Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 293, 2002 г.

Д. В. Карпов

БЛОКИ В K-СВЯЗНЫХ ГРАФАХ

Для k-связного графа через локальную связность вершин определяется понятие блока. Доказывается ряд свойств блоков, обобщающих свойства классических двусвязных блоков связного графа. Кроме того, исследуется структура разбиения графа несколькими разделяющими множествами.

1. Введение

Структура блоков и точек сочленения для связных графов хорошо известна и достаточно полезна (см. [1, 2]). Разбиение связного графа на блоки помогает изучать структуру связного графа. Понятие вершинной k-связности можно рассматривать как обобщение понятия связности. Это позволяет предположить, что обобщения блочной структуры связного графа до разбиения k-связного графа на $(k+1)$-связные блоки может представлять интерес для исследования структуры k-связных графов.

В различных работах делались попытки определить структуру разбиения графа на "многосвязные" блоки, при этом использовались разные подходы к определению блока. Так, блок в связном графе есть максимальный по включению двусвязный подграф. В работах [3, 4] блок в k-связном графе определяется как максимальный по включению $(k+1)$-связный подграф. При всей простоте этого определения и очевидных аналогиях с определением двусвязного блока следует отметить, что структура таких блоков значительно отличается от структуры двусвязных блоков в связном графе.

Другой подход к определению блоков в связном графе заключается в том, что двусвязный блок есть конечный результат разбиения связного графа его точками сочленения. Такое определение значительно сложнее, но аналогичный подход для k-связного графа дает больше возможностей для изучения его структуры.

Автор выражает признательность РФФИ за поддержку исследований.

Если рассмотреть процесс разбиения k-связного графа множествами из k его вершин, то при некоторых преобразованиях получаемых при этом компонент связности в итоге получаются $(k+1)$-связные графы (подробно этот процесс описан в [8, 9]). Структура таких блоков имеет значительное сходство со структурой двусвязных блоков в связном графе. В некоторых работах (например, [5–7]) авторы изучают структуру определенных таким образом трехсвязных блоков в двусвязном графе (т.е. случай $k = 2$). Первую попытку изучить структуру разбиения на многосвязные блоки сделал W. Hohberg в работе [8]. В этой работе дано описание конструкции $(k+1)$-связного блока в k-связном графе и исследованы некоторые свойства полученной структуры. Однако, эта конструкция сильно зависима от процесса разбиения (т.е. от выбора, по каким именно множествам вершин производить *разрезы* графа). Отсутствие единственности такой структуры создает проблемы при применении результатов.

В работе [9] дано независимое от порядка разбиения определение блока. Главным результатом работы [9] является определение условия, при котором разбиение k-связного графа на блоки единственно. Это условие (названное *слабой нерасщепимостью*) достаточно просто формулируется. В частности, любой k-связный граф с минимальной степенью вершины $\frac{3k-1}{2}$ является слабо нерасщепимым. В [9] построенная структура блоков применяется для описания множества вершин графа, удаление которых не нарушает k-связности – эти вершины есть внутренние вершины блоков.

В настоящей работе мы дадим определение блока для произвольного k-связного графа, разбиение на блоки всегда будет единственным. Наше определение достаточно просто по сравнению с подходом из [8, 9] – мы определим блок в k-связном графе G не как результат процесса разбиения графа, а как максимальное по включению подмножество множества $V(G)$ такое, что для разделения любых двух его вершин нужно удалить из графа хотя бы $k+1$ вершину. То есть, блок определяется как максимальное по включению локально $(k+1)$-связное подмножество вершин графа G.

Мы докажем, что конечным результатом любого процесса последовательных разрезов слабо нерасщепимого k-связного графа G по k-вершинным множествам будет разбиение вершин графа на части, практически совпадающие с блоками. Свойства блоков, определенных как результат последовательного разреза графа разделяющими блоками [9], будут выполняться и для наших блоков. Многие свойства блоков, доказанные в [9], при таком подходе доказываются значительно проще.

Мы определим для k-связного графа блоки большей (чем $k+1$) связности и изучим некоторые их свойства.

В работе определяется и исследуется разбиение графа набором из несколькими разделяющих множеств и его свойства. Частным случаем такого разбиения является разбиение на блоки – это разбиение набором, состоящим из всех k-разделяющих множеств. Если в наборе разделяющих множеств есть пары *зависимых* разделяющих множеств, то есть, разбивающих друг друга, то структура такого разбиения достаточно сложна, и для набора из n разделяющих множеств количество частей может достигать 2^n. Однако, мы докажем, что при разбиении слабо нерасщепимого k-связного графа набором из n k-разделяющих множеств вершины графа, не входящие в разделяющие множества этого набора, будут разбиты не более чем на $2n$ частей. (Кроме них могут быть и другие части разбиения, но в них будут лишь вершины из разделяющих множеств нашего набора.)

2. Основные понятия

2.1. Обозначения. Для произвольного графа G через $V(G)$ мы, как обычно, будем обозначать множество всех вершин этого графа а через $E(G)$ – множество всех ребер графа G. Для $W \subset V(G)$ через $G - W$ мы будем обозначать граф, который получается при удалении из G всех вершин множества W и всех выходящих из них ребер. Для $F \subseteq E(G)$ через $G - F$ мы будем обозначать граф, который получается при удалении из G всех ребер множества F (то есть, $G - F = (V(G), E(G) \setminus F)$).

Определение 1. *Для любых двух вершин $x, y \in V(G)$ через $\kappa_G(x,y)$ мы будем обозначать связность вершин x и y, то есть, наименьшее количество вершин, которые нужно удалить из графа G для разделения вершин x и y. Если вершины x и y смежны, положим $\kappa_G(x,y) = \infty$.*

2.2. Разделяющие множества.

Определение 2. *Назовем множество R вершин графа G разделяющим, если при удалении этих вершин из графа теряется связность. В случаях, когда необходимо указать количество элементов разделяющего множества, мы будем называть разделяющее множество из x вершин x-разделяющим. Операцию удаления из графа разделяющего множества R (в результате которой получается несколько компонент связности) мы будем называть разрезом по множеству R.*

Будем говорить, что разделяющее множество R графа G разделяет набор вершин X, если при удалении множества R не все неудаленные вершины набора X окажутся в одной компоненте связности.

Определение 3. *Назовем разделяющие множества R и T независимыми, если R не разделяет T, и T не разделяет R. В противном случае мы будем называть эти множества зависимыми.*

Следующая лемма описывает простейшие свойства независимых разделяющих множеств.

Лемма 1. *Пусть R и T – k-разделяющие множества в k-цвязном графе G такие, что множество R не разделяет множество T. Тогда множество T не разделяет множество R (то есть эти множества независимы).*

Доказательство этого свойства несложно, оно содержится в работах [8, 9].

2.3. Разбиение графа несколькими разделяющими множествами.

Пусть $\mathfrak{S}$ – набор из нескольких разделяющих множеств графа G. Части графа, которые получаются при разбиении графа G множествами набора $\mathfrak{S}$, можно определить следующим образом.

Определение 4. *Множество $A \subset V(G)$ назовем частью $\mathfrak{S}$-разбиения, если никакие две вершины из A нельзя разделить множеством из $\mathfrak{S}$, но любая другая вершина графа G может быть отделена от множества A разрезом по одному из множеств набора $\mathfrak{S}$.*

Внутренностью, или внутренними вершинами такой части A назовем ее вершины, не входящие ни в одно из множеств набора

$\mathfrak{S}$. Будем обозначать внутренность части A через $I(A)$. Часть A назовем пустой, если $I(A) = \varnothing$. Вершины, входящие в какие-либо множества из $\mathfrak{S}$ мы будем называть граничными, а все их множество – границей и обозначать через $R(A)$.

Замечание. 1) Граница $R(A)$ части $\mathfrak{S}$-разбиения A отделяет ее внутренность $I(A)$ от остальных вершин графа.

2) Пустая часть разбиения *не обязательно* является пустым множеством.

Важный частный случай этого понятия – это случай разбиения графа одним разделяющим множеством из k вершин. Пусть $F_1, \dots, F_n$ – части, полученные при разбиении графа G k-разделяющим множеством S. Тогда их внутренности $I(F_1), \dots, I(F_n)$ будут вершинами компонент связности, полученными при удалении из графа вершин множества S. Таким образом, индуцированные подграфы графа G на этих множествах вершин связны.

Определение 5. *Пусть S – k-разделяющее множество, а F – одна из частей, полученных при разбиении графа G множеством S. Тогда ее внутренность $I(F)$ назовем компонентой.*

Замечание. Пусть C – компонента, отделенная k-разделяющим множеством S. Тогда каждая из вершин множества S смежна хотя бы с одной из вершин C, так как в противном случае при удалении S без этой вершины граф потеряет связность.

Лемма 2. 1) *Для любых двух пересекающихся частей $\mathfrak{S}$-разбиения A_1 и A_2 k-связного графа G существует разделяющее множество $S \in \mathfrak{S}$, целиком содержащее $A_1 \cap A_2$.*

2) *Если $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2$, то любая часть $\mathfrak{S}_2$-разбиения целиком содержится внутри одной из частей $\mathfrak{S}_1$-разбиения, а любая часть $\mathfrak{S}_1$-разбиения содержит внутри себя хотя бы одну часть $\mathfrak{S}_2$-разбиения.*

Доказательство. 1) Так как A_1 и A_2 – две различных части $\mathfrak{S}$-разбиения, то существуют вершины $x \in A_1$ и $y \in A_2$, которые разделяются разрезом по некоторому множеству $S \in \mathfrak{S}$. В силу определения части $\mathfrak{S}$-разбиения, разделяющее множество S должно содержать все вершины из $A_1 \cap A_2$.

Утверждение пункта 2) очевидно. □

Таким образом, мы действительно получили разбиение графа набором разделяющих множеств $\mathfrak{S}$. При этом, разные части разбиения пересекаются по частям разделяющих множеств из $\mathfrak{S}$.

Лемма 3. *Если разделяющее множество T независимо со всеми множествами набора $\mathfrak{S}$, то оно целиком содержится в одной из частей $\mathfrak{S}$-разбиения.*

Доказательство. Если разделяющее множество T независимо со всеми множествами набора $\mathfrak{S}$, то оно не делится ни одним из множеств набора $\mathfrak{S}$. Следовательно, оно целиком содержится в одной из частей $\mathfrak{S}$-разбиения. □

Пусть A – одна из частей, на которые разделяющие множества набора $\mathfrak{S}$ разбивают граф. Пусть $S \in \mathfrak{S}$ разбивает граф на части $G_1, \dots, G_n$. Если $S \not\supset A$, то нетрудно убедиться, что ровно одна из этих частей содержит множество A.

Теорема 1. *Пусть A – часть $\mathfrak{S}$-разбиения графа G; $S_1, \dots, S_m$ – все разделяющие множества набора $\mathfrak{S}$, не содержащие A. Обозначим через G_i часть, полученную при разрезе по S_i, которая содержит вершины части A. Тогда*

$$A = \bigcap_{i=1}^{m} G_i, \quad I(A) = \bigcap_{i=1}^{m} I(G_i).$$

Доказательство. Пусть $\overline{A} = \cap_{i=1}^{m} G_i$. Включение $A \subset \overline{A}$ очевидно из определения части $\mathfrak{S}$-разбиения.

Докажем обратное включение. Предположим, что $\overline{A}$ содержит не входящую в A вершину b, тогда существует разделяющее множество $T \in \mathfrak{S}$, отделяющее b от A. Очевидно, $T \not\supset A$, так как в противном случае разделяющее множество T не может отделить A от b. Следовательно, $b \notin \overline{A}$. Противоречие. В том, что $I(A) = I(\overline{A}) = \bigcap_{i=1}^{m} I(G_i)$, нетрудно убедиться. □

2.4. Нерасщепимые и слабо нерасщепимые графы.

Определение 6. 1) *Будем называть k-связный граф G нерасщепимым, если каждая его компонента состоит не менее, чем из $\frac{k+1}{2}$ вершин.*

2) *Будем называть k-связный граф G слабо нерасщепимым, если у графа G не существует компоненты H и k-разделяющего множества S таких, что $H \subset S$.*

В [9] доказано, что любой нерасщепимый k-связный граф является слабо нерасщепимым. Любой k-связный граф, степени вершин которого не менее $\frac{3k-1}{2}$, является нерасщепимым (и, следовательно, слабо нерасщепимым).

2.5. Свойства компонент.

Определение 7. *Назовем компоненту минимальной, если она не содержит никакой другой компоненты (образованной в результате разреза по какому-либо k-разделяющему множеству).*

Очевидно, что в любом k-связном графе существуют минимальные компоненты и, более того, внутри каждой компоненты есть минимальная.

Определение 8. *Пусть S – k-разделяющее множество k-связного графа G, а F – одна из частей, на которые S разбивает G. Проведем между вершинами множества F все ребра графа G, а также все ребра между вершинами множества S (даже если таких ребер нет в графе G). Обозначим полученный граф через F^*.*

Следующая лемма описывает простейшие свойства компонент.

Лемма 4. *Пусть F – одна из частей, на которые некоторое k-разделяющее множество разбивает k-связный граф G. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Граф F^* является k-связным.*

2) *Если T – разделяющее множество в графе F^*, то T является разделяющим множеством в графе G.*

Доказательства этих свойств несложны. Они приведены в работе [9].

3. Блоки в k-связном графе

3.1. Определение и простейшие свойства блока.

Для произвольного k-связного графа G мы рассмотрим важный случай разбиения графа набором разделяющих множеств.

Определение 9. *Пусть $B \subset V(G)$ – максимальное по включению множество вершин такое, что для разделения любых двух вершин $x, y \in B$ необходимо удалить хотя бы $k+1$ вершину (то есть, $\kappa_G(x, y) \geq k+1$). Тогда B – блок.*

Очевидно, блоки – части, которые получаются при разбиении k-связного графа набором из всех его k-разделяющих множеств. Таким образом, у блока как у части такого разбиения определяется граница и внутренность. Определяются понятия пустого и непустого блока. Кроме того, на блоки распространяются все доказанные в предыдущем разделе свойства частей разбиения графа, в частности, блок можно описать как пересечение частей, на которые k-разделяющие множества разбивают граф.

Определение 10. *Если для блока B существует k-разделяющее множество S такое, что $B \subset S$, то назовем блок B малым.*

Замечание. Малый блок обязательно является пустым.

Ниже мы докажем ряд простейших свойств определенных таким образом блоков, родственных свойствам классических двусвязных блоков связного графа.

Лемма 5. 1) *Для любых двух пересекающихся блоков B_1 и B_2 k-связного графа G существует k-разделяющее множество S графа G, целиком содержащее $B_1 \cap B_2$.*

2) *Для любых двух смежных вершин x и y существует блок B, содержащий обе эти вершины.*

3) *Пусть $x \in R(B)$ – граничная вершина блока B. Тогда существует другой блок B_1 такой, что $x \in R(B_1)$.*

Доказательство. Пункт 1 настоящей леммы следует из леммы 2, доказательство пункта 2 очевидно.

3) Пусть граничная вершина $x \in R(B)$ принадлежит k-разделяющему множеству S. Пусть S делит вершины графа G на части $F_1, \dots, F_n$. Тогда в одной из этих частей содержится блок B, не умаляя общности, пусть $B \subset F_1$. Нетрудно доказать, что внутри каждой из частей $F_2, \dots, F_n$ можно выделить по блоку, содержащему граничную вершину x. (Достаточно взять внутри части F_i вершину $y_i \notin S$, смежную с x и рассмотреть содержащий их блок.) $\square$

Прослеживается аналогия с классическими блоками (см. [1, 2]) – пересечение любых двух блоков либо пусто, либо является точкой сочленения.

Еще одно свойство показывает, что определенный таким образом блок обобщает понятие классического блока на k-связные графы. Как известно, удаление внутренней вершины классического двусвязного блока не нарушает связности графа.

Теорема 2. *Пусть B – непустой блок графа G. Тогда для любой вершины $x \in I(B)$ граф $G - x$ является k-связным.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из определения блока, так как внутренняя вершина блока не входит ни в одно k-разделяющее множества графа G. $\square$

3.2. Блоки большей связности.

В работе [8] делается попытка дать определения блоков большей связности путем дальнейшего разбиения полученных блоков разделяющими множествами большей мощности. С помощью нашего подхода дать определение блоков большей связности несложно: это еще один частный случай понятия разбиения графа набором разделяющих множеств.

Определение 11. *Пусть G – k-связный граф, $n \geq k+1$. Пусть $B \subset V(G)$ – максимальное по включению множество вершин такое, что для разделения любых двух вершин $x, y \in B$ необходимо удалить хотя бы n вершин (то есть, $\kappa_G(x, y) \geq n$). Мы назовем множество B блоком связности n (или просто n-блоком).*

Очевидно, n-блоки – части, которые получаются при разбиении k-связного графа набором из всех его разделяющих множеств мощности не более $n-1$. Частным случаем при $n = k+1$ являются определенные выше обычные блоки.

Теорема 3. *Пусть B_1 – n-блок, а B_2 – m-блок графа G (где $m \geq n$), пересечение которых непусто. Тогда либо $B_2 \subset B_1$, либо существует такое разделяющее множество S графа G, что $S \supset (B_1 \cap B_2)$ и $|S| < n$.*

Доказательство. Пусть $B_2 \not\subset B_1$. Тогда существуют вершины $x \in B_1$ и $y \in B_2$, которые разделяются разрезом по некоторому разделяющему множеству S, в котором не более n элементов (иначе все вершины m-блока B_2 лежат в n-блоке B_1). Поскольку для любой вершины $z \in B_1 \cap B_2$ выполняются соотношения $\kappa_G(x, z) \geq n$ и $\kappa_G(y, z) \geq m \geq n$, то разделяющее множество S должно содержать все вершины из $B_1 \cap B_2$. $\square$

Таким образом, все вершины k-связного графа G разбиваются на блоки, которые пересекаются по частям k-разделяющих множеств. В свою очередь, вершины блоков можно разбить на $(k+2)$-блоки, которые пересекаются по частям разделяющих множеств порядка не более $k+1$ и так далее. Вершины любого n-блока однозначно разбиваются на $(n+1)$-блоки. С помощью описанной конструкции мы можем построить разбиение любого графа до получения блоков “нужной связности”, что может быть полезно.

4. Блоки в слабо нерасщепимых графах

Основная сложность процесса разбиения k-связного графа на блоки k-разделяющими множествами состоит в том, что эти разделяющие множества могут быть зависимы, то есть разбивать друг друга на части. При разбиении связного графа на классические двусвязные блоки точками сочленения такой трудности нет, так как два одноэлементных разделяющих множества всегда независимы. Поэтому для дальнейших исследований нас интересуют свойства пар зависимых k-разделяющих множеств.

4.1. Зависимые и независимые разделяющие множества в слабо нерасщепимом k-связном графе.

Опишем свойства пар зависимых k-разделяющих множеств.

Пусть R и T – два зависимых k-разделяющих множества в слабо нерасщепимом k-связном графе G. Пусть $P = R \cap T$. Предположим, что T разбивает граф G на части $F_1, F_2, \dots F_n$. Пусть $R_i = I(F_i) \cap R$, тогда $R = (\cup_{i=1}^n R_i) \cup P$. Предположим, что R разбивает граф G на части $H_1, H_2, \dots, H_m$, пусть $T_j = I(H_j) \cap T$. Тогда $T = (\cup_{j=1}^m T_j) \cup P$.

Введем обозначение $G_{ij} = F_i \cap H_j$. В силу теоремы 1, множества R и T разбивают граф G на части $G_{11}, \dots, G_{mn}$. Тогда множество $S_{ij} = R(G_{ij}) = R_i \cup T_j \cup P$ отделяет от остальных вершин графа G множество $I(G_{ij})$ (отметим, что количество вершин в S_{ij} не обязательно равно k).

Лемма 6. [1] *Пусть R и T – два зависимых k-разделяющих множества в слабо нерасщепимом k-связном графе G.*

1) *Каждое из множеств R и T разбивает граф G ровно на две компоненты и при этом либо $|S_{12}| = |S_{21}| = k$, либо $|S_{11}| = |S_{22}| = k$.*

2) *Если $|S_{12}| = |S_{21}| = k$, но не все четыре части разделяющих множеств R_1, R_2, T_1, T_2 содержат поровну элементов, то хотя бы одна из частей G_{11} или G_{22} пуста.*

Доказательство. 1) Докажем, что $R_i \neq \varnothing$ ни для какого i. Предположим противное, пусть $R_i = \varnothing$. Тогда при разрезе графа G

[1] Доказательство пункта 1 настоящей леммы содержится в [9] и приведено здесь для удобства читателя ввиду связи со следующими леммами.

по R все вершины множества $I(F_i)$ окажутся в одной части. Но эти вершины образуют связный подграф графа G, а каждая из вершин множества T смежна хотя бы с одной вершиной из $I(F_i)$, то есть R не разделяет T, что противоречит лемме 1. Аналогично, $T_j \neq \varnothing$ ни для какого j.

Предположим, что $n > 2$ или $m > 2$. Рассмотрим произвольную пару множеств S_{ij} и S_{xy} таких, что $i \neq x$ и $j \neq y$. Заметим, что количество элементов в множествах S_{ij} и S_{xy} в сумме меньше, чем $2k$. Следовательно, одно из этих множеств содержит менее, чем k элементов. Пусть это множество S_{ij}, которое отделяет от остальных вершин графа G множество $I(G_{ij})$. Тогда, из k-связности графа G следует, что $I(G_{ij}) = \varnothing$.

Таким образом, мы доказали, что в случае $n > 2$ или $m > 2$ при $i \neq x$ и $j \neq y$ одна из частей G_{ij} или G_{xy} пуста. Расположим все части G_{ij} (где $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$) в виде таблицы $n \times m$. Из доказанного выше следует, что все непустые части расположены в одной строке или в одном столбце нашей таблицы, то есть, лежат в одной из частей F_i или H_j.

Не умаляя общности предположим, что все непустые части лежат внутри F_1, откуда следует, что $I(F_2) = R_2, \dots, I(F_n) = R_n$. Но тогда разделяющее множество R содержит компоненты $I(F_2), I(F_3), \dots, I(F_n)$, что противоречит слабой нерасщепимости графа G. Таким образом мы получили, что $m = n = 2$, причем вне каждой из частей F_1, F_2, H_1, H_2 должно быть хотя бы одна непустая часть G_{ij}.

Не умаляя общности можно считать, что обе части G_{12} и G_{21} непусты. Поскольку множество S_{ij} отделяет множество вершин $I(G_{ij})$ в рассматриваемом случае в каждом из множеств S_{12} и S_{21} должно быть не менее, чем k вершин. Поскольку $|S_{12}| + |S_{21}| = 2k$, то $|S_{12}| = |S_{21}| = k$.

2) Поскольку аналогично $|S_{11}| + |S_{22}| = 2k$, то либо $|S_{11}| = |S_{22}| = k$, либо одна из частей G_{11} и G_{22} должна быть пустой. В первом из этих двух случаев, очевидно, все четыре части разделяющих множеств R_1, R_2, T_1, T_2 содержат поровну элементов. $\square$

Лемма 7. *Пусть R и T – два зависимых k-разделяющих множества в слабо нерасщепимом k-связном графе G, которые разбивают граф на части G_{11}, G_{12}, G_{21} и G_{22}. Разделяющие множества $S_{12} = R(G_{12})$ и $S_{21} = R(G_{21})$ содержат по k вершин. Если k-разделяющее множество S зависимо с одним множеством из S_{12}*

и S_{21}, то оно зависимо хотя бы с одним множеством из R и T. Если S зависимо и с S_{12}, и с S_{21} то оно зависимо и с R, и с T.

Доказательство. Зависимые множества R и T разбивают граф на части G_{11}, G_{12}, G_{21} и G_{22}. Если S независимо с R и T, то оно целиком содержится в одной из этих частей, следовательно, независимо и с S_{12}, и с S_{21}.

Если множество S независимо с T, но зависимо с R, то оно целиком лежит в одной из частей относительно T, следовательно, не может быть зависимо и с S_{12}, и с S_{21}, так как они лежат в разных частях относительно T. □

Следующая лемма покажет нам простейший пример блока в слабо нерасщепимом k-связном графе.

Лемма 8. *Пусть F – часть разбиения слабо нерасщепимого k-связного графа G k-разделяющим множеством S такая, что $I(F)$ – минимальная компонента. Тогда F – блок, причем $R(F) = S$. Граф F^* в этом случае является $(k+1)$-связным.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует k-разделяющее множество T в графе G, которое разделяет множество вершин F. Пусть $T \cap I(F) = \varnothing$. Так как $T \neq S$, то T и F разделены множеством S. Отметим, что граф G порождает связный подграф на вершинах $I(F)$, а каждая вершина множества $S = R(F)$ смежна хотя бы с одной вершиной $I(F)$. Следовательно, T не может разделять F.

Остается рассмотреть случай, когда $T \cap I(F) \neq \varnothing$. Если S и T независимы, то $T \subset F$, а в случае, когда S и T зависимы, из описания, данного в лемме 6 следует, что существует независимое с S разделяющее множество T_1, разделяющее часть F. В этом случае $T_1 \subset F$.

Удалим из графа G все вершины множества T_1. Очевидно, останется неудаленной хотя бы одна вершина множества S, и все внутренние вершины отличных от F частей, выделяемых множеством S. Так как каждая вершина множества S смежна хотя бы с одной вершиной каждой такой части, то все оставшиеся вершины S и все внутренние вершины отличных от F частей, выделяемых множеством S, окажутся в одной части относительно T_1. Следовательно, множество T_1 выделяет в графе G компоненту, целиком содержащуюся в $I(F)$. Противоречие с минимальностью $I(F)$. □

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{T}$ – максимальный по включению набор попарно независимых k-разделяющих множеств слабо нерасщепимого k-связного графа G. Пусть S' – подмножество k-разделяющего множества S такое, что никакие две вершины из S' невозможно разделить никаким k-разделяющим множеством из набора $\mathfrak{T}$. Тогда существует k-разделяющее множество $T \in \mathfrak{T}$, удовлетворяющее следующим условиям.*

1) *Множество T целиком содержит S'.*

2) *Если два блока B_1 и B_2 разделены множеством S и $B_1 \cap B_2 = S'$, то либо T разделяет B_1 и B_2, либо содержит один из этих блоков.*

Доказательство. Если $S' = B_1 \cap B_2$, и $T \in \mathfrak{T}$ разделяет блоки B_1 и B_2, то это множество, очевидно, содержит S', и подходит нам в качестве искомого. Поэтому в доказательстве пункта 2 леммы можно считать, что ни одно из множеств набора $\mathfrak{T}$ не разделяет блоки B_1 и B_2.

Пусть S и $T_1 \in \mathfrak{T}$. зависимы. С помощью данного в лемме 6 описания пар зависимых k-разделяющих множеств нетрудно заметить, что существуют два k-разделяющее множества S_1 и S_2, независимых с T_1 и таких, что $S \subset S_1 \cup S_2$, причем любые две вершины $a, b \in S$, не разделенные множеством T_1, вместе содержатся в одном из множеств S_1 или S_2. Следовательно, хотя бы одно из множеств S_1 или S_2 должно целиком содержать S', пусть это S_1. (В случае, когда $S' \subset S \cap T$, оба множества S_1 или S_2 содержат S', иначе – ровно одно из них.)

Пусть $S' = B_1 \cap B_2$ и множество S разделяет B_1 и B_2. Очевидно, каждый из блоков B_1 и B_2 целиком лежит в одной из частей, на которые S и T_1 делят граф. Если $S' \not\subset S \cap T$, то, так как T_1 не разделяет B_1 и B_2, из описания, данного в лемме 6, также следует, что множество S_1 либо разделяет B_1 и B_2, либо содержит один из них. В случае $S' \subset S \cap T$ оба множества S_1 или S_2 содержат S', а из леммы 6 нетрудно видеть, что одно из этих множеств либо разделяет блоки B_1 и B_2, либо содержит один из них. Пусть это S_1. По лемме 7, множество S_1 независимо с T_1 и S, а также со всеми k-разделяющими множествами набора $\mathfrak{T}$, независимыми с S.

Если для множества S_1 существует зависимое $T_2 \in \mathfrak{T}$, то повторим рассуждение. Получим k-разделяющее множество $S_2 \supset S'$, по построению независимое с T_2, а также со всеми k-разделяющими множествами, независимыми с S_1 (то есть, с T_1 и со всеми множествами набора $\mathfrak{T}$, независимыми с S). Если множество S_1 содержало один из блоков B_1 и B_2, или разделяло эти блоки, то, учитывая, что множество T_2 не разделяло блоки B_1 и B_2 нетрудно проверить, что S_2 либо содержит один из блоков B_1 и B_2, либо разделяет эти блоки.

В итоге мы после нескольких таких операций получим k-разделяющее множество $S_m \supset S'$, независимое со всеми k-разделяющими множествами из $\mathfrak{T}$. Тогда, очевидно, $S_m \in \mathfrak{T}$, и удовлетворяет требуемым условиям. $\square$

4.2. Процесс разбиения на блоки.

Разбиение графа на классические блоки может быть получено последовательным разрезанием графа по точкам сочленения. В работах [8, 9] блоки в k-связном графе определялись, как результат процесса последовательного разбиения графа по k-разделяющим множествам. (Отметим, что в [8] разбиение на блоки было неоднозначно, а в [9] однозначное разбиение проходило лишь для слабо нерасщепимого k-связного графа.) Ниже мы покажем, что конечным результатом разрезов слабо нерасщепимого k-связного графа по k-разделяющим множествам будет разбиение на блоки.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{S}$ – максимальный по включению набор попарно независимых k-разделяющих множеств слабо нерасщепимого k-связного графа G.*

1) *Пусть A – одна из частей $\mathfrak{S}$-разбиения графа G. Тогда существует блок B такой, что $I(B) = I(A)$ и $R(B) \subset R(A)$. Если кроме блока B множество A содержит другие блоки, то эти блоки являются малыми и, более того, подмножествами k-разделяющих множеств из набора $\mathfrak{S}$.*

2) *Для любого непустого блока существует часть $\mathfrak{S}$-разбиения с такой же внутренностью.*

Доказательство. 1) Нетрудно заметить, что существует хотя бы один блок, лежащий внутри A. (Так как блоки получаются дальнейшим подразбиением $\mathfrak{S}$-разбиения графа G.) Если все блоки, которые содержит A, являются малыми, то любой такой блок в силу леммы 9 является подмножеством некоторого разделяющего множества $S \in \mathfrak{S}$, следовательно, часть A в этом случае является пустой, что делает дальнейшее доказательство теоремы очевидным.

Пусть блок $B \subset A$ не является малым и кроме него есть другие блоки. Рассмотрим другой блок B_1 и любое k-разделяющее множество T, отделяющее B от B_1. Пусть $T \cap A = T_0$. Очевидно, никакие две вершины из T_0 невозможно разделить никаким k-разделяющим множеством из $\mathfrak{S}$. По лемме 9, существует k-разделяющее множество $S \in \mathfrak{S}$, содержащее T_0 и либо отделяющее B от B_1, либо содержащее один из этих двух блоков. Следовательно, $S \supset B_1$.

2) Пусть B – непустой блок. Очевидно, существует часть A $\mathfrak{S}$-разбиения, содержащая блок B. Применив пункт 1 настоящей теоремы к части A и учитывая, что блок B не пуст, мы получаем $I(A) = I(B)$. □

Таким образом, уже разбиение слабо нерасщепимого графа произвольным максимальным по включению набором k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ дает части, почти равные блокам. Для любого непустого блока существует часть $\mathfrak{S}$-разбиения с такой же внутренностью.

Вспомним конструкцию последовательного разбиения графа, описанную в [9]. В слабо нерасщепимом k-цвязном графе G выберем произвольное разделяющее множество S_1, пусть оно разбивает граф G на части $F_1, \ldots, F_m$, тогда все графы F_i^* будут k-связными. Если хотя бы один из этих графов не является $(k+1)$-связным, то выберем в нем k-разделяющее множество S_2 (по лемме 4, это множество будет разделяющим и в графе G) и сделаем разрез по S_2. И так далее, пока все части не будут $(k+1)$-связными. Пусть мы последовательно провели разрезы по множествам S_1, S_2, … , S_n. Тогда эти множества попарно независимы, причем набор $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \ldots S_n\}$ является максимальным по включению набором попарно независимых k-разделяющих множеств графа G. Как доказано в [9], порядок разрезов не имеет значения. Нетрудно доказать, что полученные в результате проведенных последовательных разрезов множества вершин будут как раз $\mathfrak{S}$-разбиением слабо нерасщепимого графа G. Таким образом, в слабо нерасщепимом k-связном графе разбить все не входящие в k-разделяющие множества вершины на блоки можно с помощью последовательных разрезов по k-разделяющим множествам.

4.3. Разбиение слабо нерасщепимого графа зависимыми разделяющими множествами.

Пусть $\mathfrak{S}$ – некоторый набор k-разделяющих множеств слабо нерасщепимого k-связного графа G. В настоящем разделе мы изучим свойства разбиения графа множествами такого набора. Очевидно, при добавлении в $\mathfrak{S}$ нового k-разделяющего множества T, разбиение графа измельчится. В случае, когда T независимо со всеми множествами из $\mathfrak{S}$, будет подразбита лишь единственная часть $\mathfrak{S}$-разбиения, содержащая T (она будет разбита на количество частей, на которое T разбивает граф).

Если же T зависимо с некоторыми множествами из $\mathfrak{S}$, изменения будут более значительными. Вообще говоря, может быть разбита каждая из частей $\mathfrak{S}$-разбиения.

Мы изучим разбиение графа наборами, включающими в себя пары зависимых разделяющих множеств и оценим количество непустых частей в таком разбиении (то есть, частей с непустой внутренностью). Пусть $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ – такой набор k-разделяющих множеств, в котором каждое множество зависимо хотя бы с одним из остальных. Напомним, что тогда по лемме 6 каждое из множеств этого набора делит граф G ровно на две части. В этом разделе далее мы будем рассматривать только такие разделяющие множества. Мы докажем, что в $\mathfrak{S}$-разбиении не более $2n$ непустых частей, и изучим структуру такого разбиения.

Определение 12. *Пусть $\mathfrak{S}$ – набор k-разделяющих множеств графа G. Граф зависимости этого набора $D(\mathfrak{S})$ – это граф, вершины которого соответствуют множествам набора, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им разделяющие множества зависимы.*

Определение 13. *Пусть P, $Q_1, \dots, Q_{2n}$ – попарно непересекающиеся множества вершин графа G такие, что $|Q_i| = \frac{k-|P|}{2}$ для всех i, причем ни одно из k-элементных множеств $Q_{i,j} = Q_i \cup Q_j \cup P$ не разделяет никакое множество Q_ℓ.*

Будем говорить, что k-разделяющие множества набора $\mathfrak{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ образуют ромашку, если каждое из них является объединением множества P и каких-то двух множеств Q_i и Q_j, причем каждое из множеств $Q_1, \dots Q_{2n}$ содержится ровно в одном из множеств набора $\mathfrak{S}$ и граф зависимости этого набора $D(\mathfrak{S})$ связен. Множество P назовем центром ромашки, а множества $Q_1, \dots Q_{2n}$ – лепестками ромашки.

Замечание. Если k-разделяющие множества набора $\mathfrak{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ образуют *ромашку*, то $P = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$ совпадает с попарным пересечением любых двух множеств из $\mathfrak{S}$, а любые два зависимых множества $S_i, S_j \in \mathfrak{S}$ разбивают друг друга на четыре лепестка ромашки.

Изучение разбиения графа ромашкой оказывается очень важным для изучения разбиений другими наборами разделяющих множеств. В следующей лемме мы детально опишем разбиение графа множествами, образующими ромашку.

Лемма 10. *Пусть k-разделяющие множества набора $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ образуют ромашку с центром P и лепестками $Q_1, \ldots, Q_{2n}$. Тогда лепестки ромашки можно пронумеровать таким образом, что каждое множество $Q_{i,j} = Q_i \cup Q_j \cup P$ (при $i \notin \{j-1, j, j+1\}$) делит граф на две части, в одной из которых лежат множества $Q_{i+1}, \ldots, Q_{j-1}$, а в другой – $Q_{j+1}, \ldots, Q_{i-1}$ (нумерация циклическая), а относительно множества $Q_{i,i+1}$ все лепестки ромашки лежат в одной части. Разделяющие множества ромашки $\mathfrak{S}$ делят граф на $2n$ частей с границами $Q_{i,i+1}$ (состоящими из двух соседних в циклическом порядке лепестков и центра ромашки).*

Доказательство. Индукция по количеству разделяющих множеств ромашки. Поскольку в графе $D(\mathfrak{S})$ цуществует вершина, удаление которой не нарушает связность, существует разделяющее множество $S_n \in \mathfrak{S}$ такое, что для набора $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S} \setminus \{S_n\}$ граф $D(\mathfrak{S}_0)$ связен. Тогда множества набора $\mathfrak{S}_0$ образуют ромашку, к которой можно применить индукционное предположение. Пусть лепестки этой ромашки циклически упорядочены следующим образом: $Q_1, \ldots, Q_{2n-2}$, а разделяющее множество S_n имеет лепестки Q'_1 и Q'_2. Поскольку эти лепестки не разделяются никакими разделяющими множествами $Q_{i,j} = Q_i \cup Q_j \cup P$ ромашки $\mathfrak{S}_0$, то каждый из них попадает в одну из частей, ограниченных множеством вида $Q_{m,m+1}$, причем эти две части – разные (иначе $S_n = Q'_1 \cup Q'_2 \cup P$ не зависимо ни с одним из разделяющих множеств ромашки $\mathfrak{S}_0$, что противоречит предположению о связности графа зависимости $D(\mathfrak{S})$). Пусть Q'_1 попадает в часть, отделяемую $Q_{i,i+1}$, а Q'_2 попадает в часть, отделяемую $Q_{j,j+1}$. Поскольку разделяющее множество $S_n = Q'_1 \cup Q'_2 \cup P$ не разбивает ни один из лепестков ромашки $\mathfrak{S}_0$, то S_n делит лепестки ромашки на две группы (лепестки из разных групп лежат в разных частях относительно S_n, а лепестки из одной группы – в одной части). Из циклической упорядоченности лепестков ромашки $\mathfrak{S}_0$ следует, что зависимые разделяющие множества $Q_{i,j}$ и $Q_{i+1,j+1}$ делят граф G на четыре части с границами $Q_{i,i+1}$, $Q_{i+1,j}$, $Q_{j,j+1}$ и $Q_{j+1,i}$ соответственно. Так как лепестки Q'_1 и Q'_2 лежат в частях с границами $Q_{i,i+1}$ и $Q_{j,j+1}$, то множества $Q_{i,i+1}$ и $Q_{j,j+1}$ зависимы с S_n. Тогда, по лемме 7, множества $Q_{i,j}$ и $Q_{i+1,j+1}$ также зависимы с S_n. Следовательно, пары лепестков Q_i и Q_{i+1}, Q_j и Q_{j+1}, Q_i и Q_j, а также Q_{i+1} и Q_{j+1} должны быть разделены по разным группам. Тогда лепестки Q_j и Q_{i+1} попадают в одну часть относительно S_n, то есть, разделяющее множество $Q_{i+1,j}$ независимо с S_n и вся часть разбиения графа зависимыми разделяющими множествами $Q_{i,j}$ и $Q_{i+1,j+1}$, выделяемая $Q_{i+1,j}$, лежит в одной части относительно S_n, следовательно, все лепестки $Q_{i+1},\dots,Q_j$ (порядок циклический) попадают в одну группу. Аналогично доказывается, что другую группу образуют лепестки $Q_{j+1},\dots,Q_i$.

Рассмотрим лепестки из разных групп Q_x и Q_y. Поскольку разделяющее множество S_n разделяет $Q_{xy} = Q_x \cup Q_y \cup P$, то в силу леммы 1 множество Q_{xy} разделяет S_n. Учитывая, что Q_{xy} не делит лепестков Q'_1 и Q'_2, оно должно делить S_n именно на части-лепестки Q'_1 и Q'_2. Тогда к этим разделяющим множествам можно применить описание пар зависимых разделяющих множеств из леммы 6. В частности, из этого описания следует, что при $x \neq i$ и $x \neq i+1$ разделяющее множество $Q'_1 \cup Q_x \cup P$ делит граф на две части, в одной из которых содержатся лепестки $Q_{i+1},\dots,Q_{x-1}$, а в другой группе – $Q_{x+1},\dots,Q_i$ (порядок циклический), а при $x = i$ или $x = i+1$ относительно множнства $Q'_1 \cup Q_x \cup P$ все остальные лепестки лежат в одной части. Тогда лепесток Q'_1 можно вставить в циклическом порядке между Q_i и Q_{i+1}. Аналогично, лепесток Q'_2 можно вставить в циклическом порядке между Q_j и Q_{j+1}.

Ромашка $\mathfrak{S}_0$ разбивала граф на части с границами, состоящими из двух соседних в циклическом порядке лепестков и центра ромашки. (Правда, некоторые из этих частей могли быть пустыми.) Из доказанного следует, что при добавлении множества S_n части с границами $Q_{i,i+1}$ и $Q_{j,j+1}$ оказались разделены на две меньшие части с границами из соседних лепестков ромашки $\mathfrak{S}$ и центра. $\square$

Следствие 1. *Две ромашки $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ с одинаковым центром и одинаковым набором лепестков делят граф на одни и те же части.*

Утверждение следствия 1 непосредственно вытекает из утверждения леммы 10.

Определение 14. *Назовем ромашку правильной, если в ней любые два разделяющих множества зависимы.*

Замечание. Нетрудно понять, что с данными лепестками и центром существует единственная правильная ромашка – это ромашка, разделяющие множества которой состоят из “противоположных” (в определенном леммой 10 циклическом порядке) лепестков.

Следствие 2. *Пусть набор k-разделяющих множеств $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ образует ромашку. Тогда существует набор k-разделяющих множеств $\mathfrak{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$, образующих правильную ромашку и делящих граф на те же части, что и набор $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Пусть $P = \cap_{i=1}^{n} S_i$ – центр ромашки, а $Q_1, \ldots, Q_{2n}$ – циклически упорядоченные лепестки ромашки. Для всех i от 1 до n определим множества набора $\mathfrak{T}$ следующим образом: $T_i = Q_i \cup Q_{n+i} \cup P$ (объединения пар противоположных лепестков). Очевидно, все такие множества попарно зависимы. Следовательно, граф зависимости $D(\mathfrak{T})$ связен, то есть, этот набор представляет из себя ромашку с теми же лепестками и центром, что у ромашки $\mathfrak{S}$. По следствию 1, эти ромашки разбивают граф на одни и те же части. $\square$

Лемма 11. *Пусть наборы k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{Q}$ образуют правильные ромашки, любые два из этих наборов покрывают объединение $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \cup \mathfrak{T} \cup \mathfrak{Q}$ и имеют хотя бы два общих множества. Тогда все множества из $\mathfrak{R}$ образуют правильную ромашку.*

Доказательство. Обозначим через $P_{\mathfrak{S}}$ пересечение всех множеств набора $\mathfrak{S}$, через $P_{\mathfrak{T}}$ пересечение всех множеств набора $\mathfrak{T}$, а через $P_{\mathfrak{Q}}$ пересечение всех множеств набора $\mathfrak{Q}$. Рассмотрим произвольное разделяющее множество W. Из условия следует, что оно должно входить хотя бы в два набора, не умаляя общности, пусть $W \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{T}$. В этом пересечении хотя бы два множества, пусть также $V \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{T}$. Рассмотрим любое множество U из наших наборов. Оно входит в один из наборов $\mathfrak{S}$ или $\mathfrak{T}$, следовательно, множества W, V и U входят в одну ромашку, то есть, они образуют ромашку. Тогда их попарные пересечения совпадают с их общим пересечением, кроме того, множества V и U делят W одинаково – на два равных по количеству вершин лепестка W_1 и W_2. Следовательно, любое множество из $\mathfrak{R}$ делит W так же, как V – на две равные по количеству вершин части W_1 и W_2. Таким образом, любое множество $X \in \mathfrak{R}$, делит другое множество $Y \in \mathfrak{R}$ на два одинаковых лепестка Y_1 и Y_2. Отсюда следует, что попарные пересечения любых двух множеств из $\mathfrak{R}$ совпадают. Кроме того, любые два множества из $\mathfrak{R}$ входят в одну правильную ромашку, и следовательно, зависимы.

Пусть $\mathfrak{R} = S_1, \dots, S_n$, $P = \cap_{i=1}^n S_i$, а каждое множество $S_i \in \mathfrak{R}$ делится остальными на две части Q_i и Q_{n+i}. Для доказательства того, что множества набора $\mathfrak{R}$ образуют правильную ромашку с центром P и лепестками $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2n}$ остается доказать, что никакое множество $Q_{i,j} = Q_i \cup Q_j \cup P$ не разделяет ни одно из множеств Q_x. Пусть $Q_{i,j}$ состоит из частей двух множеств $S_i, S_j \in \mathfrak{R}$. Тогда эти два множества зависимы, причем S_i делит S_j на части Q_j и Q_{n+j}, а S_j делит S_i на части Q_i и Q_{n+i} (нумерация циклическая). Воспользуемся данным в лемме 6 описанием частей, на которые два зависимых k-разделяющих множества делят граф. В соответствии с этим описанием, множества S_j и S_i делят граф на четыре части, одна из которых отделяется как раз множеством $Q_{i,j}$. Так как любое множество Q_x целиком лежит в одной из частей относительно S_i и относительно S_j, множество Q_x должно целиком лежать в одной из четырех частей, на которые эти множества делят граф. Это означает, что $Q_{i,j}$ не разбивает Q_x, что и требовалось доказать. Связность графа зависимости $D(\mathfrak{R})$ очевидна.

Таким образом, набор $\mathfrak{R}$ образует правильную ромашку. □

Определение 15. *Назовем набор разделяющих множеств $\mathfrak{T}$ вполне зависимым, если любые несколько множеств из $\mathfrak{T}$, образующие ромашку, образуют правильную ромашку (и, следовательно, попарно зависимы).*

Лемма 12. *Для любого набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{T}$ существует вполне зависимый набор $\mathfrak{T}_0$ из такого же количества k-разделяющих множеств, делящий граф на те же части, что и $\mathfrak{T}$. При этом, множества набора $\mathfrak{T}_0$ образуют ромашку тогда и только тогда, когда множества набора $\mathfrak{T}$ образуют ромашку.*

Доказательство. Пусть набор k-разделяющих множеств $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}$

образует ромашку, в которой есть пара независимых множеств. Введем обозначение $\mathfrak{Q} = \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{S}$.

Найдем в ромашке $\mathfrak{S}$ пару независимых разделяющих множеств S_1 и S_2. Мы можем заменить их на пару зависимых множеств S_1' и S_2' с теми же четырьмя лепестками и тем же пересечением – получится новая ромашка $\mathfrak{S}_1$ с теми же лепестками и центром, что и у ромашки $\mathfrak{S}$. По следствию 1, они делят граф на одни и те же части. Пусть $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{Q} \cup \mathfrak{S}_1$. Если множества одного из наборов $\mathfrak{T}$ или $\mathfrak{T}_1$ образуют ромашку, то множества другого составлены из тех же лепестков. Тогда для проверки условий из определения ромашки достаточно проверить связность графа зависимости. Разделяющее множество $Q \in \mathfrak{Q}$ зависимо с одним из множеств ромашки $\mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда его лепестки попадают в разные части разбиения графа ромашкой $\mathfrak{S}$, что верно тогда и только тогда, когда Q зависимо с одним из множеств ромашки $\mathfrak{S}_1$ (так как ромашки $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}_1$ делят граф на одни и те же части). Это означает, что связность графа зависимости $D(\mathfrak{T})$ эквивалентна связности графа $D(\mathfrak{T}_1)$. Таким образом, множества набора $\mathfrak{T}_1$ образуют ромашку тогда и только тогда, когда множества набора $\mathfrak{T}$ образуют ромашку.

По лемме 7, количество пар зависимых множеств в $\mathfrak{S}_1$ больше, чем в $\mathfrak{S}$, а в $\mathfrak{Q} \cup \mathfrak{S}_1$ таких пар больше, чем в $\mathfrak{Q} \cup \mathfrak{S}$. Если в ромашке $\mathfrak{S}_1$ есть пара независимых разделяющих множеств, продолжим процесс. Поскольку количество пар зависимых множеств все время возрастает, в результате мы получим ромашку с теми же лепестками и центром, что и $\mathfrak{S}$, множества в которой попарно зависимы – а это правильная ромашка. Очевидно, при этом части, на которые множества из $\mathfrak{T}$ делят граф, не изменятся.

Будем продолжать процесс до тех пор, пока в нашем наборе существуют множества, образующие ромашку, в которой не все множества попарно зависимы. С каждым шагом увеличивается количество пар зависимых множеств, следовательно, этот процесс должен закончиться. В результате любые m множеств из $\mathfrak{S}$, образующих ромашку, окажутся попарно зависимыми (то есть, будут образовывать правильную ромашку). $\square$

Лемма 13. *Пусть $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, S_3\}$ – набор k-разделяющих множеств слабо нерасщепимого k-связного графа G. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Среди частей, на которые разделяющие множества набора $\mathfrak{S}$*

разбивают граф G не более, чем 6 непустых.

2) *Если непустых частей ровно 6, то набор $\mathfrak{S}$ образует ромашку.*

3) *Если набор $\mathfrak{S}$ вполне зависимый, то при удалении из него одного разделяющего множества количество непустых частей разбиения уменьшится не более, чем на две.*

Доказательство. Пусть $P = \cap_{i=1}^{3} S_i$, $|P| = p$. Пусть множество S_i делит граф на части G_i^0 и G_i^1. Введем обозначение $G_{i_1 i_2 i_3} = G_1^{i_1} \cap G_2^{i_2} \cap G_3^{i_3}$. Тогда в силу теоремы 1 множества набора $\mathfrak{S}$ разбивают граф G на 8 частей $\{G_{i_1 i_2 i_3}\}_{i_1, i_2, i_3 = 0}^{1}$ (впрочем, некоторые из этих частей могут содержаться внутри других, и даже быть пустыми множествами). Удобно представить себе разбиение графа G множествами набора $\mathfrak{S}$ в виде куба $2 \times 2 \times 2$, в котором разделяющие множества будут изображены серединными плоскостями, а единичные кубики изображают части $\mathfrak{S}$-разбиения.

Внутренность каждой из этих частей $I(G_{i_1 i_2 i_3})$ отделяется от остального графа ее границей $R(G_{i_1 i_2 i_3})$, следовательно, либо в такой границе должно быть хотя бы k вершин, либо $I(G_{i_1 i_2 i_3}) = \varnothing$. Предположим, что хотя бы 7 из этих частей непусты. Тогда, просуммировав размеры границ для этих семи частей, мы получим сумму A_1, которая не менее $7k$. С другой стороны, рассмотрим сумму $A_2 = 2(|S_1| + |S_2| + |S_3|)$. В сумме A_2 вершины, входящие в пересечение ровно m разделяющих множеств из набора $\mathfrak{S}$, подсчитаны ровно $2m$ раз. Следовательно,

$$6k + p = A_2 + p \geq A_1 \geq 7k,$$

что противоречит очевидному неравенству $p < k$. Таким образом, не более шести частей непусты.

Если есть 6 непустых частей, то просуммировав размеры их границ, мы получим сумму, в которой каждая часть разделяющих множеств набора $\mathfrak{S}$ учитывается не более, чем в $A_2 = 6k$. Следовательно, в этом случае границы пустых частей не должны содержать вершин, кроме вершин из P (так как именно эти вершины были бы посчитаны в сумме размеров шести границ меньшее число раз, чем в сумме A_2).

С точностью до симметрии, возможно 3 варианта расположения двух пустых частей $\mathfrak{S}$-разбиения. Рассмотрим эти варианты.

1) $I(G_{000}) = I(G_{111}) = \varnothing$ (см. рис 1a). Границы этих частей не должны содержать вершин, кроме вершин множества P. Введем

обозначения

$$G_{ab0}\cap G_{ab1}\setminus P = S_{ab*}, \quad G_{a0b}\cap G_{a1b}\setminus P = S_{a*b}, \quad G_{0ab}\cap G_{1ab}\setminus P = S_{*ab}.$$

Тогда

$$S_{00*} = S_{0*0} = S_{*00} = S_{11*} = S_{1*1} = S_{*11} = \varnothing.$$

В этом случае попарные пересечения трех разделяющих множеств S_1, S_2 и S_3 должны совпадать с их общим пересечением P. При этом любые два множества из $\mathfrak{S}$ делят граф на четыре непустых части, следовательно, любое множество из $\mathfrak{S}$ делит любое другое на две равные части. Множество S_1 делится и множеством S_2, и множеством S_3 на равные части S_{*01} и S_{*10}, множество S_2 делится и множеством S_1, и множеством S_3 на равные части S_{0*1} и S_{1*0}, а множество S_3 делится и множеством S_1, и множеством S_2 на равные части S_{01*} и S_{10*}. Получается ромашка с центром P и лепестками S_{*01}, S_{*10}, S_{0*1}, S_{1*0}, S_{01*}, S_{10*}. (Нетрудно проверить, что любые два из этих лепестков вместе с центром P образуют разделяющее множество, которое не разделяет ни один другой лепесток. Связность графа зависимости $D(\mathfrak{S})$ очевидна.) В этом случае набор $\mathfrak{S}$ является правильной ромашкой и, очевидно, удовлетворяет утверждению пункта 3 леммы (при удалении любого множества получается разбиение графа на четыре непустых части).

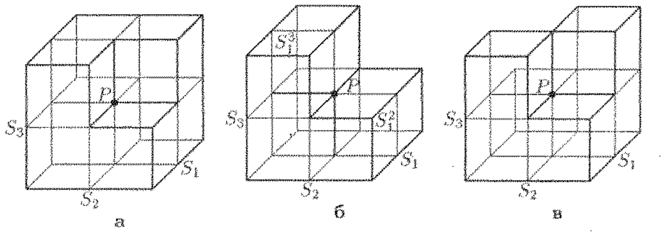

Рис. 1.

2) $I(G_{000}) = I(G_{100}) = \varnothing$ (см. рис 1б). В этом случае $S_2 \cap G_3^0 = S_3 \cap G_2^0 = \varnothing$, то есть, разделяющие множества S_2 и S_3 независимы, более того, $S_2 \cap S_3 = P$. Введем обозначения

$$P_{12} = (S_1 \cap S_2) \setminus P, \qquad P_{13} = (S_1 \cap S_3) \setminus P,$$
$$S_1^2 = S_1 \cap I(G_2^0), \qquad S_1^3 = S_1 \cap I(G_3^0).$$

Нетрудно убедиться, что множества S_1 и S_2 делят граф на четыре непустых части, что по лемме 6 возможно лишь в случае, когда эти разделяющие множества делятся друг другом на равные части. Эти множества пересекаются по $P \cup P_{12}$, множество S_1 делится множеством S_2 на части, одна из которых равна S_1^2, а другая содержит $S_1^3 \cup P_{13}$. Аналогично доказывается, что множество S_1 делится множеством S_3 на две равные части, причем одна из этих частей равна S_1^3, а другая содержит $S_1^2 \cup P_{12}$. Таким образом,

$$|S_1^2| \geq |S_1^3| + |P_{13}| \quad \text{и} \quad |S_1^3| \geq |S_1^2| + |P_{12}|.$$

Это возможно лишь при

$$P_{12} = P_{13} = \varnothing, \quad |S_1^2| = |S_1^3| \quad \text{и} \quad S_1 = S_1^2 \cup S_1^3 \cup P.$$

Следовательно, $S_1 \cap S_2 = S_1 \cap S_3 = S_2 \cap S_3 = P$. В этом случае множества S_2 и S_3 делят S_1 одинаково: на части S_1^3 и S_2^3. Таким образом, множество P будет центром ромашки, которую образуют S_1, S_2 и S_3 а ее лепестками будут множества, на которые S_1 делит независимые множества S_2 и S_3, а также множества S_1^3 и S_2^3 (Нетрудно проверить, что любые два из этих лепестков вместе с центром P образуют разделяющее множество, которое не разделяет ни один другой лепесток. Связность графа зависимости $D(\mathfrak{S})$ очевидна.) В этом случае набор $\mathfrak{S}$ не является вполне зависимым.

3) $I(G_{000}) = I(G_{110}) = \varnothing$ (см. рис 1в). В этом случае $S_1 \cap I(G_3^0) = \varnothing$, так как все части, составляющие это пересечение входят в границы пустых частей G_{000} и G_{110}. Однако нетрудно убедиться, что множества S_1 и S_3 делят граф на четыре непустых части, что по лемме 6 возможно лишь в случае, когда эти разделяющие множества делятся друг другом на равные части. Противоречие, доказывающее невозможность этого случая, и завершающее доказательство пунктов 1 и 2 леммы.

Доказательство пункта 3 в случае, когда есть не более четырех непустых частей $\mathfrak{S}$-разбиения, очевидно (при удалении любого множества получится не менее двух частей). Остается рассмотреть случай, когда непустых частей разбиения ровно 5. Однако, если при разбиении графа G какими-то двумя множествами $S_i, S_j \in \mathfrak{S}$ непустых частей не более двух, то в $\mathfrak{S}$-разбиении таких частей не более четырех. Лемма доказана. $\square$

Опишем еще одну вспомогательную конструкцию. Пусть M – множество последовательностей из n нулей и единиц такое, что для любого $t \leq n$ и любых t разрядов существует не более, чем $2t$ вариантов подпоследовательностей последовательностей из M. Построим *граф совпадений* G_M, вершины которого соответствуют последовательностям из M. Соединим две последовательности ребром i разряда, если они склеиваются при удалении i разряда (то есть, различаются только в i разряде).

Рассмотрим цикл в таком графе. Очевидно, в цикле количество ребер каждого разряда должно быть четным, следовательно, если в цикле есть ребра t разрядов, то в соответствующих t разрядах существует хотя бы $2t$ различных вариантов подпоследовательностей последовательностей из M. Поскольку более чем $2t$ различных вариантов быть не может, то в любом цикле ровно по два ребра каждого из разрядов, по которым проходит этот цикл. Для каждого цикла C нашего графа множество таких разрядов обозначим через $r(C)$.

Изучим некоторые свойства циклов в графе G_M.

Определение 16. *Назовем разряд i цикла C из $2t$ последовательностей нормальным, если количество различных подпоследовательностей, полученных из последовательностей цикла C удалением этого разряда, равняется $2t-2$.*

Замечание. Так как в каждом разряде, по которому проходит цикл, он содержит два ребра, то при удалении этого разряда склеятся хотя бы две пары последовательностей цикла. Следовательно, при удалении разряда из $2t$ последовательностей цикла получится не более $2t-2$ различных подпоследовательностей. Нормальность разряда означает, что не произойдет других совпадений, то есть, никакие две несоседние в цикле последовательности не соединены ребром, соответствующим разряду i. Если же разряд не является нормальным, то в цикле есть дополнительная "хорда" разряда i, в этом случае нетрудно заметить, что цикл можно разделить на два меньших, имеющих две общие последовательности (в исходном цикле именно эти две последовательности были соединены хордой разряда i).

Лемма 14. *В любом цикле есть хотя бы два нормальных разряда.*

Доказательство. Пусть цикл C содержит $2t$ последовательностей. Тогда он содержит ребра t разрядов (по два ребра в каждом). Рассмотрим окружность, разделенную $2t$ точками на $2t$ дуг. Выпишем последовательности цикла на $2t$ дугах в порядке следования по циклу, а каждую точку между дугами покрасим в цвет i, если последовательности на соседних дугах, которые разграничивает эта точка, отличаются в i разряде. Так как в цикле должно быть по два ребра каждого из его разрядов, у нас будет по 2 точки каждого цвета. Соединим каждую пару точек одного цвета хордой.

Построим *граф хорд* $X(C)$ вершины которого соответствуют хордам, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда хорды пересекаются.

Тот факт, что все последовательности различны, равносилен тому, что для любых двух "единичных" дуг (т. е. дуг между соседними точками) существует такая хорда, что эти дуги находятся по разные стороны от нее (любому из разрядов, в котором последовательности различаются, соответствует такая хорда).

Если граф хорд $X(C)$ не связен, то хорды можно разбить на две группы так, что хорды первой группы не имеют пересечений с хордами второй группы. Соответственно разобьем на две группы и концы хорд. Тогда существуют хотя бы две единичные дуги с концами из разных групп. Нетрудно проверить, что эти единичные дуги не разделены. Противоречие, доказывающее связность графа хорд $X(C)$.

Пусть хорда i такова, что граф $X(C) - i$ связен. Удалим с нашей окружности хорду i, на окружности останутся $2t - 2$ единичные дуги. Пусть какие-то две из этих дуг AB и CD (порядок точек указан по часовой стрелке) не разделены никакой хордой. Тогда любая хорда соединяет две точки на дуге BC или две точки на дуге DA, то есть, хорды разбиваются хотя бы на две компоненты связности, что противоречит связности графа $X(C) - i$. Следовательно, любые две из $2t-2$ единичных дуг разделены хотя бы одной хордой, то есть, соответствующие этим дугам $2t-2$ подпоследовательности (полученные из последовательностей цикла C удалением разряда i) различны. Таким образом, разряд i является нормальным разрядом цикла C. Поскольку у связного графа $X(C)$ есть хотя бы две вершины, удаление которых не нарушает связность, у цикла C есть хотя бы два нормальных разряда. □

Лемма 15. *Пусть множества разрядов двух циклов C_1 и C_2 пере-*

секаются ровно по одному разряду i, который является нормальным в обоих циклах. Тогда разряды из $r(C_1) \cup r(C_2)$ также образуют цикл, причем в этом цикле разряд i не будет нормальным.

Доказательство. Пусть $|r(C_1)| = p$, $|r(C_2)| = q$, тогда $|r(C_1) \cup r(C_2)| = p + q - 1$. Вне разрядов из $r(C_1) \cup r(C_2)$ все последовательности, входящие в цикл C_1, совпадают (пусть они равны подпоследовательности a) и все последовательности, входящие в цикл C_2, совпадают (пусть они равны подпоследовательности b). Если $a \neq b$, то мы получаем хотя бы $2p + 2q$ различных подпоследовательностей длины $p + q - 1$, а их должно быть не более, чем $2p + 2q - 2$. Противоречие.

Остается рассмотреть случай, когда все последовательности обоих циклов совпадают вне $r(C_1) \cup r(C_2)$. Более того, циклы C_1 и C_2 должны иметь хотя бы две общих последовательности. Заметим, что в i разряде и в последовательностях цикла C_1, и в последовательностях цикла C_2 встречается и 0, и 1. Все последовательности цикла C_1 совпадают на разрядах из $r(C_2) \setminus \{i\}$, пусть они равны подпоследовательности c. Все последовательности цикла C_2 совпадают на разрядах из $r(C_1) \setminus \{i\}$, пусть они равны подпоследовательности d. Тогда две общие последовательности циклов x_1 и x_2 должны совпадать с c на $r(C_2) \setminus \{i\}$, совпадать с d на $r(C_1) \setminus \{i\}$, а в разряде i одна из них имеет 0, а другая 1. Так как разряд i нормален в обоих циклах, то и в C_1, и в C_2 последовательности x_1 и x_2 являются соседними.

Тогда между этими последовательностями с одной стороны можно выписать остальные последовательности цикла C_1, а с другой стороны – остальные последовательности цикла C_2, в результате чего получится цикл на разрядах $r(C_1) \cup r(C_2)$. Отметим, что в этом цикле разряд i не будет нормальным, так как две несоседние по этому циклу последовательности x_1 и x_2 соединены ребром разряда i. $\square$

Удалим в последовательностях множества M разряд i. Пусть полученные подпоследовательности образуют множество M_i. Любое ребро, соответствующее разряду j в графе G_M, означает единственное различие каких-то двух последовательностей в этом разряде. Однако, некоторые последовательности при переходе от M к M_i склеиваются. Рассмотрим случай, когда при этом склеиваются ребра графа G_M в некотором разряде $j \in H$.

Лемма 16. *Если в множестве M существуют две различных пары соединенных ребром разряда j последовательностей (x_1, x_2) и (y_1, y_2) таких, что при удалении разряда i последовательность x_1 склеивается с y_1, а последовательность x_2 склеивается с y_2, то существует цикл длины четыре, проходящий по разрядам i и j.*

Доказательство. Очевидно, последовательность x_1 соединена в G_M с y_1 ребером разряда i, а x_2 соединена таким же ребром с y_2. Это означает, что существует цикл из четырех последовательностей с ребрами разрядов i и j. $\square$

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ – вполне зависимый набор k-разделяющих множеств слабо нерасщепимого k-связного графа G такой, что каждое из его множеств зависимо с каким-то другим k-разделяющим множеством графа G. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Среди частей, на которые разделяющие множества набора $\mathfrak{S}$ разбивают граф G, не более, чем $2n$ непустых.*

2) *Если непустых частей ровно $2n$, то разделяющие множества набора $\mathfrak{S}$ образуют ромашку.*

3) *Среди частей, на которые разделяющие множества набора $\mathfrak{S}$ делят граф, количество непустых частей не более, чем на две превосходит количество непустых частей среди частей, на которые множества набора $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S} \setminus S_i$ делят граф.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по n – количеству множеств в наборе $\mathfrak{S}$. Для $n = 2$ утверждение пунктов 1 и 2 следует из леммы 6, утверждение пункта 3 в этом случае очевидно. Для $n = 3$ утверждение теоремы следует из леммы 13.

Пусть множество S_i делит граф на части G_i^0 и G_i^1. Для любых $i_1, i_2, \ldots, i_n$, принимающих значения 0 и 1, введем обозначение $G_{i_1 i_2 \ldots i_n} = G_1^{i_1} \cap \cdots \cap G_n^{i_n}$. (Для удобства последовательность $i_1 i_2 \ldots i_n$ из 0 и 1 будем обозначать соответствующим такой двоичной записи числом.) Тогда множества набора $\mathfrak{S}$ разбивают граф G на 2^n частей $\{G_i\}_{i=0}^{2^n-1}$.

Пусть $n \geq 4$. Начнем с доказательства пунктов 1 и 2 теоремы. Отметим, что любой поднабор набора $\mathfrak{S}$ также является вполне зависимым, то есть, для него по индукционному предположению выполняются все утверждения теоремы. Рассмотрим наборы разделяющих множеств $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S} \setminus \{S_i\}$ для всех i от 1 до n. Для таких наборов теорема уже доказана, то есть, среди частей, на которые множества любого такого набора делят граф, не более, чем $2n-2$ непустых. Если хотя бы для трех таких наборов количество непустых частей равно $2n-2$, то применив утверждение теоремы мы получаем, что три поднабора $\mathfrak{S}$ из $n-1$ множеств образуют ромашки. Поскольку набор $\mathfrak{S}$ является вполне зависимым, эти ромашки – правильные. Так как $n \geq 4$, эти три набора покрывают каждое множество набора $\mathfrak{S}$ хотя бы два раза, любые два из этих наборов пересекаются хотя бы по двум множествам. Тогда по лемме 11 все разделяющие множества набора $\mathfrak{S}$ образуют ромашку и разбивают граф не более, чем на $2n$ частей. Так как набор $\mathfrak{S}$ является вполне зависимым, то его множества образуют правильную ромашку, в которой удаление любого разделяющего множества дает ромашку из $n-1$ множества и, очевидно, делит граф ровно на $2n-2$ части (каждая из них непуста, так как содержит непустую часть $\mathfrak{S}$-разбиения). Таким образом, в этом случае все утверждения теоремы доказаны.

Пусть не более чем для двух из наборов $\mathfrak{S}_i$ количество непустых частей равно $2n-2$ (не умаляя общности можно считать, что это наборы $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$), а для остальных наборов не превосходит $2n-3$. Предположим, что среди частей, на которые множества набора $\mathfrak{S}$ делят граф, хотя бы $2n+x$ непустых (где $x \geq 0$). Обозначим через M_0 множество последовательностей из n нулей и единиц, которые соответствуют индексам непустых частей. Рассмотрим подмножество $M \subset M_0$, состоящее ровно из $2n$ последовательностей (выберем эти последовательности в множестве M_0 произвольно). Пусть $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$. Любой непустой части $\mathfrak{S}$-разбиения A соответствует содержащая ее непустая часть $\mathfrak{T}$-разбиения, индекс которой получается из индекса части A выбором подпоследовательности, состоящей из разрядов, соответствующих разделяющим множествам набора $\mathfrak{T}$. Таким образом, для любых r разрядов среди подпоследовательностей последовательностей множества M на этих r разрядах будет не более $2r$ различных (так как соответствующие этим разрядам r разделяющих множеств делят граф не более, чем на $2r$ непустых частей).

Следовательно, все индексы, полученные из последовательностей множества M удалением i разряда (при этом, некоторые последовательности могут склеиться) соответствуют непустым частям $\mathfrak{S}_i$-разбиения. (В $\mathfrak{S}_i$-разбиении при этом могут быть и другие непустые части.) Таким образом, если в последовательностях множества M удалить первый или второй знак, получится не более $2n-2$ различных последовательностей, а если любой другой знак – то не более $2n-3$ различных последовательностей. Построим граф совпадений G_M для этого набора последовательностей.

В графе G_M не менее, чем по два ребра первого и второго разрядов и не менее, чем по три ребра каждого из остальных разрядов – всего хотя бы $3n-2$ ребра на $2n$ вершинах. В таком графе обязательно есть циклы. Из доказаного выше следует, что циклы этого графа удовлетворяют леммам 14, 15 и 16. Циклы графа совпадений G_M последовательностей, соответствующих непустым частям в разбиении графа множествами вполне зависимого набора, кроме того, обладают следующим свойством.

Лемма 17. *Два цикла длины четыре не могут иметь ровно один общий разряд.*

Доказательство. Пусть C_1 и C_2 – два таких цикла, причем $r(C_1)=\{i,\ell\}$, а $r(C_2)=\{j,\ell\}$. Тогда по лемме 15 существует цикл из шести последовательностей на разрядах i, j,ℓ, в котором разряд ℓ не является нормальным. Это означает, что среди частей, на которые множества S_i, S_j, S_ℓ разбивают граф, хотя бы шесть непустых. По лемме 13, эти три множества образуют ромашку (обозначим эту ромашку через $\mathfrak{Q}$). Так как эти множества входят во вполне зависимый набор разделяющих множеств, ромашка $\mathfrak{Q}$ – правильная. Тогда шесть непустых частей являются подмножествами шести разных частей разбиения графа G правильной ромашкой. Поскольку любые две не соседние (в определенном в лемме 10 циклическом порядке) части разбиения правильной ромашкой разделены хотя бы двумя разделяющими множествами, каждая из шести последовательностей цикла может быть соединена ребром разряда i, j или ℓ лишь с двумя другими (лежащими внутри соседних частей разбиения графа ромашкой $\mathfrak{Q}$). Это означает, что все три разряда цикла нормальны. Противоречие с доказанным выше. $\square$

Докажем, что в графе G_M не может быть более одного разряда, в котором проведено не менее трех ребер. Пусть есть хотя бы два таких разряда i, $j\neq 1$.

Удалим в последовательностях множества M разряд 1. Пусть полученные подпоследовательности образуют множество M_1.

По индукционному предположению, для вполне зависимого набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}_1$ выполняется утверждение пункта 3 теоремы. Следовательно, в графе совпадений G_{M_1} проведено не более, чем по два ребра каждого разряда.

В графе G_M проведено хотя бы три ребра в разрядах i и j, а в графе G_{M_1} – не более, чем по два ребра. Следовательно, при удалении разряда 1 должны были склеиться ребра и в разряде i, и в разряде j. По лемме 16, в графе G_M должен существовать цикл длины четыре C_1, проходящий по ребрам разрядов 1 и i и цикл длины четыре C_2, проходящий по ребрам разрядов 1 и j. Это противоречит лемме 17.

Так как $n \geq 4$, в графе G_M существуют два разряда $i, j \notin \{1, 2\}$, в которых проведено хотя бы по три ребра, что противоречит доказанному выше. Полученное противоречие завершает разбор случая, когда есть хотя бы $2n$ непустых частей $\mathfrak{S}$-разбиения, но множества набора $\mathfrak{S}$ не образуют ромашку. Следовательно, пункты 1 и 2 теоремы доказаны.

Остается завершить доказательство пункта 3. Из доказанного пункта 1 теоремы следует, что непустых частей $\mathfrak{S}$-разбиения не более $2n$, откуда $|M_0| \leq 2n$. В этом случае множество $M = M_0$ является множеством *всех* индексов непустых частей $\mathfrak{S}$-разбиения графа G. В графе G_M, как мы доказали выше, существует не более одного разряда, в котором проведено три ребра. Предположим, что такой разряд есть – пусть это разряд 1. Для любого $i \neq 1$ пусть M_i – множество последовательностей, полученных из M удалением разряда i. Все эти последовательности соответствуют непустым частям $\mathfrak{S}_i$-разбиения. По индукционному предположению, к этому набору мы можем применить пункт 3 теоремы. Из него следует, что в графе совпадений G_{M_i} проведено не более, чем по два ребра в каждом из разрядов, в частности, в разряде 1. По лемме 16 это означает существование в графе G_M цикла длины четыре, проходящего по ребрам разрядов 1 и i. Но в этом случае существуют циклы длины четыре с ребрами разрядов 1 и 2, а также с ребрами разрядов 1 и 3, что противоречит лемме 17. Таким образом, пункт 3 теоремы доказан. □

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{T} = \{T_1, \ldots, T_n\}$ – вполне зависимый набор k-разделяющих множеств слабо нерасщепимого k-связного графа G такой, что каждое из его множеств зависимо с каким-то другим множеством, пусть $\mathfrak{T}_m = \{T_1, \ldots, T_m\}$. Тогда среди частей,* *на которые разделяющие множества набора $\mathfrak{T}_{m+1}$ делят граф, количество непустых частей не более, чем на две превосходит количество непустых частей среди частей, на которые множества набора $\mathfrak{T}_m$ делят граф.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что все наборы k-разделяющих множеств $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2, \dots, \mathfrak{T}_{n-1}$ также являются вполне зависимыми. Тогда достаточно доказать, что среди частей, на которые разделяющие множества набора $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_n$ делят граф, количество непустых частей не более, чем на две превосходит количество непустых частей среди частей, на которые множества набора $\mathfrak{T}_{n-1}$ делят граф, что следует из пункта 3 теоремы 5.

Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$ – набор k-разделяющих множеств слабо нерасщепимого k-связного графа G такой, что каждое из его множеств зависимо с каким-то другим k-разделяющим множеством графа G. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Среди частей, на которые разделяющие множества набора $\mathfrak{T}$ разбивают граф G не более, чем $2n$ непустых.*

2) *Если непустых частей ровно $2n$, то разделяющие множества набора $\mathfrak{T}$ образуют ромашку.*

3) *Пусть $\mathfrak{T}_m = \{T_1, \dots, T_m\}$. Тогда разделяющие множества этого набора можно упорядочить таким образом, чтобы среди частей, на которые разделяющие множества набора $\mathfrak{T}_{m+1}$ делят граф, количество непустых частей не более, чем на две превосходило количество непустых частей среди частей, на которые множества набора $\mathfrak{T}_m$ делят граф.*

Доказательство.

В силу леммы 12 существует вполне зависимый набор разделяющих множеств $\mathfrak{S}$, делящий граф на те же части, что и $\mathfrak{T}$, причем $|\mathfrak{T}| = |\mathfrak{S}|$ и множества набора $\mathfrak{S}$ образуют ромашку тогда и только тогда, когда множества набора $\mathfrak{T}$ образуют ромашку. Таким образом, из утверждений пунктов 1 и 2 теоремы 5 для набора $\mathfrak{S}$, следуют утверждения пунктов 1 и 2 настоящей теоремы для набора $\mathfrak{T}$.

Пусть $\mathfrak{T}^i = \mathfrak{T} \setminus \{T_i\}$. Докажем индукцией по количеству разделяющих множеств существование в наборе двух множеств T_i и T_j таких, что при удалении из $\mathfrak{T}$ одного из этих множеств количество непустых частей в разбиении графа уменьшается не более, чем на две. Из этого утверждения легко вывести утверждение пункта 3 теоремы. (Если для какого-то i количество непустых частей в разбиении графа множествами набора $\mathfrak{T}$ не более чем на два больше, чем в разбиении графа множествами набора $\mathfrak{T}^i$, то уменьшим количество разделяющих множеств, перейдя к набору $\mathfrak{T}^i$.) В противном случае для всех i от 1 до n, кроме, может быть, какого-то одного, количество непустых частей в разбиении графа множествами набора $\mathfrak{T}^i$ хотя бы на три меньше, чем в разбиении графа множествами набора $\mathfrak{T}$.

Как и в теореме 5, обозначим через M множество последовательностей из n нулей и единиц, которые соответствуют индексам непустых частей в разбиении (в таком множестве, по доказанному выше пункту 1 настоящей теоремы, не более $2n$ последовательностей) и построим граф совпадений G_M. Однако, в нашем случае набор разделяющих множеств $\mathfrak{T}$ не обязательно является вполне зависимым.

Из сделанного предположения следует, что в графе G_M проведено хотя бы по три ребра каждого разряда, кроме, может быть, одного. Таким образом, в G_M не более $2n$ вершин и хотя бы $3n-3$ ребра. Так как $n \geq 4$, в таком графе обязательно есть циклы. Из доказанного выше пункта 1 настоящей теоремы следует, что в любом цикле ровно по два входящих в цикл ребра в каждом из разрядов, по которым он проходит.

Если в графе G_M есть (единственный) разряд, в котором проведено не более двух ребер, то пусть это разряд ℓ. В случае, когда таких разрядов нет, рассмотрим максимальный цикл Z, пусть тогда ℓ – его нормальный разряд (он существует по лемме 14).

Пусть при удалении разряда ℓ из последовательностей множества M получается множество последовательностей M_ℓ. Каждая такая последовательность соответствует непустой части в разбиении графа набором k-разделяющих множеств $\mathfrak{T}^\ell = \mathfrak{T} \setminus T_\ell$, для которого выполняется индукционное предположению. Следовательно, в графе совпадений G_{M_ℓ} существуют разряды i и j, в которых проведено не более двух ребер, причем по построению в этих разрядах не менее, чем по три ребра в графе G_M. По лемме 16 это означает существование в графе G_M цикла длины четыре C_1, проходящего по ребрам разрядов ℓ и i, а также цикла длины четыре C_2, проходящего по ребрам разрядов ℓ и j. По лемме 15, существует цикл из шести последовательностей C на разрядах i, j, ℓ, в котором разряд ℓ не является нормальным. Это сразу же означает, что в графе G_M проведено хотя бы три ребра разряда ℓ.

Следовательно, остается рассмотреть случай, когда ℓ – нормальный разряд максимального цикла Z. Если $i \notin r(Z)$, то в силу леммы 15 существует цикл на разрядах из $r(Z) \cup \{i\}$, что противоречит максимальности цикла Z. Таким образом, остается случай, когда i, $j \in r(Z)$. Рассмотрим множество $M_{r(Z)}$, состоящее из подпоследовательностей последовательностей множества M в разрядах цикла Z. В этом множестве не может быть более $2|r(Z)|$ последовательностей. Значит, все последовательности множества $M_{r(Z)}$ являются подпоследовательностями последовательностей цикла Z. Поскольку $\{i, j, \ell\} = r(C) \subset r(Z)$, то в множество $M_{r(Z)}$ должны входить шесть подпоследовательностей, полученных из последовательностей цикла C, а среди них есть три пары последовательностей, различающихся лишь в разряде ℓ. Учитывая, что последовательности цикла Z совпадают вне $r(Z)$, получаем, что в цикле Z есть три пары последовательностей, различающихся лишь в разряде ℓ, что противоречит нормальности этого разряда. Следовательно, в графе G_M есть хотя бы два разряда, в которых проведено не более, чем по два ребра, что завершает доказательство теоремы. $\square$

Пусть набор k-разделяющих множеств слабо нерасщепимого k-связного графа G, в котором каждое множество зависимо хотя бы с одним другим, делит граф на некоторые части. Мы доказали, что количество непустых частей в этом разбиении не больше удвоенного количества множеств в наборе, и более того, можно так упорядочить разделяющие множества набора, что если в этом порядке разбивать граф по разделяющим множествам набора, добавляя на каждом шаге по одному множеству, то количество непустых частей на таком шаге будет увеличиваться не более, чем на две. (Это не означает, что новое разделяющее множество разбивает ровно две непустые части: оно может пересекать значительно большее количество частей, но не более, чем две из этих частей делятся нашим множеством на две непустых.) Если же набор k-разделяющих множеств является вполне зависимым, это утверждение верно при любом порядке разбиения.

Замечание. Отметим, что в разделе 4.3 слабая нерасщепимость графа использовалась лишь для применения леммы 6 (точнее, ее пункта 2, в котором доказывается, что если два разделяющих множества делят граф на четыре непустых части, они делят друг друга на равные части, то есть, образуют ромашку). В доказательстве этой леммы слабая нерасщепимость используется лишь для доказательства того, что каждое k-разделяющее множество, зависимое хотя бы с одним из остальных, делит граф ровно на две части. Поэтому все доказанные в настоящем разделе факты верны не только для наборов k-разделяющих множеств слабо нерасщепимого графа, но и для наборов k-разделяющих множеств произвольного k-связного графа таких, что каждое множество в этих наборах делит граф ровно на две части.

Автор выражает признательность Ю. М. Лифшицу и А. В. Пастору за помощь в работе над статьей.

Литература

1. Ф. Харари, *Теория графов.* Мир, М. (1973).
2. О. Оре, *Теория графов.* Мир, М. (1968).
3. D. W. Matula, *k-Blocks and ultrablocks in graphs.* — J. Comb. Theory, Ser. B **24** (1978), 1–13.
4. F. Harary, Y. Kodama, *On the genus of an n-connected graph.* — Fund. Math. **54** (1964), 7–13.
5. S. MacLane, *A structural characterization of planar graph.* — Duke Math. J. **3** (1937), 460–472.
6. W. T. Tutte, *Connectivity in graphs.* — Univ. Toronto Press, Toronto (1966).
7. J. E. Hopcroft, R. E. Tarjan, *Dividing a graph into triconnected components.* — SIAM J. Comput. **2** (1973), 135–158.
8. W. Hohberg, *The decomposition of graphs into k-connected components.* — Discr. Math. **109** (1992), 133–145.
9. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k-связного графа.* Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.

Karpov D. V. Blocks in k-connected graphs.

For a k-connected graph with the help of local vertex connectivity we determine a notion of block and prove some properties of blocks, which generalize the properties of classic biconnected blocks. We investigate the structure of division of a k-connected graph by several cutting sets.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН
E-mail:dvk@pdmi.ras.ru

Поступило 15 декабря 2002 г.