Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 291, 2002 г.

П. П. Кулиш, А. М. Цейтлин

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВАЯ СТРУКТУРА И МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СУПЕР-КДФ

Введение

В данной работе исследуется обобщение уравнения Кортевега-де Фриза на супер-случай (супер-КдФ) ([4, 5]):

$$\begin{aligned} u_t &= -u_{xxx} + 6uu_x - 12\varepsilon\varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_t &= -4\varepsilon_{xxx} + 6u\varepsilon_x + 3u_x\varepsilon, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varepsilon(x,t)$ – функция со значениями в нечетной части алгебры Грассмана $\Lambda(n)_{\overline{1}}$, а $u(x,t)$ – функция со значениями в ее четной части $\Lambda(n)_{\overline{0}}$ (см. Приложение). Это уравнение является гамильтоновым со скобками Пуассона:

$$\begin{aligned} \{u(x), u(y)\} &= -\frac{1}{2}\Big(\delta'''(x-y) - 2u'(x)\delta(x-y) - 4u(x)\delta'(x-y)\Big) \\ \{u(x), \varepsilon(y)\} &= -\frac{1}{2}\Big(3\varepsilon(x)\delta'(x-y) + \varepsilon'(x)\delta(x-y)\Big) \\ \{\varepsilon(x), \varepsilon(y)\} &= -\frac{1}{2}\Big(\delta''(x-y) - u(x)\delta(x-y)\Big), \end{aligned}$$

которые задают функциональную реализацию алгебры Невье–Шварца из теории суперструн. Соответствующий гамильтониан равен:

$$H = \int (u^2(x) - 4\varepsilon(x)\varepsilon'(x))dx.$$

Как и обычное КдФ, это уравнение интегрируемо и допускает представление Лакса $\dot{\mathcal{L}} = [A, \mathcal{L}]$.

Собственно I часть данной работы посвящена вышесказанному, то есть получению пуассоновой структуры и представления Лакса для супер-КдФ.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ, грант 02-01-00085.

II часть работы посвящена исследованию и решению данного уравнения с помощью МОЗР-метода обратной задачи рассеяния ([6–8]). Причем, в основном, исследуется случай одномерной алгебры Грассмана, где уравнение с-КдФ редуцируется к системе

$$\begin{aligned} u_t &= -u_{xxx} + 6uu_x \\ e_t &= -4e_{xxx} + 6u_x e + 3ue_x, \end{aligned} \tag{2}$$

где $u(x,t)$, $e(x,t)$ – обычные функции со значениями в $\mathbf{R}$.

Эта система естественно возникает для грассмановой алгебры любой размерности, если мы распишем исходное уравнение по базису мономов $\Theta^{i_1}\Theta^{i_2}\ldots\Theta^{i_n}$ (см. Приложение). Действительно, в первом порядке по Θ^i у нас и получится система (2).

Кроме того, стоит отметить, что единственным нелинейным уравнением (в разложении по базису уравнения с-КдФ) является обычное уравнение КдФ, все остальные линейны и выражаются друг через друга, так что тут имеет место некоторого сорта "треугольность" данной системы.

Одномерный случай интересен тем, что (2) можно записать так:

$$\begin{cases} \dot{L} = [L, A] \\ e_t = -Ae, \end{cases} \tag{3}$$

где $L = -\partial_x^2 + u(x), A = -\partial_x^3 + u\partial_x + \partial_x u$ – L-A пара для обычного КдФ. Отсюда легко вывести то, что если $e(x,t)$ – решение при заданном $u(x,t)$, то $L^n e$, $n = 1, 2, \ldots$ – тоже решение при заданном u. Так мы получаем бесконечную цепочку решений данного уравнения кроме того случая, когда $e(x,t)$ является собственной функцией L. Так и происходит, если в качестве u взять самое известное решение КдФ:

$$u(x,t) = \frac{c}{2\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)\right)} \tag{4}$$

то, исходя из предположения, что $e(x,t)$ – собственная функция L, легко получить решение

$$e(x,t) = \frac{a}{2\operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)\right)} \quad (a \in \mathbf{R}).$$

Эти же решения можно получить методом обратной задачи (см. Часть II).

Сейчас в современных работах большое внимание уделяется суперуравнениям в связи с прогрессом в теории суперструн. Здесь имеет смысл упомянуть работы ([9–11]). Кроме того,если видеть в перспективе квантование такого сорта систем, то было бы полезно изучить их поведение на классическом уровне.

1. Теоретико-групповая структура уравнения супер-КдФ

Теоретико-групповая схема для обычного уравнения КдФ связана со скалярным оператором Лакса

$$L = -\partial_x^2 + \lambda + u$$

или, с эквивалентным ему матричным оператором Лакса

$$\partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u+\lambda & 0 \end{pmatrix},$$

и алгеброй $s\ell_2$ Роль гамильтоновой структуры для КдФ выполняет функциональная реализация алгебры Вирасоро:

$$\{u(x), u(y)\} = -\frac{1}{2}\Big(\delta'''(x-y) - (4u(x)\partial_x + 2u_x(x))\delta(x-y)\Big). \qquad (6)$$

Связующей нитью этих двух объектов с уравнением КдФ является теоретико-групповая схема и редукция Дринфельда–Соколова.

В этой части предлагаемой работы указанный формализм в применяется к супералгебре osp(1|2) и на его основе получено уравнение с-КдФ.

1.1. Теоретико-групповая схема и редукция Дринфельда–Соколова для супералгебры osp(1|2).

Данные конструкции применялись прежде к обычным алгебрам Ли (см., например, [1, 2, 12]). Мы же распространим их на случай супералгебр, в частности, на случай osp(1/2) (см. Приложение).

Пусть $\mathcal{G}$ – супералгебра Ли и пусть

$$A = \ell(\mathcal{G}) = \mathcal{G} \otimes C[\lambda, \lambda^{-1}] = \{\sum_{i=r}^{s} X_i \lambda^i | X_i \in \mathcal{G}\}$$

ее аффинизация. $A = A_+ + A_-$, где $A_+ = \mathcal{G} \otimes C[\lambda] = \{\sum_{i=0}^{s} X_i \lambda^i | X_i \in \mathcal{G}\}$, $A_- = \mathcal{G} \otimes \lambda^{-1} C[\lambda^{-1}] = \{\sum_{i=r}^{-1} X_i \lambda^i | X_i \in \mathcal{G}\}$. Положим $R =$

$P_+ - P_-$, где P_+ и P_- – проекторы на A_+ и A_- соответственно. Кроме того, введем оператор умножения $\widehat{\eta} : A \to A$ на функцию $\eta(\lambda) \in C[\lambda, \lambda^{-1}]$ таким образом: $(\widehat{\eta}X)(\lambda) = \eta(\lambda)X(\lambda)$. Тогда $R_\eta = R \circ \widehat{\eta}$ положим по определению. Оказывается, что R_η определяет классическую r матрицу для всех η, т.е.

$$[X, Y]_{R_\eta} = \frac{1}{2}[R_\eta X, Y] + \frac{1}{2}[X, R_\eta Y][X, Y]_{R_\eta}$$

также является суперскобкой Ли.

Мы можем отождествить сопряженное пространство $A^* = \ell(\mathcal{G})^*$ с $\ell(\mathcal{G}^*) = \mathcal{G}^* \otimes C[\lambda, \lambda^{-1}]$ посредством спаривания:

$$<\alpha, x> = <\sum_i \alpha_i \lambda^i, \sum_j x^j \lambda^j> = \sum_{i+j=-1} \alpha_i(x_j), \tag{7}$$
$$\alpha_i \in \mathcal{G}^*, \quad x_i \in \mathcal{G}.$$

Теперь можно перейти к рассмотрению пуассоновых структур на A^* (имеются в виду структуры типа Ли–Пуассона). Нас будут интересовать скобки Пуассона типа:

$$\{\phi, \psi\}_{R_\eta}(\alpha) = <\alpha, [\nabla_\alpha \phi, \nabla_\alpha \psi]_{R_\eta}>, \tag{8}$$

где $\phi,\ \psi \in C^\infty(A^*)$, $\alpha \in A^*$. Если мы рассмотрим пространство функций, инвариантных относительно коприсоединенного представления:

$$I(A^*) = \{\phi \in C^\infty(A^*) | \phi(Ad_g^* \alpha) = \phi(\alpha)\ \forall g \in \ell(G)\},$$

где $\ell(G)$ – супергруппа, построенная по супералгебре Ли $\ell(\mathcal{G})$, то имеет место то же утверждение, что и для обычных алгебр Ли, т.е.

$$\{\phi, \psi\}_R(\alpha) = 0 \quad \alpha \in A^*, \quad \phi,\ \psi \in I(A^*).$$

Теперь рассмотрим центральное расширение нашей алгебры. Будем называть буквой $\mathcal{G}_c$ линейное пространство пар $\mathcal{G}_c = \{(X, a) | X : S^1 \to g; a \in \mathbf{C}\}$, наделенное такой скобкой:

$$[(X, a), (Y, b)] = (XY - YX, str \int_{S^1} dx X'(x) Y(x))$$

(подразумевается,что $\mathcal{G}$ – матричная супералгебра Ли). Можно установить изоморфизм между $\mathcal{G}_c^*$ и пространством операторов вида: $\mathcal{L} = e\partial_x + \mu$, где $(\mu, e) \in \mathcal{G}_c^*$. А спаривание задается так: $<(\mu, e), (X, a)>= ea + str\int \mu X$. Следуя предыдущим рассуждениям можно ввести аффинизацию $\mathcal{G}_c$ по параметру λ и получить тем самым алгебру $A^* = \ell(\mathcal{G}_c^*)$.

Из отождествления $\ell(\mathcal{G}_c^*)$ с дифференциальными операторами легко увидеть, что коприсоединенное действие дается "неабелевым калибровоч ным преобразованием" ([1]):

$$\mathcal{L} = e\partial_x + \mu \to g\mathcal{L}g^{-1} = e\partial_x + g\mu g^{-1} - eg'g^{-1},$$

где $g \in \ell(G)$. Рассмотрим теперь пространство $H_{C_1}(\mathcal{G})$, состоящие из элементов вида $(\mu, e)(\lambda) = (J(x) + C_1\lambda, e_0 + e_1\lambda)$. Пусть $\eta(\lambda) = \eta_0 + \eta_1\lambda$. Тогда R_η-скобка Пуассона будет выглядеть так:

$$\{\phi, \psi\}_{R_\eta}(J) = -\eta_0\Big(str\int C_1\Big[\frac{\delta\phi}{\delta J(z)}, \frac{\delta\psi}{\delta J(z)}\Big]$$

$$+e_1 str\int \partial_z\Big(\frac{\delta\phi}{\delta J(z)}\Big)\frac{\delta\psi}{\delta J(z)}\Big)+$$

$$+\eta_1\Big(str\int J(z)\Big[\frac{\delta\phi}{\delta J(z)}, \frac{\delta\psi}{\delta J(z)}\Big] + e_0 str\int \partial_z\Big(\frac{\delta\phi}{\delta J(z)}\Big)\frac{\delta\psi}{\delta J(z)}\Big).$$

Пусть теперь $e_0 = 1$, $e_1 = 0$. Полагая $\eta_1 = 0$ или $\eta_0 = 0$ получаем две скобки Пуассона:

$$\begin{aligned} &\{\phi, \psi\}_1(J) = -str\int C_1\Big[\frac{\delta\phi}{\delta J(z)}, \frac{\delta\psi}{\delta J(z)}\Big], \\ &\{\phi, \psi\}_2(J) = str\int J(z)\Big[\frac{\delta\phi}{\delta J(z)}, \frac{\delta\psi}{\delta J(z)}\Big] + str\int \partial_z\Big(\frac{\delta\phi}{\delta J(z)}\Big)\frac{\delta\psi}{\delta J(z)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Итак, суммируем, что получили:
на пространстве $H_{C_1}(\mathcal{G})$ операторов вида

$$\partial_x + J(x) + \lambda C_1 \tag{10}$$

заданы две гамильтоновы структуры (9). Эти гамильтоновы структуры инвариантны относительно уже упоминавшихся неабелевых калибровочных преобразований операторов (10), для которых $gC_1g^{-1} = C_1$, $g \in G$.

Теперь перейдем к $\mathrm{osp}(1|2)$ случаю. Сузим пространство $H_{C_1}(\mathrm{osp}(1|2))$ до $H_{C_1}^{\mathrm{constr}}(\mathrm{osp}(1|2)) = \{\mathcal{L} = \partial_x + \alpha(x)v_- + w(x)X_- + q(x)h + \beta(x)v_+ + \lambda X_- + X_+$, где $\alpha(x)$ – нечетный элемент, а $q(x)$,

$w(x)$ – четные }. Далее положим $C_1 = X_-$. В матричной форме $\mathcal{L}$-операторы имеют такой вид:

$$\mathcal{L} = \partial_x + \begin{pmatrix} q(x) & \beta(x) & 1 \\ -\alpha(x) & 0 & \beta(x) \\ \lambda + w(x) & \alpha(x) & -q(x) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Максимальная группа калибровочных преобразований, сохраняющих $X_- = C_1$, а, следовательно, и форму оператора $\mathcal{L}$ и скобки (9) есть $G_- = \{\exp(\beta(x)v_- + p(x)X_-),\ \beta(x)$ – нечетно, $p(x)$ – четно$\}$.

Можно рассмотреть фактор $H^{\rm constr}_{X_-}(\mathrm{osp}(1|2))/G_- = H^{\rm red}(\mathrm{osp}(1|2))$. Тем самым будем иметь гамильтонову проекцию $\pi : H^{\rm constr}_{X_-} \to H^{\rm red}_{X_-}$ (гамильтонову в смысле, что π сохраняет скобки (9)).

Функция $\xi_{X_-}(x) = str(X_-(J(x) - X_-))$ задает подмногообразие $H^{\rm constr}_{X_-}(\mathrm{osp}(1|2))$ и, кроме того, генерирует отображение момента ([3]):

$$\mu : H^{\rm constr}_{X_-}(\mathrm{osp}(1|2)) \to \mathrm{osp}(1|2)^{c*}.$$

Гамильтонова редукция такого сорта называется редукцией Дринфельда–Соколова для супералгебры $\mathrm{osp}(1|2)$ ([12]).

Перейдем теперь к изучению редуцированного пространства $H^{\rm red}_{X_-}(\mathrm{osp}(1|2))$. Каждой точке этого многообразия можно поставить в соответствие оператор:

$$\mathcal{L} = \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\varepsilon(x) & 0 & 0 \\ u(x) + \lambda & \varepsilon(x) & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $u(x)$, $\varepsilon(x)$ – заданные четная и нечетная функции соответственно. Действительно, мы выбрали по одному элементу из каждой орбиты группы G_-, действующей на $H^{\rm constr}_{X_-}(\mathrm{osp}(1/2))$.

Теперь рассмотрим линейную задачу $\mathcal{L}\Psi = 0$, где

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix},$$

где $\psi_1(x)$, $\psi_3(x)$ лежат в четной части грассмановой алгебры, $\psi_2(x)$ – в нечетной. Эта задача редуцируется к скалярной:

$$L\psi_1(x) := (-\partial_x^2 + \lambda + u(x) - \varepsilon(x)\partial^{-1}\varepsilon(x)))\psi_1(x, \lambda) = 0. \tag{13}$$

Обратим внимание на следующее. Если мы рассмотрим задачу $\mathcal{L}'\psi = 0$, где $g\mathcal{L}g^{-1} = \mathcal{L}'$, мы получим ту же самую задачу (13), так как ψ_1 инвариантно относительно преобразований вектора Ψ с помощью группы G_-. Действительно,

$$g^{-1}\Psi = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -\beta(x) & 1 & \\ p(x) & \beta(x) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\psi}_1(x) \\ \widetilde{\psi}_2(x) \\ \widetilde{\psi}_3(x) \end{pmatrix} = \widetilde{\Psi} \tag{14}$$
$$\Rightarrow g\mathcal{L}g^{-1}\Psi = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}\widetilde{\Psi} = 0 \Leftrightarrow (13).$$

То есть хотелось бы отождествить $H^{\rm red}_{X_-}(\mathrm{osp}(1/2))$ с операторами $L = -\partial_x^2 + \lambda + u(x) - \varepsilon(x)\partial^{-1}\varepsilon(x)$. Но это невозможно, так как мы можем потерять часть решений исходной задачи $\mathcal{L}\Psi = 0$. Например, в случае одномерной алгебры Грассманна оператор L имеет форму оператора Штурма–Лиувилля и совершенно не учитывает решение типа

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta c \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где c – некоторая константа, а θ – образующая алгебры Грассманна.

Выразим теперь гамильтоновы структуры (9) на многообразии $H^{\rm red}_{X_-}(\mathrm{osp}(1/2))$ в терминах его праметров $u(x)$, $\varepsilon(x)$:

$$\begin{aligned} \{u(x),u(y)\}_2 &= -\frac{1}{2}\Big(\delta'''(x-y) - 2u'(x)\delta(x-y) - 4u(x)\delta'(x-y)\Big) \\ \{u(x),\varepsilon(y)\}_2 &= -\frac{1}{2}\Big(3\varepsilon(x)\delta'(x-y) + \varepsilon'(x)\delta(x-y)\Big) \\ \{\varepsilon(x),\varepsilon(y)\}_2 &= -\frac{1}{2}\Big(\delta''(x-y) - u(x)\delta(x-y)\Big) \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \{u(x),u(y)\}_1 &= -2\delta'(x-y) \\ \{u(x),\varepsilon(y)\}_1 &= 0 \\ \{\varepsilon(x),\varepsilon(y)\}_1 &= -\frac{1}{2}\delta(x-y). \end{aligned} \tag{17}$$

Таким образом, скобки (16) задают функциональную реализацию алгебры Невье–Шварца из теории суперструн. А скобки (17) их линеаризация.

1.2. Бесконечная последовательность гамильтонианов. Уравнение супер-КдФ.

Запишем задачу (14) в таком виде:

$$(-\partial_x^2 + u(x) - \varepsilon(x)\partial^{-1}\varepsilon(x))\psi(x,k) = k^2\psi(x,k), \ (k^2 = -\lambda). \qquad (18)$$

Мы знаем, что $\psi(x,k)$ есть калибровочно инвариантная функция оператора $\mathcal{L}$ (то есть $\psi(x,k) \in I(osp(1/2)^*_c)$). Рассмотрим такой анзатц

$$\psi(x,k) = \exp(-ikx + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)(2ik)^{-n}).$$

Подставляя его в (18), мы получим цепочку уравнений на $f_n(x)$. Если рассматривать задачу (18) на оси, то заменяя ∂^{-1} на $\int\limits_{-\infty}^{x}$, а $f_n(x)$ на $\int\limits_{-\infty}^{x} \sigma_n(y)dy$, мы получим, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_n(y)dy = H_n(\mathcal{L})$ – калибровочно-инвариантный функционал от $\mathcal{L}$. Аналогично, если мы заменим в скобках Пуассона $\int\limits_{S^1}$ на $\int\limits_{R}$ мы получим инволютивное бесконечное семейство гамильтонианов. Вот первые из них:

$$H_1 = \int u(x)dx$$

$$H_2 = \int (u^2(x) - 4\varepsilon(x)\varepsilon'(x))dx$$

$$H_3 = \int ((u')^2 + 2u^3 - 16\varepsilon'(x)\varepsilon''(x) - 24\varepsilon(x)\varepsilon'(x)u(x))dx.$$

Из теории Дринфельда и Соколова следует, что имеет место следующее соотношение:

$$\{H_{i+1}, \phi\}_1 = \{H_i, \phi\}_2.$$

Тем самым,обе скобки задают одинаковую динамику относительно сдвинутой цепочки гамильтонианов. Запишем уравнения движения для $u(x,t)$, $\varepsilon(x,t)$ с гамильтонианом H_2 и скобкой $\{,\}_2$, тогда получим:

$$\begin{aligned} u_t &= -u_{xxx} + 6uu_x - 12\varepsilon\varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_t &= -4\varepsilon_{xxx} + 6u\varepsilon_x + 3u_x\varepsilon. \end{aligned} \qquad (19)$$

Система уравнений (19) называется уравнением с-КдФ. Впервые оно было получено в работах [4, 5]. Кроме того, данная система может быть получена из так называемой $\mathcal{L}$, M пары, то есть, как условие согласования пары уравнений:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\psi &= 0 \\ \partial_t \psi &= M\psi, \end{aligned}$$

где

$$M = \tag{20}$$
$$= \begin{pmatrix} -u_x & -4\varepsilon_x & 4\lambda - 2u \\ 2\varepsilon u - 4\varepsilon\lambda - 4\varepsilon_{xx} & 0 & -4\varepsilon_x \\ 4\epsilon\varepsilon_x + u_{xx} - 2u^2 + 2u\lambda + 4\lambda^2 & -2\varepsilon u + 4\varepsilon\lambda + 4\varepsilon_{xx} & u_x \end{pmatrix}.$$

Такая запись данного уравнения нам и понадобиться в дальнейшем для проведения метода обратной задачи рассеяния (МОЗР).

2. Метод обратной задачи рассеяния для уравнения супер-КдФ

В этой части работы уравнение с-КдФ исследуется методом обратной задачи рассеяния. Сначала рассмотрена прямая задача и накладываются ограничения на элементы матрицы перехода $T(k)$. Далее мы (уже в исследовании обратной задачи) ограничимся одномерным случаем, т.е. будем работать в одномерной алгебре Грассмана. В более высоких размерностях задача пока не исследована.

В конце этого раздела приведены явные солитонные решения данного уравнения.

2.1. Прямая задача.

Итак, система супер-КдФ получалась как условие согласования пары уравнений:

$$\mathcal{L}\psi = 0 \quad \partial_t \psi = M\psi.$$

Оставим второе из уравнений. Пока нас будет интересовать линейная задача $\mathcal{L}\psi = 0$. Попробуем эту задачу преобразовать. Рассмотрим $U = \exp(-ikX_-)$ и сделаем преобразование подобия $U\mathcal{L}U^{-1}$, тогда получим оператор:

$$\mathcal{L}' = \partial_x + \begin{pmatrix} -ik & 0 & 1 \\ -\varepsilon & 0 & 0 \\ u & \varepsilon & ik \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Далее используя матрицу N:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(2ik)^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (2ik)^{-1} \end{pmatrix} \tag{22}$$

можно привести постоянную часть $\mathcal{L}'$ к диагональному виду, то есть:

$$\widetilde{\mathcal{L}}(x) = \begin{pmatrix} -u(2ik)^{-1} & -\varepsilon(2ik)^{-1} & -u(2ik)^{-1} \\ -\varepsilon & 0 & -\varepsilon \\ u(2ik)^{-1} & \varepsilon(2ik)^{-1} & u(2ik)^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ik & & \\ & 0 & \\ & & ik \end{pmatrix} + \partial_x.$$

Эту линейную задачу (с оператором $\widetilde{\mathcal{L}}$) будем записывать так:

$$\partial_x \Psi = ikh\Psi + Q(x,k)\Psi,$$

где

$$Q(x,k) = \begin{pmatrix} u(2ik)^{-1} & \varepsilon(2ik)^{-1} & u(2ik)^{-1} \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ -u(2ik)^{-1} & -\varepsilon(2ik)^{-1} & -u(2ik)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Рассмотрим следующие матричные решения (решения Йоста):

$$\Phi^+(x,k) = \begin{pmatrix} e^{ikx} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ikx} \end{pmatrix} \qquad x \to \infty, \tag{24}$$

$$\Phi^-(x,k) = \begin{pmatrix} e^{ikx} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ikx} \end{pmatrix} \qquad x \to -\infty.$$

Легко видеть, что Φ^+, Φ^- устроены так что $N^{-1}\Phi^{\pm}N$ есть элементы группы $\mathrm{Osp}(1|2)$. Пусть $\Phi^+(x,k)T(k) = \Phi^-(x,k)$, где

$$T(k) = \begin{pmatrix} a(k) & \gamma(k) & b(k) \\ \xi(k) & f(k) & \delta(k) \\ c(k) & \eta(k) & d(k) \end{pmatrix} \tag{25}$$

– матрица перехода. Установим, какие связи существуют между элементами $T(k)$. Рассмотрим оператор P:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Легко видеть, что если $\Psi(x,k)$ было матричным решением задачи (23), то $P\Psi(x,k)P = \widetilde{\Psi}(x,k)$ удовлетворяет уравнению:

$$\partial_x P\Psi P = -ikhP\Psi P + Q^* P\Psi P,$$

где $*$ означает обращение знака k, (если $k \in \mathbf{R}$, то тогда это комплексное сопряжение)

$$\widetilde{\Psi}(x,k) = \Psi(x,-k) = \Psi^*(x,k).$$

Отсюда легко увидеть, что $T^* = PTP$, а значит, в задаче произошла редукция ([7, 8]):

$$T(k) = \begin{pmatrix} a & \gamma & b \\ \xi & f & \delta \\ c & \eta & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \gamma & b \\ \overline{\delta} & f & \delta \\ \overline{b} & \overline{\gamma} & \overline{a} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

то есть $\xi = \overline{\delta}$, $d = \overline{a}$, $\eta = \overline{\gamma}$, $f = \overline{f}$ (черта означает то же, что и $*$). Кроме того, нам известно, что $N^{-1}TN \in \mathrm{Osp}(1|2)$. Тем самым получаем еще соотношения:

$$\begin{aligned} &f = 1 + 2ik\overline{\gamma}\gamma \\ &f(a\overline{a} - b\overline{b}) = 1 \\ &\delta = 2ik(\overline{\gamma}b - \gamma\overline{a}). \end{aligned}$$

В случае одномерной Грассмановой алгебры

$$f = 1, \quad a\overline{a} - b\overline{b} = 1, \quad \delta = 2ik(\overline{\gamma}b - \gamma\overline{a}).$$

Теперь рассмотрим факторизацию матрицы $T(k)$: $T^+ = TT^-$, где

$$\begin{aligned} T^+(k) &= \begin{pmatrix} 1 & -\delta(2ik)^{-1} & b \\ 0 & \overline{a} & \delta \\ 0 & 0 & \overline{a} \end{pmatrix}, \\ T^-(k) &= \begin{pmatrix} \overline{a} & 0 & 0 \\ -(2ik)\overline{\gamma} & \overline{a} & 0 \\ -\overline{b} & -\overline{\gamma} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{28}$$

Можно построить следующую функцию

$$\Psi^+(x,k) = \Phi^+(x,k)T^+(k)e^{-ikxh} = \Phi^-(x,k)T^-(k)e^{-ikxh}. \tag{29}$$

Асимптотики ее диагональных компонент имеют такой вид:

$$\pi_0 T^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{a} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \tag{30}$$

$$x \to \infty$$

$$\pi_0 T^- = \begin{pmatrix} \overline{a} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$x \to -\infty.$$

Нетрудно видеть, что $\Psi^+(x,k)$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$\Psi^+(x,k) = \pi_0 T^+ + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{ikad_h(x-y)}\pi_+(Q(y,k)\Psi^+(y,k))dy \tag{32}$$

$$- \int\limits_{x}^{\infty} e^{ikad_h(x-y)}(\pi_0+\pi_-)(Q(y,k)\Psi^+(y,k))dy,$$

где π_0 – проекция на диагональную часть соответствующей матрицы, а $\pi_\pm$ – проекция на строго верхнетреугольную и строго нижнетреугольную части соответственно. Выпишем интегральное уравнение для первого столбца $\Psi^+(x,k)$:

$$\Psi^+(x,k) = \begin{pmatrix} \Psi_{11} \\ \Psi_{21} \\ \Psi_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -(2ik)^{-1}\int\limits_x^\infty((\Psi_{11}(y,k)+\Psi_{31}(y,k))u(y) - \varepsilon(y)\Psi_{21}(y,k))dy \\ -\int\limits_x^\infty e^{-ik(x-y)}(\varepsilon(y)(\Psi_{11}(y,k)+\Psi_{31}(y,k)))dy \\ (2ik)^{-1}\int\limits_x^\infty e^{-2ik(x-y)}((\Psi_{11}(y,k)+\Psi_{31}(y,k))u(y)- \\ \varepsilon(y)\Psi_{21}(y,k))dy \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что первый столбец матричного решения Йоста $\Phi^{+(1)}(x,k) = \Psi^{+(1)}(x,k)e^{ikx}$ и, соответственно,

$$N^{-1}\Psi^{+(1)}(x,k) = \widetilde{m}_+(x,k),$$

где

$$\widetilde{m}_+(x,k) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \int\limits_x^\infty dy \frac{e^{-2ik(x-y)}-1}{2ik}(\widetilde{m}_+^1(y,k)u(y) - \epsilon(y)\widetilde{m}_+^2(y,k)) \\ -\int\limits_x^\infty dy e^{-ik(x-y)}\epsilon(y)\widetilde{m}_+^1(y,k) \\ \int\limits_x^\infty dy e^{-2ik(x-y)}(u(y)\widetilde{m}_+^1(y,k) - \epsilon(y)\widetilde{m}_+^2(y,k)) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Из этого интегрального уравнения видно, что $\widetilde{m}_+(x,k)$ допускает аналитическое продолжение по k в верхнюю полуплоскость. Аналогично, рассматривая факторизацию $R^- = TR^+$ и соответствующие интегральные уравнения, можно доказать, что $\Phi^{-(1)}(x,k)e^{-ikx}$ аналитичен в нижней полуплоскости. Из T^+, T^- - факторизации получаем

$$\Phi^{+(1)}(x,k)e^{-ikx} = \overline{a}(k)\Phi^{-(1)}(x,k)e^{-ikx} - 2ik\overline{\gamma}(k)\Phi^{-(2)}(x,k)e^{-ikx}$$
$$- \overline{b}\Phi^{-(3)}(x,k)e^{-ikx}. \quad (34)$$

Используя предыдущие рассуждения можно переписать это в такой форме:

$$m_+(x,k) - m_-(x,k) = -2ik\rho(k)N^{-1}(k)\Phi^{-(2)}(x,k)e^{-ikx}$$
$$- r(k)e^{-2ikx}P(k)m_-(x,-k), \quad (35)$$

где

$$m_+(x,k) = \frac{\widetilde{m}_+(x,k)}{\overline{a}(k)}, \quad m_-(x,k) = \widetilde{m}_-(x,k), \quad \rho(k) = \frac{\overline{\gamma}(k)}{\overline{a}(k)},$$
$$r(k) = \frac{\overline{b}(k)}{\overline{a}(k)}, \quad P(k) = N^{-1}(k)PN(-k)$$

или иначе:

$$m_+(x,k) - m_-(x,k) = V(k,x)m_-(x,-k) + f(x,k), \quad (36)$$

где

$$V(k,x) = -r(k)e^{-2ikx}P(k),$$
$$f(x,k) = -2ik\rho(k)N^{-1}(k)\Phi^{-2}(x,k)e^{-ikx}.$$

Кроме того, из уравнения (33) имеем:

$$u(x) = 2ik\partial_x \widetilde{m}_+^1(x,k), \quad \varepsilon(x) = ik\widetilde{m}_+^2(x,k), \quad |x| \to \infty. \tag{37}$$

Стало быть, мы можем восстановить $u(x)$, $\varepsilon(x)$ по $r(k)$, $\rho(k)$, решая (36). Но, к сожалению, в общем случае ничего нельзя сказать о поведении $\Phi^{-(2)}(x,k)$, поэтому начиная с данного момента, переключимся на изучение задачи в одномерной алгебре Грассмана, для которой

$$\rho(k)\Phi^{-(2)}(x,k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho(k) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это произошло в силу того, что первый и третий элементы $\Phi^{-(2)}$ нечетные.

Кроме того, в одномерном случае все четные элементы соответствуют обычному КдФ, следовательно, для $a(k)$, $b(k)$ выполняются следующие свойства: $k \in \mathbf{R}$ и еще существует дискретное число точек на мнимой оси, где тоже может лежать k. Это происходит из-за того, что наша $\mathcal{L}$ задача в одномерном случае редуцируется к задаче Штурма–Лиувилля, для которой в случае быстро убывающего потенциала имеется непрерывный спектр: положительная полуось и дискретный спектр: дискретный набор точек на мнимой оси (см. подробнее о КдФ [7, 8]). Известно, что $a(k)$ имеет асимптотику:

$$a(k) = 1 + O\Big(\frac{1}{k}\Big) \text{ при } \ |k| \to \infty.$$

$a(k)$ аналитично в нижней полуплоскости, соответственно $\overline{a}(k) = a(-k)$ – в верхней. Дискретному спектру соответствуют нули $a(k)$ (соответственно $\overline{a}(k)$) то есть для любой точки дискретного спектра $i\kappa_j$ существует простой нуль в этой точке у $a(k)$ ($\overline{a}(k)$) и, соответственно, если $i\kappa_j$ – в верхней полуплоскости, эта точка соответствует простому полюсу $m_+(x,k)$.

Тогда, зная так называемые “данные рассеяния”:

$$\{i\kappa_\ell\}, \ \{b_\ell\}, \ \{\gamma_\ell\}, \ \rho(k), \ r(k)$$

мы можем восстановить $u(x)$, $\varepsilon(x)$, решая задачу Римана (36).

2.2. Обратная задача.

Итак, мы имеем:

1. Набор данных рассеяния:

$$\{i\kappa_\ell\},\ \{b_\ell\},\ \{\gamma_\ell\},\ \rho(k),\ r(k).$$

2. Задача Римана:

$$m_+(x,k)-m_-(x,k)=V(x,k)m_-(x,k)+f(x,k), \tag{38}$$

где $m_+(x,k)$ – мероморфна в верхней полуплоскости с простыми полюсами в точках $\{i\kappa_\ell\}$, m_- – аналитична в нижней полуплоскости с асимптотиками: $m_\pm(x,k)\to(1,0,0)^t$, где $|k|\to\infty$

$$V(x,k)=-r(k)e^{-2ikx}N^{-1}(k)PN(-k), \tag{39}$$

$$f(x,k)=\begin{pmatrix}0\\ -2ik\rho(k)e^{-2ikx}\\ 0\end{pmatrix}.$$

Само соотношение (38) написано при $k\in\mathbf{R}$.

Мы хотим найти $m_+(x,k)$, а затем, руководствуясь (37), получить $u(x)$, $\varepsilon(x)$ по формулам:

$$u(x)=2ik\partial_x m_+^1(x,k),\quad \varepsilon(x)=ikm_+^2(x,k),\quad k\to\infty.$$

Формула для решения (38) имеет вид [9]:

$$m(x,k)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j(x)}{k-i\kappa_j}$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dz\frac{V(z,x)m_-(-z,x)+f(z,x)}{z-k}. \tag{40}$$

Под $m(x,k)$ подразумевается функция, которая в нижней полуплоскости есть $m_-(x,k)$, в верхней полуплоскости равна $m_+(x,k)$, а на вещественной оси испытывает скачок по формуле (37). Кроме того,

$$m_\ell(x)=\frac{\Phi^{+1}(x,i\kappa_\ell)}{\overline{a}'(i\kappa_\ell)}e^{\kappa_\ell x}$$

(см часть I). Воспользуемся теперь соотношением (34) и посмотрим как оно выглядит в точке $i\kappa_n$:

$$\Phi^{+(1)}(x, i\kappa)e^{\kappa_n x} = \\ = 2\kappa_n \overline{\gamma}_n \Phi^{-(2)}(x, i\kappa_n)e^{\kappa_n x} - \overline{b}_n P(i\kappa_n)\Phi^{-(1)}(x, -i\kappa_n)e^{2\kappa_n x} \tag{41}$$

Отсюда получаем:

$$m_n(x) = \frac{2\kappa_n \overline{\gamma}_n e^{\kappa_n x}}{\overline{a}'(i\kappa_n)}\Phi^{-2}(x, i\kappa_n) - \frac{\overline{b}_n e^{2\kappa_n x}}{\overline{a}'(i\kappa_n)}P(i\kappa_n)\cdot \tag{42}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i\sum_{j=1}^{N} \frac{m_j(x)}{\kappa_n + \kappa_j} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{V(z,x)m_-(-z,x) + f(z,x)}{z - i\kappa_n}\right).$$

Таким образом, для первых двух компонент $m(x, k)$ (обозначим их $R(x, k)$ и $\Theta(x, k)$) имеем следующие уравнения:

$$R_n(x) = -\frac{\overline{b}_n e^{2\kappa_n x}}{\overline{a}'(i\kappa_n)}\Big(1 + i\sum_{j=1}^{N} \frac{R_j(x)}{\kappa_n + \kappa_j} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{r(z)R(-z,x)e^{-2izx}}{z - i\kappa_n}\Big)$$

$$R(x) = 1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{R_j(x)}{k - i\kappa_j} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{r(z)R(-z,x)e^{-2izx}}{z - (k + i0)}$$

$$\Theta_n(x) = \frac{2\kappa_n \overline{\gamma}_n e^{\kappa_n x}}{\overline{a}'(i\kappa_n)} - -\frac{\overline{b}_n e^{2\kappa_n x}}{\overline{a}'(i\kappa_n)}\Big(i\sum_{j=1}^{N} \frac{\Theta_j(x)}{\kappa_n + \kappa_j} \tag{43}$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{r(z)\Theta(-z,x)e^{-2izx} + 2iz\rho(z)e^{-izx}}{z - i\kappa_n}\Big)$$

$$\Theta(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\Theta_j(x)}{k - i\kappa_j} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{r(z)\Theta(-z,x)e^{-2izx} + 2iz\rho(z)e^{-izx}}{z - (k + i0)}.$$

Отсюда получаем формулы для потенциалов:

$$u(x) = \partial_x\Big(2i\sum_{j=1}^{N} R_j(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz (r(z)R(-z,x)e^{-2izx})\Big) \tag{44}$$

$$\varepsilon(x) = i\sum_{j=1}^{N} \Theta_j(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz\Big(r(z)\Theta(-z,x)e^{-2izx} + 2iz\rho(z)e^{-izx}\Big).$$

Теперь вспомним об уравнении $\partial_t\Psi = M\Psi$ в начале части I. Это уравнение задает динамику. Используя уравнение $\Phi^- = \Phi^+ T$, можно включить зависимость от t в T, так чтобы Φ^- и Φ^+ сохранили свои асимптотики по x, то есть

$$T(k,t) = e^{4ik^3th} T(k) e^{-4ik^3th}.$$

Тогда уравнения, описывающие динамику коэффициентов перехода, имеют вид:

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{a}}(k,t) &= 0\\
\dot{\overline{\gamma}}(k,t) &= -4ik^3\overline{\gamma}(k,t)\\
\dot{\overline{b}}(k,t) &= -8ik^3\overline{b}(k,t).
\end{aligned}$$

Уравнения, определяющие потенциалы $u(x,t)$, $\varepsilon(x,t)$, те же, что и (44), только нужно учитывать введенную выше зависимость от времени коэффициентов перехода. Уравнения (43) явно решаются только в случае так называемых “безотражательных потенциалов”, когда $b(k) = 0$ и $\rho(k) = 0$. Тогда интегральные уравнения сводятся к алгебраическим

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= -\frac{\overline{b}_n e^{2\kappa_n x}}{\overline{a}'(i\kappa_n)}\Big(1 + i\sum_{j=1}^{N}\frac{R_j(x)}{\kappa_n+\kappa_j}\Big)\\
\Theta_n(x) &= \frac{2\kappa_n\overline{\gamma}_n e^{\kappa_n x}}{\overline{a}'(i\kappa_n)} - i\frac{\overline{b}_n e^{2\kappa_n x}}{\overline{a}'(i\kappa_n)}\sum_{j=1}^{N}\frac{\Theta_j(x)}{\kappa_n+\kappa_j}\\
u(x) &= 2i\partial_x\sum_{j=1}^{N}R_j(x)\\
\varepsilon(x) &= i\sum_{j=1}^{N}\Theta_j(x).
\end{aligned}$$

В качестве примера можно сосчитать 1-солитонные решения (только одна точка дискретного спектра $\lambda_\kappa = +\kappa^2$). Получаем:

$$u(x,t) = -\frac{c}{2ch^2\Big(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)\Big)}, \quad \varepsilon(x,t) = -\frac{\alpha}{ch\Big(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)\Big)}, \qquad (45)$$

где $c = 4\kappa^2$, $\overline{b}_1(0) = -1$ и α – произвольный постоянный нечетный элемент алгебры Грассманна.

Фактически используя МОЗР, мы интегрируем с-КдФ путем неявной замены переменных $u(x)$, $\varepsilon(x) \to s(0)$ (данные рассеяния). В новых переменных уравнения движения $\dot{s} = F(s)$ есть тривиально интегрируемые дифференциальные уравнения. Обращение замены

$$s(t) \to \varepsilon(x,t),\ u(x,t)$$

через интегральные уравнения (43), (44) с учетом эволюции данных рассеяния дает решение с-КдФ. Таким образом, схема решения задачи Коши такова([6–8]):

$$\varepsilon(x,0),\ u(x,0) \xrightarrow{\mathrm{I}} s(0) \xrightarrow{\mathrm{II}} s(t) \xrightarrow{\mathrm{III}} u(x,t),\ \varepsilon(x,t).$$

То есть на первом этапе мы вместо $u(x,0)$, $\varepsilon(x,0)$ получаем две функции $\rho(k)$, $r(k)$ на полуоси (в силу того, что $\overline{r}(k) = v(-k)$, $\overline{\rho}(k) = \rho(-k)$) и наборы $\{i\kappa_j\}$, $\{\overline{\gamma}_j\}$, $\{\overline{b}_j\}$. Далее включаем динамику

$$\dot{\overline{\gamma}}(t) = -4ik^3\gamma(t)$$
$$\dot{\overline{b}}(t) = -8ik^3\overline{b}(t)$$
$$\dot{\overline{a}}(t) = 0.$$

И на третьем шаге восстанавливаем потенциал, используя уравнения (43), (44).

3. Приложение

3.1. Алгебра Грассмана.

Определение ([13, 14]). *Конечной алгеброй Грассмана $\Lambda(n)$ порядка n называется алгебра с n генераторами: $1, \Theta_1, \dots, \Theta_n$, удовлетворяющая соотношениям $\Theta_i\Theta_j + \Theta_j\Theta_i = 0$. Элемент этой алгебры называется четным (нечетным), если в разложении этого элемента*

$$\eta = \sum_{m\geq 0} \sum_{i_1<\dots<i_m} \eta_{i_1\dots i_m}\Theta^{i_1}\dots\Theta^{i_m}$$

каждое число m четно (нечетно). Как векторное пространство $\Lambda(n) = \Lambda(n)_{\overline{0}} \oplus \Lambda(n)_{\overline{1}}$, где $\Lambda(n)_{\overline{0}}$ – линейное пространство четных элементов, а $\Lambda(n)_{\overline{1}}$ – линейное пространство нечетных элементов.

3.2. Супералгебра Ли osp (1|2).

Определение ([13, 14]). *Супералгеброй Ли, или по другой терминологии Z_2-градуированной алгеброй Ли, называется вещественное или комплексное Z_2-градуированное линейное пространство с фиксированной четностью $\alpha : \mathcal{G} \to Z_2$, такой, что $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\overline{0}} \oplus \mathcal{G}_{\overline{1}}$, где $\alpha(\mathcal{G}_{\overline{0}}) = 0$, $\alpha(\mathcal{G}_{\overline{1}}) = 1$, в котором определена билинейная операция $[x, y]$, причем для однородных элементов(имеются в виду элементы, лежащие или в $\mathcal{G}_{\overline{0}}$ или в $\mathcal{G}_{\overline{1}}$) справедливы тождества:*

$$\alpha([x, y]) = \alpha(x) + \alpha(y) \tag{46}$$

$$[x, y] = (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)+1}[y, x], \tag{47}$$

$$\begin{aligned}[x, [y, z]](-1)^{\alpha(x)\alpha(z)} + [z, [x, y]](-1)^{\alpha(z)\alpha(y)}&\\ + [y, [z, x]](-1)^{\alpha(y)\alpha(x)} = 0.&\end{aligned} \tag{48}$$

В качестве примера рассмотрим супералгебру osp (1|2):

$$\begin{array}{lll} [h, X^{\pm}] = \pm 2X^{\pm} & [h, v^{\pm}] = \pm v^{\pm} & [X^+, X^-] = h \\ [v^+, v^-] = -h & [X^{\pm}, v^{\mp}] = v^{\pm} & [v^{\pm}, v^{\pm}] = \pm 2X^{\pm} \end{array}$$

$v^{\pm}$ – нечетные; h, $X^{\pm}$ – четные.

Матричная реализация:

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad v_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3. Супергруппы. Супергруппа osp (1|2).

Чтобы построить супергруппу по супералгебре, надо рассматривать экспоненциальное отображение, как и в обычном случае. Только каждому элементу (генератору) супералгебры нужно сопоставить элемент Грассмановой алгебры одинаковой с ним четности (чтобы общее выражение – показатель экспоненты, был четным).

Пример. Группа Osp(1|2) ([13, 14]).

Эту группу образуют матрицы (в определяющем представлении) такого вида:

$$u = \begin{pmatrix} a & \alpha & b \\ \beta & f & \delta \\ c & \gamma & d \end{pmatrix},$$

причем $uJu^{st} = J$, где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а

$$u^{st} = \begin{pmatrix} a & -\beta & c \\ \alpha & f & \gamma \\ b & -\delta & d \end{pmatrix},$$

– супертранспонированная матрица. Суперслед матрицы u определяется $f - a - d = \mathrm{str}u$. Имеются свойства:

$$\begin{aligned} &\mathrm{str}\,(MN) = (-1)^{\alpha(M)\alpha(N)}\mathrm{str}\,(NM) \\ &\mathrm{str}\,(M+N) = \mathrm{str}\,M + \mathrm{str}\,N \\ &\mathrm{str}\,(M^{st}) = \mathrm{str}\,M. \end{aligned}$$

3.4. Используемые в тексте обозначения.

Для удобства выбраны следующие обозначения: если не оговорено противное, то греческие буквы обозначают нечетные элементы алгебры Грассмана, а латинские – четные.

Литература

1. А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский, *Теоретико-групповые методы в теории конечномерных интегрируемых систем.* — Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат.: Фундам. направления, **16** (1987).
2. L. Feher, J. Harnad, I. Marshall, *Generalized Drinfeld-Sokolov reductions and KdV type hierarchies.* Preprint: hep-th/9210037.
3. J. E. Marsden, T. S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry.* Springer-Verlag (1999).
4. П. П. Кулиш, *Аналог уравнения Кортевега-де Фриза для суперконформной алгебры.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **155** (1986), 142–149, J. Sov. Math., **46**, No. 1, 111 (1989).
5. B. Kupershmidt, *A super Korteweg-de Vries equation:An integrable system.* — Phys. Lett. A **102**, 213–215 (1984).
6. M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons,Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering.* CUP (1991).

7. L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons.* Springer-Verlag (1987).
8. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи.* Наука, М. (1980).
9. P. Mathieu, *Open problems for the super-KdV equations.* Preprint: math-ph/ 0005007.
10. P. Mathieu, *Representations of the so(N) and u(N) superconformal algebras via Miura transformations.* — Phys. Lett. **B218**, 185–190 (1989).
11. T. Inami, H. Kanno, *Lie Superalgebraic Approach to Super Toda Lattice and Generaliized Super KdV Equations.* — Commun. Math. Phys. **136**, 519–542 (1991).
12. В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов, *Уравнения типа Кортевега-де Фриза и простые алгебры Ли.* — ДАН СССР **258**, No. 1 (1981), 11–16.
13. Ф. А. Березин, *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными.* Изд. МГУ, М. (1983).
14. L. Frappat, P. Sorba, A. Sciarrino, *Dictionary on Lie Superalgebras.* Preprint, hep-th/9607161.

Kulish P. P., Zeitlin A. M. Group-theoretical structure and inverse scattering method for super-KdV equation.

Using group-theoretical approach to the inverse scattering method the super-Korteveg-de Vries equation is obtained by application of the Drinfeld–Sokolov reduction to $osp(1|2)$ loop super-algebra. The direct and inverse scattering problems are discussed for the corresponding Lax pair.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
С.-Петербургский
государственный
университет

Поступило 15 сентября 2002 г.