Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 291, 2002 г.

К. Малышев

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И КОРРЕЛЯТОРЫ Z-КОМПОНЕНТ ЛОКАЛЬНЫХ СПИНОВ В XY И XX МАГНЕТИКАХ ГЕЙЗЕНБЕРГА

1. Введение

В работах [1] показано, что производящая функция статических корреляторов z-компонент локальных спинов в XX магнетике Гейзенберга может быть представлена с помощью гауссовых функциональных интегралов, определенных на множестве траекторий, которые зависят от мнимого времени "автоморфным" образом. Другими словами, переменные функционального интегрирования умножаются на определенное комплексное число при сдвиге мнимого времени на период. Предлагаемая работа продолжает [1] и связана с распространением подхода на случай XY магнетика.

Интерес к функциональным интегралам, заданным на траекториях с "автоморфной" зависимостью от мнимого времени, можно связать с упомянутыми в [1] работами [2] и [3]. В [2, 3] также возникают функциональные интегралы по траекториям с необычной зависимостью от мнимого времени. Существенное отличие [1] от [2, 3] состоит в том, что "автоморфное" граничное условие на отрезке мнимого времени оказывается пространственно "неоднородным", так как возникает только для части узлов рассматриваемой решеточной модели. Дело в том, что в [1] вычисляется след операторной экспоненты, и в показателе экспоненты стоит квадратичный оператор, определенный только на первых m узлах модели ($m \leq M$, M – полное число узлов). Напомним, что XX модель рассматривается в [1] в представлении свободных фермионов. В результате, при переходе от кратного интеграла по грассмановым когерентным состояниям к континуальному, оказывается возможным определить область интегрирования так, что на

Работа частично поддержана грантом РФФИ No. 01-01-01045.

первых m узлах переменные интегрирования "автоморфны" по мнимому времени, а на остальных узлах – (анти-)периодичны. В работах же [2, 3] зависимость переменных интегрирования от мнимого времени одинакова на всех узлах.

В предлагаемой работе процедура [1] обобщена для XY магнетика Гейзенберга, которому соответствуют квази-свободные фермионы (т.е. гамильтониан диагонализуется преобразованием Боголюбова). В разделе 2 получена производящая функция корреляторов z-компонент спинов (т.е. операторов σ_n^z, n – номер узла) в виде комбинации функциональных интегралов с нестандартными граничными условиями. Функциональные интегралы вычисляются в разделе 3 методом дзета-регуляризации. Проверены редукции полученных ответов к известным соотношениям. В разделе 4 получены формулы для корреляционных функций. В разделе 5 производящая функция вычисляется для XX модели, но, в отличие от [1], переменные интегрирования рассматриваются теперь не в импульсном, а в координатном представлении (преобразование Фурье делается только по мнимому времени). Соответствующие результаты возникают в виде бесконечных произведений по частотам рациональных выражений, числитель и знаменатель которых – многочлены, построенные из многочленов Чебышева. В разделе 6 получены некоторые оценки, связанные с корреляторами XX модели при низкой температуре в сильном, т.е. превышающем критическое, магнитном поле. Обсуждение в разделе 7 завершает работу. Часть необходимых ссылок перечислена в [1].

2. Производящая функция корреляторов в представлении функционального интеграла

Рассмотрим XY магнетик Гейзенберга спина 1/2 на периодической цепочке длины M (M четно) [4, 5]. Пусть $Q(m)$ означает число квазичастиц на первых m узлах решетки ($m \le M$). Займемся вычислением вакуумного среднего операторной экспоненты $\exp(\alpha Q(m))$:

$$G(\alpha, m) \equiv \langle e^{\alpha Q(m)} \rangle = \frac{\mathrm{Tr}\,(e^{\alpha Q(m)} e^{-\beta H})}{\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H})}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \tag{2.1}$$

где H – гамильтониан модели, β – обратная температура ($\beta = 1/T$). Среднее (2.1) играет роль производящей функции статических корреляторов третьих компонент спинов в магнитных цепочках [6–9].

Гамильтониан XY модели имеет вид:

$$H = H_0 + \gamma H_1 - hS^z, \tag{2.2}$$

$$H_0 = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M}(\sigma_n^+\sigma_{n+1}^- + \sigma_n^-\sigma_{n+1}^+),$$

$$H_1 = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M}(\sigma_n^+\sigma_{n+1}^+ + \sigma_n^-\sigma_{n+1}^-), \quad S^z = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M}\sigma_n^z,$$

где S^z – полный спин, h – внешнее магнитное поле ($h \geq 0$, [6]). Алгебра спиновых операторов Паули на узлах, σ_n^α, $n \in \{1, \dots, M\}$, определяется соотношениями:

$$[\,\sigma_k^\alpha, \sigma_n^\beta\,] = 2i\,\delta_{kn} \in^{\alpha\beta\gamma}\sigma_n^\gamma, \quad \sigma_n^\pm = (1/2)(\sigma_n^x \pm i\sigma_n^y),$$

где индексы α, β, γ принимают "значения" x, y, z. Кроме того, наложены периодические граничные условия: $\sigma_{n+M}^\alpha = \sigma_n^\alpha$, $\forall n$. Вещественный параметр γ характеризует анизотропию; при $\gamma = 0$ получаем XX магнетик Гейзенберга.

Используем преобразование Иордана–Вигнера от переменных σ_k^α к каноническим фермионным переменным c_k, $c_k^\dagger$:

$$c_k = \exp\big(i\pi\sum_{n=1}^{k-1}\sigma_n^-\sigma_n^+\big)\,\sigma_k^+, \quad c_k^\dagger = \sigma_k^-\,\exp\big(-\,i\pi\sum_{n=1}^{k-1}\sigma_n^-\sigma_n^+\big). \tag{2.3}$$

Переменные c_k, $c_k^\dagger$ подчиняются антикоммутационным соотношениям:

$$\{c_k, c_n\} = \{c_k^\dagger, c_n^\dagger\} = 0, \quad \{c_k, c_n^\dagger\} = \delta_{kn}.$$

В результате применения (2.3) гамильтониан (2.2) принимает вид [10]:

$$H = H^+P^+ + H^-P^-, \tag{2.4}$$

$$H^\pm = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}\,[c_k^\dagger c_{k+1} + c_{k+1}^\dagger c_k + \gamma(c_{k+1}c_k + c_k^\dagger c_{k+1}^\dagger)]$$

$$+h\sum_{k=1}^{M}c_k^\dagger c_k - hM/2.$$

Гамильтонианы $H^{\pm}$ (2.4) соответствуют выбору граничных условий для c_k, $c_k^{\dagger}$ в следующем виде:

$$c_{M+1} = \mp c_1, \quad c^{\dagger}_{M+1} = \mp c^{\dagger}_1. \tag{2.5}$$

В новых переменных имеем: $Q(m) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k^{\dagger} c_k$, полное число квазичастиц суть $\mathcal{N} \equiv Q(M)$, и проекторы $P^{\pm}$ (2.4) определены стандартно: $P^{\pm} = (1/2)(1 \pm (-1)^{\mathcal{N}})$ [10].

В результате, приходим к следующему представлению для $G(\alpha, m)$ (2.1) [11]:

$$\begin{gathered} G(\alpha, m) = (2Z)^{-1}(G_F^+ Z_F^+ + G_F^- Z_F^- + G_B^+ Z_B^+ - G_B^- Z_B^-), \\ G_F^{\pm} Z_F^{\pm} \equiv \mathrm{Tr}\left(e^{\alpha Q(m)} e^{-\beta H^{\pm}}\right), \\ G_B^{\pm} Z_B^{\pm} \equiv \mathrm{Tr}\left(e^{\alpha Q(m)} (-1)^{\mathcal{N}} e^{-\beta H^{\pm}}\right). \end{gathered} \tag{2.6}$$

Для статсуммы Z имеем:

$$\begin{gathered} Z = (1/2)(Z_F^+ + Z_F^- + Z_B^+ - Z_B^-), \\ Z_F^{\pm} = \mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H^{\pm}}), \quad Z_B^{\pm} = \mathrm{Tr}\left((-1)^{\mathcal{N}} e^{-\beta H^{\pm}}\right). \end{gathered} \tag{2.7}$$

Займемся вычислением $G_F^{\pm} Z_F^{\pm}$, $G_B^{\pm} Z_B^{\pm}$ (2.6) в подходе функционального интегрирования [1]. Для определенности рассмотрим $G_F^{\pm} Z_F^{\pm}$:

$$G_F^{\pm} Z_F^{\pm} = \int dz dz^* e^{z^* z} \langle z^* | e^{\alpha Q(m)} e^{-\beta H^{\pm}} | z \rangle,$$

где след оператора записан как интеграл по антикоммутирующим переменным [12], и определены когерентные состояния:

$$\langle z^* | = \langle 0 | \exp(z^* c), \quad |z\rangle = \exp(c^{\dagger} z)|0\rangle$$

(используются сокращенные обозначения: $\sum\limits_{k=1}^{M} c_k^{\dagger} z_k \equiv c^{\dagger} z$, $\prod\limits_{k=1}^{M} dx_k \equiv dx, \ldots$). Опуская изложенную в [1] процедуру, запишем окончательное интегральное представление:

$$G_F^{\pm} Z_F^{\pm} = \int \prod_{\tau \in [0,\beta]} dx^*(\tau) dx(\tau) \exp\left(\int_0^{\beta} \widetilde{\mathcal{L}}(\tau) d\tau\right). \tag{2.8}$$

Переменные функционального интегрирования $x_k^*(\tau)$, $x_k(\tau)$ являются независимыми комплекснозначными элементами алгебры Грассмана, которые зависят от номера узла $k \in \{1, \dots, M\}$ и от мнимого времени $\tau \in [0, \beta]$. Зависимость $x_k^*(\tau)$, $x_k(\tau)$ от индекса k подчинена (2.5), а от аргумента τ – условиям "автоморфности" [13]:

$$\begin{aligned} x_k(\tau) &= -e^{-\alpha} x_k(\tau+\beta), \quad 1 \le k \le m, \\ x_k(\tau) &= -x_k(\tau+\beta), \qquad m < k \le M. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Переменная $x_k^*(\tau)$ подчиняется условию, аналогичному (2.9), но с фактором e^{α} вместо $e^{-\alpha}$.

Лагранжиан $\widetilde{\mathcal{L}}(\tau)$ в (2.8) выглядит следующим образом:

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\tau) \equiv \sum_{k=1}^{M} x_k^*(\tau) \frac{dx_k(\tau)}{d\tau} - \widetilde{H}(x^*(\tau), x(\tau)), \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{H}(\tau) = &-\frac{1}{2} {\sum_{k=1}^{M-1}}' \big(x_k^*(\tau) x_{k+1}(\tau) + x_{k+1}^*(\tau) x_k(\tau)\big) \\ &- \frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \big(x_{k+1}(\tau) x_k(\tau) e^{-2\alpha\tau/\beta} + x_k^*(\tau) x_{k+1}^*(\tau) e^{2\alpha\tau/\beta}\big) \\ &- \frac{\gamma}{2} \sum_{k=m+1}^{M-1} \big(x_{k+1}(\tau) x_k(\tau) + x_k^*(\tau) x_{k+1}^*(\tau)\big) \\ &+ h \sum_{k=1}^{M} x_k^*(\tau) x_k(\tau) - hM/2 \\ &- \frac{1}{2} \big(x_m^*(\tau) x_{m+1}(\tau) e^{\alpha\tau/\beta} + x_{m+1}^*(\tau) x_m(\tau) e^{-\alpha\tau/\beta} \\ &+ x_M^*(\tau) x_{M+1}(\tau) e^{-\alpha\tau/\beta} + x_{M+1}^*(\tau) x_M(\tau) e^{\alpha\tau/\beta}\big) \\ &- \frac{\gamma}{2} \big(x_{m+1}(\tau) x_m(\tau) e^{-\alpha\tau/\beta} + x_m^*(\tau) x_{m+1}^*(\tau) e^{\alpha\tau/\beta} \\ &+ x_{M+1}(\tau) x_M(\tau) e^{-\alpha\tau/\beta} + x_M^*(\tau) x_{M+1}^*(\tau) e^{\alpha\tau/\beta}\big), \end{aligned}$$

где штрих у знака $\sum$ означает, что $k \ne m$ (индексы $^{\pm}$ у $\widetilde{H}$ опущены). Лагранжиан (2.10) отличается от наивно ожидаемого выражения присутствием множителей $\exp(\pm\alpha\tau/\beta)$. Указанные экспоненты обеспечивают периодичность $\widetilde{\mathcal{L}}(\tau)$ по мнимому времени

[1]. Заметим, что в [2] и [3] условия "автоморфности" одинаковы для всех узлов, и необходимости в "компенсирующих" множителях нет.

Перейдем к импульсному представлению:

$$\begin{aligned} x_k(\tau) &= (\beta M)^{-1/2} e^{-i\pi/4} \sum_p e^{i(\omega\tau - i\frac{\alpha}{\beta}\tau + qk)} x_p, \qquad 1 \le k \le m, \\ x_k(\tau) &= (\beta M)^{-1/2} e^{-i\pi/4} \sum_p e^{i(\omega\tau + qk)} x_p, \qquad\quad m < k \le M, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где $p = (\omega, q)$ суть 2-импульсы. Суммирование в (2.11) идет по мацубаровским частотам $\omega = \pi T(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, и по квази-импульсам $q \in X^{\pm}$,

$$X^{+} = \{q = -\pi + \pi(2l-1)/M \,\big|\, l = 1, \dots, M\},$$
$$X^{-} = \{q = -\pi + 2\pi l/M \,\big|\, l = 1, \dots, M\}.$$

Используем (2.9)–(2.11) в (2.8) и получим представление:

$$G_F^{\pm} Z_F^{\pm} = \int \prod_p dx_p^* dx_p \exp S(\alpha), \tag{2.12}$$

$$S(\alpha) = \frac{\alpha m}{2} + \frac{1}{2}\sum_p (x_p^*, x_{-p}) \begin{pmatrix} i\omega - \varepsilon_q & -\Gamma_q \\ -\Gamma_q & i\omega + \varepsilon_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ x_{-p}^* \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\alpha}{2\beta} \sum_{p_1, p_2} (x_{p_1}^*, x_{-p_1}) \begin{pmatrix} \widetilde{Q}_{p_1 p_2} & 0 \\ 0 & -\widetilde{Q}_{p_1 p_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{p_2} \\ x_{-p_2}^* \end{pmatrix},$$

где введены обозначения:

$$\varepsilon_q = h - \cos q, \quad \Gamma_q = \gamma \sin q, \quad \widetilde{Q}_{p_1 p_2} = \delta_{\omega_1 \omega_2} Q_{q_1 q_2},$$

$$Q_{pq} = \frac{1}{M} \frac{\sin \frac{m}{2}(p-q)}{\sin \frac{p-q}{2}}.$$

Все квази-импульсы независимо принимают значения в X^{+} или X^{-}. Следует отметить некоторую формальность, допущенную в записи $S(\alpha)$ (2.12) для случая, когда квази-импульсы принадлежат множеству X^{-}. Действительно, в случае $q \in X^{-}$ соответствующие коэффициенты Фурье $x_{\omega,q}$ и $x_{\omega,q}^*$ нуждаются в отдельном рассмотрении при $q = 0, \pi$, и все нужные пояснения можно найти в [10]. Будем подразумевать, что для $q = 0, \pi$ соответствующий индекс (аргумент) $-q$ следует полагать, соответственно, нулем или π. Слагаемое $\alpha m/2$ возникает в матричной записи $S(\alpha)$ (2.12) как результат предположения о фермиевском характере перестановочных соотношений для $x^*_{p_1}$, x_{p_2}. Вынужденность такого предположения объясняется тем, что данное слагаемое играет важную роль при получении правильных ответов для корреляционных функций.

3. Вычисление функционального интеграла

Рассмотрим $G^+_F Z^+_F$ (2.12) и выполним в $S(\alpha)$ преобразование Боголюбова:

$$(x^*_p, x_{-p}) = (A^*_p, A_{-p})\,\mathbf{g}_\theta, \tag{3.1}$$

где

$$\mathbf{g}_\theta \equiv \exp\bigl(-i\,\frac{\theta_q}{2}\sigma^2\bigr) \in SU(2), \quad \tan\theta_q = -\frac{\Gamma_q}{\varepsilon_q}, \quad \theta_{-q} = -\theta_q.$$

Здесь подразумевается, что σ^α, где α принимает значения 1, 2, 3, а нижний индекс отсутствует, означает не спиновый оператор на узле, а просто матрицу Паули. В результате придем к действию

$$\begin{aligned}\widetilde{S}(\alpha) &= \frac{\alpha m}{2} + \frac{1}{2}\sum_p (A^*_p, A_{-p})\bigl[i\omega - E_q\sigma^3\bigr]\begin{pmatrix} A_p \\ A^*_{-p}\end{pmatrix} \\ &+\frac{\alpha}{2\beta}\sum_{p_1,p_2}(A^*_{p_1}, A_{-p_1})\,\mathbf{g}_{\theta_1}(\widetilde{Q}_{p_1p_2}\sigma^3)\,\mathbf{g}^{-1}_{\theta_2}\begin{pmatrix} A_{p_2} \\ A^*_{-p_2}\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\theta_i \equiv \theta_{q_i}$ $(i = 1, 2)$, и $E_q \equiv (\varepsilon_q^2 + \Gamma_q^2)^{1/2}$. Подстановка (3.2) в (2.12) (с заменой меры интегрирования) приводит [12] к ответу:

$$\begin{aligned} G^\pm_F Z^\pm_F &= e^{\alpha m/2}\,\mathrm{Det}^{\,1/2} A(\alpha), \\ A_{p_1p_2}(\alpha) &\equiv \bigl[i\omega_1 - E_{q_1}\sigma^3\bigr]\delta_{p_1p_2} + \frac{\alpha}{\beta}\,\mathbf{g}_{\theta_1}(\widetilde{Q}_{p_1p_2}\sigma^3)\,\mathbf{g}^{-1}_{\theta_2}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

В случае, когда $q \in X^-$, преобразование Боголюбова выполняется с помощью (3.1) для $q \neq 0, \pi$, а для $q = 0, \pi$ нужно учесть замечание, сделанное в конце предыдущего параграфа. В обоих случаях окончательный результат записывается в виде одного соотношения (3.3), где подразумевается, что $q \in X^\pm$.

Регуляризованный определитель матричного оператора $A(\alpha)$ (3.3) определим с помощью обобщенной дзета-функции $\zeta(s|A(\alpha))$ этого оператора:

$$\log \operatorname{Det}^{1/2} A(\alpha) = -\frac{1}{2} \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds} \zeta(s|A(\alpha)),$$

где подразумевается стандартное представление $\zeta(s|A(\alpha))$ интегралом Меллина [14]. Отсылая за подробностями к [1] и процитированной там литературе, запишем ответы:

$$G_F^{\pm} = \det\nolimits_M^{1/2}(e^{\alpha \widehat{Q}}) \det\nolimits_{2M}^{1/2} \left\{ I + \frac{\widetilde{g}\big[\widehat{Q} \otimes \big(\exp(-\alpha\sigma^3) - I\big)\big]\widetilde{g}^{-1}}{I + \exp(-\beta \widehat{E} \otimes \sigma^3)} \right\}, \quad (3.4)$$

$$Z_F^{\pm} = \det\nolimits_{2M}^{1/2} \left\{ I + \exp(\beta \widehat{E} \otimes \sigma^3) \right\}. \quad (3.5)$$

Определители бесконечномерных и конечномерных матриц обозначены в (3.3)–(3.5), соответственно, Det и det, а индексы M и $2M$ означают размер матриц. В (3.4) $\widetilde{g}$ обозначает блочно-диагональную $2M \times 2M$ матрицу, содержащую матрицы $\mathbf{g}_\theta$ (3.1) на главной диагонали; $\widehat{Q}$ и $\widehat{E}$ суть $M \times M$ матрицы с матричными элементами $Q_{q_1 q_2}$ и $E_{q_1}\delta_{q_1 q_2}$, соответственно. Кроме того, использованы соотношения:

$$\exp\big(-\alpha\, \widetilde{g}(\widehat{Q} \otimes \sigma^3)\, \widetilde{g}^{-1}\big) - I = \widetilde{g}\big[\widehat{Q} \otimes \big(\exp(-\alpha\sigma^3) - I\big)\big]\, \widetilde{g}^{-1},$$

и $\det(\exp \alpha\widehat{Q}) = \exp(\alpha m)$ (см. обозн. в (2.12)). Обозначения тензорных произведений в (3.4), (3.5) согласованы с матричной записью в (3.2), (3.3).

Проверим некоторые редукции соотношений (3.4), (3.5). Прежде всего, вычислим (3.5):

$$Z_F^{\pm} = \sqrt{\prod_{q \in X^{\pm}} (1 + e^{-\beta E_q})(1 + e^{\beta E_q})} = \prod_{q \in X^{\pm}} 2 \operatorname{ch} \frac{\beta E_q}{2}. \quad (3.6)$$

Далее, рассмотрим (3.4). При $m = M$ матрица $\widehat{Q}$ становится единичной матрицей, и для $\alpha = i\pi$ получаем (см.(2.6) и (2.7)):

$$G_F^{\pm} = Z_B^{\pm} / Z_F^{\pm} = \prod_{q \in X^{\pm}} \operatorname{th} \frac{\beta E_q}{2}. \quad (3.7)$$

Пусть теперь $m = M$, а α – произвольно. Тогда

$$G_F^{\pm} = e^{\alpha M/2} \sqrt{\prod_{q \in X^{\pm}}} \det{}_2 \left[I - \frac{(1 - \operatorname{ch} \alpha) I + \operatorname{sh} \alpha \, \mathbf{g}_{2\theta} \, \sigma^3}{I + \exp(-\beta E_q \sigma^3)} \right]$$

$$= e^{\alpha M/2} \sqrt{\prod_{q \in X^{\pm}} \left(\operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sh} \alpha \cos \theta_q \operatorname{th} \frac{\beta E_q}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{th}^2 \frac{\beta E_q}{2} \right)}, \quad (3.8)$$

где $\mathbf{g}_{2\theta}$ – матрица поворота на угол $2\theta_q$. С другой стороны, результат [11] гласит:

$$G_F^{\pm} = \det{}_M \left(I + (e^{\alpha} - 1) \frac{\widehat{Q}}{2} \operatorname{diag} \{ 1 - e^{i\theta_q} \operatorname{th} \frac{\beta E_q}{2} \} \right). \quad (3.9)$$

Прямая проверка показывает, что (3.9) при $m = M$ совпадает с (3.8). Наконец, пусть $\gamma = 0$, а α и m – произвольны в (3.4). Тогда приходим к ответу для XX случая:

$$G_F^{\pm} = \det{}_M^{1/2} (e^{\alpha Q_{12}}) \det{}_{2M}^{1/2} \begin{pmatrix} \delta_{q_1 q_2} + \frac{\exp(-\alpha Q_{12}) - 1}{1 + \exp(-\beta \varepsilon_1)} & 0 \\ 0 & \delta_{q_1 q_2} + \frac{\exp(\alpha Q_{12}) - 1}{1 + \exp(\beta \varepsilon_1)} \end{pmatrix}$$

$$= \det{}_M \left(I + \frac{\exp(\alpha \widehat{Q}) - I}{I + \exp(\beta \widehat{\varepsilon})} \right), \quad (3.10)$$

где $Q_{12} \equiv Q_{q_1 q_2}$, $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_{q_1} = h - \cos q_1$ и $\widehat{\varepsilon} = \operatorname{diag} \{ \varepsilon_q \}$.

Из (3.6)–(3.8), (3.10) видно, что представления (3.4), (3.5) согласуются с результатами [1] и правильно воспроизводят соотношения XX модели [6, 7, 11]. Вычисление для $G_B^{\pm} Z_B^{\pm}$ (2.6) проводится совершенно аналогично проделанному выше, но присутствие $(-1)^{\mathcal{N}}$ под знаком следа приводит к замене минуса в условиях (2.9) на плюс. В результате, суммирование в $\widetilde{S}(\alpha)$ осуществляется теперь по бозевским частотам $\omega = 2\pi T n, n \in \mathbb{Z}$, а окончательные ответы для $G_B^{\pm}$ и $Z_B^{\pm}$ даются (3.4) и (3.5), но при условии, что знаки перед $\exp(\pm \beta \widehat{E} \otimes \sigma^3)$ изменяются на противоположные (аналогично, в [11] результаты для $G_F^{\pm}$ и $G_B^{\pm}$ отличаются только знаком перед $\exp(\beta E_q)$).

4. Корреляционные функции

Вычисление корреляционных функций связано с дифференцированиями производящей функции $G(\alpha, m)$ (2.1) по α и m [6–9].

Используемая в работе дзета-регуляризация приводит к удобным формулам дифференцирования соответствующих определителей. При этом используется формальное соотношение:

$$\frac{d}{d\alpha}\big(\log \operatorname{Det} A(\alpha)\big) = -\frac{d}{d\alpha}\int\limits_0^\infty \operatorname{Tr}\left(e^{-A(\alpha)t}\right)\frac{dt}{t} = \operatorname{Tr} B(\alpha), \tag{4.1}$$

где оператор $A(\alpha)$ линеен по α, $A(\alpha) \equiv A_1 + \alpha A_2$, и $B(\alpha) \equiv A_2 A^{-1}(\alpha)$. Вывод (4.1) опирается на равенство [14]:

$$\frac{d}{d\alpha}\big(\operatorname{Tr} e^{-A(\alpha)t}\big) = t\frac{d}{dt}\big(B(\alpha)e^{-A(\alpha)t}\big).$$

Для интересующего нас матричного оператора $A(\alpha)$ (3.3) получаем ответ:

$$\frac{d}{d\alpha}\big(\log \operatorname{Det}^{1/2} A(\alpha)\big) = \\ = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{\widetilde{g}\,(\widehat{Q}\otimes\sigma^3)\,\widetilde{g}^{-1}}{I + \exp\big(-\beta\widehat{E}\otimes\sigma^3 + \alpha\,\widetilde{g}\,(\widehat{Q}\otimes\sigma^3)\,\widetilde{g}^{-1}\big)}\right). \tag{4.2}$$

Дальнейшие дифференцирования стандартны, и мы получаем для $\langle Q^n(m)\rangle = (d^n/d\alpha^n)\,G(\alpha,m)\big|_{\alpha=0}$ (термодинамический предел):

$$\langle Q(m)\rangle = \frac{m}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} C_q dq, \quad \langle Q^2(m)\rangle = \frac{m}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} C_q dq + \left(\frac{m}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} C_q dq\right)^2 \\ + \frac{1}{4}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} Q_{pq}Q_{qp}(S_pS_q - C_pC_q)\,dp\,dq, \tag{4.3}$$

где

$$C_q \equiv 1 - \cos\theta_q \operatorname{th}\frac{\beta E_q}{2}, \quad S_q \equiv \sin\theta_q \operatorname{th}\frac{\beta E_q}{2}.$$

Использование, вместо (4.2), формулы (3.9) также приводит к (4.3). Полученные соотношения приводят к правильным ответам для корреляционных функций [5–7]:

$$\langle\sigma_m^z\rangle = (1/2\pi)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\theta_q \operatorname{th}\frac{\beta E_q}{2}dq,$$

$$\langle\sigma^z_{m+1}\sigma^z_1\rangle - \langle\sigma^z_m\rangle^2 = (1/4\pi^2)\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos m(p-q)(S_pS_q - C_pC_q)\,dp\,dq.$$

Уместно отметить, что использование представления

$$G_F^{\pm} = e^{\alpha m/2}\mathrm{Det}^{\,1/2}\left\{I + \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\widetilde{g}\,(\widehat{Q}\otimes\sigma^3)\,\widetilde{g}^{-1}}{i\omega - \widehat{E}\otimes\sigma^3}\right\}$$

$$= e^{\alpha m/2}\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,\mathrm{Tr}\left[\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\widetilde{g}\,(\widehat{Q}\otimes\sigma^3)\,\widetilde{g}^{-1}}{i\omega - \widehat{E}\otimes\sigma^3}\right]^k\right\}$$

(т.е. более традиционная для квантовой теории поля регуляризация $\mathrm{Det}\,A(\alpha)$) приводит к тем же ответам (4.3), что и представление (4.2).

5. XX магнетик в частотно-координатном представлении

5.1. Функциональный интеграл.

Вычислим $G_F^{\pm}$ (2.6) в случае XX модели Гейзенберга ($\gamma = 0$), рассматривая действие в показателе экспоненты в (2.8) в частотно-координатном представлении. Воспользуемся интегральным представлением:

$$G_F^{\pm}Z_F^{\pm} = \int\limits_{aut.b.c.}\mathcal{D}(x^*, x)\exp S_{XX}^{\pm}(\alpha), \tag{5.1}$$

где

$$S_{XX}^{\pm}(\alpha) = \sum_{\omega}\mathcal{L}_{\omega}^{\pm}(\alpha) + M\beta h/2, \quad \mathcal{L}_{\omega}^{\pm}(\alpha) = \sum_{k_1,k_2=1}^{M} x^*_{k_1}\mathcal{M}_{k_1k_2}(\alpha)x_{k_2}\,. \tag{5.2}$$

В (5.1) индексы $^{\pm}$ соответствуют граничным условиям (2.5), $aut.b.c.$ означает граничное условие по мнимому времени (2.9), и $\mathcal{D}(x^*, x)$ – мера интегрирования по переменным $x^*_k(\tau), x_k(\tau)$, представленым рядами Фурье:

$$\begin{aligned} x_k(\tau) &= \beta^{-1/2}\sum_{\omega}x_k(\omega)e^{i(\omega\tau - i\frac{\alpha}{\beta}\tau)}, \quad && 1\le k\le m, \\ x_k(\tau) &= \beta^{-1/2}\sum_{\omega}x_k(\omega)e^{i\omega\tau}, && m<k\le M, \end{aligned} \tag{5.3}$$

где $\omega = \pi T(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, и k – номер узла. В записи квадратичной формы $\mathcal{L}^{\pm}_{\omega}(\alpha)$ (5.2) подразумевается, что $x^*_k \equiv x^*_k(\omega)$, $x_k \equiv x_k(\omega)$, $k \in \{1, \ldots, M\}$.

В силу того, что разложения (5.3) различны для первых m и для остальных $M - m$ узлов, квадратная матрица $\widehat{\mathcal{M}}(\alpha) \equiv \left\|\mathcal{M}_{k_1k_2}\right\|$, $k_1, k_2 \in \{1, 2, ..., M\}$ (5.2) имеет блочную структуру, характеризуемую двумя квадратными блоками размера $m \times m$ и $n \times n$, $n \equiv M - m$, на главной диагонали. Разбивая переменные интегрирования на две соответственные подгруппы, перепишем $\mathcal{L}^{\pm}_{\omega}$:

$$\mathcal{L}^{\pm}_{\omega}(\alpha) \equiv \mathbf{A}^{\dagger}\widehat{M}_m(\alpha)\mathbf{A} + \mathbf{B}^{\dagger}\widehat{M}_n(0)\mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathbf{P}_{\pm}\mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{Q}_{\pm}, \qquad (5.4)$$

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} \equiv \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{\pm} \equiv \begin{pmatrix} x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mp x_1 \end{pmatrix},$$

где $\widehat{M}_l(\alpha)$ – матрица размера $l \times l$ вида:

$$\widehat{M}_l(\alpha) \equiv \begin{pmatrix} a_\alpha & c & & & & \\ c & a_\alpha & c & & & \\ & c & a_\alpha & c & & \\ & & & \cdots & \cdots & \\ & & & c & a_\alpha & c \\ & & & & c & a_\alpha \end{pmatrix}.$$

В (5.4) использованы следующие обозначения: † – комплексное сопряжение и транспонирование, $a_\alpha \equiv i\omega + \frac{\alpha}{\beta} - h$ (ниже также используем $a \equiv a_0 = i\omega - h$), $c = 1/2$ и $\mathbf{P}_{\pm} \equiv \mathbf{Q}^{\dagger}_{\pm}$. Квадратные матрицы $\widehat{M}_m(\alpha)$ и $\widehat{M}_n(0)$ образуют главную блочную диагональ матрицы $\widehat{\mathcal{M}}(\alpha)$. Структура прямоугольных блоков на побочной диагонали легко восстанавливается из линейных по $\mathbf{B}^{\dagger}, \mathbf{B}$ членов в (5.4).

Разложение x^*_k, x_k в конечные ряды Фурье по квази-импульсам эквивалентно сопряжению матрицы $\widehat{\mathcal{M}}(\alpha)$, переводящему ее в матрицу

$$\left\| \, (i\omega_F - \varepsilon_{q_1})\delta_{p_1p_2} + \frac{\alpha}{\beta}\, \widetilde{Q}_{p_1p_2} \exp(i(m+1)(q_1 - q_2)/2) \, \right\|, \quad q_{1,2} \in X^{\pm}, \qquad (5.5)$$

характерную для XX модели [1] (см. обозн. в (2.12)). Матрица (5.5) связана с представлением $G_F^{\pm}$, рассмотренным в [1]:

$$G_F^{\pm} = \frac{\mathrm{Det}\,\left[(i\omega_F - \varepsilon_q)\delta_{pp'} + \frac{\alpha}{\beta}\widetilde{Q}_{pp'}\right]}{\mathrm{Det}\,\left[(i\omega_F - \varepsilon_q)\delta_{pp'}\right]}\,, \qquad q \in X^{\pm}\,. \tag{5.6}$$

Для вычисления $G_F^{\pm}$ рассмотрим (5.1) с $\mathcal{L}_\omega^{\pm}(\alpha)$ (5.4), т.е. рассмотрим бесконечное произведение грассмановых интегралов:

$$G_F^{\pm} Z_F^{\pm} = e^{M\beta h/2} \prod_\omega \int d\mathbf{A}^\dagger d\mathbf{A} d\mathbf{B}^\dagger d\mathbf{B} \exp \mathcal{L}_\omega^{\pm}(\alpha). \tag{5.7}$$

Выполним в (5.7) сдвиг переменных интегрирования:

$$\mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B} - (1/2)(\widehat{M}_n(0))^{-1}\mathbf{Q}_{\pm}\,,$$

$$\mathbf{B}^\dagger \longrightarrow \mathbf{B}^\dagger - (1/2)\mathbf{P}_{\pm}(\widehat{M}_n(0))^{-1}\,.$$

В результате, интегрирования по $\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{A}$ и $\mathbf{B}^\dagger, \mathbf{B}$ становятся независимыми, и под знаком произведения по частотам возникает произведение интегралов:

$$\int d\mathbf{A}^\dagger d\mathbf{A} \exp\left(\mathbf{A}^\dagger \widehat{M}_m(\alpha)\mathbf{A} - (1/4)\mathbf{P}_{\pm}(\widehat{M}_n(0))^{-1}\mathbf{Q}_{\pm}\right)$$
$$\times \int d\mathbf{B}^\dagger d\mathbf{B} \exp\left(\mathbf{B}^\dagger \widehat{M}_n(0)\mathbf{B}\right). \tag{5.8}$$

Прямая проверка показывает, что выполняется равенство:

$$-\frac{1}{4}\mathbf{P}_{\pm}\big(\widehat{M}_n(0)\big)^{-1}\mathbf{Q}_{\pm} = -\frac{1}{4}\mathbf{A}^\dagger \begin{pmatrix} a_{nn} & \dots & \mp a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mp a_{n1} & \dots & a_{11} \end{pmatrix} \mathbf{A},$$

где в матрице справа $a_{ij} \equiv \big(\widehat{M}_n(0)\big)^{-1}_{ij}$ и выписаны только ненулевые элементы.

Так как (5.8) – произведение двух стандартных интегралов [12], то в результате получаем:

$$G_F^{\pm} = \prod_\omega \det{}_m \widehat{N}(\alpha) \det{}_m^{-1} \widehat{N}(0), \tag{5.9}$$

$$\widehat{N}(\alpha) \equiv \widehat{M}_m(\alpha) - (4d_n)^{-1} \begin{pmatrix} d_{n-1} & \dots & \mp(-c)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mp(-c)^{n-1} & \dots & d_{n-1} \end{pmatrix},$$

где $d_n \equiv \det_n \widehat{M}_n(0)$, а интегралы по $\mathbf{B}^\dagger$, $\mathbf{B}$ в числителе и знаменателе сократились. Определитель матрицы $\widehat{M}_n(0)$ вычисляется:

$$d_n = 2^{-n}\mathcal{U}_n(a), \quad \mathcal{U}_n(\cos\vartheta) = \frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta},$$

где $\mathcal{U}_n(\cos\vartheta)$ – многочлен Чебышева II рода [15]. Определитель матрицы $\widehat{N}(\alpha)$ также вычисляется:

$$\det_m \widehat{N}(\alpha) = \frac{1}{2^m}\Big(\mathcal{U}_m(a_\alpha) + \mathcal{U}_{m-2}(a_\alpha)\frac{\mathcal{U}^2_{n-1}(a)-1}{\mathcal{U}^2_n(a)} - \frac{2}{\mathcal{U}_n(a)}\big(\mathcal{U}_{m-1}(a_\alpha)\mathcal{U}_{n-1}(a) \mp 1\big)\Big).$$

5.2. Производящая функция.

Воспользуемся известными свойствами многочленов Чебышева [15]:

$$\mathcal{U}^2_{n-1}(a) - 1 = \mathcal{U}_n(a)\mathcal{U}_{n-2}(a),$$
$$a\,\mathcal{U}_{n-1}(a) = \mathcal{U}_n(a) - T_n(a),$$
$$\mathcal{U}_{m-2}(a) = 2a\,\mathcal{U}_{m-1}(a) - \mathcal{U}_m(a),$$

где $T_n(\cos\vartheta)$ – многочлен Чебышева I рода, $T_n(\cos\vartheta) = \cos n\vartheta$, [15]. Приводя подобные члены получаем:

$$\det_m \widehat{N}(\alpha) = \frac{g_\pm(m,\alpha\big|i\omega)}{2^{M-1}d_n},$$

где $g_\pm(m,\alpha\big|i\omega)$ означает многочлен

$$g_\pm(m,\alpha\big|\lambda) = \big((\lambda - h + \frac{\alpha}{\beta})(\lambda-h) - 1\big)\mathcal{U}_{m-1}(\lambda - h + \frac{\alpha}{\beta})\mathcal{U}_{n-1}(\lambda-h) + T_m(\lambda - h + \frac{\alpha}{\beta})T_n(\lambda-h) \pm 1 \tag{5.10}$$

при $\lambda = i\omega$. В результате приходим к

$$G_F^\pm = \prod_\omega \frac{g_\pm(m,\alpha\big|i\omega)}{g_\pm(m,0\big|i\omega)}. \tag{5.11}$$

Если применить соотношения

$$2(a^2-1)\mathcal{U}_{m-1}(a)\mathcal{U}_{n-1}(a) = T_{m+n}(a) - T_{m-n}(a),$$

$$2T_m(a)T_n(a) = T_{m+n}(a) + T_{m-n}(a),$$

то можно упростить знаменатель в (5.11) и переписать $G_F^{\pm}$ так:

$$G_F^{\pm} = \prod_{\omega} \frac{(a_\alpha a - 1)\mathcal{U}_{m-1}(a_\alpha)\mathcal{U}_{n-1}(a) + T_m(a_\alpha)T_n(a) \pm 1}{T_M(a) \pm 1}. \qquad (5.12)$$

В случае $G_B^{\pm}$ вид ответа сохранится, но произведение будет вычисляться по бозевским частотам.

Рассмотрим два частных случая, демонстрирующих , что (5.12) воспроизводит правильные ответы. Для сравнения будем пользоваться (3.10).

(а) Пусть $m = M$. Рассмотрим многочлен $g_{\pm}(M, 0|\lambda) = T_M(\lambda - h) \pm 1$. Напомним, что M четно и что допустимые квази-импульсы $q \in X^{\pm}$ определяются уравнением $\cos Mq = \mp 1$. Следовательно, корни $g_{\pm}(M, 0|\lambda)$ суть $\lambda = \varepsilon_q$, $q \in X^{\pm}$. Тогда (5.12) принимает вид:

$$G_F^{\pm} = \prod_{\omega} \frac{T_M(a_\alpha) \pm 1}{T_M(a) \pm 1} = \prod_{\omega} \prod_{q \in X^{\pm}} \frac{i\omega - \varepsilon_q + \alpha/\beta}{i\omega - \varepsilon_q}, \qquad (5.13)$$

Для вычисления произведения по частотам продифференцируем (5.13) по α и придем к дифференциальному соотношению:

$$\frac{dG_F^{\pm}}{G_F^{\pm}} = \sum_{q \in X^{\pm}} \frac{d\alpha}{1 + e^{\beta\varepsilon_q - \alpha}}\,. \qquad (5.14)$$

Интегрируя (5.14), находим:

$$G_F^{\pm} = \prod_{q \in X^{\pm}} \frac{1 + e^{-\beta\varepsilon_q + \alpha}}{1 + e^{-\beta\varepsilon_q}}.$$

Несложно убедиться, что (3.10) приводит к такому же ответу.

(б) Пусть $m < M$. Рассмотрим первую производную $G_F^{\pm}$ по α:

$$\frac{d}{d\alpha} G_F^{\pm}\Big|_{\alpha=0} = \frac{m}{\beta} \sum_{\omega} \frac{T_n\,\mathcal{U}_{m-1} + \mathcal{U}_{n-1}\,T_m}{T_M \pm 1}$$

$$= \frac{m}{\beta} \sum_{\omega} \frac{\mathcal{U}_{M-1}}{T_M \pm 1} = \frac{m}{\beta} \sum_{\omega} \frac{(d/da)(T_M \pm 1)}{T_M \pm 1} = \frac{m}{\beta M} \sum_{\omega, q \in X^{\pm}} (i\omega - \varepsilon_q)^{-1}\,,$$

где суммирование идет по фермиевским частотам $\omega \equiv \omega_F$. Снова получаем правильный ответ.

Итак, использование для вычисления $G(\alpha, m)$ функциональных интегралов по полям, подчиненным "автоморфным" граничным условиям по мнимому времени, позволяет получить для $G_F^{\pm}$, $G_B^{\pm}$ новые представления, использующие многочлен $g_{\pm}(m, \alpha|\lambda)$. Многочлен $g_{\pm}(m, \alpha|\lambda)$ имеет степень M (m и α – параметры, λ – аргумент), записывается в терминах многочленов Чебышева и является характеристическим многочленом $M \times M$ матрицы $\widehat{\varepsilon} - \frac{\alpha}{\beta}\widehat{Q}$ (см. (5.5), (5.6)). Для небольших значений M и m (например, для $M = 2, m = 1$ и $M = 4, m = 1, 2$) это можно проверить явно.

6. Об оценке корреляторов XX-модели в сильном магнитном поле

Практический интерес представляет асимптотическое поведение корреляционных функций. Например, в классической работе [5], посвященной общему случаю XY модели, представлены некоторые асимптотические результаты для намагниченности, магнитной восприимчивости, автокорреляционной функции. Поведение корреляционных функций XX и XY моделей в магнитном поле изучалось в [10, 16, 17], а также в недавних работах [9, 18]. В [19] рассмотрен коррелятор $\langle \sigma_{m+1}^z \sigma_1^z \rangle$ в длинноволновой области для XX модели (взаимодействие как на ближайших узлах, так и через два узла) в слабом магнитном поле $0 \le h \le h_c$. В предлагаемой работе рассмотрен один из подходов к оценке корреляторов обычной XX модели в сильном магнитном поле: $h \ge h_c$.

Для зависящей от времени двухточечной корреляционной функции , которая описывает взаимодействие третьих компонент спинов на различных узлах при ненулевой температуре, имеет место следующее аналитическое представление [5, 6]:

$$A(m,t) \equiv \langle \sigma_{n_2}^z(t_2) \sigma_{n_1}^z(t_1) \rangle - (\sigma^z)^2 = -|F(m,t)|^2 + 2 I_m(it) F^*(m,t), \tag{6.1}$$

где $\sigma^z = \langle \sigma_m^z \rangle$ – намагниченность [6], а функция $F(m,t)$ задается в термодинамическом пределе интегралом следующего вида:

$$F(m,t) \equiv \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(mq + t\cos q)}}{1 + e^{\beta \varepsilon_q}} dq. \tag{6.2}$$

В (6.1), (6,2) приняты обозначения: $m \equiv n_2 - n_1$, $t = t_2 - t_1$, $\varepsilon_q = h - \cos q > 0$ при $h > h_c = 1$, и $I_m(z)$ – модифицированная функция Бесселя [15]. При $t=0$ второе слагаемое в правой части (6.1) принимает вид: $2\delta_{m0}F^*(m,0)$.

Пользуясь формулой для убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\exp(-\beta\varepsilon_q)$, получаем для $F(m,t)$ (6.2) представление в виде ряда:

$$F(m,t) = -2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-\beta hk} I_m(\beta k + it), \quad h > 1, \quad \beta > 0. \tag{6.3}$$

Положим $\beta = 0$ в (6.2) и получим: $F(m,t) = I_m(it)$. В интересующем нас низкотемпературном случае $\beta \gg 1$, и ряд (6.3) сходится поточечно как знакопеременный. При $\beta(h-h_c) \gg 1$ можно отбросить единицу в знаменателе (6.2) и получить:

$$F(m,t) \approx 2e^{-\beta h} I_m(\beta + it). \tag{6.4}$$

Оба представления для $F(m,t)$, (6.2) и (6.3), удовлетворяют "волновому" уравнению [5]:

$$\partial_{tt}^2 F(m,t) + \frac{1}{4}\left[F(m+2,t) + 2F(m,t) + F(m-2,t)\right] = 0.$$

Итак, рассмотрим, пользуясь (6.3) и (6.4), асимптотические оценки для функции $F(m,t)$, которая входит в коррелятор (6.1). Ограничимся тремя случаями:

(а) $t=0$, $\beta \gg m \gg 1$;

(б) $t=0$, $m \gg \beta \gg 1$ или $m \sim \beta \gg 1$;

(в) $t \neq 0$, $m=0$.

(а) Воспользуемся оценкой для $I_m(z)$ при большом аргументе и ограниченном порядке [15]:

$$I_m(z) \simeq (2\pi z)^{-1/2} e^z \left[1 + \left(\frac{1}{4} - m^2\right)(2z)^{-1}\right], \tag{6.5}$$

где $z \equiv \beta k + it$. С помощью (6.3) и (6.5) получаем:

$$\begin{aligned} F(m,0) &\simeq (2/\pi\beta)^{1/2} e^{\beta(h_c - h)}\left(1 - \frac{m^2}{2\beta}\right), \quad \beta(h-h_c) \gg 1, \\ \lim_{h\to h_c+0} F(m,0) &\simeq (2/\pi\beta)^{1/2}\left(a_1 - a_2\frac{m^2}{2\beta}\right), \quad \beta(h-h_c) \ll 1, \end{aligned} \tag{6.6}$$

где $a_1 \equiv (1-\sqrt{2})\zeta(1/2)$ и $a_2 \equiv (1-1/\sqrt{2})\zeta(3/2)$. Здесь $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, определенная рядом, который сходится при $\Re s > 0$ [15]. Соотношения (6.6) уточняют закон убывания функции $A(m,0)$ (6.1) в двух предельных ситуациях.

(б) В этом случае функцию Бесселя можно оценить при ограниченном аргументе и большом порядке [20]:

$$I_p(x) \simeq (2\pi)^{-1/2}(p^2+x^2)^{-1/4}\exp\left[(p^2+x^2)^{1/2} - p\,\mathrm{Arsh}\,\frac{p}{x}\right], \quad (6.7)$$

где $p, x > 0$, и остаточный член приведен в [20]. Воспользуемся (6.4) и (6.7) при $p \gg x$. Таким образом, при $\beta(h-h_c) \gg 1$ получаем:

$$F(m,0) \simeq (2/\pi m)^{1/2}\exp(-\beta h - m\log\frac{m}{\beta}), \quad (6.8)$$

где считается, что $\log(m/\beta) \gg 1$. Соотношение (6.8) демонстрирует более существенную роль m, чем в случае (а).

Если отношение m к β конечно, то можно получить еще одну оценку. С помощью (6.7) можно оценить $I_\nu(\nu z)$ для $\nu \gg 1$ и конечных z [21]. Пусть ν – большой параметр, соответствующий $m \sim \beta \gg 1$ и z отвечает индексу k в (6.3). Тогда при $m(h-\eta(2)+\eta(1)) \gg 1$ можно ограничиться первым слагаемым в (6.3) и получить:

$$F(m,0) \simeq 2^{1/4}(\pi m)^{-1/2}e^{-m/r_c}, \quad (6.9)$$

где $\eta(2)-\eta(1) \approx 1.22$, $\eta(1) \approx 0.55$ и введен корреляционный радиус r_c [22], $r_c^{-1} \equiv h - \eta(1)$. Функция $\eta(k)$ задается формулой [21]:

$$\eta(k) \equiv (1+k^2)^{1/2} - \log\frac{1+(1+k^2)^{1/2}}{k}.$$

Если h достаточно близко к $\eta(2)-\eta(1)$ или если $\eta(2)-\eta(1) \geq h > h_c$, то требуется более тонкий подход.

(в) В этом случае также можно получить с помощью (6.2) и (6.5) нужные оценки. Например, при $\beta(h-h_c) \ll 1$ получаем:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to h_c+0} F(0,t) &\simeq (2/\pi\beta)^{1/2}a_1 e^{it}, \quad \frac{t}{\beta} \ll 1,\\ &\simeq (2\pi t)^{-1/2}e^{i(t-\pi/4)}, \quad \frac{t}{\beta} \gg 1.\end{aligned} \quad (6.10)$$

При $\beta(h-h_c) \gg 1$ оценки (6.10), не изменяясь качественно, приобретают множитель $\exp(\beta(h_c-h))$.

Полученные оценки (6.6), (6.8)–(6.10) можно использовать для анализа (6.1). Использование асимптотических рядов для функций Бесселя [15] позволяет находить поправки к представленным формулам. Заметим также, что процедуру вывода (6.2) можно повторить и для свободной энергии XX модели на бесконечной решетке [4, 18, 23], что приводит к формуле

$$\mathcal{F} = -h/2 + \beta^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} e^{-\beta h k} I_0(\beta k), \quad h > h_c. \tag{6.11}$$

Пользуясь (6.5) и (6.11), можно воспроизвести для свободной энергии $\mathcal{F}$ ведущие оценки, полученные в [23] (см. также [18]) исходя из XXZ модели для $\beta(h-h_c) \gg 1$ и $\beta(h-h_c) \ll 1$ (т.е. при $h \to h_c + 0$), а также найти и соответствующие поправочные члены любого порядка.

7. Заключение

В работе вычислены производящие функции статических корреляторов третьих компонент спинов для XY и XX моделей Гейзенберга на замкнутой цепочке. Вычисление произведено с помощью грассманова функционального интегрирования по траекториям с "автоморфной" зависимостью от мнимого времени. Результаты представлены в виде определителей матричных операторов. С помощью дзета-регуляризации найдены ответы для некоторых корреляционных функций. Для производящей функции XX модели вычисление произведено в частотно-координатном представлении, и, в окончательной форме, производящие функции $G_F^{\pm}$, $G_B^{\pm}$, принимают вид бесконечных произведений рациональных выражений, построенных из многочленов Чебышева. Для всех полученных формул рассмотрены различные специальные случаи, показывающие, что имеют место редукции к известным соотношениям. Представлены некоторые оценки корреляторов XX модели в сильном (т.е. превышающем критическое) магнитное поле. В оценках использованы асимптотики модифицированной функции Бесселя $I_m(z)$ как при умеренных, так и при больших значениях индекса.

Представленная работа продолжает исследование, начатое в [1], где был предложен технический прием, сводящий вычисление среднего от экспоненты квадратичного оператора к вычислению функционального интеграла по “автоморфным” траекториям. Представленная работа примыкает к работам [2], где функциональное интегрирование с “автоморфным” граничным условием используется для вычисления индексов некоторых дифференциальных операторов, и [3], где получены статистические суммы некоторых спиновых моделей на цепочке в виде функциональных интегралов по грассмановым полям, преобразующимся “автоморфно”. Отличие данной работы от [2, 3] состоит в том, что “автоморфное” граничное условие по мнимому времени возникает только для части узлов. Рассмотренный в [1] прием применяется к системе, описываемой квази-свободными фермионами (т.е. соответствующий гамильтониан диагонализуется преобразованием Боголюбова). Заслуживает внимания частотно-координатное вычисление для XX модели, которое может быть далее применено, например, к XX модели с трансляционно неинвариантными граничными условиями. В целом, функциональный интеграл рассмотренного типа заслуживает внимания, т.к. может оказаться полезным, как вычислительный прием, в других моделях, где также приходится вычислять вакуумные средние экспонент квадратичных операторов типа $\exp(\alpha Q(m))$.

В заключение, автору приятно поблагодарить Н. М. Боголюбова, М. Б. Звонарева, В. С. Капитонова, В. Е. Корепина, П. П. Кулиша, А. Г. Пронько и Н. А. Славнова за интересные обсуждения.

Литература

1. К. Малышев, *Функциональное интегрирование, дзета-регуляризация и корреляторы третьих компонент спинов в XX0-модели Гейзенберга.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **269** (2000), 269–291.
   C. Malyshev, *XX Heisenberg spin chain and an example of path integral with “automorphic” boundary conditions.* Preprint hep-th/0204007.
2. L. Alvarez-Gaumé, *Supersymmetry and index theory.* In: Supersymmetry, NATO ASI Ser., 125, Eds., K. Dietz et al. (Plenum, New York, 1985), pp.1–44.
3. В. Н. Попов, С. А. Федотов, *Метод функционального интегрирования и диаграммная техника для спиновых систем.* — ЖЭТФ, **94** № 3 (1988), 183–194.
   H. Grosse, V. N. Popov, *On the relation between spin systems and fermion systems.* — Phys. Lett. A, **188** (1994), 317–320.
4. E. Lieb, T. Schultz, D. Mattis, *Two soluble models of an antiferromagnetic chain.* — Ann. Phys. (NY), **16** no. 3 (1961), 407–466.

5. Th. Niemeijer, *Some exact calculations on a chain of spins 1/2.* — Physica, **36** no. 3 (1967), 377–419; **39** no. 3 (1968), 313–326.
6. F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, V. Tognetti, *Temperature correlation functions in the XX0 Heisenberg chain.* — ТМФ, **94** № 1 (1993), 19–51.
7. А. Г. Изергин, Н. А. Китанин, Н. А. Славнов, *О корреляционных функциях XY модели.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **224** (1995), 178–191.
8. F. H. L. Eßler, H. Frahm, A. G. Izergin, V. E. Korepin, *Determinant representation for correlation functions of spin-1/2 XXX and XXZ Heisenberg magnets.* — Comm. Math. Phys., **174** no. 1 (1995), 191–214.
9. N. Kitanine, J. M. Maillet, N. Slavnov, V. Terras, *Spin-spin correlation functions of the XXZ-$\frac{1}{2}$ Heisenberg chain in a magnetic field.* Preprint hep-th/0201045.
   iidem, *Correlation functions of the XXZ spin-$\frac{1}{2}$ Heisenberg chain at the free fermion point from their multiple integral representations.* Preprint hep-th / 0203169.
   iidem, *Large distance asymptotic behaviour of the emptiness formation probability of the XXZ spin-$\frac{1}{2}$ Heisenberg chain.* Preprint hep-th / 0210019.
10. B. M. McCoy, E. Barouch, D. B. Abraham, *Statistical mechanics of the XY model. IV.* — Phys. Rev. A, **4** no. 6 (1971), 2331–2342.
11. А. Г. Изергин, В. С. Капитонов, Н. А. Китанин, *Одновременные температурные корреляторы одномерной XY цепочки Гейзенберга.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **245** (1997), 173–206.
12. Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования.* М., Наука (1986).
13. W. L. Baily, Jr., *Introductory lectures on automorphic forms.* Iwanami Shoten Publishers, Princeton University Press (1973).
14. A. S. Schwarz, *Quantum field theory and topology.* Berlin, etc., Springer–Verlag (1993).
15. W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni, *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics.* Berlin, etc., Springer–Verlag (1966).
16. E. Barouch, B. M. McCoy, *Statistical mechanics of the XY model. II.* — Phys. Rev. A, **3** no. 2 (1971), 786–804.
   J. D. Johnson, B. M. McCoy, *Off-diagonal time-dependent spin correlation functions of the XY model.* — Phys. Rev. A, **4** no. 6 (1971), 2314–2324.
17. H. J. Mikeska, W. Pesch, *Boundary effects on static spin correlation functions in the isotropic XY chain at zero temperature.* — Z. Phys. B, **26** (1977), 351–353.
   W. Pesch, H. J. Mikeska, *Dynamical correlation functions in the XY model.* — Z. Phys. B, **30** (1978), 177–182.
   H. J. Mikeska, W. Pesch, *On the dynamic structure factor in one dimensional Heisenberg magnets.* — J. Phys. C: Solid State Phys., **12** (1979), L37–L40.
18. M. Shiroishi, M. Takahashi, Y. Nishiyama, *Emptiness formation probability for the one dimensional isotropic XY model.* Preprint cond-mat/0106062.
19. М. Б. Звонарев, А. Г. Изергин, А. Г. Пронько, *Длинноволновая асимптотика корреляционной функции третьих компонент спинов в XX0 модели с тернарным взаимодействием.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **269** (2000), 207–218.
20. H. Bateman, A. Erdélyi, *Higher transcendental functions.* V. 1–3, McGraw-Hill, New York (1953/1955).

21. M. Abramowitz, I. A. Stegun (Eds.), *Handbook of mathematical functions.* Dover, New York (1970).
22. F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, V. Tognetti, *Correlators in the Heisenberg XX0 chain as Fredholm determinants.* — Phys. Lett. A, **169** (1992), 243–247.
23. M. Takahashi, *Low-temperature specific heat of spin-1/2 anisotropic Heisenberg ring.* — Progr. Theor. Phys., **50** no. 5 (1973), 1519–1536.

Malyshev C. Functional integration and correlators of z-components of local spins in the XY and XX Heisenberg magnets.

The generating function of static correlators of z-components of local spins in the XY and XX Heisenberg magnets is calculated as a combination of functional integrals over anticommuting variables. The peculiarity of the Gaussian integrals in question consists in the fact that the integration variables are subjected to an "automorphic" boundary condition in the imaginary time, i.e., they are multiplied by a certain complex number when the imaginary time is shifted by a period. Zeta-regularization is used for the calculation of the integrals. The answers are obtained for several correlation functions at nonzero temperature, and some reductions are checked. The generating function of the XX model is obtained in the frequency-coordinate representation in the form of a rational expression build up out of the Chebyshev polynomials. Some estimations are provided for the correlators of the XX model in strong, i.e., exceeding a critical value, magnetic field. Asymptotics of the modified Bessel function $I_\nu(z)$ both at moderate and large values of the index are used in the estimations.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 июня 2002 г.