Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 291, 2002 г.

А. Верещагин, В. Верещагин, К. Семенов-Тян-Шанский

ОБ УРАВНЕНИЯХ БУТСТРАПА В ЭФФЕКТИВНЫХ ТЕОРИЯХ

1. Введение

В настоящее время известны два разных подхода к построению релятивистской квантовой теории, способной описывать процессы рассеяния и рождения частиц. Первый – канонический – состоит в фиксации набора (фундаментальных) полей и лагранжиана в соответствии с определенными требованиями (локальность, эрмитовость, симметрия, перенормируемость и т.п.) и последующем выполнении процедуры канонического квантования, позволяющей построить фоковское пространство асимптотических состояний и найти функции Грина и S-матрицу.

Второй подход, предложенный в работах [1] (условно назовем его S-матричным), менее известен и практически не обсуждается в литературе (см., однако, [2], [3] и главы 2–5 первого тома недавно вышедшей монографии автора подхода С. Вейнберга [4]). В этом подходе структура фоковского пространства асимптотических состояний постулируется изначально, а операторы поля строятся в соответствии с групповыми свойствами соответствующих одночастичных состояний. Гамильтониан системы, зависящий только от построенных полей, также постулируется (как оператор в картине взаимодействия), а элементы S-матрицы вычисляются по формуле Дайсона (f, i – конечное и начальное состояния, соответственно):

$$S_{fi} = \langle f|T_W \exp\left\{-i\int H_{\rm int}\,dx\right\}|\,i\rangle. \tag{1}$$

Символ T_W в этой формуле означает Виково (явно ковариантное) T-произведение; при этом нековариантные члены в гамильтониа-

Работа поддержана грантами ИНТАС (2000 г., проект 587), РФФИ (01-02-17152), Министерства образования России (E00-3.3-208) программой "Университеты России" (УР.02.01.001) и Meltzers Høyskolefond, Studentprosjektstipend 2002.

не и в пропагаторах должны быть отброшены (см. [4]). В случае обсуждаемых ниже эффективных теорий это не вносит никаких неопределенностей.

Каждый из подходов имеет свои достоинства и недостатки; сравнительный анализ, однако, не является целью нашей работы. Мы используем S-матричный подход просто потому, что каноническое квантование теорий с лагранжианами, содержащими высокие (вторая и выше) степени (первых) производных поля по времени – задача, решение которой в настоящее время неизвестно. Эффективные же теории, являющиеся предметом наших исследований, по самому принципу своего построения содержат *все* степени первых (а равно и высших) производных поля.

Мы пользуемся (чуть уточненным) определением эффективной теории, данным в [5]: *теория называется эффективной, если гамильтониан взаимодействия (в картине взаимодействия) содержит все члены, допустимые в рамках рассматриваемой алгебраической симметрии.* В операторном смысле эта конструкция не является хорошо определенной. Нас, однако, будут интересовать лишь элементы S-матрицы, вычисляемые (только на поверхности масс!) по теории возмущений, основанной на формуле (1). В работах [6], [7] показано, что для этих объектов можно сформулировать простые условия корректности выражений, найденных в данном порядке по числу петель; в случае нулевого порядка (древесные графы) перенормированной теории возмущений эти условия дают разумные ограничения на величины физических параметров теории.

Эффективные теории – по самому принципу своего построения – обладают свойством мультипликативной ренормируемости (при условии отсутствия аномалий). В традиционных курсах теории перенормировок (см., например, [8]) они, однако, не рассматриваются. Причина в том, что для фиксации таких теорий требуется задание бесконечного набора ренормировочных предписаний, что нереально, если нет руководящего принципа, ограничивающего свободу этого шага. Предварительные результаты наших исследований (см. [6], [7]) показывают, что роль такого принципа могут играть ограничения типа аналитичности, вполне естественные с точки зрения корректности схемы теории возмущений. В частности, условия бутстрапа (широко обсуждавшиеся в связи с дуальными моделями – см. [9]) можно получить из сформулированных соответствующим образом требований мероморфности и полиномиальной ограниченности амплитуд древесного уровня, построенных в рамках перенормированной теории возмущений.

В данной работе мы на простых примерах иллюстрируем технику получения уравнений бутстрапа из условий мероморфности и полиномиальной ограниченности функции двух комплексных переменных в различных областях. Однако, прежде чем приступать к анализу примеров, следует хотя бы в общих чертах пояснить, почему именно эти требования, автоматически выполняющиеся в обычных теориях, оказываются конструктивными в схеме эффективной теории поля. Следующие три раздела как раз и служат этой цели.

2. Предварительные замечания

Напомним определения некоторых понятий и терминов, встречающихся в тексте. Мы уточняем определения, приведенные в [4], и вводим понятие минимальной параметризации эффективной теории. Смысл введения этих понятий состоит в том, что они удобны при работе с матричными элементами (на поверхности масс!) в терминах комплексного анализа.

Подчеркнем, что всюду в дальнейшем предполагается, что массы частиц со спином $J > 1/2$ отличны от нуля. Это предположение носит чисто технический характер, но в настоящее время мы не можем от него отказаться. При описании сильных взаимодействий адронов оно не является ограничением.

Несущественными[1] параметрами порядка L называются такие комбинации констант связи, которые не появляются в выражениях для элементов (перенормированной) S-матрицы в L-петлевом приближении. Эти комбинации появляются в выражениях для функций Грина, но соответствующие вклады обращаются в нуль после перенормировки, выхода на массовую поверхность и умножения на волновые функции. Примером несущественного параметра может служить константа, фиксирующая калибровку в перенормируемых векторных моделях. Еще один пример – константа перенормировки волновой функции [4].

Существенными[2] параметрами L-го порядка называются все

[1] В английской литературе – redundant
[2] В английской литературе – essential

независимые комбинации констант связи, фигурирующие в выражениях для перенормированных матричных элементов L-го порядка петлевого разложения.

Рассмотрим теперь *элементарную* (точечную) вершину с n хвостами, несущими импульсы $p_1, p_2, \ldots, p_n$. В общем случае она представима в виде

$$V(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{a=1}^{M+N} T^{(a)} F_a, \tag{2}$$

где $\{T^{(a)}\}$ – полный набор независимых тензорных структур (M из которых – минимальные, а N – неминимальные; см. определения ниже), а F_a – функции инвариантных кинематических переменных (полное число переменных равно 3 при $n = 3$ и $4n - 10$ при $n > 3$; мы работаем в пространстве размерности $D = 3 + 1$). Эти переменные удобно выбрать следующим образом:

$$[\pi, \nu] \equiv [\pi_1, \ldots, \pi_n; \nu_1, \ldots, \nu_{3n-10}], \tag{3}$$

где

$$\pi_i \equiv p_i^2 - m_i^2; \tag{4}$$

конкретный выбор остальных $3n - 10$ переменных ν_i (независимые линейные комбинации скалярных произведений импульсов) сейчас несуществен.

Вершина (2) – один из элементов системы правил Фейнмана рассматриваемой эффективной теории; она описывает совокупный вклад тех членов гамильтониана, которые построены из n полевых операторов. Нетрудно понять, что функции F_a имеют вид (формальных) рядов по переменным (3); коэффициентами служат комбинации констант связи. Обсуждение условий сходимости этих рядов было бы преждевременным. Мы стремимся к получению хорошо определенных выражений для элементов S-матрицы данного порядка; эти выражения получаются путем учета вкладов всех n-хвостых графиков, а не одной лишь вершины (2). Поэтому в дальнейшем мы будем свободно оперировать с каждым отдельным типом графиков, не заботясь о корректности операций. Корректность же результирующих формул будет предметом нашей заботы.

Вклад вершины (2) в матричный элемент, описывающий процесс с n внешними частицами, получается путем перехода на поверхность масс $\pi_i = 0$, $(i = 1, \dots, n)$ и умножения на соответствующие волновые функции. Таким образом, те комбинации констант связи, которые образовывали коэффициенты при ненулевых степенях π_i в рядах для F_a, не появляются в выражении для вклада в элемент S-матрицы, соответствующий рассматриваемой точечной вершине. Это утверждение верно также и в отношении тех комбинаций констант связи, которые фигурируют в выражениях для F_a, стоящих при тензорных структурах, дающих ноль при выходе на поверхность масс и умножении на волновые функции (эти структуры мы называем неминимальными). Нетрудно понять, что сказанное верно также и в отношении вершин с произвольным числом «ушей» (самозамкнутых линий) и «головастиков» (линия, начинающаяся в вершине и кончающаяся одним «ухом» или несколькими). Такие вершины мы относим к типу точечных.

Итак, после выхода на поверхность масс всех частиц и умножения на соответствующие волновые функции, вершина (2) принимает вид

$$V(p_1, \dots, p_n) \overset{\text{on shell}}{=} \sum_{a=1}^{M} T^{(a)} F_a(\pi = 0, \nu), \tag{5}$$

где в наборе $T^{(a)}$ $(a = 1, \dots, M)$ присутствуют все минимальные тензорные структуры и нет ни одной из неминимальных.

Назовем линию p_k вершины $V(p_1, \dots, p_n)$ *минимальной*, если выход на массовую поверхность k-ой частицы $\pi_k = 0$ и умножение на волновую функцию $u(p_k)$ не меняет явного вида выражения (2). Назовем вершину $V(p_1, \dots, p_n)$ *минимальной*, если все ее линии минимальны. Минимальная вершина всегда может быть представлена в виде (5). Наконец, назовем пропагатор частицы с массой m и спином J *минимальным*, если его числитель есть соответствующая спиновая сумма, записанная в Лоренц-инвариантной форме (при условии $q^2 = m^2$!) и понимаемая как функция четырех независимых компонент импульса[3].

Любой S-матричный граф эффективной теории всегда можно переписать в терминах минимальных элементов: вершин (различных порядков) и пропагаторов (см. [10]; полное доказательство будет опубликовано отдельно). Это означает, что полный

[3] Именно в этом пункте наше предположение об отсутствии безмассовых частиц спина $J > 1/2$ оказывается существенным.

набор существенных параметров теории исчерпывается массами и комбинациями констант связи, задающими минимальную параметризацию вершин различных порядков[4]. Таким образом, для получения конечной S-матрицы достаточно задать только те перенормировочные предписания, которые фиксируют конечные части минимальных параметров. Результаты работ [6], [7] показывают, однако, что и этот набор предписаний избыточен: необходимость соблюдения ограничений бутстрапа (см. ниже) означает, что лишь часть минимальных параметров может рассматриваться как набор независимых констант теории, подлежащих фиксации с помощью перенормировочных предписаний. Это означает, что возможны два (эквивалентных) способа задания последних. Первый состоит в нахождении явного решения условий бутстрапа[5] и, тем самым, в явном выделении полного набора *независимых* параметров, для коих и следует задать перенормировочные предписания. Второй способ состоит в произвольном задании набора предписаний для *всех* минимальных параметров и привлечении уравнений бутстрапа в качестве обязательных ограничений на допустимую структуру этого набора. Мы используем второй способ (просто потому, что не можем указать явного решения условий бутстрапа), и потому прокомментируем его подробней.

Перенормировочные предписания, независимо от явной формы их задания, должны удовлетворяться в любом фиксированном порядке. В частности, они должны быть верны и в низшем (древесном) порядке. Это означает, что любое соотношение между минимальными параметрами нулевого уровня (а в рамках перенормированной теории возмущений это есть связь между физическими значениями параметров!) следует понимать как соотношение между допустимыми предписаниями. Иными словами, если между минимальными параметрами нулевого уровня *должны быть* какие-либо зависимости (а это именно та ситуация, которая имеет место в математически осмысленных случаях), то ренормировочные предписания нельзя задавать произвольно. Это утверждение было бы банальным, если бы обсуждались

[4]Разумеется, явные выражения минимальных параметров в терминах констант связи зависят от порядка.

[5]Таковое, несомненно, существует, ибо известны частные случаи – обычные перенормируемые теории.

связи, обусловленные тем или иным симметрийным (групповым) ограничением. В случае же эффективных теорий мы встречаемся с ситуацией, когда связи между параметрами (уравнения бутстрапа) возникают из требований *локализуемости*, рассматриваемых в следующем разделе.

3. Локализуемые эффективные теории

В случае обычных перенормируемых теорий представление (1) для S-матрицы, понимаемое как разложение по числу петель, почленно вполне определено (регуляризация подразумевается). Вопрос о сходимости разложения в целом остается открытым, но это не мешает работе в любом конечном порядке. В случае же эффективных теорий ситуация не такова. Присутствие в гамильтониане членов с производными сколь угодно высокого порядка приводит к возникновению бесконечных рядов в формулах для матричных элементов уже на древесном уровне. Иными словами, в данном случае гамильтониан не является локальным оператором, и работа с ним требует известной осторожности. Поэтому имеет смысл сразу же ограничить класс эффективных теорий, с которыми мы будем работать в дальнейшем.

Мы будем рассматривать только гамильтонианы, принадлежащие к типу *локализуемых*. Интуитивное представление о локализуемости дает пример из электростатики. Гамильтониан взаимодействия точечного заряда с объемным нелокален; он, однако, может быть локализован (переписан в виде бесконечного ряда локальных членов) с помощью мультипольного разложения. Список требований, предъявляемых к локализуемым гамильтонианам, можно кратко сформулировать в неявной форме. Явное перечисление заняло бы слишком много места, не способствуя лучшему пониманию основной идеи, которая подсказана известной из нерелятивистской квантовой механики конструкцией метода квазичастиц, предложенного в цикле работ [11].

Итак, *мы назовем гамильтониан локализуемым, если формально определяемые им амплитуды древесного уровня могут быть воспроизведены в рамках хорошо определенного древесного приближения расширенной эффективной теории, содержащей дополнительные поля, соответствующие частицам с массами M_i, нестабильным относительно распада на состояния исходной теории.*

Важное замечание: в условии нестабильности

$$M_i \geq m + \mu \tag{6}$$

малым буквам соответствуют *физические* массы частиц исходной теории, т.е. массы асимптотических состояний – именно они фигурируют в гамильтониане (см. [4]). Величины же M_i имеют смысл массовых параметров в расширенном гамильтониане; они определяют полюсы затравочных пропагаторов, и их трактовка зависит от применяемой схемы перенормировки (см. [12], [13]). Подробное обсуждение этого вопроса выходит за рамки данной статьи. Мы используем термин «масса» в обоих случаях, поскольку это не приводит к недоразумению.

Слова «хорошо определенные» следует понимать в том смысле, что формальные ряды древесного уровня, возникающие в расширенной теории, должны быть суммируемы во всей области определения. Ряды же древесного уровня для амплитуд исходной теории также должны сходиться хотя бы в каких-то малых областях D – иначе сравнение невозможно. В этих областях древесные приближения обеих теорий для амплитуд всех процессов рассеяния и рождения стабильных частиц должны совпадать тождественно. Иными словами, в секторе стабильных состояний древесное приближение расширенной теории есть ничто иное как аналитическое продолжение древесного приближения исходной. В этом и состоит идея расширения. Условие (6) необходимо для того, чтобы обеспечить совпадение асимптотических состояний в двух теориях. В расширенной теории петлевые поправки приводят к нестабильности частиц, описываемых дополнительными полями, и пространства *асимптотических* (стабильных) состояний оказываются одинаковыми. Построенная же по правилам Фейнмана S-матрица в теории с нестабильными частицами, как известно (см. [14]), является унитарным оператором именно на пространстве стабильных состояний.

Для перевода словесного описания локализуемых теорий на язык уравнений, выражающих соответствующие ограничения на константы связи, необходимо сделать несколько предварительных замечаний.

Требование локализуемости возникает как отражение естественного желания работать с рядами, каждый член которых есть хорощо определенная функция импульсов, а общая структура автоматически обеспечивает соблюдение фундаментальных принципов ковариантности, унитарности и причинности S-матрицы. В настоящее время известна единственная схема, генерирующая ряды соответствующей структуры – это схема квантовой теории поля с гамильтонианом, содержащим конечное число локальных членов. Существенно, что в рамках этой схемы амплитуда любого процесса в древесном приближении есть рациональная функция каждой из парных энергий (при фиксированных значениях остальных переменных). Нетрудно понять, что в случае теории с *бесконечным* числом скалярных полей ϕ_i $(i = 1, 2, \dots)$ с массами m_i и взаимодействием перенормируемого типа

$$H_{int} = g_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k + \lambda_{ijkl}\phi_i\phi_j\phi_k\phi_l,$$

никаких принципиальных изменений в схеме квантовой теории не требуется; достаточно, чтобы матрицы констант связи g_{ijk}, λ_{ijkl} и вектор масс m_i^2 удовлетворяли условиям, обеспечивающим сходимость рядов в данном порядке петлевого разложения. При выполнении этого условия древесные амплитуды любых процессов (а не только тех, что описывают рассеяние и рождение стабильных состояний) будут мероморфными функциями каждой из парных энергий. Кроме того (см. [7]), [10] нужно потребовать, чтобы при нулевых переданных импульсах эти функции были полиномиально ограничены (в смысле контурной асимптотики – см., например, [15]). Это условие необходимо для того, чтобы можно было строить петлевые графики путем замыкания внешних линий в соответствующих древесных, не заботясь при этом о порядке выполнения операций.

В исходной эффективной теории ситуация, в принципе, ничем не будет отличаться от вышеописанной, если аналитические продолжения рядов древесного уровня из постулированных в определении областей сходимости D окажутся полиномиально ограниченными мероморфными функциями (не произвольными – см. ниже) каждой из парных энергий. Свойство мероморфности позволяет надеяться на то, что эти функции могут быть воспроизведены в рамках расширенной эффективной теории, содержащей поля с подходящими массами. Разумеется, это возможно далеко не всегда, так как не всякая мероморфная функция может быть получена как амплитуда древесного уровня в схеме какой-либо теории поля. Поэтому требования, предъявляемые к константам связи локализуемых гамильтонианов, следует понимать как условия *существования* расширенной эффективной теории самого общего вида, при том лишь ограничении, что спектр масс этой теории должен удовлетворять условию нестабильности (6). Эти требования мы называем *условиями аналитичности*. Использование специального термина оправдано желанием избежать необходимости подчеркивания формального различия гамильтонианов исходной и расширенной теорий. *Расширенная теория вводится только потому, что мы не имеем аппарата, позволяющего работать вне рамок теории возмущений.*

Полученные из условий аналитичности ограничения на константы связи гамильтониана расширенной теории можно трансформировать в искомые условия локализуемости, ограничивающие допустимый набор констант исходного гамильтониана. Для этого достаточно сравнить в областях D коэффициенты разложений амплитуд, полученных в исходной и расширенной теориях.

4. Условия аналитичности

Таким образом, в первую очередь нужно рассмотреть расширенную теорию и сформулировать условия аналитичности. Эта задача сама по себе достаточно сложна, и мы сосредоточимся здесь на самом первом этапе решения: сформулируем (необходимые) условия аналитичности для амплитуд бинарных процессов. Этот случай относительно прост, поскольку кинематика полностью определяется двумя независимыми переменными.

Удобно ввести три эквивалентных набора:

$$(x, \nu_x), \qquad x = (s, t, u), \tag{7}$$

где (s, t, u) – обычные переменные Мандельштама, а

$$\nu_s = t - u, \qquad \nu_t = u - s, \qquad \nu_u = s - t. \tag{8}$$

Формально построенная по правилам Фейнмана древесная амплитуда $M(s, t, u)$ произвольного бинарного процесса с участием скалярных частиц (обобщение на случай частиц со спином не составляет труда) имеет вид ряда:

$$\begin{aligned} M(s,t,u) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} a_{ijk} s^i t^j u^k + \sum_{R_s} \frac{N_s(s,t,u)}{s - M_R^2} \\ + \sum_{R_t} \frac{N_t(s,t,u)}{t - M_R^2} + \sum_{R_u} \frac{N_u(s,t,u)}{u - M_R^2}, \end{aligned} \tag{9}$$

суммирование в котором ведется по всем резонансам R_x (M_R – масса соответствующего резонанса) каждого из каналов, а также (в первой сумме) по всем нерезонансным взаимодействиям. Числители $N_x(s,t,u)$, в свою очередь, имеют вид бесконечных сумм

$$N_x(s,t,u) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} b_{ijk}^{(x)} s^i t^j u^k.$$

Числовые матрицы a_{ijk} и $b_{ijk}^{(x)}$ – функции констант связи (расширенного) гамильтониана.

Для того, чтобы ряд (9) имел смысл и мог быть использован для построения следующих порядков петлевого разложения, он должен быть суммируем, причем результат должен быть мероморфной функцией каждой из переменных Мандельштама. Для обеспечения возможности построения петель и проведения перенормировки необходимо[6], чтобы эта функция (одной комплексной переменной ν_x) была полиномиально ограничена при $x = 0$ и, по непрерывности, в малой окрестности этого значения.

Используя определения (8), можно переписать формальный ряд (9) в трех разных формах:

$$\begin{aligned} M(s,t,u) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^{(s)}(s) \nu_s^i + \sum_{R_t} \frac{\rho^{(st)}(s)}{(\sigma - 2M_R^2) - s + \nu_s} \\ + \sum_{R_u} \frac{\rho^{(su)}(s)}{(\sigma - 2M_R^2) - s - \nu_s}; \end{aligned} \tag{10}$$

[6] Это нетрудно понять, рассматривая петлевой граф как интеграл от произведения пропагатора на древесный граф, взятый при нулевом импульсе, переданном между замыкаемыми хвостами [10].

$$
\begin{aligned}
M(s,t,u) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^{(t)}(t)\nu_t^i + \sum_{R_u} \frac{\rho^{(tu)}(t)}{(\sigma - 2M_R^2) - t + \nu_t} \\
+ \sum_{R_s} \frac{\rho^{(ts)}(t)}{(\sigma - 2M_R^2) - t - \nu_t};
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
M(s,t,u) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^{(u)}(u)\nu_u^i + \sum_{R_s} \frac{\rho^{(us)}(u)}{(\sigma - 2M_R^2) - u + \nu_u} \\
+ \sum_{R_t} \frac{\rho^{(ut)}(u)}{(\sigma - 2M_R^2) - u - \nu_u}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Здесь σ – сумма квадратов масс внешних частиц. Правые части соотношений (10)–(12) записаны в терминах естественных координат слоев

$$
B_x\{x \in \mathbf{R},\ x \sim 0;\ \nu_x \in \mathbf{C},\ |\nu_x| < \infty\}\ , \qquad x = (s,t,u); \tag{13}
$$

такая форма записи удобна для конструктивной формулировки условий аналитичности. Отметим, что каждая пара слоев (13) имеет непустое пересечение:

$$
D_s = B_t \cap B_u, \qquad D_t = B_u \cap B_s, \qquad D_u = B_s \cap B_t; \tag{14}
$$

следовательно условия суммируемости в каждом слое должны быть взаимно согласованы таким образом, чтобы в области

$$
R = B_s \cup B_t \cup B_u \tag{15}
$$

они определяли единую мероморфную функцию. Уравнения бутстрапа есть ничто иное как алгебраическая форма соответствующих условий согласования.

Учитывая приведенные выше общие соображения, мы формулируем условия аналитичности для амплитуд бинарных процессов следующим образом [7], [10][7]. *Амплитуды древесного уровня должны быть мероморфными функциями каждой из парных энергий* $s_{ij} \in \mathbf{C}$ *при произвольно фиксированном*[8] *значении второй независимой переменной. В каждом из слоев* (13), *содержащем плоскость нулевых значений одного из переданных импульсов*

[7] Подчеркнем, что речь идет только о скалярных амплитудах (функции $F^{(a)}$ в (5))

[8] Разумеется, в области определения.

x, они должны быть полиномиально ограниченными функциями сопряженной переменной ν_x, причем степень N ограничивающего полинома может зависеть от квантовых чисел, характеризующих процесс.

Эта формулировка условия аналитичности может показаться излишне усложненной, особенно если учесть, что область (15) – лишь часть комплексного пространства переменных, описывающих процесс. Мы придерживаемся ее по двум причинам. Во-первых, результаты работ [6], [7] и [10] показали, что она приводит к разумным физическим следствиям. Во-вторых, даже в рассматриваемом случае (бинарные процессы) соответствующие системы уравнений бутстрапа для минимальных параметров расширенной теории оказываются чрезвычайно сложными; в такой ситуации попытка сформулировать требования более общего характера, не имея достаточного физического и математического обоснования, может привести к противоречию.

Хорошую иллюстрацию техники получения уравнений бутстрапа и их структуры дают примеры, рассмотренные в последующих разделах. Однако прежде, чем приступить к их рассмотрению, мы кратко напомним сущность метода форм Коши.

5. Формы Коши

Мы используем известный из комплексного анализа (см., например, [15]) метод, дающий представление полиномиально ограниченной мероморфной функции одной комплексной переменной в виде равномерно сходящегося ряда полюсных вкладов (в дальнейшем мы называет представления этого типа формами Коши или Коши-разложениями). Возможность работы в слое

$$B_x\{x \in \mathbf{R},\ x \in (a,b);\ z \in \mathbf{C},\ |z| < \infty\} \qquad (16)$$

(а не на плоскости $x = \text{const}$) достигается путем естественной модификации метода (см. [6], [7]): все коэффициенты считаются гладкими (вещественно-аналитическими) функциями параметра x.

Прежде всего следует уточнить определение степени ограниченности – это оказывается существенным при работе с эффективными теориями. Мы расчитывает на знакомство читателя с понятием системы контуров C_n, фигурирующей в определении полиномиальной ограниченности мероморфных функций одной переменной (см. [15]). При работе в слое (16) допускается гладкая зависимость этой системы от параметра x. Мы называем заданную в слое (16) мероморфную функцию $f(x,z)$ полиномиально ограниченной степенью N (или, короче, N-ограниченной), если N – минимальное из целых чисел таких, что при всех $x \in (a,b)$

$$\left. \frac{|f(x,z)|}{z^{N+1}} \right|_{z\in C_m} \xrightarrow{m\to\infty} 0. \tag{17}$$

Форма Коши позволяет представить N-ограниченную в слое (16) функцию $f(x,z)$ в виде равномерно сходящегося ряда полюсных вкладов. В наиболее интересном для наших целей случае, когда все полюса простые, и в точке $z = 0$ полюса нет, она принимает вид:

$$f(x,z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x,0) z^n + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{r_i(x)}{z - p_i(x)} - h_i^{(N)}(x,z) \right\}. \tag{18}$$

Здесь $p_i(x)$ и $r_i(x)$ – положение i-го полюса и вычет в нем. Полюса пронумерованы так, что

$$|p_i(x)| \le |p_{i+1}(x)|,$$

а поправочные полиномы $h_i^{(N)}(x,z)$, обеспечивающие сходимость ряда, таковы:

$$h_i^{(N)}(x,z) \equiv -\frac{r_i(x)}{p_i(x)} \sum_{n=0}^{N} \left[\frac{z}{p_i(x)} \right]^n \equiv \sum_{n=0}^{N} h_{i,(n)}(x)\, z^n \tag{19}$$

Нетрудно показать [7], что для функции $F(x,z)$, имеющей в слое (16) представление (18), верны соотношения «схлопывания» – ряды из поправочных полиномов высших степеней $M > N$ сходятся к значению соответствующей производной:

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_{i,(N+k)}(x) = \frac{1}{(N+k)!} f^{(N+k)}(x,0)\ , \qquad x \in (a,b) \qquad k = 1, 2, \dots\ . \tag{20}$$

Эти соотношения оказываются полезными при распутывании систем уравнений бутстрапа; соответствующий пример разобран ниже.

Представление (18) – основной инструмент, использованный для получения уравнений бутстрапа в работах [7], [10].

6. Уравнения бутстрапа: простой пример

Для иллюстрации общей схемы, описанной в предыдущих разделах, рассмотрим простой пример, позволяющий наглядно продемонстрировать способ получения и структуру уравнений бутстрапа для параметров рациональной функции двух переменных, ограниченной соответствующими условиями аналитичности. Этот пример хорош еще и тем, что допускает явное решение и иллюстрирует терминологию.

Рассмотрим рациональную функцию двух комплексных переменных $F(x,y)$. Потребуем (это аналог условий аналитичности), чтобы в слое

$$B_y\{x \in \mathbf{C};\ y \in \mathbf{R},\ y \in (-\eta,+\eta)\} \tag{21}$$

она имела единственный полюс (по переменной x), а в слое

$$B_x\{y \in \mathbf{C};\ x \in \mathbf{R},\ x \in (-\xi,+\xi)\} \tag{22}$$

– также единственный полюс (по переменной y); асимптотики в обоих слоях должны быть убывающими (в терминологии раздела 5 эта функция должна быть 0-ограниченной в каждом из слоев). Вопрос, на который мы ищем ответ: какова структура набора минимальных параметров, характеризующих эту функцию?

В данном случае минимальными параметрами служат коэффициенты f_{ij} в разложении

$$F(x,y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} f_{ij} x^i y^j\,; \tag{23}$$

поставленный же выше вопрос можно сформулировать конкретнее: сколько независимых комбинаций этих коэффициентов можно фиксировать произвольно и каковы эти комбинации? Или, в терминах теории поля: сколько независимых перенормировочных предписаний нужно наложить для однозначной фиксации амплитуды $F(x,y)$, и какова явная форма этих предписаний?

В слое (21) $F(x,y)$ может быть представлена в виде

$$F(x,y) = \frac{\rho(y)}{x-\pi(y)}, \qquad (x,y) \in B_y\,. \tag{24}$$

Функции $\rho(y)$ и $\pi(y)$ считаются гладкими вблизи начала координат:

$$\pi(y) = \sum_{i=0} \pi_i y^i, \qquad \rho(y) = \sum_{i=0} \rho_i y^i. \tag{25}$$

Аналогично, в слое (22):

$$F(x, y) = \frac{r(x)}{y - p(x)}, \qquad (x, y) \in B_y, \tag{26}$$

где

$$p(x) = \sum_{i=0} p_i x^i, \qquad r(x) = \sum_{i=0} r_i x^i. \tag{27}$$

В области

$$D_{xy} = B_x \cap B_y$$

имеем:

$$\frac{r(x)}{y - p(x)} = \frac{\rho(y)}{x - \pi(y)}, \qquad (x, y) \in D_{xy}. \tag{28}$$

Подставив (25) и (27) в (28), мы получаем бесконечную систему условий для коэффициентов p_k, r_k, π_k, ρ_k:

$$r_{i+1}\pi_0 - p_{i+1}\rho_0 = r_i, \quad \rho_{i+1}p_0 - \pi_{i+1}r_0 = \rho_i, \quad r_{i+1}p_{j+1} = \rho_{i+1}\pi_{j+1} \\ i, j = 0, 1, \ldots . \tag{29}$$

Эта система дает пример того, что в работе [7] названо уравнениями бутстрапа. В случае разрешимости она позволяет выразить параметры p_i, r_i в терминах π_i, ρ_i и дает ответ на вопрос о возможности аналитического продолжения из одного слоя в другой. Это бесконечная система уравнений относительно $2 \times \infty$ (обозначение условное) неизвестных параметров, необходимых для восстановления вида функции $F(x, y)$ в слое (22) по значениям параметров, задающим ее в слое (21). Поэтому поиск решения или хотя бы доказательство разрешимости – задача чрезвычайно сложная. К счастью, в данном примере оказывается возможным найти решение в замкнутом виде. Это упражнение полезно, ибо оно дает представление о «мощности» ограничений бутстрапа.

Переписывая условие (28) в виде

$$r(x)[x - \pi(y)] = \rho(y)[y - p(x)], \tag{30}$$

дважды дифференцируя ∂^2_{xy} и разделяя переменные, получаем

$$\frac{r'(x)}{p'(x)} = \frac{\rho'(y)}{\pi'(y)} \equiv a, \tag{31}$$

где штрихи означают дифференцирование по соответствующей переменной, а a – константа разделения. Из (31) получаем

$$r(x) = ap(x) + b, \qquad \rho(y) = a\pi(y) + c, \tag{32}$$

где b и c – новые константы. Наконец, подставляя (32) в (30) и разделяя переменные еще раз, находим

$$p(x) = \frac{d - bx}{c + ax}, \qquad \pi(y) = \frac{d - cy}{b + ay}, \tag{33}$$

где d – еще одна константа разделения. Формулы (33) вместе с соотношениями (32), (24) и (26) дают полное решение рассматриваемой задачи (нетрудно убедиться, что исключительные случаи решения не дают). Важным свойством этого решения является тот факт, что оно содержит всего 4 произвольных параметра! Это означает, что бесконечная система (29) оказывается совместной тогда и только тогда, когда заданная в слое (21) функция $F(x, y)$ принадлежит к четырехпараметрическому семейству

$$F(x, y) = \frac{ad + bc}{-d + axy + bx + cy}; \tag{34}$$

лишь в этом случае существует аналитическое продолжение ее из B_y в B_x с заданными свойствами. Разумеется, это продолжение оказывается единственным.

К тому же заключению можно придти путем непосредственного анализа системы (29): в данном простом примере это оказывается возможным. К сожалению, за исключением нескольких простейших случаев, регулярный метод решения бесконечных систем алгебраических уравнений неизвестен.

Имея (34), можно найти выражения минимальных параметров

$$f_{ij} = f_{ij}(a, b, c, d)$$

в терминах «фундаментальных констант» (a, b, c, d), выбрать из них любую четверку f_k $(k = 1, 2, 3, 4)$,[9] допускающую обращение

$$a = a(f_1, \ldots, f_4), \quad \ldots, \quad d = d(f_1, \ldots, f_4),$$

[9] Или любые четыре комбинации

и произвольно фиксировать «перенормировочные предписания» для этой четверки. Перенормировка остальных минимальных параметров должна производиться в соответствии с условиями (29).

Таким образом, мы можем теперь ответить на вопрос, поставленный в начале этого раздела. *Для однозначной фиксации амплитуды $F(x,y)$ достаточно наложить четыре ренормировочных предписания, фиксирующих «фундаментальные» константы a, b, c, d.*

Этот пример дает объяснение осторожности, с которой мы формулировали условия аналитичности в разделе 4. Если бы мы – в дополнение к рассмотренным условиям – наложили еще одно условие аналитичности, скажем, в слое

$$C_x\{y \in \mathbf{C};\ x \in \mathbf{R},\ x \in (1-\xi, 1+\xi)\},$$

причем количество полюсов и асимптотику в этом слое задали бы произвольно, то (исключая счастливую случайность) мы пришли бы к противоречию.

Интересно отметить, что, изменив постановку задачи и потребовав, чтобы в слое B_x функция $F(x,y)$ по-прежнему имела один полюс, но асимптотику типа константы, мы получим решение, также зависящее от четырех параметров; это решение, однако, окажется одним из исключительных.

7. Формы Коши для струнной амплитуды

Пример, рассмотренный в разделе 6, слишком прост, и техника, использованная для его решения, едва ли может быть полезна при работе с эффективными теориями, где число полюсов бесконечно. В данном разделе мы покажем, как, используя технику форм Коши, получить условия бутстрапа для функции с бесконечным числом полюсов. Разумеется, мы не сможет предъявить явного решения этих условий. Будет, однако, показано, что даже в том случае, когда функция $F(x,y)$ задана явно, т.е. все ее (минимальные) параметры известны, условия бутстрапа могут служить источником нетривиальных соотношений, связывающих эти параметры друг с другом. Именно это свойство и использовалось в работах [7], [10] для получения ограничений на физические характеристики процессов пион-каонного и пион-нуклонного рассеяния.

В качестве демонстрационного примера мы выбрали B-функцию Эйлера (точнее, так называемую амплитуду Лавлейса [16], отличающуюся от нее множителем). Этот выбор продиктован несколькими причинам. Во-первых, он позволяет проследить за деталями вычислений без особых затрат труда, поскольку многие формулы достаточно широко известны. Во-вторых, несмотря на обилие известных формул суммирования для символов Похгаммера, мы получаем (чрезвычайно простым и элегантным способом) бесконечную серию соотношений, вывод которых традиционными методами потребовал бы значительных усилий. В третьих, B-функция Эйлера играет особую роль в дуальных моделях и в теории струн (см. [9]), поэтому наш выбор вполне оправдан с физической точки зрения. Наконец, последнее (но не по степени важности!) соображение в пользу нашего выбора состоит в том, что численная проверка полученных тождеств для символов Похгаммера позволяет качественно понять структуру критериев, необходимых для оценки скорости сходимости. Этот пункт оказывается весьма существенным при сравнении различных теоретических предсказаний (правил сумм) с данными эксперимента.

Рассмотрим простую модель (типа струнной) амплитуды рассеяния, построенную – в соответствии с идеей Венециано [17] – на основе B-функции и не содержащей тахионного вклада:

$$A(s,t) = (-s-t)B(\frac{1}{2}-s, \frac{1}{2}-t) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)\Gamma(\frac{1}{2}-t)}{\Gamma(-s-t)}. \qquad (35)$$

Ее характерные точки таковы ($m, n = 0, 1, 2, \ldots$):

- Нули: $s + t = n$.
- Полюса по s (t фиксирована, $s + t \neq m$): $s = \frac{1}{2} + n$.
- Полюса по t (s фиксирована, $s + t \neq m$): $t = \frac{1}{2} + n$.
- Три серии точек неопределенности, находящихся на пересечениях линий нулей с линиями полюсов по какой-либо переменной. Координаты этих точек таковы:

  Серия A^{++}: $s = +\frac{2m+1}{2}$, $t = +\frac{2n+1}{2}$.

  Серия A^{+-}: $s = +\frac{2m+1}{2}$, $t = -\frac{2n+1}{2}$, $\quad (m \geq n)$.

  Серия A^{-+}: $s = -\frac{2m+1}{2}$, $t = +\frac{2n+1}{2}$, $\quad (m \leq n)$.

Рассмотрим поведение амплитуды $A(s,t)$ в слоях $B_t\{t \in \mathbf{R},\ s \in \mathbf{C},\ |s| < \infty\}$ при $t \neq k + 1/2$, где k – целое. Единственными особенностями амплитуды в таких слоях являются полюса по переменной s.

Заметим, что, начиная с некоторого n, между двумя полюсами $A(s,t)$ всегда лежит нуль. В качестве контуров C_n на комплексной плоскости s выберем систему окружностей с центром в начале координат, проходящих через нули амплитуды. Можно показать, что на такой системе контуров всюду, за исключением узкого сектора вблизи вещественной оси $A(s,t)$ имеет асимптотику реджевского типа ($\sim s^{\frac{1}{2}+t}$). Вблизи вещественной оси асимптотика регулируется наличием нуля.

В терминологии раздела 5 в слоях[10]

$$B_t\{t \in (n-1/2, n+1/2);\ n=0,1...\}$$

амплитуда $A(s,t)$ является n-ограниченной функцией комплексной переменной s и вещественного параметра t.

В слоях

$$B_t\{t \in (-n-1/2, -n+1/2);\ n=1,2...\}$$

она имеет убывающую асимптотику.

Вычеты $A(s,t)$ в полюсах по s одинаковы во всех слоях B_t, поскольку положение полюса не зависит от t. В случае, если рассматриваемая точка не является точкой неопределенности:

$$\begin{aligned} r_n(t) &\equiv Res_{s=n+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)\Gamma(\frac{1}{2}-t)}{\Gamma(-s-t)} \\ &= \frac{1}{n!}(\frac{1}{2}+t)\cdots(\frac{1}{2}+t+n) \equiv \frac{1}{n!}\,(t+\frac{1}{2})_{(n+1)}, \end{aligned} \tag{36}$$

где $(t+\frac{1}{2})_{(n+1)}$ – так называемый символ Похгаммера (сдвинутый факториал).

В качестве примера построим Коши-разложение для $A(s,t)$ при $t \in (-3/2, -1/2)$. В этом слое $A(s,t)$ растет не быстрее, чем $s^{0-\epsilon}$, $\epsilon > 0$, и поправочные полиномы не нужны. Разложение имеет вид:

$$A(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{(t+\frac{1}{2})_{(n+1)}}{(s-n-\frac{1}{2})}, \qquad t \in (-3/2, -1/2). \tag{37}$$

[10] При обсуждении примера с B-функцией мы используем естественные сокращенные обозначения слоев.

Заметим сразу, что, поскольку при больших отрицательных t асимптотический режим становится мягче, это разложение верно при любом $t < -1/2$, исключая значения, соответствующие координатам точек неопределенности $t = -(2k+1)/2$ $(k = 0, 1, \dots)$, при которых разложение не имеет смысла[11].

В слое $B_t\{t \in (-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})\}$ амплитуда $A(s,t)$ имеет рост по s не быстрее линейного, и в Коши-разложении необходим учет поправочных полиномов 0–го порядка. Здесь разложение имеет вид:

$$A(s,t) = A(0,t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{(t+\frac{1}{2})_{(n+1)}}{s-n-\frac{1}{2}} + \frac{(t+\frac{1}{2})_{(n+1)}}{n+\frac{1}{2}} \right), \qquad (38)$$
$$t \in (-1/2, 1/2).$$

Применение аппарата форм Коши позволяет нам представить мероморфную функцию двух комплексных переменных в виде суммы полюсных вкладов по одной переменной, сходящейся равномерно по другой переменной. Это даст нам возможность получить два вида соотношений для функции $A(s,t)$: условия схлопывания лишних степеней поправочного полинома при смене асимптотического режима и уравнения бутстрапа.

8. Условия схлопывания и бутстрапа для символов Похгаммера

Условия схлопывания на регулярную в нуле часть амплитуды возникают при переходе из слоев, в которых амплитуда имеет растущую асимптотику, в слои с более мягким асимптотическим поведением. Разложение (38) для $A(s,t)$ в слое $B_t\{t \in (-1/2, 1/2)\}$ верно и при $t < -1/2$. Когда t пересекает граничное значение $t = -1/2$, что соответствует смене асимптотического режима, ряд поправочных полиномов начинает сходиться:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{[0]}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{(t+\frac{1}{2})_{(n+1)}}{n+\frac{1}{2}} \right) = -\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-t)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(-t)} = -A(0,t),$$
$$t < -\frac{1}{2},$$

и разложение (38) совпадает с (37).

[11] В дальнейшем мы специально не оговариваем это условие.

Уравнения бутстрапа естественно возникают из требования, чтобы Коши-разложение в каком-либо слое по одной переменной совпадало с разложением по другой переменной (т.е. в перпендикулярном слое) там, где эти слои пересекаются. Например, в слое $B_t\{t \in (-1/2, 1/2)\}$ для амплитуды $A(s,t)$ верно разложение (38). Совершенно аналогичное разложение можно написать в слое $B_s\{s \in (-1/2, 1/2)\}$:

$$A(s,t) = A(s,0) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho_n(s)}{t-n-\frac{1}{2}} + \frac{\rho_n(s)}{n+\frac{1}{2}} \right) \ , \tag{39}$$

где $\rho_n(s) \equiv \frac{1}{n!}(s+\frac{1}{2})_{(n+1)}$. Эти два разложения должны совпадать внутри квадрата, образованного пересечением двух слоев. Следовательно, в области $(s \sim 0, t \sim 0)$ должно выполняться условие:

$$\begin{aligned} A(0,t) = A(s,0) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho_n(s)}{t-n-\frac{1}{2}} + \frac{\rho_n(s)}{n+\frac{1}{2}} \right) \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_n(t)}{s-n-\frac{1}{2}} + \frac{r_n(t)}{n+\frac{1}{2}} \right) \equiv A(s,0) + \Psi(s,t). \end{aligned} \tag{40}$$

В некоторой окрестности точки (0,0) функция $\Psi(s,t)$ является аналитической, так как соответствующие ряды сходятся равномерно; она полностью определяется коэффициентами своего ряда Тейлора в этой точке. Продифференцируем обе части равенства (40) по t:

$$\frac{\partial A(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial \Psi(s,t)}{\partial t}, \qquad (s \sim 0, t \sim 0)$$

В левой части этого равенства стоит функция только одной переменной t, это значит что зависимость функции $\frac{\partial \Psi(s,t)}{\partial t}$ от второй переменной является чисто фиктивной. Вычисляя правую часть этого равенства, мы можем присвоить s любое значение из области $s \sim 0$. Это позволяет определить регулярную в нуле часть амплитуды с точностью до одной произвольной постоянной $A(0,0)$.

Эти соображения позволяют нам переписать (40) в виде двух условий на регулярные в нуле части амплитуды и бесконечной системы условий согласования:

$$\frac{\partial A(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial \Psi(s,t)}{\partial t}\Big|_{s=0}, \qquad (t \sim 0) \tag{41}$$

$$\frac{\partial A(s,0)}{\partial s} = -\frac{\partial \Psi(s,t)}{\partial s}\Big|_{t=0}, \qquad (s \sim 0) \tag{42}$$

$$\frac{\partial^{k+p+2}}{\partial s^{k+1}\partial t^{p+1}}\Psi(s,t)\Big|_{s=0,t=0} = 0, \qquad \forall k,p \in \mathbf{N}. \tag{43}$$

Условия согласования являются выражением того, что в окрестности точки $(0,0)$ производная от $\Psi(s,t)$ по какой-либо переменной не зависит от кросс-сопряженной переменной.

Заметим, что в данном примере полная симметрия между переменными s и t позволяет нам ограничится рассмотрением условий согласования с $k > p$.

Подобные системы условий и носят название уравнений бутстрапа. Они представляет собой нетривиальные соотношения для резонансных параметров функции (положений полюсов и значений вычетов в них). В рассматриваемом нами примере положение полюсов не зависит от кросс-канальной переменной. В этом случае из системы уравнений бутстрапа возникают соотношения для значений вычетов в полюсах (символов Похгаммера).

Рассмотрим в качестве примера тождество для символов Похгаммера, возникающее из (43) при $k = 1, p = 0$:

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)\ \rho_n^{(2)}(s)}{(t-n-\frac{1}{2})^2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^2\ 2!\ r_n^{(1)}(s)}{(s-n-\frac{1}{2})^3}\right\}_{s=0,t=0} = 0. \tag{44}$$

Нетрудно показать, что для производной произвольного порядка от вычета верны выражения

$$r_n^{(p)}(t) = 0, \qquad (p > n+1);$$

$$r_n^{(p)}(t) = \underbrace{\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{i_1-1}\cdots\sum_{i_p=0}^{i_{p-1}-1}}_{i_1>i_2\ldots>i_p}\frac{p!\ r_n(t)}{(\frac{1}{2}+i_1+t)\ldots(\frac{1}{2}+i_p+t)}, \quad p \le n+1,$$

позволяющие представить (44) в следующем виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^3}\sum_{i_1=0}^{n}\frac{1}{n!}\;\frac{(\frac{1}{2})_{(n+1)}}{(\frac{1}{2}+i_1)}\right\}$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2}\underbrace{\sum_{j_1=0}^{n}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}}_{j_1>j_2}\frac{1}{n!}\;\frac{(\frac{1}{2})_{(n+1)}}{(\frac{1}{2}+j_1)(\frac{1}{2}+j_2)}\right\}=0\ . \tag{45}$$

Мы видим, что уже первое условие согласования дает весьма нетривиальное тождество для символов Похгаммера. Последующие условия приводят к еще более сложным тождествам. Эти тождества отражают специфические свойств вычетов, обеспечивающие существование решения системы уравнений бутстрапа.

9. Переполненность системы бутстрапа

Одного взгляда на систему уравнений бутстрапа достаточно, чтобы предположить, что она, скорее всего, является переполненной. Возникает вопрос, нельзя ли выделить среди этого множества уравнений полную подсистему или хотя бы предложить способ избавится от явно лишних (зависимых) уравнений.

Кроме собственно системы бутстрапа, в нашем распоряжении имеются еще условия схлопывания поправочных полиномов высших степеней в слоях с более мягким асимптотическим поведением. Сейчас мы покажем, как, используя условия схлопывания и бутстрапа в одном слое, можно получить часть условий бутстрапа в другом слое.

В трех пересекающихся слоях: $B_t\{t\in(-1/2,+1/2)\}$, $B_t\{t\in(-3/2,-1/2)\}$, и $B_s\{s\in(-3/2,-1/2)\}$ для амплитуды $A(s,t)$ справедливы следующие Коши-разложения:

$$A(s,t)=A(0,t)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_n(t)}{s-n-\frac{1}{2}}+\frac{r_n(t)}{n+\frac{1}{2}}\right)\ ,\quad B_t\{t\in(-1/2,+1/2)\}; \tag{46}$$

$$A(s,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_n(t)}{s-n-\frac{1}{2}},\qquad B_t\{t\in(-3/2,-1/2)\}; \tag{47}$$

$$A(s,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_n(s)}{t-n-\frac{1}{2}}, \qquad B_s\{s\in(-3/2,-1/2)\}. \tag{48}$$

Мы требуем, чтобы соответствующие разложения в областях пересечения каждого из двух слоев B_t со слоем B_s представляли одну и ту же мероморфную функцию. Это позволяет получить условия бутстрапа

$$A(0,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_n(s)}{t-n-\frac{1}{2}}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_n(t)}{s-n-\frac{1}{2}}+\frac{r_n(t)}{n+\frac{1}{2}}\right)\equiv\Psi_1(s,t), \tag{49}$$
$$(s\sim-1,\ t\sim 0).$$

$$0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_n(s)}{t-n-\frac{1}{2}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_n(t)}{s-n-\frac{1}{2}}\equiv\Psi_2(s,t), \tag{50}$$
$$(s\sim-1,\ t\sim-1).$$

Используя ту же аргументацию, что и в предыдущем разделе, мы можем переписать (49) в виде следующей системы условий:

$$A(0,t)=\Psi_1(-1,t),$$
$$\left.\frac{\partial^{k+p+1}}{\partial s^{k+1}\partial t^p}\Psi_1(s,t)\right|_{s=-1,t=0}=0, \qquad \forall k,p\in\mathbf{N},$$

первое из которых дает явное выражение для регулярной части амплитуды, а второе выражает независимость $\Psi_1(s,t)$ от аргумента s.

Условие (50) мы можем переписать в аналогичной форме:

$$\left.\frac{\partial^{k+p}}{\partial s^{k}\partial t^p}\Psi_2(s,t)\right|_{s=-1,t=-1}=0, \qquad \forall k,p\in\mathbf{N}. \tag{51}$$

Явное выражение для $A(0,t)$, справедливое в окрестности точки $t=0$, беспрепятственно может быть аналитически продолжено в область отрицательных t, где соответствующие ряды хорошо сходятся.

Разложение (46) справедливо и при $t<-\frac{1}{2}$. Из требования, чтобы оно в этом случае совпадало с (47), возникает условие схлопывания:

$$A(0,t)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_n(t)}{n+\frac{1}{2}}, \quad t<-\frac{1}{2}.$$

Это выражение для регулярной в нуле части амплитуды должно совпадать с аналитическим продолжением в область $t < -\frac{1}{2}$ выражения, полученного из условия (49). Это, в частности, означает, что

$$\Psi_1(-1,t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n(t)}{n+\frac{1}{2}}\,, \qquad (s \sim -1, t \sim -1).$$

Как обычно, перепишем его в виде условия на коэффициенты степенного разложения вблизи $(s=-1,\ t=-1)$:

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p}\Psi_1(-1,t)\bigg|_{t=-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n^{(p)}(t)}{n+\frac{1}{2}}\bigg|_{t=-1}.$$

Используя явное выражение для Ψ_1, получаем:

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p!\,(-1)^p \rho_n(-1)}{(t-n+\frac{1}{2})^{p+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_n^{(p)}(t)}{-1-n-\frac{1}{2}} + \frac{r_n^{(p)}(t)}{n+\frac{1}{2}}\right)\right\}_{t=-1}$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n^{(p)}(t)}{n+\frac{1}{2}}\bigg|_{t=-1}.$$

Приведя подобные члены, можно убедится в том, что это условие совпадает с (51) для любого p при $k=0$.

Таким образом, на примере трех слоев мы убеждаемся в том, что система уравнений бутстрапа и условий схлопывания является переполненной. Часть информации о бутстрапе в нижних слоях содержится в условиях бутстрапа в верхних и условиях схлопывания поправочных полиномов при переходе из верхних слоев в нижние.

10. Численная проверка скорости сходимости

Определенный интерес представляет численная проверка скорости сходимости рядов по n в выражении (45). Это связанно с тем, что в дуальных моделях один из способов проверки теоретических предсказаний (так называемых правил сумм) состоит в насыщении соотношений, очень похожих на (45), конечным числом вкладов резонансов, характеристики коих известны из эксперимента.

К сожалению, имеющаяся в настоящее время информация о спектре адронов далеко не полна, особенно в области масс $M > 2$ GeV. Это означает, что экспериментально проверяемы лишь те из правил сумм, которые характеризуются достаточно быстрой сходимостью. Поэтому было бы очень полезно научиться выделять соответствующие соотношения из бесконечной системы условий бутстрапа и схлопывания. В этом разделе мы – на примере все той же струнной амплитуды, описанной в разделе 7 – продемонстрируем, как можно подходить к решению этой задачи в реальных ситуациях.

Проведем численный анализ системы тождеств для вычетов $r_n(t)$ и $\rho_n(s)$, вытекающей из условий согласования (41):

$$\begin{aligned} &\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}(p+1)!\ \rho_n^{(k+1)}(s)}{(t-n-\frac{1}{2})^{p+2}}\right\}_{s=0,t=0} \\ -&\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!\ r_n^{(p+1)}(s)}{(s-n-\frac{1}{2})^{k+2}}\right\}_{s=0,t=0} = 0, \end{aligned} \tag{52}$$

где $k, p = 0, 1, \ldots,\ k > p$. Условие $k > p$ возникает как следствие симметрии спектра по s и t.

Прежде всего нужно определить величину, позволяющую численно характеризовать точность насыщения правила сумм (52), достигаемую после учета в нем конечного числа слагаемых. Это делается стандартным образом, но в рассматриваемом случае вычислительная процедура допускает упрощение, которое необходимо оговорить, ибо оно не всегда возможно в реальных ситуациях, встречающихся в теории поля.

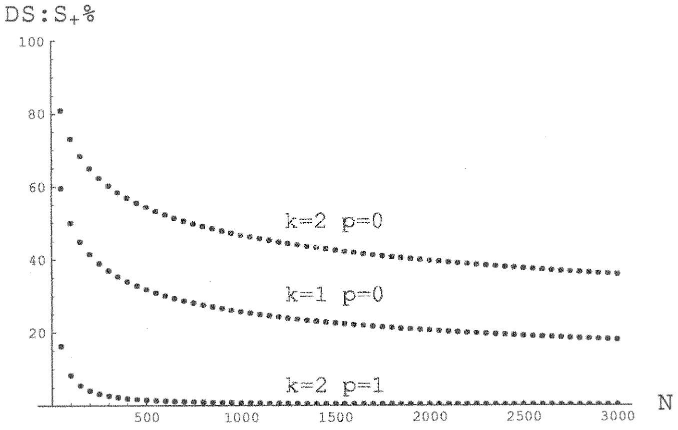
В выражении (52) мы имеем дело с разностью двух абсолютно сходящихся числовых рядов. Принимая во внимание симметрию спектра, кажется естественным на каждом шаге суммирования рассматривать разность вкладов от t-канального и s-канального полюсов. Для нескольких начальных членов эта разность имеет определенный (положительный в случае $k > p$) знак, но, начиная с некоторого номера $N_+(k,p)$, зависящего от значений k и p, знак разности вкладов изменяется на противоположный. Сходимость ряда разностей к нулю обеспечивается тем, что сумма отрицательных вкладов большого количества далеких полюсов постепенно компенсирует суммарный положительный вклад конечного числа начальных.

В качестве величины, характеризующей сходимость, предлагается выбрать отношение

$$D \equiv \frac{\Delta S(N)}{S_+} \ ,$$

где $\Delta S(N)$ – невязка, оставшаяся после учета $2N$ полюсов (N штук в s- канале и столько же – в t-канале), а S_+ – сумма *всех* положительных вкладов (соответствующих конечному числу начальных членов ряда разностей)[12]. С помощью величины D мы имеем возможность количественно охарактеризовать скорость сходимости ряда по полюсам в правилах сумм (52). В быстро сходящихся правилах сумм достаточно учесть совсем небольшое число полюсов, чтобы относительная невязка значительно уменьшилась.

На графике представлена зависимость относительной невязки от числа учтенных полюсов для первых трех правил сумм из (52).



Правило сумм $k=2, p=1$ сходится сравнительно быстро. После учета 100 первых полюсов[13] относительная невязка составляет около 8% (точность в 1% достигается после учета 700 полюсов). Таким образом, из этого условия можно получить достаточно хорошо выполняющуюся связь, например, между вычетами в первых 100 полюсах. Соотношения $k=1, p=0$ и $k=2, p=0$ для

[12] Разумеется имеет смысл рассматривать только $N > N_+$.

[13] В каждом из каналов

этого не подходят. Правило сумм $k = 1, p = 0$ сходится очень медленно: после учета 3000 членов невязка составляет 18%; чтобы сократить ее до 9%, необходимо учесть уже 22000 членов. Еще медленнее сходится правило сумм $k = 2, p = 0$.

Наиболее быстро сходящимися являются правила сумм с $p = k - 1$ при больших k. Можно ожидать, что при достаточно больших k эти правила сумм будут насыщаться достаточно быстро. Следует принять во внимание, что $r_n^{(p)}(t) = 0$ при $p > n+1$, и первые полюса не дают вклада. Таким образом, эти правила сумм могут служить источником выполняющихся с высокой точностью соотношений между параметрами относительно небольшого числа резонансов с номерами $N > p$.

Рассмотренный пример позволяет лишь качественно понять основные черты конструкции ограничений, возникающих из условий бутстрапа. В реальных ситуациях, как правило, известны параметры лишь нескольких легчайших резонансов. Тем удивительнее то, что, как показано в [6], [7] и [10], некоторые из ограничений бутстрапа насыщаются чрезвычайно быстро и позволяют получать соотношения, известные из эксперимента, но ранее теоретически не объясненные. Это обстоятельство наводит на мысль о том, что B-функция дает разумное описание лишь «хвоста» резонансного спектра, параметры же низших состояний в большей степени определяются такими свойствами динамики как киральная симметрия.

11. Заключение

Примеры, рассмотренные выше, показывают, что метод форм Коши удобен для получения соотношений между параметрами мероморфных функций двух переменных. Нетрудно понять, что, при надлежащей формулировке условий аналитичности, этот метод, в принципе, можно обобщить и на случаи большего числа переменных. Однако, практическая польза такого подхода к изучению неупругих амплитуд в эффективных теориях едва ли окажется ощутимой. Уже в случае простейшего неупругого процесса $2 \to 3$ для описания кинематики требуется 5 независимых переменных; это приводит к непомерному раздуванию объема формул. Нужен более мощный аппарат, позволяющий компактифицировать выкладки.

Случай же бинарных процессов интересен тем, что позволяет относительно просто получать соотношения для параметров спектра резонансов, обусловленные требованиями корректности схемы пертурбативного вычисления S-матрицы. Как мы уже упоминали, многие из этих соотношений оказались в превосходном согласии с данными эксперимента. Это показывает, что даже столь сложная конструкция как эффективная теория поля может оказаться полезной с точки зрения анализа данных.

Мы признательны А. А. Андрианову, А. Н. Васильеву, М. И. Вязовскому, М. В. Полякову, В. В. Суханову, Х. Нильсену, В. Чаянову и Дж. Шехтеру за обсуждение многих проблем, связанных с концепцией эффективной теории.

Литература

1. S. Weinberg, — Phys. Rev. **133** (1964), B1318; ibid **134** (1964), B882; ibid **135** (1964), B1049; ibid **138** (1965), B988; ibid **181** (1969), 1893.
2. Ю. В. Новожилов, — Введение в теорию элементарных частиц, “Наука”, Москва (1972).
3. Ю. Б. Румер, А. И. Фет, — Теория групп и квантованные поля, “Наука”, Москва (1977).
4. S. Weinberg, — The Quantum Theory of Fields, Vols. 1–3, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
5. S. Weinberg, — Physica A **96** (1979), 327.
6. V. Vereshagin, — Phys. Rev. D**55** (1997), 5349.
7. A. Vereshagin and V. Vereshagin, — Phys. Rev. D**59** (2000), 016002.
8. J. C. Collins, — Renormalization, Cambridge University Press, Cambridge (1984).
9. P. H. Frampton, — Dual Resonans Models and Superstrings, World Scientific Publ. (1986).
10. A. Vereshagin, — πN Newsletter **16** (2002), 426.
11. S. Weinberg, Phys. Rev. **130** (1963), 776; ibid **131** (1963), 440; ibid **133** (1964), B232;
M. Scadron and S. Weinberg, — Phys. Rev. **133** (1964), B1589;
M. Scadron, S. Weinberg, and J. Wright, — Phys. Rev. **135** (1964), B202.
12. M. L. Nekrasov, — Preprint IHEP 2001-9; e-archive hep-ph/0102283 (2001).
13. B. A. Kniehl and A. Sirlin, — Phys. Letters **B530** (2002), 129.
14. M. Veltman, — Physica **29** (1963), 186.
15. Б. В. Шабат, — Введение в комплексный анализ. “Наука”, Москва (1969).
16. C. Lovelace, — Phys. Letters **28B** (1968), 264.
17. G. Veneziano, — Nuovo Cimento A **57** (1968), 190.

Vereshagin A. V., Vereshagin V. V., Semenov-Tian-Shansky K. M. Effective theories and bootstrap equations.

In this paper we consider the general properties of effective field theories. We note that the freedom to fix the renormalization conditions in the effective field theory is not as large as it seems. The consideration of minimal set of correctness requirements of the perturbative scheme based on the Dyson's formula for S-matrix leads to severe restriction on the essential parameters of the theory and hence on the possible set of renormalization conditions.

In the first part of this paper we make a short review of the structure of the localizable effective field theories. We discuss the necessary conditions that ensure the correctness of the first step of the iterative scheme of calculation of S-matrix – the construction of the tree-level amplitudes. In the second part we bring the examples that demonstrate the main stages of acquisition and analysis of the system of bootstrap equations.

Бергенский университет
E-mail: Alexander.Vereshagin@fi.uib.no

Поступило 18 ноября 2002 г.

Санкт-Петербургский
государственный университет
E-mail: vvv@av2467.spb.edu
semenov@pdmi.ras.ru