Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 294, 2002 г.

А. Н. Бородин

О ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССАХ С ОДИНАКОВЫМИ МОСТАМИ

1. Введение. В работе выделяются классы диффузионных процессов, для которых известный результат Фейнмана–Каца, о распределении интегральных функционалов, приводится к идентичной форме. Это означает, что для таких процессов вопрос о распределении функционалов, по–существу, решается одинаково. Эти классы процессов, как выяснилось, можно охарактеризовать и другим способом. Рассмотрим диффузионные процесссы, у которых совпадают условные конечномерные распределения, при условии, что в тот или иной момент времени конец траектории фиксирован. Процессы, полученные из исходных наложением условия на конец траектории, часто называют мостами. Классы процессов с одинаковыми мостами – это те же классы, для которых результат Фейнмана–Каца приводится к идентичной форме. Такие же классы процессов дает и h - преобразование Дуба (см. [1]).

Хорошо известно, например, что мосты у броуновского движения и броуновского движения с линейным сносом совпадают. Это влечет, что условные распределения различных функционалов от этих процессов, при условии, что конец траектории фиксирован, тоже совпадают. Понятно, что определенное влияние это оказывает и на безусловные распределения функционалов от процессов. Для распределений многих функционалов от броуновского движения существуют явные формулы. Лишь незначительно уже класс функционалов от броуновского движения с линейным сносом, обладающих этим свойством. Значительный интерес, с точки зрения вычисления явных формул для распределения функционалов, представляют бесселевские процессы, процесс Орнштейна–Уленбека, радиальный процесс Орнштейна–Уленбека. Большое количество формул, относящихся к этим про-

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ No. 02-01-00265, No. 00-15-96019, РФФИ–НИИО No. 99-01-04027.

цессам, содержится в справочнике [1]. К процессам с хорошо вычисляемыми распределениями следует отнести и процессы, у которых мосты совпадают с мостами перечисленных выше процессов. Для броуновского процесса описание класса диффузионных процессов, мосты которых совпадают с броуновскими, было дано в работе [2]. Для достаточно общих диффузий такие классы приведены в [3].

2. Диффузионные процессы с одинаковыми мостами. Пусть $W(s)$, $s \in (0,\infty)$, – процесс броуновского движения. Рассмотим процесс ξ, который является решением стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi(t) = a(\xi(t))dt + dW(t), \qquad \xi(0) = x. \tag{2.1}$$

Для любой случайной величины μ и произвольного события Q обозначение $\mathbf{E}\{\mu; Q\}$ служит компактной записью для $\mathbf{E}\{\mu \mathbb{1}_Q\}$. Далее через $\mathbf{E}_x$ и $\mathbf{P}_x$ обозначаются соответственно математическое ожидание и вероятность по процессу при начальном значении процесса равным x. Пусть τ – независящий от процесса броуновского движения W, а, следовательно, и от процесса ξ, экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ момент остановки. Такому моменту соответствует преобразование Лапласа по параметру времени процесса. Следовательно, обращение преобразования Лапласа по λ дает соответствующее распределение в фиксированный момент времени t.

Следующий результат позволяет вычислять распределения интегральных функционалов от процесса ξ. Он является следствием хорошо известного аналогичного результата для более общих диффузионных процессов.

Согласно результату Фейнмана–Каца [4], для ограниченной функции $\Phi(x)$ и неотрицательной $f(x)$, при $\gamma \geqslant 0$ функция

$$M(x) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_x\Big\{\Phi(\xi(\tau))\exp\Big(-\gamma\int_0^\tau f(\xi(s))ds\Big)\Big\} \tag{2.2}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$\frac{1}{2}M''(x) + a(x)M'(x) - (\lambda + \gamma f(x))M(x) = -\Phi(x), \tag{2.3}$$

удовлетворяющим, возможно, дополнительным граничным условиям в зависимости от особых точек (полюсов) функции $a(x)$.

Замена $D(x) = \exp\Big(\int^x a(y)dy\Big) M(x)$ приводит к уравнению, нормального вида, не содержащему первую производную

$$\frac{1}{2}D''(x) - (\lambda + \gamma f(x) + \frac{1}{2}a'(x) + \frac{1}{2}a^2(x))D(x) = -\exp\Big(\int^x a(y)dy\Big)\Phi(x). \tag{2.4}$$

Распределение интегрального функционала в момент τ можно получить, обратив преобразование Лапласа по параметру γ:

$$\mathbf{P}_x\Big(\int_0^\tau f(\xi(s))ds \in dy\Big) = \mathcal{L}_\gamma^{-1}\big(M(x)\big|_{\Phi=1}\big),$$

где $\mathcal{L}_\gamma^{-1}$ обозначает оператор обратного преобразования Лапласа по γ. Распределение интегрального функционала в фиксированный момент t определяется формулой

$$\mathbf{P}_x\Big(\int_0^t f(\xi(s))ds \in dy\Big) = \mathcal{L}_\lambda^{-1}\big(\mathcal{L}_\gamma^{-1}\big(M(x)\big|_{\Phi=1}\big)\big).$$

В этом состоит общий подход к вычислению распределений функционалов, в котором важную роль играет уравнение (2.4).

Рассмотим теперь другой процесс η, который является решением стохастического дифференциального уравнения

$$d\eta(t) = b(\eta(t))dt + dW(t), \qquad \eta(0) = x, \tag{2.5}$$

и отличается от процесса $\xi(t)$ только коэффициентом сноса.

Аналогично предыдущему, функция

$$\widetilde{D}(x) = \frac{1}{\lambda}\exp\Big(\int^x b(y)dy\Big)\mathbf{E}_x\Big\{\widetilde{\Phi}(\eta(\tau))\exp\Big(-\gamma\int_0^\tau f(\eta(s))ds\Big)\Big\} \tag{2.6}$$

является решением уравнения

$$\frac{1}{2}\widetilde{D}''(x) - (\lambda + \gamma f(x) + \frac{1}{2}b'(x) + \frac{1}{2}b^2(x))\widetilde{D}(x) = -\exp\Big(\int^x b(y)dy\Big)\widetilde{\Phi}(x). \tag{2.7}$$

Пусть, при заданном $a(x)$, коэффициент сноса $b(x)$ является решением уравнения

$$b'(x) + b^2(x) = \rho^2 + a'(x) + a^2(x), \tag{2.8}$$

где $\rho \geqslant 0$ – произвольный параметр. Тогда левые части уравнений (2.4) и (2.7) совпадают с точностью до замены λ на $\lambda+\rho^2/2$. Из (2.8) следует, что

$$b(x) = a(x) + \frac{\theta'(x)}{\theta(x)}, \tag{2.9}$$

где $\theta(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}\theta''(x) + a(x)\theta'(x) - \frac{\rho^2}{2}\theta(x) = 0. \tag{2.10}$$

Как уже отмечалось, в силу возможного наличия особых точек у сноса $a(x)$ процесс ξ будет определен лишь в некоторой области, а, следовательно, и уравнения (2.3), (2.4) нужно рассматривать лишь в этой области. В силу этого выбор $\theta(x)$ должен быть таким, чтобы соотношение (2.9) сохраняло бы для $b(x)$ те же особенности, что есть у $a(x)$.

Убедимся в том, что мосты у процессов ξ и η совпадают. В силу (2.8) задача (2.7), с учетом возможных граничных условий, совпадает с задачей (2.4), с той лишь разницей, что вместо λ берется $\lambda + \dfrac{\rho^2}{2}$, а в качестве функции $\Phi(x)$ выступает функция $\exp\Big(\int^x (b(y)-a(y))dy\Big)\widetilde{\Phi}(x) = \theta(x)\widetilde{\Phi}(x)$. Следовательно, согласно (2.2) функцию $\widetilde{D}(x)$ можно представить в виде

$$\widetilde{D}(x) = \frac{\exp\Big(\int^x a(y)dy\Big)}{\lambda+\rho^2/2}\mathbf{E}_x\Big\{\theta(\xi(\widetilde{\tau}))\widetilde{\Phi}(\xi(\widetilde{\tau}))\exp\Big(-\int\limits_0^{\widetilde{\tau}} f(\xi(s))ds\Big)\Big\},$$

где $\widetilde{\tau}$ – независящий от процесса ξ, экспоненциально распределенный с параметром $\lambda+\rho^2/2$ момент остановки. Поскольку такому моменту соответствует преобразование Лапласа по параметру времени процесса, то обращение преобразования Лапласа по λ, с учетом (2.6), приводит к соотношению

$$\mathbf{E}_x\Big\{\widetilde{\Phi}(\eta(t))\exp\Big(-\int\limits_0^t f(\eta(s))ds\Big)\Big\} =$$

$$= \frac{e^{-\rho^2 t/2}}{\theta(x)}\mathbf{E}_x\Big\{\theta(\xi(t))\widetilde{\Phi}(\xi(t))\exp\Big(-\int\limits_0^t f(\xi(s))ds\Big)\Big\}.$$

Это влечет, что для широкого класса функционалов $\mathfrak{f}$ от процессов справедливо соотношение

$$\mathbf{E}_x\left\{\mathfrak{f}(\eta(s), s \leqslant t); \eta(t) \in dz\right\} =$$
$$= \frac{e^{-\rho^2 t/2}\theta(z)}{\theta(x)}\mathbf{E}_x\left\{\mathfrak{f}(\xi(s), s \leqslant t); \xi(t) \in dz\right\}. \qquad (2.11)$$

Поделив это соотношение на аналогичное при $\mathfrak{f} = 1$, получим

$$\mathbf{E}_x\left\{\mathfrak{f}(\eta(s), s \leqslant t)\big|\eta(t) = z\right\} = \mathbf{E}_x\left\{\mathfrak{f}(\xi(s), s \leqslant t)\big|\xi(t) = z\right\}.$$

Таким образом, у процессов η и ξ мосты совпадают по распределению.

Из совпадения задач (2.7) и (2.4) следует, что вопрос о распределении функционалов от процессов η и ξ решается одинаково.

3. Процессы с мостами как у броуновского движения. При $a(x) = 0$ процесс $\xi(t)$, определенный (2.1), будет процессом броуновского движения. Уравнение (2.10) при этом имеет решение $\theta(x) = \rho\,\mathrm{ch}(\rho(x-\alpha))$, которое не обращается в ноль на всей прямой. Из (2.9) следует, что коэффициент сноса $\rho\,\mathrm{th}(\rho(x-\alpha))$ при $\rho \geqslant 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ определяет класс процессов (2.5), у которых мосты совпадают с мостами броуновского движения.

Значение α приводит лишь к сдвигу процесса η, и значению $\alpha = \pm\infty$ соответствует постоянное решение $\pm\rho$. Это приводит к хорошо изученному броуновскому движению с линейным сносом.

Из соотношения (2.11), $\mathfrak{f} = 1$, следует, что переходная плотность процесса η имеет вид

$$\mathbf{P}_x(\eta(t) \in dz) = \frac{\mathrm{ch}(\rho(z-\alpha))}{\sqrt{2\pi t}\,\mathrm{ch}(\rho(x-\alpha))} e^{-\rho^2 t/2} e^{-(z-x)^2/2t} dz. \qquad (3.1)$$

Соответствующая ей функция Грина равна

$$\mathbf{P}_x(\eta(\tau) \in dz) = \frac{\lambda\,\mathrm{ch}(\rho(z-\alpha))}{\sqrt{2\lambda+\rho^2}\,\mathrm{ch}(\rho(x-\alpha))} e^{-|z-x|\sqrt{2\lambda+\rho^2}} dz. \qquad (3.2)$$

Следующая теорема позволяет вычислять распределения интегральных функционалов от процесса η.

Теорема 3.1. *Пусть $\Phi(x), f(x), x \in \mathbb{R}$, – кусочно-непрерывные функции и $\Phi(x)$ ограниченна. Тогда функция*

$$M(x) = \frac{\mathrm{ch}(\rho(x-\alpha))}{\lambda}\mathbf{E}_x\left\{\Phi(\eta(\tau)) \exp\left(-\int_0^\tau f(\eta(s))ds\right)\right\}$$

является единственным непрерывным, растущим на $\pm\infty$ не быстрее $e^{\rho|x|}$, решением задачи

$$\frac{1}{2}M''(x)-(\lambda+\frac{\rho^2}{2}+f(x))M(x)=-\operatorname{ch}(\rho(x-\alpha))\Phi(x),\qquad x\in\mathbb{R}. \quad (3.3)$$

В качестве приложения теоремы, рассмотрим вопрос о распределении времени пребывания процесса $\eta(s)$ выше или ниже фиксированного уровня r. Для броуновского движения с линейным сносом этот результат был получен Л. Такачем [5], и он обобщает известный закон арксинуса П. Леви [6] для броуновского движения. Для процесса $\eta(s)$ будет получено распределение времени пребывания, которое не намного сложнее чем распределение Такача, и это подтверждает тезис о том, что процесс $\eta(s)$ столь же хорошо вычисляемый процесс как и броуновское движение.

Не умаляя общности, можно считать, что $\alpha=0$, поскольку в противном случае нужно лишь сдвинуть переменные x,r на α. Применим теорему 3.1. Согласно этой теореме функция

$$M(x)=\frac{\operatorname{ch}(\rho x)}{\lambda}\mathbf{E}_x\exp\Big(-\int\limits_0^\tau\big(p\mathbb{I}_{(-\infty,r)}\big(\eta(s)\big)+q\mathbb{I}_{[r,\infty)}\big(\eta(s)\big)\big)ds\Big)$$

является единственным непрерывным, растущим не быстрее $e^{\rho|x|}$, решением уравнения

$$\frac{1}{2}M''(x)-(\lambda+\frac{\rho^2}{2}+p\mathbb{I}_{(-\infty,r)}(x)+q\mathbb{I}_{[r,\infty)}(x))M(x)=-\operatorname{ch}(\rho x),\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Непрерывное решение следует искать в виде: при $x\leqslant r$

$$M(x)=\frac{\operatorname{ch}(\rho x)}{\lambda+p}-\frac{\operatorname{ch}(\rho r)}{\lambda+p}e^{-(r-x)(\sqrt{2\lambda+2p+\rho^2}}+Ae^{-(r-x)(\sqrt{2\lambda+2p+\rho^2}},$$

при $r\leqslant x$

$$M(x)=\frac{\operatorname{ch}(\rho x)}{\lambda+q}-\frac{\operatorname{ch}(\rho r)}{\lambda+q}e^{-(x-r)(\sqrt{2\lambda+2q+\rho^2}}+Ae^{-(x-r)(\sqrt{2\lambda+2q+\rho^2}}.$$

Константа A вычисляется из условия непрерывности производной этой функции в нуле. Задача состоит в том, чтобы получить для A выражение, для которого можно применить формулы обращения преобразования Лапласа. Для A можно получить следующее выражение

$$\frac{e^{\rho r}}{(\sqrt{2\lambda+2p+\rho^2}+\rho)(\sqrt{2\lambda+2q+\rho^2}-\rho)}+\frac{e^{-\rho r}}{(\sqrt{2\lambda+2p+\rho^2}-\rho)(\sqrt{2\lambda+2q+\rho^2}+\rho)}$$

Обозначим

$$b(\alpha,\beta,x):=\mathcal{L}_\gamma^{-1}\Big(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\gamma+\beta^2}+\beta}e^{-|\alpha|\sqrt{2\gamma+\beta^2}}\Big)=$$
$$=\frac{e^{-\alpha^2/2x-\beta^2x/2}}{\sqrt{\pi x}}-\frac{\beta}{\sqrt{2}}e^{|\alpha|\beta}\operatorname{Erfc}\Big(\frac{|\alpha|}{\sqrt{2x}}+\frac{\beta\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\Big),$$

где $\mathcal{L}_\gamma^{-1}$ – оператор обратного преобразования Лапласа по параметру γ, $\operatorname{Erfc}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-v^2}\,dv$. Положим для краткости

$$B_r^-(\alpha,\beta,u,v)=e^{\beta r}b(\alpha,\beta,u)b(0,-\beta,v)+e^{-\beta r}b(\alpha,-\beta,u)b(0,\beta,v),$$
$$B_r^+(\alpha,\beta,u,v)=e^{\beta r}b(0,\beta,u)b(\alpha,-\beta,v)+e^{-\beta r}b(0,-\beta,u)b(\alpha,\beta,v),$$

Обращая преобразование Лапласа по p и q в выражении для функции $M(x)$, получим, что

$$\mathbf{P}_x\Big(\int_0^\tau \mathbb{I}_{(-\infty,r)}\big(\eta(s)\big)\,ds\in du,\ \int_0^\tau \mathbb{I}_{[r,\infty)}\big(\eta(s)\big)\,ds\in dv\Big)=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\lambda e^{-\lambda(u+v)}}{2\operatorname{ch}(\rho x)}B_r^-(r-x,\rho,u,v)\,dudv, & \text{при } x\leqslant r,\\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda(u+v)}}{2\operatorname{ch}(\rho x)}B_r^+(x-r,\rho,u,v)\,dudv, & \text{при } r\leqslant x.\end{cases}$$

Обращая преобразование Лапласа по λ, находим, что

$$\mathbf{P}_x\Big(\int_0^t\big(p\mathbb{I}_{(-\infty,r)}\big(\eta(s)\big)+q\mathbb{I}_{[r,\infty)}\big(\eta(s)\big)\big)ds\in dv,\Big)=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\operatorname{ch}(\rho x)}B_r^-\Big(r-x,\rho,\dfrac{|qt-v|}{|p-q|},\dfrac{|pt-v|}{|p-q|}\Big)\mathbb{I}_{((q\wedge p)t,(q\vee p)t)}(v)\,dv, & x\leqslant r,\\ \dfrac{1}{2\operatorname{ch}(\rho x)}B_r^+\Big(x-r,\rho,\dfrac{|qt-v|}{|p-q|},\dfrac{|pt-v|}{|p-q|}\Big)\mathbb{I}_{((q\wedge p)t,(q\vee p)t)}(v)\,dv, & r\leqslant x.\end{cases}$$

Выражения для соответствующих нагрузок распределения следующие: при $x\leqslant r$

$$\mathbf{P}_x\Big(\int_0^t\big(p\mathbb{I}_{(-\infty,r)}\big(\eta(s)\big)+q\mathbb{I}_{[r,\infty)}\big(\eta(s)\big)\big)ds=pt\Big)=$$
$$=1-\frac{e^{\rho(x-r)}\operatorname{ch}(\rho r)}{2\operatorname{ch}(\rho x)}\operatorname{Erfc}\Big(\frac{r-x}{\sqrt{2u}}-\frac{\rho\sqrt{u}}{\sqrt{2}}\Big)-\frac{e^{\rho(r-x)}\operatorname{ch}(\rho r)}{2\operatorname{ch}(\rho x)}\operatorname{Erfc}\Big(\frac{r-x}{\sqrt{2u}}+\frac{\rho\sqrt{u}}{\sqrt{2}}\Big)$$

при $r \leqslant x$

$$\mathbf{P}_x\Big(\int_0^t \big(p\mathbb{1}_{(-\infty,r)}\big(\eta(s)\big)+q\mathbb{1}_{[r,\infty)}\big(\eta(s)\big)\big)\,ds = qt\Big) =$$

$$= 1-\frac{e^{\rho(x-r)}\operatorname{ch}(\rho r)}{2\operatorname{ch}(\rho x)}\operatorname{Erfc}\Big(\frac{x-r}{\sqrt{2u}}+\frac{\rho\sqrt{u}}{\sqrt{2}}\Big)-\frac{e^{\rho(r-x)}\operatorname{ch}(\rho r)}{2\operatorname{ch}(\rho x)}\operatorname{Erfc}\Big(\frac{x-r}{\sqrt{2u}}-\frac{\rho\sqrt{u}}{\sqrt{2}}\Big)$$

Распределение для броуновского движения с линейным сносом получается из этого, если x и r заменить на $x-\alpha$ и $r-\alpha$, а затем α устремить к $\pm\infty$ в соответствии со знаком линейного сноса. Закон арксинуса П. Леви получается при $\rho = 0$ и $x = r$.

Интересный класс функционалов от процесса составляют функционалы от локальных времен. Понятие локального времени процесса было введено П. Леви [6]. Для того чтобы различать локальные времена для разных процессов, будем снабжать их дополнительными нижними индексами в виде самого процесса. Так локальное время $\ell_\eta(t,x)$ процесса η определяется равенством

$$\ell_\eta(t,x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mathbb{1}_{[x,x+\varepsilon)}(\eta(s))ds.$$

Следующий результат утверждает, что распределения интегральных функционалов по переменной x от локалного времени процесса η, определенного равенством (2.5), совпадают с распределениями соответсвующих функционалов от локольного времени броуновского процесса с линейным сносом ρ.

Теорема 3.2. *Пусть $f(x), x \in [0,h)$ – кусочно-непрерывная неотрицательная функция, $f(0) = 0$. Тогда*

$$\mathbf{E}_x\Big(\exp\Big(-\int_{-\infty}^{+\infty} f(\ell_\eta(\tau,y))\,dy\Big);\ \sup_{y\in\mathbb{R}}\ell_\eta(\tau,y) < h\Big) =$$

$$= \lambda\int_0^h R(t)(Q_\rho(t)+Q_{-\rho}(t))dt,$$

где R является единственным непрерывным решением задачи

$$2x\,R''(x) - \big(\lambda x + \frac{\rho^2 x}{2} + f(x)\big)R(x) = 0, \quad x \in (0,h), \tag{3.4}$$

$$R(0) = 1, \quad R(h) = 0, \tag{3.5}$$

а Q_ρ при $x\in(0,h)$ является единственным ограниченным непрерывным решением задачи

$$2xQ''_\rho(x)+2Q'_\rho(x)-\big(\lambda x+\frac{\rho^2x}{2}+\rho+f(x)\big)Q_\rho(x)=-R(x),\tag{3.6}$$

$$Q_\rho(h)=0.\tag{3.7}$$

Доказательство. Мы будем различать независящие от процесса W экспоненциально распределенные с параметром λ моменты остановки при разных λ, для этого будем снабжать их соответствующим индексом. Взяв преобразование Лапласа от обеих частей соотношения (2.11) и поделив равенство на (3.2), получим

$$\mathbf{E}_x\big\{\mathfrak{f}(\eta(s),s\leqslant\tau_\lambda)\big|\eta(\tau_\lambda)=z\big\}=\mathbf{E}_x\big\{\mathfrak{f}(W(s),s\leqslant\tau_{\lambda+\rho^2/2})\big|W(\tau_{\lambda+\rho^2/2})=z\big\}.$$

Это равенство позволяет применить уже известный результат для процесса броуновского движения (см. [7], гл. 2, §5). Рассмотрим сначала случай $h=\infty$. Имеем

$$\mathbf{E}_x\exp\Big(-\int_{-\infty}^{+\infty}f(\ell_\eta(\tau,y))\,dy\Big)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{P}_x\big(\eta(\tau_\lambda)\in dz\big)=$$

$$\times\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty}f(\ell_W(\tau_{\lambda+\rho^2/2},y))\,dy\Big)\Big|W(\tau_{\lambda+\rho^2/2})=z\Big\}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda\,\mathrm{ch}(\rho(z-\alpha))}{\mathrm{ch}(\rho(x-\alpha))}e^{-|z-x|\sqrt{2\lambda+\rho^2}}\int_0^{\infty}R(t)q(|z-x|,t)dtdz,$$

где R и q являются решениями задачи

$$2t\,R''(t)-\big(\lambda t+\frac{\rho^2t}{2}+f(t)\big)R(t)=0,\qquad R(0)=1,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}q(z,t)=2t\frac{\partial^2}{\partial t^2}q(z,t)+2\frac{\partial}{\partial t}q(z,t)-\big(\lambda t+\frac{\rho^2t}{2}-\sqrt{2\lambda+\rho^2}+f(t)\big)q(z,t),$$

$$q(0,t)=R(t).$$

Положим

$$Q_\rho(t)=\int_0^{\infty}e^{-v(\sqrt{2\lambda+\rho^2}+\rho)}q(v,t)dv.$$

Тогда, очевидно, $Q_\rho(t)$ является решением уравнения (3.6), и

$$\mathbf{E}_x \exp\Big(-\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\ell_\eta(\tau,y))\,dy\Big) = \frac{\lambda}{\operatorname{ch}(\rho(x-\alpha))}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\operatorname{ch}(\rho(z-x))\operatorname{ch}(\rho(x-\alpha))+$$

$$+\operatorname{sh}(\rho(z-x))\operatorname{sh}(\rho(x-\alpha)))e^{-|z-x|\sqrt{2\lambda+\rho^2}}\int\limits_0^{\infty} R(t)q(|z-x|,t)dtdz =$$

$$=2\lambda\int\limits_0^{\infty} R(t)\int\limits_0^{\infty}\operatorname{ch}(\rho v)e^{-v\sqrt{2\lambda+\rho^2}}q(v,t)dvdt = \lambda\int\limits_0^{\infty} R(t)(Q_\rho(t)+Q_{-\rho}(t))dt.$$

Для конечеых h теорема доказывается с помощью предельного перехода, аналогичного доказательству теоремы 2.2 из [7].

4. Процессы с мостами как у бесселевского d-мерного процесса. Производящий оператор бесселевского d-мерного процесса $R_d(s)$ имеет вид $\mathcal{G}f = \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d-1}{2x}\frac{df}{dx}, \quad x>0$, поэтому процесс является решением следующего стохастического дифференциального уравнения

$$dR_d(t) = \frac{d-1}{2R_d(t)}dt + dW(t), \qquad R_d(0) = x.$$

Коэффициент сноса $a(x) = \frac{d-1}{2x}$ имеет особенность в нуле, и при $d \geqslant 2$, начавшись в неотрицательной начальной точке, бесселевский процесс в ноль уже не возвращается. Для целых d больше либо равных двум, бесселевский процесс $R_d(s)$, $s \geqslant 0$, является радиальной частью d-мерного броуновского движения.

Уравнение (2.10) при $a(x) = \frac{d-1}{2x}$ имеет два линейно независимых решения $\theta(x) = x^{1-d/2}I_{d/2-1}(\rho x)$ и $x^{1-d/2}K_{d/2-1}(\rho x)$, где I и K – модифицированные функции Бесселя. Поскольку нужно, чтобы особенность функции $b(x)$ в нуле совпадала бы с особенностью функции $\frac{d-1}{2x}$, то подходит только первое фундаментальное решение. В результате имеем, что коэффициент сноса

$$b(x) = \frac{d-1}{2x} + \frac{\rho I_{d/2}(\rho x)}{I_{d/2-1}(\rho x)} \tag{4.1}$$

определяет класс процессов (2.5), у которых мосты совпадают с мостами бесселевского d-мерного процесса.

Замечание 4.1. В важном частном случае $d = 3$ коэффициент сноса $b(x)$ принимает вид $b(x) = \rho \operatorname{cth}(\rho x)$.

Для трехмерного бесселевского процесса соотношение (2.11) превращается в следующее

$$\mathbf{E}_x\big\{\mathfrak{f}(\eta(s), s \leqslant t); \eta(t) \in dz\big\} =$$

$$= \frac{x \operatorname{sh}(\rho z)}{z \operatorname{sh}(\rho x)} e^{-\rho^2 t/2} \mathbf{E}_x\big\{\mathfrak{f}(R_3(s), s \leqslant t); R_3(t) \in dz\big\}. \tag{4.2}$$

Следующий результат позволяет вычислять распределения интегральных функционалов по переменной x от локалного времени процесса η, $d = 3$.

Теорема 4.1. *Пусть $f(x), x \in [0, h)$ – кусочно-непрерывная неотрицательная функция, $f(0) = 0$. Тогда*

$$\mathbf{E}_0\Big(\exp\Big(-\beta\eta(\tau) - \int_0^\infty f(\ell_\eta(\tau, y))\,dy\Big);\ \sup_{y\in\mathbb{R}} \ell_\eta(\tau, y) < h\Big) =$$

$$= \frac{\lambda}{2\rho}\int_0^h R(t)(Q_{\beta-\rho}(t) - Q_{\beta+\rho}(t))dt,$$

где R является единственным непрерывным решением задачи

$$2x\,R''(x) - \big(\lambda x + \frac{\rho^2 x}{2} + f(x)\big)R(x) = 0, \quad x \in (0, h), \tag{4.3}$$

$$R(0) = 1, \quad R(h) = 0, \tag{4.4}$$

а Q_μ при $x \in (0, h)$ является единственным непрерывным решением задачи

$$2xQ''_\mu(x) + 2Q'_\mu(x) - \big(\lambda x + \frac{\rho^2 x}{2} + \mu + f(x)\big)Q_\mu(x) = 0, \tag{4.5}$$

$$Q_\mu(h) = 0, \qquad \lim_{t\downarrow 0} Q_\mu(x)/\ln x = -1. \tag{4.6}$$

Доказательство. Из (4.2) имеем

$$\mathbf{E}_x\big\{\mathfrak{f}(\eta(s), s \leqslant \tau_\lambda)\big|\eta(\tau_\lambda) = z\big\} =$$

$$= \mathbf{E}_x\big\{\mathfrak{f}(R_3(s), s \leqslant \tau_{\lambda+\rho^2/2})\big|R_3(\tau_{\lambda+\rho^2/2}) = z\big\}. \tag{4.7}$$

Это равенство позволяет применить уже известный результат для бесселевского процесса третьего порядка (см. [8]). Рассмотрим сначала случай $h=\infty$ Имеем

$$\mathbf{E}_0 \exp\Big(-\beta\eta(\tau)-\int_0^\infty f(\ell_\eta(\tau,y))\,dy\Big)=\int_0^\infty \frac{2\lambda\,\mathrm{sh}(\rho z)}{\rho}e^{-z\sqrt{2\lambda+\rho^2}}e^{-\beta z}\times$$

$$\times\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int_0^\infty f(\ell_{R_3}(\tau_{\lambda+\rho^2/2},y))\,dy\Big)\Big|R_3(\tau_{\lambda+\rho^2/2})=z\Big\}dz=$$

$$=\int_0^\infty \frac{\lambda\,\mathrm{sh}(\rho z)}{\rho}e^{-z\beta}\int_0^\infty R(t)q(z,t)dtdz,$$

где R и q являются решениями задачи

$$2t\,R''(t)-\big(\lambda t+\frac{\rho^2 t}{2}+f(t)\big)R(t)=0,\qquad R(0)=1,$$
$$\frac{\partial}{\partial z}q(z,t)=2t\frac{\partial^2}{\partial t^2}q(z,t)+2\frac{\partial}{\partial t}q(z,t)-\big((\lambda+\rho^2/2)t+f(t)\big)q(z,t),$$
$$q(0,t)=R(t).$$

Положим

$$Q_\mu(t)=\int_0^\infty e^{-v\mu}q(v,t)dv.$$

Тогда очевидно $Q_\mu(t)$ является решением уравнения (4.5) и

$$\mathbf{E}_0 \exp\Big(-\beta\eta(\tau)-\int_0^\infty f(\ell_\eta(\tau,y))\,dy\Big)=\frac{\lambda}{2\rho}\int_0^\infty R(t)(Q_{\beta-\rho}(t)-Q_{\beta+\rho}(t))dt.$$

Для конечеых h теорема доказывается с помощью предельного перехода, аналогичного доказательству теоремы 2.2 из [7]. Заметим, что при $\rho\to 0$ теорема 4.2 превращается в соответствующее утверждение для бесселевского процесса третьего порядка (см. теорему 2.1 из [8]). Так при $h=\infty$ имеем

$$\mathbf{E}_0 \exp\Big(-\beta R_3(\tau)-\int_0^\infty f(\ell_{R_3}(\tau,y))\,dy\Big)=-\lambda\int_0^\infty R(t)\frac{\partial}{\partial\beta}Q_\beta(t)dt.$$

5. Процесс Орнштейна–Уленбека, радиальный процесс Орнштейна–Уленбека и процессы с аналогичными мостами. Производящий оператор процесса Орнштейна–Уленбека $U(s)$, $s \geqslant 0$, имеет вид $\mathcal{G}f = \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2} - \theta x \frac{df}{dx}$, $\quad x \in \mathbb{R}$, поэтому процесс является решением следующего стохастического дифференциального уравнения

$$dU(t) = -\theta U(t)dt + dW(t), \qquad U(0) = x.$$

Уравнение (2.10) при $a(x) = -\theta x$ имеет два линейно независимых решения $e^{\theta x^2/2} D_{-\rho^2/2\theta}(-x\sqrt{2\theta})$ и $e^{\theta x^2/2} D_{-\rho^2/2\theta}(x\sqrt{2\theta})$, где D_ν – функции параболического цилиндра. В данной ситуации в качестве $\theta(x)$ может выступать любая линейная комбинация с неотрицательными коэффициентами из этих фундаментальных решений, поскольку она не будет обращаться в ноль на всей прямой. В результате имеем, что при $\beta \geqslant 0$ коэффициент сноса

$$b(x) = -\theta x + \frac{\rho^2 (D_{-1-\rho^2/2\theta}(-x\sqrt{2\theta}) - \beta D_{-1-\rho^2/2\theta}(x\sqrt{2\theta}))}{\sqrt{2\theta}(D_{-\rho^2/2\theta}(-x\sqrt{2\theta}) + \beta D_{-\rho^2/2\theta}(x\sqrt{2\theta}))}, \tag{5.1}$$

определяет класс процессов (2.5), у которых мосты совпадают с мостами процесса Орнштейна–Уленбека.

Производящий оператор радиального процесса Орнштейна–Уленбека имеет вид $\mathcal{G}f = \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2} + \Big(\frac{d-1}{2x} - \theta x\Big)\frac{df}{dx}$, $\quad x > 0$, поэтому процесс является решением следующего стохастического дифференциального уравнения

$$dQ(t) = \Big(\frac{d-1}{2Q(t)} - \theta Q(t)\Big)dt + dW(t), \qquad Q(0) = x.$$

Для целых d больше либо равных двум радиальный процесс Орнштейна–Уленбека $Q(s)$, $s \geqslant 0$, является радиальной частью d-мерного процесса Орнштейна–Уленбека. Коэффициент сноса $a(x) = \frac{d-1}{2x} - \theta x$ имеет особенность в нуле, и при $d \geqslant 2$, начавшись в неотрицательной начальной точке, процесс в ноль уже не возвращается.

Уравнение (2.10) при $a(x) = \frac{d-1}{2x} - \theta x$ имеет два линейно независимых решения $\theta(x) = M\big(\frac{\rho^2}{4\theta}, \frac{d}{2}, \theta x^2\big)$ и $U\big(\frac{\rho^2}{4\theta}, \frac{d}{2}, \theta x^2\big)$, где M и U – функции Куммера. Поскольку нужно, чтобы особенность функции $b(x)$ в нуле совпадала бы с особенностью функции $\frac{d-1}{2x} - \theta x$, то подходит только первое фундаментальное решение. В результате имеем, что коэффициент сноса

$$b(x) = \frac{d-1}{2x} - \theta x + \frac{x\rho^2 M\left(\frac{\rho^2}{4\theta}+1, \frac{d}{2}+1, \theta x^2\right)}{dM\left(\frac{\rho^2}{4\theta}, \frac{d}{2}, \theta x^2\right)} \tag{5.2}$$

определяет класс процессов (2.5), у которых мосты совпадают с мостами d-мерного радиального процесса Орнштейна–Уленбека.

Литература

1. A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae, Second Edition*. Basel–Boston–Berlin, Birkhäuser, 2002.
2. I. Benjamini, S. Lee, *Conditioned diffusions which are Brownian motions.* — J. Theor. Probab. **10** (1997), 733–736.
3. P. J. Fitzsimmons, *Markov processes with identical bridges.* — Electronic J. Probab. **3** (1998), 1–12.
4. M. Kac, *On distribution of certain Wiener functionals.* — Trans. Amer. Math. Soc. **65** no. 1 (1949), 1–13.
5. L. Takács, *On the generalization of the arc-sine law.* — Ann. Appl. Probab. **6** (1996), 1035–1039.
6. P. Lévy, *Sur certains processus stochastiques homogènes.* — Compositio Math. **7** (1939), 283–339.
7. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для случайных блужданий.* С.-Петербург, Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова РАН, т. 195, Наука, 1994.
8. А. Н. Бородин, *Распределение интегральных функционалов от локального времени бесселевского процесса.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **177** (1989), 8–26.

Borodin A. N. On diffusions with identical bridges.

It is showed that the diffusions with identical bridges compose the classes of stochastic processes for which methods of calculation of distributions of functionals are also identical. Some particular classes of such processes are considered.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 28 ноября 2002 г.