4] (различие состоит в том, что в этих работах рассматривался случай $\xi_i \in \{0, \pm 1\}$). Мы распространяем методы [2–4] на альтернативы вида (2.1) и приводим результаты несколько другого вида.

Введем величину $\delta_n = (\log k_n)/(\log n) \in [0,1]$, т.е. $k_n = n^{\delta_n}$. Положим

$$u_n^2 = u_n(k_n, b_n) = n^{-1} k_n^2 (e^{b_n^2} - 1),$$
$$\tilde{u}_n = \tilde{u}_n(k_n, b_n) = n^{-1/2} k_n b_n, \;\; T_n = \sqrt{2 \log n}. \tag{2.2}$$

Будем обозначать $\Phi(t)$ функцию распределения стандартного нормального закона.

Теорема 2.1. *Пусть $V_n = V_n(b_n, k_n)$ – множества вида (2.1) и $\liminf \delta_n > 1/4$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Справедливо неравенство: $\gamma_n \geq 2\Phi(-u_n/2) + o(1)$.*

2. *Рассмотрим тесты вида $\hat{\psi}_{n,b_n} = \hat{\psi}_{n,b_n,H_n} = \max(\psi_{n,b_n,H_n}, \psi_n^{thr})$. Здесь $\psi_{n,b_n,H_n} = \mathbf{1}_{t_{n,b_n} > H_n}$ есть тесты, основанные на статистиках*

$$t_{n,b_n} = A_n \sum_{i=1}^n \nu(x_i, b_n), \quad A_n = (n(e^{b_n^2} - 1))^{-1/2},$$
$$\nu(t, b) = (e^{-b^2/2 + tb} - 1), \tag{2.3}$$

и пороге $H_n = u_n/2$, а ψ_n^{thr} есть тесты порогового типа

$$\psi_n^{thr} = \mathbf{1}_{\mathcal{X}_n}, \quad \mathcal{X}_n = \{x \in R^n : \max_{1 \leq i \leq n} x_i > T_n\}. \tag{2.4}$$

Тогда

$$\gamma_n \leq \gamma_n(\hat{\psi}_{n,b_n,H_n}) \leq 2\Phi(-u_n/2) + o(1).$$

3. *Рассмотрим тесты, основанные на линейных статистиках*

$$\psi_n^{lin} = \mathbf{1}_{t_n^{lin} > H_n}, \quad t_n^{lin} = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n x_i,$$

и пусть $H_n = \tilde{u}_n/2$. *Тогда*

$$\gamma_n \le \gamma_n(\psi_n^{lin}) = 2\Phi(-\tilde{u}_n/2).$$

Кроме того $\gamma_n(\psi_n^{lin}) \to$ *при* $\tilde{u}_n \to \infty$ *и таких* $H_n \to \infty$, *что* $\tilde{u}_n - H_n \to \infty$.

Теорема 2.1 описывает точную асимптотику гауссовского типа минимаксных вероятностей ошибок в рассматриваемой задаче. Утверждения пп. 1,2 означают, что если $\liminf \delta_n > 1/4$, то тесты $\hat{\psi}_{n,b_n,H_n}$ являются асимптотически минимаксными.

Заметим также, что $\tilde{u}_n \le u_n$, и при условии $nk_n^{-2} = O(1)$ соотношение $\tilde{u}_n \to \infty$ имеет место тогда и только тогда, когда $u_n \to \infty$; кроме того, при условиях $nk_n^{-2} = o(1)$ и $u_n = O(1)$ мы имеем $b_n = o(1)$ и, следовательно, $\tilde{u}_n \sim u_n$ в этом случае. Поэтому утверждение п. 3 означает, что тесты ψ_n^{lin} также являются асимптотически минимаксными в случае $nk_n^{-2} = o(1)$, а при $nk_n^{-2} = O(1)$ они обеспечивают состоятельную различимость, если состоятельные тесты существуют, т.е. при $u_n \to \infty$. Кроме того нетрудно видеть, что если $k_n = n$, то тесты ψ_n^{lin} являются минимаксными (не асимптотически). Статистики тестов ψ_n^{lin}, не зависят от параметров b_n и k_n.

Используя теорему 2.1 и эти замечания, мы получаем простые условия различимости и неразличимости в задаче (т.е. условия того, что $\gamma_n \to 0$ или $\gamma_n \to 1$).

Следствие 2.1.

1. *Пусть* $nk_n^{-2} = O(1)$. *Тогда* $\gamma_n \to 1$ *при* $\tilde{u}_n \to 0$ *и* $\gamma_n(\psi_n^{lin}) \to 0$ *при* $\tilde{u}_n \to \infty$.

2. *Пусть* $k_n = n_n^{\delta}$, $nk_n^{-2} \to \infty$ *и* $\delta_n \to \delta \in (1/4, 1/2]$. *Положим*

$$b_n^*(k_n) = \sqrt{\log(nk_n^{-2})} = \sqrt{(1-2\delta_n)\log n}. \tag{2.5}$$

Тогда, если $\limsup b_n/b_n^*(k_n) < 1$, *то* $\gamma_n \to 1$. *Если же*

$$\liminf b_n/b_n^*(k_n) > 1,$$

то $\gamma_n(\hat{\psi}_{n,b_n,H_n}) \to 0$.

Если $\delta_n \to \delta \in (0, 1/4)$, то точная асимптотика минимаксных вероятностей ошибок в задаче описывается в терминах специальных безгранично делимых распределений без гауссовской компоненты (см. [2]). Однако можно получить другую точную границу между условиями различимости и неразличимости при $\liminf \delta_n \le 1/4$.

Положим при $\delta_n \in [0, 1/4]$

$$b_n^*(k_n) = (1 - \delta_n^{1/2})\sqrt{2 \log n}. \tag{2.6}$$

Теорема 2.2. *Пусть $\delta_n \to \delta \in [0, 1/4]$. Тогда справедливы утверждения.*

1. *Если $\limsup b_n/b_n^*(k_n) < 1$, то $\gamma_n \to 1$.*

2. *Если $\liminf b_n/b_n^*(k_n) > 1$, то $\gamma_n(\psi_n^{thr}) \to 0$, где тесты ψ_n^{thr} определены (2.4). Более того, это справедливо при $\delta_n \to \delta$ для любого $\delta \in [0, 1/2)$.*

Заметим, что тесты ψ_n^{thr}, являющиеся состоятельными при условиях $\liminf b_n/b_n^*(k_n) > 1$ и $\liminf \delta_n < 1/2$, где $b_n^*(k_n)$ определены равенствами (2.5), (2.6), не зависят от параметров b_n и k_n.

Доказательство теорем 2.1 и 2.2 приведено в разделе 3.

2.2. Адаптация по числу каналов, содержащих сигналы.

Пусть число каналов $k_n = K(\bar{\xi})$, содержащих сигнал, и уровень сигнала c_n (или отношение сигнал-шум b_n) неизвестны. В этом случае мы рассмотрим следующий вариант постановки задачи обнаружения, который мы сформулируем для модели наблюдений (1.3).

Пусть задана последовательность интервалов

$$\mathcal{K}_n = [k_{n,1}, k_{n,2}], \quad 1 \le k_{n,1} \le k_{n,2} \le n,$$

и известно, что $k_n = K(\bar{\xi}) \in \mathcal{K}_n$. Из теорем 2.1 и 2.2 следует, что для любого $k_n \in \mathcal{K}_n$ состоятельное обнаружение возможно лишь при отношениях сигнал-шум b_n, достаточно больших по сравнению с величинами $b_n^*(k_n)$, которые зависят от k_n. Поэтому зададимся функцией $b_n(k_n)$, $k_n \in \mathcal{K}_n$ и, полагая

$$V_{\mathcal{K}_n} = \bigcup_{k_n \in \mathcal{K}_n} V_n(b_n(k_n), k_n), \tag{2.7}$$

рассмотрим задачу проверки гипотез для "объединенной" альтернативы (2.7):

$$H_0: \; v = 0, \quad H_{1,\mathcal{K}_n}: \; v \in V_{\mathcal{K}_n}.$$

Нас интересует асимптотика величин $\gamma_n = \gamma_n(V_{\mathcal{K}_n})$, а также условия минимаксной различимости и неразличимости в задаче, т.е. условия, при которых $\gamma_n \to 0$ и $\gamma_n \to 1$, а также структура тестов ψ_n, которые являются асимптотически минимаксными или состоятельными при выполнении условий различимости для альтернатив вида (2.7).

Заметим, что из включений $V_n(b_n(k_n), k_n) \subset V_{\mathcal{K}_n}$ очевидным образом вытекают нижние границы

$$\gamma_n(V_{\mathcal{K}_n}) \geq \inf_{k_n \in \mathcal{K}_n} \gamma_n(V_n(b_n(k_n), k_n)). \tag{2.8}$$

Проблема состоит в том, достигаются ли эти границы?

Адаптивная постановка в минимаксных задачах оценивания изучалась в [5–7]; адаптивные задачи проверки гипотез рассматривались в [8], [9]. В этих работах показано, что часто адаптация ведет к некоторым потерям (логарифмического типа) в порядках точности оценивания или в порядках величин, характеризующих необходимую для различимости отделенность альтернативы от нулевой гипотезы.

Точная асимптотика минимаксных вероятностей ошибок и возникающие потери эффективности в адаптивных задачах проверки гипотез, аналогичных рассматриваемой в данной работе, изучалась в [3], [4]. Мы покажем, что границы между условиями минимаксной различимости и неразличимости в рассматриваемой задаче, вытекающие из оценок, приведенных в разделе 2.1 при известных k_n, b_n, сохраняются и для адаптивного варианта задачи.

Будем говорить, что последовательность интервалов $\mathcal{K}_n$ соответствует *большим* k_n если $nk_{n,1}^{-2} = o(1)$; *малым* k_n если $k_{n,2} = O(n^{1/4})$; *умеренным* k_n если $nk_{n,2}^{-2} \to \infty$ и $nk_{n,1}^{-4} = O(1)$; *умеренным или малым* k_n если $nk_{n,2}^{-2} \to \infty$.

Наиболее широкая альтернатива, соответствующая всем возможным k_n, имеет место при $\mathcal{K}_n = [1, n]$. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(\mathcal{K}_n) &= \inf_{k_n \in \mathcal{K}_n} \tilde{u}_n(k_n, b_n(k_n)), \\ u_n(\mathcal{K}_n) &= \inf_{k_n \in \mathcal{K}_n} u_n(k_n, b_n(k_n)), \quad \lambda(\mathcal{K}_n) = \inf_{k_n \in \mathcal{K}_n} b_n(k_n)/b_n^*(k_n), \end{aligned} \tag{2.9}$$

где величины $u_n(k_n, b_n)$, $\tilde{u}_n(k_n, b_n)$ определены в (2.2), а $b_n^*(k_n)$ определены соотношением (2.5) при $k_n > n^{1/4}$ и соотношением

(2.6) при $k_n \le n^{1/4}$.

Теорема 2.3.

1. *Пусть последовательность* $\mathcal{K}_n$ *соответствует большим* k_n. *Тогда справедливо неравенство*

$$\gamma_n(V_{\mathcal{K}_n}) \ge 2\Phi(-\tilde{u}_n(\mathcal{K}_n)/2) + o(1).$$

Кроме того, для любой последовательности $\mathcal{K}_n$ *при* $H_n = \tilde{u}_n(\mathcal{K}_n)/2$,

$$\gamma_n(V_{\mathcal{K}_n}) \le \gamma_n(\psi_n^{lin}, V_{\mathcal{K}_n}) = 2\Phi(-\tilde{u}_n(\mathcal{K}_n)/2).$$

2. *Пусть последовательность* $\mathcal{K}_n$ *соответствует малым* k_n. *Тогда* $\gamma_n(V_{\mathcal{K}_n}) \to 1$ *при* $\limsup \lambda(\mathcal{K}_n) < 1$ *и* $\gamma_n(\psi_n^{thr}, V_{\mathcal{K}_n}) \to 0$ *при* $\liminf \lambda(\mathcal{K}_n) > 1$.

3. *Пусть последовательность* $\mathcal{K}_n$ *соответствует умеренным или малым* k_n. *Тогда* $\gamma_n(V_{\mathcal{K}_n}) \to 1$ *при* $\limsup \lambda(\mathcal{K}_n) < 1$. *Более того, введем последовательность тестов вида* $\psi_n^{ad} = \mathbf{1}_{\mathcal{X}_n}$, *где*

$$\mathcal{X}_n = \{x \in R^n : \max_{J_{n,0} \le j \le J_{n,1}} t_{n,j}/T_j > 1\} \cup \{x \in R^n : \max_{1 \le i \le n} x_i > T_n\}, \tag{2.10}$$

здесь $T_j = \sqrt{2(\log j + \log\log j)}$; $t_{n,j}$ - *статистики вида* (2.3) *при* $b_n = j$, $J_{n,1} \gg J_{n,0} \to \infty$ – *такие целочисленные последовательности, что*

$$\log(n/k_{n,2}^2) > J_{n,0}^2, \quad J_{n,1} = T_n/2 - \sqrt{B_n \log\log n}, \quad B_n \sim 1.$$

Тогда $\gamma_n(\psi_n^{ad}, V_{\mathcal{K}_n}) \to 0$ *при* $\liminf \lambda(\mathcal{K}_n) > 1$.

4. *Пусть* $\mathcal{K}_n = [1, n]$. *Для заданной последовательности* $c_n > 0$ *рассмотрим разбиение* $\mathcal{K}_n$ *на интервалы* $\mathcal{K}_{n,c_n}^L = [n^{1/2}c_n, n]$ *и* $\mathcal{K}_{n,c_n}^S = [1, n^{1/2}c_n)$, *а также величины* $u_n(\mathcal{K}_{n,c_n}^L)$, $\lambda(\mathcal{K}_{n,c_n}^S)$, *определенные* (2.9).

Пусть существует последовательность $c_n \to 0$, *такая что* $c_n n^\eta \to \infty$ *при некотором* $\eta < 1/4$, *и выполнено одно из двух соотношении:*

$$u_n(\mathcal{K}_{n,c_n}^L) = o(1), \quad \limsup \lambda(\mathcal{K}_{n,c_n}^S) < 1. \tag{2.11}$$

Тогда $\gamma_n \to 1$.

Напротив, пусть для любой последовательности $c_n \to 0$, *такой что* $c_n n^\eta \to \infty$, $\eta < 1/4$, *справедливы соотношения:*

$$u_n(\mathcal{K}_{n,c_n}^L) \to \infty, \quad \liminf \lambda(\mathcal{K}_{n,c_n}^S) > 1. \tag{2.12}$$

Пусть множество $\mathcal{X}_n$ определено в п. 3 и соответствует некоторой последовательности $J_{n,0}$ и $\mathcal{X}_n^{lin} = \{x \in R^n : t_n^{lin} > H_n\}$. Рассмотрим последовательность тестов $\psi_{n,1}^{ad} = \mathbf{1}_{\mathcal{X}_n \cup \mathcal{X}_n^{lin}}$. Тогда существуют такие последовательности $J_{n,0} \to \infty$ и $H_n \to \infty$, что $\gamma_n(\psi_{n,1}^{ad}, V_{\mathcal{K}_n}) \to 0$.

Доказательство теоремы 2.3. Неравенство (2.8) вместе с теоремами 2.1, 2.2 и следствием 2.1 дает нижние границы для $\gamma_n(V_{\mathcal{K}_n})$ и условия неразличимости теоремы.

В условиях пп. 1 и 2 теоремы верхние границы для $\gamma_n(V_{\mathcal{K}_n})$ непосредственно цледуют из верхних границ теорем 2.1 и 2.2, поскольку тесты ψ_n^{lin} и ψ_n^{thr}, обеспечивающие требуемые границы для больших и малых k_n соответственно, не зависят от параметров b_n, k_n.

Верхние границы для величин $\gamma_n(V_{\mathcal{K}_n})$ и свойства тестов ψ_n^{ad} в условиях п. 3 теоремы вытекают из следующего утверждения.

Предложение 2.1. *Пусть последовательность $\mathcal{K}_n$ соответствует умеренным или малым k_n. Тогда для тестов $\psi_n^{ad} = \mathbf{1}_{\mathcal{X}_n}$, где множество $\mathcal{X}_n$ определено выражением* (2.10), *имеем*

1. $\alpha(\psi_n^{ad}) \to 0$.

2. *Пусть заданы последовательности k_n, $b_n(k_n)$, такие что $1 \le k_n \le k_{n,2}$ и $\liminf b_n(k_n)/b_n^*(k_n) > 1$. Тогда для любой последовательности $v_n \in V_n(b_n(k_n), k_n)$ справедливо соотношение $\beta_n(\psi_n^{ad}, v_n) \to 0$.*

Доказательство предложения 2.1 приведено в разделе 3.3.

В условиях п. 4 теоремы нужно заметить, что если для любой последовательности $c_n \to 0$ выполнено первое соотношение (2.12), то можно найти такую последовательность $c_{n,1} \to 0$, $c_{n,1} \ge c_n$, что $\tilde{u}_n(\mathcal{K}_{n,c_{n,1}}^L) \to \infty$. Действительно, как отмечалось в разделе 2.1, $\tilde{u}_n(k_n, b_n) \le u_n(k_n, b_n)$ и, если $nk_n^{-2} = O(1)$, то $\tilde{u}_n \to \infty$ и $u_n \to \infty$ одновременно при любых b_n; если же $nk_n^{-2} \to \infty$, $nk_n^{-2} \le c_n^{-2}$ и $u_n^2(k_n, b_n) \ge B_n \to \infty$, то при больших n имеем

$$\tilde{u}_n^2(k_n, b_n) = n^{-1}k_n^2 b_n^2 > n^{-1}k_n^2(\log B_n + \log(nk_n^{-2})) > n^{-1}k_n^2 \log B_n \to \infty$$

при $n^{-1}k_n^2 > c_{n,1}^2 = (\log B_n)^{-1/2}$.

Положим $J_{n,0}^2 = \log c_{n,1}^{-1}$, $H_n = \tilde{u}_n(\mathcal{K}_{n,c_{n,1}}^L)$. Тогда утверждение п. 4, касающееся тестов $\psi_{n,1}^{ad}$, будет следовать из утверждений пп. 1, 3, касающихся тестов ψ_n^{ad} и ψ_n^{lin}.

Заметим, что из теорем 2.1 и 2.2 непосредственно вытекает следующее следствие для адаптивной задачи.

Следствие 2.2. *Пусть последовательность $\mathcal{K}_n$ соответствует умеренным или малым k_n, причем $k_{n,2} \leq n^{\delta}$, $\delta \in [0, 1/2)$. Положим*

$$\tilde{\lambda}(\mathcal{K}_n) = \inf_{k_n \in \mathcal{K}_n} b_n(k_n)/T_n, \quad T_n = \sqrt{2 \log n}.$$

Тогда существуют постоянные $0 < c_0 \leq c_1 < \infty$; $c_0 = c_0(\delta)$, такие что если $\limsup \tilde{\lambda}(\mathcal{K}_n) < c_0$, то $\gamma_n(V_{\mathcal{K}_n}) \to 1$, и если $\liminf \tilde{\lambda}(\mathcal{K}_n) > c_1$, то $\gamma_n(\psi_n^{thr}, V_{\mathcal{K}_n}) \to 0$.

Таким образом, теряя константу в допустимых скоростях роста отношения сигнал-шум, мы можем использовать пороговые тесты для малых и умеренных $k_n \leq k_{n,2} \leq n^{\delta}$, $\delta \in [0, 1/2)$, в то время, как при больших k_n тесты, основанные на линейных статистиках, являются асимптотически минимаксными для альтернатив вида (2.7). Эти тесты зависят лишь от формы ϕ сигнала $f_n = c_n \phi$.

3. Доказательство теорем 2.1, 2.2 и предложения 2.1

3.1. Нижние границы теорем 2.1, 2.2. Заменим множества $V_n(b, k)$ на более широкие множества $V_n^+(b, k)$ вида

$$V_n^+(b, k) = \{v = (\xi_1 b, ..., \xi_n b),\ \xi_i \in \{0, 1\},\ \sum_{i=1}^{n} \xi_i \geq k\}. \tag{3.1}$$

Предложение 3.1.

$$\gamma(V_n^+(b, k)) = \gamma(V_n(b, k)).$$

Доказательство. Так как $V_n(b, k) \subset V_n^+(b, k)$, мы имеем неравенство $\gamma(V_n(b, k)) \leq \gamma(V_n^+(b, k))$. Пусть π – равномерное априорное распределение на дискретном множестве $V_n(b, k)$:

$$\pi(v) = M^{-1}\ \forall v \in V_k^n;\ M = \#(V_n(b, k)) = C_n^k.$$

Рассмотрим байесовскую задачу проверки гипотезы $H_0:\ P = P_{n,0}$ против альтернативы $H_1:\ P = P_{\pi}$ о распределении P наблюдений x; здесь $P_{\pi} = \int_{R^n} P_{n,v} \pi(dv)$ – смесь по априорному распределению π. Пусть ψ_{π} – байесовский тест, минимизирующий

$\gamma(\psi, P_\pi) = E_{n,0}\psi + E_{P_\pi}(1-\psi)$. По лемме Неймана–Пирсона он имеет вид $\psi_\pi = \mathbf{1}_{\{L(x)>1\}}$, где $L(x)$ есть байесовское отношение правдоподобия:

$$L(x) = \frac{dP_\pi}{dP_{n,0}}(x) = \int \exp(-|v|^2/2 + (x,v))\pi(dv). \tag{3.2}$$

Из соображений инвариантности следует, что ψ_π есть минимаксный тест для альтернативы $V_n(b,k)$, т.е. $\gamma(V_n(b,k)) = \gamma(\psi_\pi, V_n(b,k))$. Достаточно проверить, что $\gamma(\psi_\pi, V_n^+(b,k)) \leq$ $\leq \gamma(\psi_\pi, V_n(b,k))$, что эквивалентно неравенству

$$\sup_{v\in V_n^+(b,k)} P_{n,v}(\bar X) \leq \sup_{v\in V_n(b,k)} P_{n,v}(\bar X);\ \bar X = \{x\in R^n:\ L(x)\leq 1\}. \tag{3.3}$$

Введем частичную упорядоченность в R^n: будем говорить, что $y \preceq x,\ x,y\in R^n$, если $y_i \leq x_i\ \forall i = 1,...,n$. Назовем множество $X\subset R^n$ *угловым*, если из соотношений $x\in X,\ y\preceq x$ следует, что $y\in X$. Обозначим $R^n_+ = \{x\in R^n:\ x_i\geq 0\ \forall i\}$ положительный октант в R^n.

Так как $\pi(R^n_+) = 1$, то $\bar X = \{x\in R^n:\ L(x)\leq 1\}$ – угловое множество. Это вытекает из того, что подынтегральная функция в (3.2) не убывает по x_i, $i = 1,...,n$ для почти всех v относительно распределения π.

Лемма 3.1. *Пусть X – угловое множество в R^n; $u\preceq v,\ u,v\in R^n$. Тогда $P_{n,u}(X)\geq P_{n,v}(X)$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $v_i = u_i$, $i = 1,...,n-1$; $u_n\leq v_n$. Полагая $w = (v_1,...,v_{n-1})\in R^{n-1},\ x = (z,t);\ z\in R^{n-1}, t, y\in R^1$, мы имеем $P_{n,(w,y)}(dx) = P_{n-1,w}(dz)P_{1,y}(dt)$; здесь $P_{n-1,w}$ и $P_{1,y}$ есть $(n-1)$-мерные и 1-мерные гауссовские меры со средними $w\in R^{n-1},\ y\in R^1$, единичной матрицей ковариаций и дисперсией. Для любого $z\in R^{n-1}$ обозначим $\bar X_z$ одномерное сечение множества $\bar X$ прямой $\ell_z = \{(z,t)\in R^n:\ t\in R^1\}$, т.е. $\bar X_z = \{x = (z,t)\in \bar X;\ t\in R^1\}$. Так как $\bar X$ – угловое множество, то все непустые множества $\bar X_z$ имеют вид

$$\bar X_z = \{(z,t)\in R^n:\ t\leq c\},\quad c = c(z)\leq\infty.$$

Используя теорему Фубини и структуру меры $P_{n,v}$, мы получаем

$$P_{n,u}(\bar{X}) = \int\limits_{R^{n-1}} P_{1,u_n}(\bar{X}_z) P_{n-1,w}(dz),$$

$$P_{n,v}(\bar{X}) = \int\limits_{R^{n-1}} P_{1,v_n}(\bar{X}_z) P_{n-1,w}(dz).$$

Утверждение леммы вытекает из неравенства

$$P_{1,u_n}(\bar{X}_z) = \Phi(c - u_n) \geq P_{1,v_n}(\bar{X}_z) = \Phi(c - v_n), \quad \text{при } u_n \leq v_n.$$

Так как для любого $u \in V_n^+(b,k)$ можно найти $v \in V_n(b,k)$, $v \preceq u$, то неравенство (3.3) непосредственно следует из леммы 3.1.

Вернемся к доказательству нижних границ теорем. В силу предложения 3.1 можно заменить альтернативы $V_n(b,k)$ на $V_n^+(b,k)$. Достаточно рассмотреть случай $k = k_n \to \infty$ в теореме 2.2. Действительно, $\gamma_n(V_n^+(b,k_1)) \geq \gamma_n(V_n^+(b,k_2))$ для $k_1 \leq k_2$, и если $k_n = O(1)$, то, выбирая последовательность $k_{n,1} = n^{\delta_n} \to \infty$, $\delta_n = o(1)$, мы получаем те же нижние границы в теореме 2.2 для последовательности $k_{n,1}$.

Положим $h_n = \min(1, (1+\eta_n)k_n/n)$, где $\eta_n \to 0$ – такая последовательность, что $\eta_n^2 k_n \to \infty$. Пусть $P(\xi_i = 1) = h_n$, $P(\xi_i = 0) = 1 - h_n$. Это соответствует априорному распределению вида

$$\pi^n(dv) = \prod_{i=1}^{n} \pi_{b_n,h_n}(dv_i), \quad \pi_{b,h} = (1-h)\delta_0 + h\delta_b,$$

где δ_b есть мера, сосредоточенная в точке $b \in R^1$.

Предложение 3.2.

$$\pi^n(V_n^+(b_n,k_n)) \to 1.$$

Доказательство. . Положим $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Заметим, что

$$E_{\pi^n} S_n = nh_n, \quad D_{\pi^n} S_n = nh_n(1-h_n).$$

Если $h_n < 1$, то, используя неравенство Чебышева, получим

$$1 - \pi^n(V_n^+(b_n,k_n)) = \pi^n(S_n < k) = \pi^n(nh_n - S_n > nh_n - k) \leq$$
$$D_{\pi^n}(S_n)/(nh_n - k)^2 \leq nh_n/(k\eta_n)^2 \asymp 1/(k\eta_n^2) \to 0;$$

если $h_n = 1$, то $\pi^n(V_n^+(b_n, k_n)) = 1$.

Пусть $\gamma(P_{\pi^n})$ – минимум суммы вероятностей ошибок первого и второго рода в байесовской задаче проверки гипотезы $H_0: \ P = P_{n,0}$ против альтернативы $H_1: \ P = P_{\pi^n}$. В силу неравенства

$$\gamma_n(V_n^+(b_n, k_n)) \geq \gamma(P_{\pi^n}) + o(1), \tag{3.4}$$

которое следует из [1], п. 4.1 и из предложения 3.2, достаточно изучить величины $\gamma(P_{\pi^n})$ в байесовской задаче проверки гипотез. Рассмотрим логарифм отношения правдоподобия

$$l_n(x) = \log\Big(\frac{dP_{\pi^n}}{dP_{n,0}}(x)\Big) = \sum_{i=1}^n \log(1 + z_n(x_i)), \tag{3.5}$$

где мы обозначаем

$$z_n(t) = h_n \nu(t, b_n), \quad \nu(t, b) = \exp(-b^2/2 + tb) - 1.$$

Пусть $k_n = n^{\delta_n}$, $0 < \delta_n \leq 1$. Чтобы получить условия неразличимости теоремы 2.1, достаточно показать, что если $\liminf \delta_n > 1/4$ и $u_n = O(1)$, то статистика $l_n(x)$ асимптотически нормальна с параметрами $(-u_n^2/2, u_n^2)$ относительно $P_{n,0}$-вероятности. Чтобы получить нижние границы теоремы 2.2, достаточно показать, что если

$$\limsup \delta_n \leq 1/4, \quad b_n^2 = y_n^2 \log n, \quad \limsup y_n/\sqrt{2}(1 - \sqrt{\delta_n}) < 1, \tag{3.6}$$

то $l_n(x) \to 0$ относительно $P_{n,0}$-вероятности (см. [1], п. 4.2).

Используя хорошо известное соотношение

$$\Phi(-x) \sim e^{-x^2/2}/x\sqrt{2\pi}, \quad x \to \infty, \tag{3.7}$$

легко видеть, что

$$P_{n,0}(\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq T_n) \geq 1 - 2n\Phi(-T_n) = 1 - o(1).$$

Поэтому можно перейти к T_n-усечениям слагаемых в (3.5), т.е. заменить статистику l_n на

$$\hat{l}_n(x) = \sum_{i=1}^n \log(1 + z_{n,T}(x_i)); \quad z_{n,T}(t) = h_n \nu_T(t, b_n);$$
$$\nu_T(t, b) = \nu(t, b)\mathbf{1}_{t \leq T_n}. \tag{3.8}$$

Предложение 3.3. *Пусть или* 1) $u_n = O(1)$, $h_n \to 0$ *и* $\liminf \delta_n > 1/4$, *или* 2) *выполнено соотношение* (3.6). *Тогда* $\sup_t |z_{n,T}(t)| = o(1)$.

Доказательство. Ясно, что $\sup_t |z_{n,T}(t)| \le \max(h_n, z_{n,T}(T)))$ и достаточно показать, что $z_{n,T}(T) = o(1)$. Пусть $u_n = O(1)$, $h_n \to 0$. Сначала, пусть $k_n > cn^{1/2}$, $c > 0$. Тогда величины $nh_n^2 \sim k_n^2/n$ отделены от 0 и $b_n = O(1)$, $u_n^2 \asymp n^{-1}k_n^2 b_n^2$ при $u_n = O(1)$. Если же $k_n > n^{2/3}$, то $b_n = O(n^{-1/6})$, откуда следует, что $|z_{n,T}(T)| \le |\nu_T(T, b_n)| = o(n^{-\tau})$ для всех $\tau < 1/6$. Если $k_n \le n^{2/3}$, то $|z_{n,T}(T)| \le n^{-1/3}\nu(T_n, b_n) = o(n^{-\tau})$ для всех $\tau < 1/3$.

Пусть теперь $k_n = o(n^{1/2})$ и $\liminf \delta_n > 1/4$. Положим $b_n^2 = y_n^2 \log n$. Тогда или $b_n \to 0$, или при $b_n > C > 0$ имеем

$$h_n = o(n^{-1/2}), \quad u_n^2 \asymp n^{-1}k_n^2 \exp(b_n^2) = n^{2\delta_n - 1 + y_n^2},$$

откуда следует, что $y_n^2 + 2\delta_n - 1 \le o(1)$. С другой стороны,

$$|z_{n,T}(T)| \le h_n \exp(-b_n^2/2 + T_n b_n) = n^{\delta_n - 1 - y_n^2/2 + \sqrt{2}y_n + o(1)} \to 0, \quad (3.9)$$

так как либо $y_n \to 0$ при $b_n \to 0$, либо, если $b_n > C > 0$, то $y_n^2 \le 1 - 2\delta_n + o(1) < 1/2$ и

$$\delta_n - 1 - y_n^2/2 + \sqrt{2}y_n \le -(y_n - 1/\sqrt{2})^2 + o(1) < 0. \quad (3.10)$$

Отсюда следует утверждение предложения в условиях 1). В условиях 2) заметим, что соотношение (3.6) влечет

$$\limsup 2\delta_n/(y_n - \sqrt{2})^2 < 1, \quad (3.11)$$

и мы получаем последнее соотношение (3.9) непосредственно.

Положим

$$t_{n,1}(x) = \sum_{i=1}^n z_{n,T}(x_i), \quad t_{n,2}(x) = \sum_{i=1}^n z_{n,T}^2(x_i).$$

Используя предложение 3.3 и соотношение $\log(1+z) = z - z^2/2 + o(z^2)$ при $z \to 0$, мы получим

$$\hat{l}_n = t_{n,1} - t_{n,2}/2 + o(t_{n,2}).$$

Чтобы завершить доказательство нижних границ теоремы 2.1, достаточно проверить, что статистики $t_{n,1}$ асимптотически нормальны с параметрами $(0, u_n^2)$ и $t_{n,2} = u_n^2 + o(1)$ по $P_{n,0}$-вероятности при выполнении условий 1) предложения 3.3.

Пусть $k_n \geq cn^{1/2}$. Можно вернуться к неусеченным статистикам

$$t_{n,3}(x) = \sum_{i=1}^{n} z_n(x_i), \quad t_{n,4} = \sum_{i=1}^{n} z_n^2(x_i).$$

Пусть $P_{1,0}$ – стандартная гауссовская мера на R^1. Прямое вычисление дает равенства

$$E_{1,0}\nu(t,b) = 0, \quad E_{1,0}\nu^2(t,b) = e^{b^2} - 1, \tag{3.12}$$

$$E_{1,0}\nu^4(t,b) = (e^{b^2}-1)^2(e^{4b^2} + 2e^{3b^2} + 3e^{2b^2} - 3). \tag{3.13}$$

Так как $b = O(1)$ в рассматриваемом случае, из этих соотношений следует, что $t_{n,3}/u_n \to \eta \sim N(0,1)$, $t_{n,4} - u_n^2 \to 0$ по $P_{n,0}$-вероятности.

Пусть $k_n = o(n^{1/2})$; тогда $h_n \to 0$. Оценим моменты усеченных слагаемых $z_{n,T}$ в суммах для $t_{n,1}$, $t_{n,2}$. Используя равенства

$$E_{1,0}\nu_T(t,b) = \Phi(T_n - b) - \Phi(T_n), \tag{3.14}$$

$$E_{1,0}\nu_T^2(t,b) = e^{b^2}\Phi(T_n - 2b) - 2\Phi(T_n - b) + \Phi(T_n), \tag{3.15}$$

с учетом (3.7) и (3.14), получим

$$\begin{gathered} -E_{n,0}t_{n,1} = -nh_n E_{1,0}\nu_T(t,b_n) = nh_n\big(\Phi(b_n - T_n) - \Phi(-T_n)\big) \sim \\ k_n\Phi(b_n - T_n) = o(k_n \exp(-(T_n - b_n)^2/2)). \end{gathered} \tag{3.16}$$

Обозначим $k_n \exp(-(T_n - b_n)^2/2) = n^{C_n}$. Нужно проверить соотношение $\limsup C_n \leq 0$. Аналогично доказательству предложения 3.3 при $\liminf \delta_n > 1/4$, положим $b_n^2 = y_n^2 \log n$. Тогда (ср. с (3.10))

$$C_n = \delta_n - (\sqrt{2} - y_n)^2/2 = \delta_n - 1 - y_n^2/2 + \sqrt{2}y_n \leq 0.$$

Заметим, что при выполнении (3.6) мы получает соотношение $\limsup C_n \leq 0$ из (3.11) непосредственно.

Для моментов второго порядка в силу (3.15) имеем

$$\begin{aligned} E_{n,0}t_{n,2} &= nh_n^2 E_{1,0}\nu_T^2(t,b_n) \\ &= nh_n^2\Big(e^{b_n^2}\Phi(T_n - 2b_n) - 2\Phi(T_n - b_n) + \Phi(T_n)\Big). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Так как $T_n - 2b_n \to \infty$ при выполнении 1), то справедливы соотношения

$$E_{n,0}t_{n,2} \sim u_n^2,$$
$$D_{n,0}t_{n,2} \le nh_n^4 E_{1,0}\nu_T^4(t,b) \le nh_n^4 \sup_t \nu_T^2(t,b))E_{1,0}\nu_T^2(t,b)) = o(u_n^2);$$

те же оценки справедливы и для $D_{n,0}t_{n,1}$ и для суммы четвертых моментов слагаемых в сумме $t_{n,1}$. Используя эти оценки, предложение (3.3), центральную предельную теорему и неравенство Чебышева, мы легко получаем требуемые соотношения. Нижние границы теоремы 2.1 доказаны.

Чтобы получить условия неразличимости теоремы 2.2, достаточно проверить, что $t_{n,1} \to 0$, $t_{n,2} \to 0$ по $P_{n,0}$-вероятности при выполнении условия (3.6). Имеем

$$E_{n,0}t_{n,2} = n^{-1}k_n^2 e^{b^2}\Phi(T_n - 2b_n)(1 + o(1)) + o(1).$$

Пусть $\delta_n \to \delta = 1/4$. Из (3.6) следует, что $\limsup y_n\sqrt{2} < 1$, $T_n - 2b_n \to \infty$ и

$$E_{n,0}t_{n,2} \sim n^{-1}k_n^2 e^{b^2} = n^{D_n}, \quad \limsup D_n = \limsup(2\delta_n - 1 + y_n^2) < 0.$$

Пусть $\delta_n \to \delta < 1/4$. Если $\limsup y_n\sqrt{2} \le 1$, то, аналогично,

$$E_{n,0}t_{n,2} = O(n^{-1}k_n^2 e^{b^2}) = O(n^{D_n}),\ \limsup D_n < 0.$$

Если $\limsup y_n\sqrt{2} > 1$, то $2b_n - T_n \asymp \sqrt{\log n}$, $\quad E_{n,0}t_{n,2} \asymp n^{D_n}/\sqrt{\log n}$, где

$$D_n = 2\delta_n - 1 + y_n^2 - (\sqrt{2} - 2y_n)^2/2 = 2\delta_n - (y_n - \sqrt{2})^2$$

и $\limsup D_n \le 0$ в силу (3.11). Условия неразличимости теоремы 2.2 доказаны.

3.2. Верхние границы теорем 2.1, 2.2.

3.2.1. Верхние границы для теоремы 2.2.

Нужно показать, что

$$\alpha_n(\psi_n^{thr}) = o(1), \qquad \sup_{v \in V_n(b_n,k_n)} \beta_n(\psi_n^{thr}, v) = o(1). \tag{3.18}$$

Первое соотношение (3.18) следует из неравенства

$$P_{n,0}(\max_{1\le i\le n} x_i \ge T_n) \le n\Phi(-T_n) \to 0$$

с учетом (3.7). Далее, для любых $v \in V_n(b_n, k_n)$ имеем

$$\beta_n(\psi_n^{thr}, v) = P_{n,v}(\max_{1\le i\le n} x_i \le T_n) = (\Phi(T_n))^{n-k_n}(\Phi(T_n - b_n))^{k_n}$$
$$\le (\Phi(T_n - b_n))^{k_n} = R_n.$$

Пусть $k_n = n^{\delta_n}$, $b_n = y_n\sqrt{\log n}$. Если $\delta_n \to 0$, то в предположениях п. 2 теоремы 2.2 имеем $b_n^*(\delta_n) \sim T_n$ и $b_n - T_n \to \infty$; поэтому $R_n \to 0$.

Пусть $\delta_n \to \delta > 0$. Тогда $k_n \to \infty$, и, если $\limsup(T_n - b_n) < \infty$, то также $R_n \to 0$. Пусть $T_n - b_n \to \infty$. В предположениях п. 2 теоремы 2.2 мы имеем

$$\delta_n - (y_n - \sqrt{2})^2/2 > \zeta > 0$$

для некоторого $\zeta > 0$ при достаточно больших n. Используя соотношение (3.7) и неравенство $1 - x \le e^{-x}$, имеем

$$R_n = (1 - \Phi(b_n - T_n))^{k_n} \le \exp(-k_n\Phi(b_n - T_n));$$
$$k_n\Phi(b_n - T_n) \asymp (T_n - b_n)^{-1}n^{\delta_n-(y_n-\sqrt{2})^2/2} \ge (T_n - b_n)^{-1}n^{\zeta} \to \infty,$$

откуда следует $R_n \to 0$ и второе соотношение (3.18).

3.2.2. Верхние границы для теоремы 2.1. Для доказательства верхних границ п. 2 нужно проверить соотношение

$$\gamma(\hat\psi_{n,b_n,H_n}, V_n(b_n, k_n)) \le 2\Phi(-u_n/2) + o(1); \quad H_n = u_n/2. \qquad (3.19)$$

При этом достаточно рассмотреть случай $\liminf u_n > 0$. Действительно, если $u_n \to 0$, то (3.19) вытекает из неравенства $\gamma(\hat\psi_{n,b_n,H_n}, V_n(b_n, k_n)) \le 1$, которое является следствием неравенства

$$\begin{gathered} P_{n,0}(\mathcal{X}_n) \ge P_{n,v}(\mathcal{X}_n), \\ \mathcal{X}_n = \{x \in R^n : \ t_{n,b_n}(x) \le H_n, \ \max_{1\le i\le n} x_i \le T_n\}. \end{gathered} \qquad (3.20)$$

Заметим, что статистика $t_{n,b_n}(x)$, как функция от $x = (x_1, ..., x_n)$ не убывает по каждому аргументу x_i, и поэтому $\mathcal{X}_n$ является угловым множеством (см. раздел 3.1). С учетом этого неравенство (3.20) следует из леммы 3.1.

Легко видеть с учетом (3.18), что

$$\alpha_n(\hat\psi_{n,b_n,H_n}) \le \alpha_n(\psi_{n,b_n,H_n}) + \alpha_n(\psi_n^{thr}) = \alpha_n(\psi_{n,b_n,H_n}) + o(1),$$
$$\beta_n(\hat\psi_{n,b_n,H_n}, v) \le \min(\,\beta_n(\psi_{n,b_n,H_n}, v), \beta_n(\psi_n^{thr}, v)\,).$$

Поэтому достаточно показать, что

$$\alpha_n(\psi_{n,b_n,H_n}) \le \Phi(-u_n/2) + o(1), \tag{3.21}$$

$$\sup_{v\in V_n(b_n,k_n)} \min(\,\beta_n(\psi_{n,b_n,H_n}, v), \beta_n(\psi_n^{thr}, v)\,) \le \Phi(-u_n/2) + o(1). \tag{3.22}$$

Пусть $u_n \to \infty$. С учетом теоремы 2.2 соотношения (3.21), (3.22) вытекают из следующих:

$$\begin{gathered} P_{n,0}(t_{n,b_n} \ge H_n) \to 0, \\ \sup_{v\in V_n(b_n,k_n)} P_{n,v}(t_{n,b_n} \le H_n) \to 0 \quad \text{при } b_n < (1-\delta_n^{1/2}+\zeta)T_n \end{gathered} \tag{3.23}$$

для любого $\zeta > 0$. В условиях теоремы отсюда следует, что достаточно рассматривать $b_n < T_n/(2+\kappa)$ при достаточно больших n и достаточно малом $\kappa = \kappa(\delta) > 0$ при $\delta = \liminf \delta_n > 1/4$.

Так как $E_{n,0}(t_{n,b_n}) = 0$, $D_{n,0}(t_{n,b_n}) = 1$ в силу (3.12), то первое соотношение (3.23) вытекает из неравенства Чебышева.

Для получения второго соотношения (3.23) рассмотрим вначале случай $e^{b_n^2} = o(k_n)$. Вычислим P_{n,v_n}-среднее и дисперсию статистик t_{n,b_n}. Пусть $P_{1,t}$ – одномерная гауссовская мера с параметрами $(t,1)$, $t \in R^1$. Нетрудно получить равенства

$$E_{1,t}\nu(x,b) = e^{bt} - 1, \quad D_{1,t}\nu(x,b) = e^{2bt}(e^{b^2} - 1). \tag{3.24}$$

Используя равенства (3.24), имеем при $v_n \in V_n(k_n, b_n)$:

$$E_{n,v_n}t_{n,b_n} = A_n \sum_{i=1}^{n}(e^{b_n v_{n,i}} - 1) = n^{-1/2}k_n(e^{b_n^2} - 1)^{1/2} = u_n; \tag{3.25}$$

$$D_{n,v_n}t_{n,b_n} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} e^{2b_n v_{n,i}} = 1 + k_n n^{-1}(e^{2b_n^2} - 1). \tag{3.26}$$

Из (3.26) и условия $e^{b_n^2} = o(k_n)$ следует, что

$$u_n^{-2}D_{n,v_n}t_{n,b_n} = u_n^{-2} + k_n^{-1}(e^{b_n^2} + 1) \to 0. \tag{3.27}$$

Поэтому второе соотношение (3.23) также следует из соотношений (3.25), (3.26), (3.27) и неравенства Чебышева:

$$P_{n,v}(t_{n,b_n} \le u_n/2) = P_{n,v}(u_n - t_{n,b_n} \ge u_n/2) \le 4D_{n,v_n}(t_{n,b_n})u_n^{-2} \to 0. \tag{3.28}$$

Пусть $k_n e^{-b_n^2} = O(1)$, $u_n \to \infty$. Для достаточно больших n при заданных условиях на b_n имеем

$$T_n/(2+\kappa) > b_n > cT_n, \quad c > 1/3. \tag{3.29}$$

Обозначим через $\hat{t}_{n,b_n}$ сумму T_n-усеченных слагаемых:

$$\hat{t}_{n,b_n}(x) = \sum_{i=1}^{n} w_{n,T}(x_i, b_n), \quad w_{n,T}(x, b_n) = A_n \nu_T(x, b_n). \tag{3.30}$$

Ясно, что $P_{n,v}(t_{n,b_n} \le H_n) \le P_{n,v}(\hat{t}_{n,b_n} \le H_n)$, так что во втором соотношении (3.23) статистики t_{n,b_n} можно заменить на их усеченный вариант $\hat{t}_{n,b_n}$. Оценим $P_{n,v}$-среднее и дисперсию статистик $\hat{t}_{n,b_n}$. Используя равенства

$$E_{1,t}\nu_T(x,b) = e^{bt}\Phi(T_n - t - b) - \Phi(T_n - t), \tag{3.31}$$

$$E_{1,t}\nu_T^2(x,b) = e^{2bt+b^2}\Phi(T_n - t - 2b) - 2e^{bt}\Phi(T_n - t - b_n) + \Phi(T_n - t), \tag{3.32}$$

и соотношения (3.7), можно получить, что в условиях (3.29) равномерно по $v \in V_n(k_n, b_n)$,

$$E_v \hat{t}_{n,b_n} \sim A_n k_n e^{b_n^2}\Phi(T_n - 2b_n) \sim k_n n^{-1/2} e^{b_n^2/2} \sim u_n. \tag{3.33}$$

Аналогично, равномерно по $v \in V_n(k_n, b_n)$,

$$\begin{aligned} D_v \hat{t}_{n,b_n} &\le 1 + A_n^2 k_n e^{3b_n^2}\Phi(T_n - 3b_n) \\ &\sim 1 + n^{-1} k_n e^{2b_n^2}\Phi(T_n - 3b_n) = o((E_v \hat{t}_{n,b_n})^2). \end{aligned} \tag{3.34}$$

В проверке нуждается последнее равенство в (3.34). Поскольку $3b_n - T_n \to \infty$, то $\Phi(T_n - 3b_n) = o(\exp(-(T_n - 3b_n)/2))$ и теребуемое равенство следует из соотношения

$$k_n^{-1}\exp(b_n^2 - (T_n - 3b_n)/2) = O(1) \ \text{ при } k_n = n^{\delta_n},\ \delta_n \to \delta > 1/4. \tag{3.35}$$

Полагая $b_n = y_n\sqrt{\log n}$ и учитывая, что $\delta_n > 1/2 - y_n^2/2$, так как $u_n > 1$, видим, что (3.35) вытекает из неравенства

$$3y_n^2/2 - (\sqrt{2} - 3y_n)^2/2 - 1/2 = -3(y_n - \sqrt{2}/2)^2 \le 0. \tag{3.36}$$

Используя предыдущие оценки и неравенство Чебышева, получим, аналогично (3.28), что $P_{n,v}(\hat{t}_{n,b_n} \le u_n/2) \to 0$ равномерно по $v \in V_n(k_n, b_n)$.

Пусть $u_n \asymp 1$. Так как $\delta_n \to \delta \in (1/4, 1]$, то в этом случае справедливы соотношения (сравни с оценками в доказательстве предложения (3.3)):

$$b_n = y_n\sqrt{\log n},\ \ y_n^2 < 1/2; \quad T_n - 2b_n \to \infty \tag{3.37}$$

Тогда соотношения (3.21), (3.22) вытекают из оценок, которые мы установим ниже:

$$\begin{aligned} &P_{n,0}(t_{n,b_n} \geq u_n/2) = \Phi(-u_n/2) + o(1), \\ &P_{n,v}(t_{n,b_n} \leq u_n/2) \leq \Phi(-u_n/2) + o(1), \end{aligned} \tag{3.38}$$

где второе соотношение равномерно по $v \in V_n(k_n, b_n)$.

Первое равенство в (3.38) является следствием того, что статистики t_{n,b_n} асимптотически нормальны с параметрами $(0,1)$ по $P_{n,0}$-вероятности. Это следует из соотношений (3.12), (3.13) и из центральной предельной теоремы.

Чтобы установить второе соотношение (3.38), рассмотрим вначале случай $e^{b_n^2} = o(k_n)$. Покажем, что статистики t_{n,b_n} можно представить в виде $t_{n,b_n} = u_n + t_{n,b_n}^v + r_n^v$, где случайные величины t_{n,b_n}^v асимптотически нормальны с параметрами $(0,1)$ и $r_n^v = o(1)$ по $P_{n,v}$-вероятности равномерно по $v \in V_n(b_n, k_n)$. Воспользуемся представлением

$$\nu(t+\eta, b) = e^{tb} - 1 + \nu(\eta, b) + r_\nu(\eta; b, t), \quad r_\nu(\eta; b, t) = (e^{bt} - 1)\nu(\eta, b),$$

которое приводит к равенству $t_{n,b_n} = u_n + t_{n,b_n}^v + r_n^v$, где

$$t_{n,b_n}^v = A_n \sum_{i=1}^n \nu(x_i - v_i, b_n), \quad r_n^v = A_n \sum_{i=1}^n (e^{b_n v_i} - 1)\nu(x_i - v_i, b_n).$$

Тогда равномерно по $v = v_n \in V_n(b_n, k_n)$ имеем

$$E_{n,v} r_n^v = 0,\ \ E_{n,v}(r_n^v)^2 = A_n^2 \sum_{i=1}^n (e^{b_n v_i} - 1)^2 (e^{b_n^2} - 1)$$
$$n^{-1} k_n (e^{b_n^2} - 1)^2 \leq e^{b_n^2} k_n^{-1} u_n^2 = o(1).$$

Таким образом, $r_n^v \to 0$ по $P_{n,v}$-вероятности, а $P_{n,v}$-распределение t_{n,b_n}^v не зависит от v и совпадает с $P_{n,0}$-распределением t_{n,b_n}. Отсюда вытекает второе неравенство в (3.38).

Пусть $k_n e^{-b_n^2} = O(1)$, $u_n \asymp 1$, $\delta_n \to \delta > 1/4$. Отсюда при достаточно больших n с учетом (3.37) имеем

$$T_n/(2+\kappa) > b_n > cT_n, \quad 1/2 > c > 1/3; \quad k_n = O(n^{1/3}). \tag{3.39}$$

Ясно, что во втором неравенстве (3.38) можно заменить статистики t_{n,b_n} на $\hat{t}_{n,b_n}$ (см. (3.30)). В условиях (3.39), используя соотношения (3.31), (3.32) аналогично (3.33), (3.34) можно получить

$$E_v\hat{t}_{n,b_n} \sim u_n, \quad D_v\hat{t}_{n,b_n} = 1 + o(1). \tag{3.40}$$

Заметим теперь, что условие $u_n \asymp 1$ влечет соотношение $A_n \asymp k_n/n \sim h_n$, так что усеченные слагаемые в соотношениях (3.8) и (3.30) эквивалентны по порядку: $w_{n,T}(x) \asymp z_{n,T}(x)$. В силу предложения 3.3 отсюда следует $\sup_x |w_{n,T}(x)| = o(1)$, так что для сумм (3.30) можно использовать центральную предельную теорему. В силу (3.40) это влечет соотношение $\hat{t}_{n,b_n} = u_n + \eta_n$, $\eta_n \to \eta \sim N(0,1)$ по $P_{n,v}$-вероятности, откуда следует, что $P_{n,v}(\hat{t}_{n,b_n} \le u_n/2) = \Phi(-u_n/2) + o(1)$ равномерно по $v \in V_n(b_n, k_n)$. Утверждение п. 2 доказано.

Обратимся к п. 3 теоремы. Линейные статистики t_n^{lin} нормальны с параметрами $(0,1)$ по $P_{n,0}$-вероятности и с параметрами $(\tilde{u}_n, 1)$ по $P_{n,v}$-вероятности, $v \in V_n(b_n, k_n)$. Это влечет соотношения

$$\alpha_n(\psi_n^{lin}) = \Phi(-H_n), \quad \beta_n(v, \psi_n^{lin}) = \Phi(H_n - \tilde{u}_n); \quad v \in V_n(b_n, k_n),$$

из которых следует утверждение п. 3.

3.3. Доказательство предложения 2.1.

Доказательство п. 1 предложения. Легко видеть, что

$$\alpha_n(\psi_n^{ad}) = P_{n,0}(\mathcal{X}_n) \le n\Phi(-T_n) + \sum_{J_{n,0} \le j \le J_{n,1}} P_{n,0}(\hat{t}_{n,j} > T_j), \tag{3.41}$$

где $\hat{t}_{n,j}$ есть сумма T_n-усеченных слагаемых:

$$\hat{t}_{n,j} = \sum_{i=1}^{n} z_{n,T}(x_i, j),$$

$$z_{n,T}(x,j) = A_{n,j}\nu(x,j)\mathbf{1}_{x \le T_n}, \quad A_{n,j} = (n(e^{j^2} - 1))^{-1/2}.$$

Напомним, что $n\Phi(-T_n) = o(1)$ в силу (3.7). Покажем, что

$$P_{n,0}(\hat{t}_{n,j} > T_j) = \Phi(-T_j) + O((\log n)^{-B_n}), \quad B_n \sim 1 \qquad (3.42)$$

равномерно по $J_{n,0} \le j \le J_{n,1}$. Так как $J_{n,1}(\log n)^{-B_n} = o(1)$ и, в силу (3.7),

$$\sum_{J_{n,0}\le j\le J_{n,1}} \Phi(-T_j) \asymp \sum_{J_{n,0}\le j\le J_{n,1}} j^{-1}(\log j)^{-3/2} \to 0,$$

то соотношения (3.41), (3.42) влекут утверждение п. 1.

Для доказательства (3.42) заметим, что, аналогично доказательству предложения 3.3 в условиях 2), имеем при $J_{n,0} \le j \le J_{n,1}$:

$$\sup_x |z_{n,T}(x,j)| = A_{n,j}\nu_T(T_n,j) \sim n^{-1/2}e^{-j^2+T_nj}$$
$$\exp(-(T_n/2-j)^2) \le \exp(-(T_n/2-J_{n,1})^2) = (\log n)^{-B_n}.$$

Аналогично (3.16), (3.17), используя (3.14), (3.15) и (3.7), получим:

$$E_{n,0}\hat{t}_{n,j} = \sum_{i=1}^n E_{n,0}z_{n,T}(x_i,j) = -nA_{n,j}(\Phi(j-T_n)-\Phi(-T_n))$$
$$\sim -\frac{\exp(-(T_n/2-j)^2)}{T_n-j} = o((\log n)^{-B_n});$$
$$E_{n,0}\hat{t}^2_{n,j} = \sum_{i=1}^n E_{n,0}z^2_{n,T}(x_i,j)$$
$$= \frac{e^{j^2}\Phi(T_n-2j) - 2\Phi(T_n-j) + \Phi(T_n)}{e^{j^2}-1}$$
$$= 1 - \frac{e^{j^2}\Phi(2j-T_n) - 2\Phi(j-T_n) + \Phi(-T_n)}{e^{j^2}-1} = 1 + o((\log n)^{-B_n}),$$

откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^n D_{n,0}z_{n,T}(x_i,j) = 1 + o((\log n)^{-B_n}), \;\; D_{n,0}\hat{t}_{n,j} = 1 + o((\log n)^{-B_n}).$$

Поэтому отношение Ляпунова для сумм $\hat{t}_{n,j}$ независимых случайных величин $z_{n,T}(x_i,j)$ оценивается величиной

$$L_n(j) = \frac{\sum_{i=1}^n E_{n,0}|z_{n,T}(x_i,j) - E_{n,0}z_{n,T}(x_i,j)|^3}{\Big(\sum_{i=1}^n D_{n,0}z_{n,T}(x_i,j)\Big)^{3/2}}$$
$$\le \frac{\sup_x |z_{n,T}(x,j)|}{\Big(\sum_{i=1}^n D_{n,0}z_{n,T}(x_i,j)\Big)^{1/2}} = O((\log n)^{-B_n}).$$

Приведенные выше оценки равномерны по j, $J_{n,0} \le j \le J_{n,1}$. Эти оценки и неравенство Берри–Эссеена влекут соотношение (3.42).

3.3.2. Доказательство п. 2 предложения. Не ограничивая общности можно считать, что $k_n = n^{\delta_n}$, $\delta_n \to \delta \in [0,1/2]$.

Пусть $\delta_n \to \delta \in [0,1/4]$. Так как $\liminf b_n(k_n)/b_n^*(k_n) > 1$, то из теоремы 2.2, п. 2 следует, что $\beta_n(\psi_n^{thr}, v_n) \to 0$. По построению тестов ψ_n^{ad}, их критическое множество $\mathcal{X}_n = \{x : \psi_n^{ad}(x) = 1\}$ содержит критическое множество тестов ψ_n^{thr}, так что

$$\beta_n(\psi_n^{ad}, v_n) = P_{n,v_n}(\overline{\mathcal{X}}_n) \le \beta_n(\psi_n^{thr}, v_n) \to 0;$$

здесь и ниже $\overline{\mathcal{X}}$ есть дополнение множества $\mathcal{X}$ в R^n.

Пусть $\delta_n \to \delta \in (1/4, 1/2]$. Прежде всего, можно считать, что

$$b_n(k_n) = b_n^*(k_n)(1+\zeta) = (1+\zeta)\sqrt{(1-2\delta_n)\log n} < T_n/(2+\tau) \quad (3.43)$$

для достаточно малых $\zeta = \zeta(\delta) > 0$, $\tau = \tau(\delta) > 0$ и больших n. Действительно, в условиях предложения можно считать, что $b_n^*(k_n)(1+\zeta) \le b_n$ для достаточно малых $\zeta > 0$; вероятности $P_{n,v}(\overline{\mathcal{X}}_n)$ не зависят от $v \in V_n(b_n,k_n)$, поскольку множество $\overline{\mathcal{X}}_n$ инвариантно относительно перестановок координат, а из леммы 3.1 следует неравенство

$$P_{n,v}(\overline{\mathcal{X}}_n) \le P_{n,v^*}(\overline{\mathcal{X}}_n) \quad \text{при } v \in V_n(b_n,k_n),\ v^* \in V_n(b_n^*(1+\zeta),k_n),$$

поскольку $\overline{\mathcal{X}}_n$ есть угловое множество и можно считать, что $v^* \preceq v$.

Достаточно показать, что найдется такая последовательность j_n, $J_{n,0} \le j_n \le J_{n,1}$, что

$$P_{n,v_n}(\hat{t}_{n,j_n} \le T_{j_n}) \to 0 \quad \text{при } v_n \in V_n(b_n,k_n). \qquad (3.44)$$

Положим $j_n = \max\{j: \ b_n(k_n) \geq j_n\}$. Так как

$$b_n(k_n) = (1+\zeta)\sqrt{(1-2\delta_n)\log n} \to (1+\zeta)\sqrt{(1-2\delta)\log n} \\ = cT_n, \ c < 1/2,$$

то $j_n < J_{n,1}$ при достаточно больших n и достаточно малых $\zeta > 0$. Кроме того, по построению величин $J_{n,0}$, имеем

$$b_n^*(k_n) = \sqrt{\log(n/k_n^2)} \geq \sqrt{\log(n/k_{n,2}^2)} > J_{n,0},$$

так что $j_n \geq J_{n,0}$; при этом $j_n + 1 \geq b_n(k_n) \geq j_n$.

Вычислим P_{n,v_n}-среднее и дисперсию статистик $\hat{t}_{n,j_n}$. Используя равенства (3.31), (3.32), аналогично (3.33), (3.34) с учетом (3.43) и условий на j_n имеем

$$\begin{aligned} E_{n,v_n}\hat{t}_{n,j_n} &= A_{n,j}\Big((n-k_n)(\Phi(T_n-j_n)-\Phi(T_n)) \\ &+k_n(e^{j_n b_n}\Phi(T_n-b_n-j_n)-\Phi(T_n-b_n)\Big) \\ &\sim n^{-1/2}k_n e^{b_n^2/2-(j_n-b_n)^2/2} \asymp n^{-1/2}k_n e^{b_n^2/2} \\ &= e^{(\zeta/2+\zeta^2/4)(b_n^*(k_n))^2}; \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned} D_{n,v_n}\hat{t}_{n,j_n} &\leq A_{n,j}^2\Big(ne^{j_n^2}\Phi(T_n-2j_n) \\ &+k_n(e^{2j_n b_n+j_n^2}\Phi(T_n-2j_n-b_n))+O(1)\Big) \\ &\sim n^{-1}k_n e^{2j_n b_n}\Phi(T_n-2j_n-b_n) = o((E_{n,v_n}\hat{t}_{n,j_n})^2). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Последнее равенство в (3.46) следует из соотношения $e^{2b_n j_n}\Phi(T_n - 2j_n - b_n)) = o(k_n e^{b_n^2})$ при $\delta > 1/4$, которое проверяется в условиях (3.43) на основе (3.7) аналогично (3.35).

Из соотношения (3.45) следует, что

$$E_{n,v_n}\hat{t}_{n,j_n}/T_{j_n} \asymp \exp((\zeta/2+\zeta^2/4))(b_n^*(k_n))^2)(\log(b_n^*(k_n)))^{-1/2} \to \infty.$$

С учетом (3.46) и неравенства Чебышева, отсюда, аналогично (3.28), следует требуемое соотношение (3.44).

Литература

1. Yu. I. Ingster, *Asymptotically minimax hypothesis testing for nonparametric alternatives. I, II, III.* — Mathematical Methods of Statistics **2** (1993), 85–114, 171–189, 249–268.

2. Yu. I. Ingster, *Minimax detection of a signal for l^n-balls.* — Mathematical Methods of Statistics **7** no. 4 (1998), 401–428.
3. Yu. I. Ingster, *Adaptive detection of a signal of growing dimension. I.* — Mathematical Methods of Statistics **10** no. 4 (2001), 395–421.
4. Yu. I. Ingster, *Adaptive detection of a signal of growing dimension. II.* — Mathematical Methods of Statistics, (to appear) (2002).
5. O. V. Lepski, *One problem of adaptive estimation in Gaussian white noise.* — Theory Probab. Appl. **35** (1990), 459–470.
6. O. V. Lepski, *Asymptotic minimax adaptive estimation. 1.* — Upper bounds. Theory Probab. Appl. **36** (1991), 654–659.
7. O. V. Lepski, *Asymptotic minimax adaptive estimation. 2.* — Statistical model without optimal adaptation. Adaptive estimators. Theory Probab. Appl. **37** (1992), 468–481.
8. V. G. Spokoiny, *Adaptive hypothesis testing using wavelets.* — Ann. Stat. **24** no. 6 (1996), 2477–2498.
9. V. G. Spokoiny, *Adaptive and spatially adaptive testing of nonparametric hypothesis.* — Mathematical Methods of Statistics **7** no. 3 (1998), 245–273.

Ingster Yu. I., Suslina I. A. On detection of a signal of known shape in multi-channel system.

The problem of detection of a signal in n-channel system is considered. A signal of known shape is observed in the background Gaussian white noise. Minimax asymptotics depending on asymptotics of number k of channels and on the signal-to-noise ratio are studied.

Петербургский государственный
университет путей сообщения
С.Петербургский государственный
институт точной механики и оптики

Поступило 10 июня 2002 г.