Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 290, 2002 г.

М. А. Нудельман

СТРУНА КРЕЙНА И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ МАКСИМАЛЬНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Предметом изучения данной статьи является оператор

$$B_S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{d\mathcal{M}(x)} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

действующий на пары функций

$$\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} \in L^2_{\frac{1}{2}dx}[0,\mathcal{L}\rangle \oplus L^2_{\frac{1}{2}d\mathcal{M}(x)}[0,\mathcal{L}\rangle.$$

Здесь S – струна (см. ниже), $\mathcal{L}$ – положительное число или $+\infty$, $\mathcal{M}(0)=0$. Знак "$\rangle$" обозначает закрывающую квадратную скобку, если $\mathcal{L}+\mathcal{M}(\mathcal{L}-0)<+\infty$ (случай регулярной струны S) и закрывающую круглую скобку, если $\mathcal{L}+\mathcal{M}(\mathcal{L}-0)=+\infty$ (случай сингулярной струны S).

Формула (1) задает оператор B_S при наличии граничного условия на правом конце промежутка $[0,\mathcal{L}\rangle$, которое будет уточнено в дальнейшем, и граничного условия

$$v_{1-}(0)=v_2(0). \tag{2}$$

Индекс "$-$" в левой части равенства означает значение слева; функция $v_1(x)$ может иметь скачки в тех точках, в которых имеет скачок функция $\mathcal{M}(x)$; см. ниже описание области определения оператора B_S.

Замкнутый (возможно, неограниченный) оператор B, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве Y, мы называем *максимальным антиаккретивным*, если для каждого элемента y области определения $\mathfrak{D}_B$ оператора B имеет место неравенство $\operatorname{Re}(By,y)\leqslant 0$ (скобки обозначают скалярное произведение) и $(I-B)\mathfrak{D}_B=Y$.

Мы покажем, что при любых $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}(x)$ оператор B_S является максимальным антиаккретивным.

Равенство

$$f(x) = \frac{dg(x)}{d\mathcal{M}(x)}, \quad x \in [0, \mathcal{L}\rangle,$$

означает, что

$$g(x) = g(0) + \int\limits_0^x f(\xi) d\mathcal{M}(\xi), \quad x \in [0, \mathcal{L}\rangle;$$

интеграл понимается в смысле Лебега–Стилтьеса.

Можно трактовать $\mathcal{M}(x)$ как функцию распределения масс, насаженных на нить, натянутую на промежутке $[0, \mathcal{L}\rangle$.

Считая силу натяжения равной 1, получаем такое уравнение малых колебаний нагруженной нити (струны):

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x \partial \mathcal{M}(x)}, \quad x \in [0, \mathcal{L}\rangle, \quad t \in [0, +\infty),$$

где w – смещение точки нити относительно положения равновесия, t – время.

Замена переменных

$$\widetilde{v}_1(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}, \quad \widetilde{v}_2(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \tag{3}$$

приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial \widetilde{v}_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial \widetilde{v}_2(x,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \widetilde{v}_2(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial \widetilde{v}_1(x,t)}{\partial \mathcal{M}(x)}, \tag{4}$$

естественно порождающей оператор B_S. Граничное условие (2) интерпретируется как единичное трение, поскольку при малых колебаниях вертикальная составляющая F силы, приложенной к левому концу струны, равна $-\frac{\partial w}{\partial x}$, и мы получаем (см. (3)):

$$F = -\frac{\partial w}{\partial t}$$

(см. по поводу струны с трением работы [1–3]).

Ниже мы изучим некоторые спектральные свойства оператора B_S, включив его в качестве основного оператора в некоторую консервативную систему рассеяния [4] подобно тому, как спектральные свойства сжатий изучают, включив их в унитарный узел.

Пусть Y, $\mathfrak{N}^-$, $\mathfrak{N}^+$ – сепарабельные (возможно, конечномерные) гильбертовы пространства. Пусть $\alpha = (Y, \mathfrak{N}^-, \mathfrak{N}^+; T, F, G, H)$ есть унитарный узел. Это означает, что четверка (T, F, G, H) порождает блочный оператор

$$\begin{bmatrix} T & F \\ G & H \end{bmatrix}, \tag{5}$$

изометрически отображающий пространство $Y \oplus \mathfrak{N}^-$ на пространство $Y \oplus \mathfrak{N}^+$.

Оператор T с точностью до унитарного подобия определяется характеристической функцией операторного узла α:

$$\theta_\alpha(z) = H + zG(I - zT)^{-1}F, \quad |z| < 1,$$

значения которой суть ограниченные линейные операторы, действующие из $\mathfrak{N}^-$ в $\mathfrak{N}^+$.

Унитарному операторному узлу α можно сопоставить линейную стационарную динамическую систему λ:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= Ty_k + F\varphi_k^-, \\ \varphi_k^+ &= Gy_k + H\varphi_k^-, \end{aligned} \quad k \geqslant 0, \quad y_k \in Y, \quad \varphi_k^- \in \mathfrak{N}^-, \quad \varphi_k^+ \in \mathfrak{N}^+, \tag{6}$$

с дискретным временем, причем свойство изометричности соответствующего блочного оператора, как легко видеть, может быть записано в виде

$$\|y_{k+1}\|^2 - \|y_k\|^2 = \|\varphi_k^-\|^2 - \|\varphi_k^+\|^2, \quad k \geqslant 0. \tag{7}$$

Равенство (7) интерпретируется как баланс энергии состояния, входа и выхода системы. Совокупность свойств сюръективности и изометричности оператора (5) равносильна тому, что равенства (7) выполнены как для системы λ, так и для сопряженной системы λ^*, определяемой уравнениями

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= T^*y_k + G^*\varphi_k^-, \\ \varphi_k^+ &= F^*y_k + H^*\varphi_k^-, \end{aligned} \quad k \geqslant 0, \quad y_k \in Y, \quad \varphi_k^- \in \mathfrak{N}^+, \quad \varphi_k^+ \in \mathfrak{N}^-.$$

В этом случае система λ называется *консервативной системой рассеяния с дискретным временем.*

Отметим, что характеристическая функция $\theta_\alpha(z)$ узла α совпадает с передаточной функцией $\theta_\lambda(z)$ системы λ.

Теория консервативных (и, в более общем плане, пассивных) систем рассеяния с дискретным временем, разработанная Д. З. Аровым [5–7], была перенесена на случай непрерывного времени Д. З. Аровым и автором [4]. В статье [4] указывается, что для случая ограниченного основного оператора B консервативной системы рассеяния λ_C с непрерывным временем характеристическая функция оператора B совпадает с передаточной функцией системы λ_C.

Основные сведения о консервативных системах рассеяния с непрерывным временем приводятся в §1 данной статьи.

Легко показать (см. ниже лемму 3), что всякий максимальный антиаккретивный оператор B может быть включен в качестве основного оператора в консервативную систему рассеяния λ_C с непрерывным временем. Как и в случае сжимающего оператора, передаточная функция $\theta_{\lambda_C}(p)$ системы λ_C определена в существенном однозначно (см. в тексте лемму 3). Если оператор B прост (то есть генерируемая им сжимающая C_0-полугруппа вполне неунитарна), то мы называем эту функцию характеристической функцией оператора B и обозначаем ее через $\theta_B(p)$, $\theta_B(p) = \theta_{\lambda_C}(p)$, $\operatorname{Re} p > 0$. При этом функция $\theta_B(-ip)$ есть характеристическая функция диссипативного оператора $-iB$, см. обсуждение в [4]. Отметим, что если $T = (I+B)(I-B)^{-1}$ – преобразование Кэли оператора B, то, согласно [8], оператор T сжимающий, простой и, согласно [4], его характеристическая функция $\theta_T(z)$ связана с характеристической функцией $\theta_B(p)$ оператора B преобразованием Кэли над аргументом:

$$\theta_B(p) = \theta_T\left(\frac{1-p}{1+p}\right). \qquad (8)$$

Характеристическая функция $\theta_{B_S}(p)$ оператора струны B_S может быть интерпретирована как матрица рассеяния струны S. Дело в том, что теория консервативных систем рассеяния тесно связана с теорией рассеяния Лакса–Филлипса [9], а именно: существует каноническая биекция между консервативными системами рассеяния и унитарными полугруппами Лакса–Филлипса в смысле Ю. Л. Шмульяна [10] (см. также [11]; для дискретного случая описание этой биекции имеется во введении к статье автора [12]). Возможность вложения теории неоднородной струны в схему Лакса–Филлипса известна [3, 7]. В данной статье мы для полноты изложения приводим построение полугруппы Лакса–Филлипса, соответствующей неоднородной струне (§2).

В §3 приведено вычисление коэффициентов консервативной системы рассеяния λ_{C_S}, описывающей малые колебания неоднородной струны.

В §4 доказана простота этой системы или, что то же, простота оператора струны B_S.

В §5 доказана формула, связывающая $\theta_{B_S}(p)$ с одним из стандартных объектов теории струны (коэффициентом динамической податливости [13, 14]).

В §6 в терминах главной спектральной меры струны [15] получен критерий того, что C_0-полугруппа $V_S(t)$, генерируемая оператором B_S, сильно стремится к 0 при $t \to +\infty$. В других терминах это означает, что характеристическая функция оператора B_S является внутренней; в этом случае исследование спектральных свойств оператора B_S существенно упрощается.

Наконец, в §7 результат статьи [2] о полноте оператора струны обобщен на случай, когда главная спектральная мера струны дискретна. Отметим, что как сам этот результат, так и критерий дискретной главной спектральной меры [16] формулируются в терминах распределения масс $\mathcal{M}(x)$.

Автор выражает признательность Д. З. Арову за многочисленные полезные обсуждения.

§1. Основные сведения о консервативных системах рассеяния с непрерывным временем

Пусть B – замкнутый (возможно, неограниченный) оператор, действующий в конечномерном или сепарабельном гильбертовом пространстве Y. Рассмотрим сопряженный к нему оператор B^*. Область определения $\mathfrak{D}_{B^*}$ этого оператора естественным образом наделяется нормой графика: $\|y\|_+^2 = \|y\|^2 + \|B^* y\|^2$ и, в силу замкнутости оператора B^*, является гильбертовым пространством относительно этой нормы. Обозначим это гильбертово пространство через $Y_+(B^*)$.

Введем следующее обозначение: $Y_-(B^*) = (Y_+(B^*))^*$. Так как для любого вектора $y \in Y$ функционал $f_y(\xi) = (\xi, y)_Y$, $\quad \xi \in \mathfrak{D}_{B^*}$, где $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_Y$ есть скалярное произведение в пространстве Y, непрерывен в метрике $Y_+(B^*)$, то имеет место включение $Y_+(B^*) \subset$

$Y \subset Y_-(B^*)$. Как известно, такая конструкция называется оснащенным гильбертовым пространством (см., например, [17]).

Оператор B^* может рассматриваться как ограниченный оператор, действующий из $Y_+(B^*)$ в Y. Сопряженный оператор $\widehat{B}$ называется естественным расширением оператора B (см., например, [18]).

Пусть B – генератор некоторой C_0-полугруппы в пространстве Y. Консервативная система рассеяния λ_C с непрерывным временем имеет вид (см. [4])

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \widehat{B}y(t) + L\varphi^{(-)}(t), \\ \varphi^{(+)}(t) &= N\big(y(t), \varphi^{(-)}(t)\big); \end{aligned} \tag{9}$$

здесь $y(t) \in Y$ – состояние системы, $\varphi^{(-)}(t) \in \mathfrak{N}^-$ – ее вход, $\varphi^{(+)}(t) \in \mathfrak{N}^+$ – ее выход; $\mathfrak{N}^-$, $\mathfrak{N}^+$ – конечномерные или сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства; L есть ограниченный линейный оператор, действующий из $\mathfrak{N}^-$ в $Y_-(B^*)$. Предполагается, что множество

$$\mathfrak{D}_{B,L} = \Big\{(y, \varphi^{(-)}) \in Y \oplus \mathfrak{N}^- \mid \widehat{B}y + L\varphi^{(-)} \in Y\Big\}$$

является плотным линеалом в пространстве $Y \oplus \mathfrak{N}^-$ и гильбертовым пространством относительно нормы

$$\big\|(y, \varphi^{(-)})\big\|^2_{\mathfrak{D}_{B,L}} = \|y\|^2 + \|\varphi^{(-)}\|^2 + \|\widehat{B}y + L\varphi^{(-)}\|^2.$$

Оператор N предполагается ограниченным линейным оператором, действующим из пространства $\mathfrak{D}_{B,L}$ в пространство $\mathfrak{N}^+$.

Известно [18], что включение $\widehat{B}y \in Y$ равносильно включению $y \in \mathfrak{D}_B$ или, в других обозначениях, $y \in Y_+(B)$. Отсюда следует, что оператор N порождает ограниченный линейный оператор $M : Y_+(B) \to \mathfrak{N}^+$ по формуле $My = N(y, 0)$. Можно показать [4], что включение $(y, \varphi^{(-)}) \in \mathfrak{D}_{B,L}$ влечет включение $y-(pI-\widehat{B})^{-1}L\varphi^{(-)} \in \mathfrak{D}_B$; здесь p – регулярная точка оператора $\widehat{B}$, I – единичный оператор в пространстве $Y_-(B^*)$. Очевидное тождество

$$N(y, \varphi^{(-)}) = M\big(y - (pI - \widehat{B})^{-1}L\varphi^{(-)}\big) + N\big((pI - \widehat{B})^{-1}L\varphi^{(-)}, \varphi^{(-)}\big)$$

показывает, что коэффициенты системы (9) однозначно определяются четырьмя объектами: B, L, M и $\theta_{\lambda_C}(p)$, где $\theta_{\lambda_C}(p)$ – передаточная функция системы (9), определяемая формулой

$$\theta_{\lambda_C}(p)\varphi^{(-)} = N\big((pI-\widehat{B})^{-1}L\varphi^{(-)}, \varphi^{(-)}\big).$$

Система (9) называется консервативной, если для нее выполнено равенство

$$\frac{d\|y(t)\|^2}{dt} = \big\|\varphi^{(-)}(t)\big\|^2 - \big\|\varphi^{(+)}(t)\big\|^2$$

или, более точно,

$$2\operatorname{Re}\big(\widehat{B}y + L\varphi^{(-)}, y\big)_Y = \big\|\varphi^{(-)}\big\|^2 - \big\|N(y,\varphi^{(-)})\big\|^2, \quad (y,\varphi^{(-)}) \in \mathfrak{D}_{B,L},$$

и аналогичное равенство выполнено для сопряженной системы, определяемой четверкой $\big(B^*, M^*, L^*, (\theta_{\lambda_C}(\overline{p}))^*\big)$.

§2. Неоднородная струна как объект теории Лакса–Филлипса

Согласно [10], унитарной полугруппой Лакса–Филлипса называется унитарная C_0-полугруппа $W(t)$, действующая в ортогональной сумме $L^2([0,+\infty),\mathfrak{N}^+)\oplus Y\oplus L^2([0,+\infty),\mathfrak{N}^-)$ и обладающая следующими свойствами:

1) первое слагаемое в ортогональной сумме инвариантно относительно $W(t)$ $(t\geqslant 0)$, причем полугруппа $W(t)$ действует на этом подпространстве как полугруппа правых сдвигов:

$$(W(t)f)(u) = \begin{cases} f(u-t), & u\geqslant t, \\ 0, & u<t, \end{cases} \qquad f\in L^2([0,+\infty),\mathfrak{N}^+); \tag{10}$$

2) третье слагаемое в ортогональной сумме инвариантно относительно $W(t)^*$ $(t\geqslant 0)$, причем полугруппа $W(t)^*$ действует на этом подпространстве как полугруппа правых сдвигов (см. формулу (10)).

Пространство $L^2([0,+\infty),\mathfrak{N}^+)$ называется уходящим, а пространство $L^2([0,+\infty),\mathfrak{N}^-)$ – приходящим подпространством полугруппы $W(t)$.

При отказе от условия унитарности полугруппы $W(t)$ определение несколько усложняется [10].

Пусть задано распределение масс $\mathcal{M}(x)$ на промежутке $[0,\mathcal{L}\rangle$ (см. введение).

В случае регулярной струны S $(\mathcal{L}+\mathcal{M}(\mathcal{L}-0)<+\infty)$ мы будем различать два варианта граничного условия на правом конце струны: $v_{1+}(\mathcal{L})=0$ либо $v_2(\mathcal{L})=0$.

В случае сингулярной струны S $(\mathcal{L}+\mathcal{M}(\mathcal{L}-0)=+\infty)$ роль граничного условия на правом конце струны играет неравенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\mathcal{L}}|v_1(x)|^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\mathcal{L}}|v_2(x)|^2d\mathcal{M}(x)<+\infty.$$

Продолжим струну S на промежуток $(-\infty,0]$ нитью, натянутой единичной силой и нагруженной массой единичной плотности: $\mathcal{M}(x)=x$ при $x<0$.

В качестве граничного условия на $-\infty$ рассмотрим неравенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0}|v_1(x)|^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0}|v_2(x)|^2d\mathcal{M}(x)<+\infty.$$

На всем протяжении струны от $-\infty$ до $\mathcal{L}$ потребуем, чтобы функция $v_1(x)$ была абсолютно непрерывной относительно меры $d\mathcal{M}(x)$ и ее производная принадлежала $L^2_{\frac{1}{2}d\mathcal{M}(x)}$, а функция $v_2(x)$ была абсолютно непрерывной относительно меры dx и ее производная принадлежала $L^2_{\frac{1}{2}dx}$; предположим выполненными граничные условия на $-\infty$ и на правом конце струны.

Рассмотрим полученное множество пар $\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}$ как область определения оператора $\widetilde{B}_S$, заданного формулой (1) в пространстве

$$\widetilde{Y}_S=L^2_{\frac{1}{2}dx}(-\infty,\mathcal{L}\rangle\oplus L^2_{\frac{1}{2}d\mathcal{M}(x)}(-\infty,\mathcal{L}\rangle$$

с дополнительным ограничением: элементы первого слагаемого ортогональной суммы должны обращаться в константу на промежутках, свободных от массы.

Теорема 1. *Оператор* $\widetilde{B}_S$ *кососамосопряженный.*

Доказательство. Со всякой струной стандартным образом связывается каноническая система (см., например, [1]), а для канонической системы соответствующий результат известен (см., например, [28]). $\square$

Таким образом, оператор $\widetilde{B}_S$ генерирует унитарную C_0-полугруппу $\widetilde{V}_S(t)$ в пространстве $\widetilde{Y}_S$ (см., например, [9, приложение 1]).

При $x \leqslant 0$ сделаем замену переменной:

$$a(x) = \frac{1}{2}(v_1(x) + v_2(x)), \quad b(x) = \frac{1}{2}(v_1(x) - v_2(x)). \tag{11}$$

Эти формулы задают изоморфизм пространства $L^2_{\frac{1}{2}dx}(-\infty, 0] \oplus L^2_{\frac{1}{2}d\mathcal{M}(x)}(-\infty, 0] = L^2_{\frac{1}{2}dx}(-\infty, 0] \oplus L^2_{\frac{1}{2}dx}(-\infty, 0]$ на пространство $L^2_{dx}(-\infty, 0] \oplus L^2_{dx}(-\infty, 0]$. Другими словами, формулы (11) задают изоморфизм пространства $\widetilde{Y}_S$ на пространство

$$Y^\sharp_S = L^2(-\infty, 0] \oplus Y_S \oplus L^2(-\infty, 0], \tag{12}$$

где

$$Y_S = L^2_{\frac{1}{2}dx}[0, \mathcal{L}\rangle \oplus L^2_{\frac{1}{2}d\mathcal{M}(x)}[0, \mathcal{L}\rangle,$$

с дополнительным ограничением: элементы первого слагаемого ортогональной суммы должны обращаться в константу на промежутках, свободных от массы.

В силу уравнений (4), при $x < 0$ функция

$$\widetilde{a}(x, t) = \frac{1}{2}(\widetilde{v}_1(x, t) + \widetilde{v}_2(x, t))$$

зависит только от суммы аргументов $x + t$.

Считая, что функции $a(x)$ заполняют первое слагаемое в ортогональной сумме (12), получаем:

$$\big(V^\sharp_S(t)a\big) = \begin{cases} a(x+t), & x < -t, \\ 0, & -t \leqslant x < \mathcal{L} \end{cases}$$

(здесь $V^\sharp_S(t)$ – полугруппа, соответствующая полугруппе $\widetilde{V}_S(t)$ при изоморфизме пространств $\widetilde{Y}_S$ и $Y^\sharp_S$). Другими словами, первое слагаемое ортогональной суммы (12) инвариантно относительно полугруппы $V^\sharp_S(t)$, и эта полугруппа действует на нем как полугруппа правых сдвигов.

В свою очередь, функция $\widetilde{b}(x, t)$ зависит только от разности аргументов $x - t$. Считая, что функции $b(x)$ заполняют третье слагаемое ортогональной суммы (12) и учитывая равенство

$V_S^\sharp(t)^* = V_S^\sharp(-t)$, ($V_S^\sharp(t)$, $-\infty < t < +\infty$, – унитарная группа), получим аналогичным образом, что это слагаемое инвариантно относительно полугруппы $V_S^\sharp(t)^*$ ($t \geqslant 0$), и эта полугруппа действует на нем как полугруппа правых сдвигов. Таким образом, исходная струна порождает унитарную полугруппу Лакса–Филлипса $V_S^\sharp(t)$ в пространстве $Y^\sharp$.

§3. Коэффициенты консервативной системы рассеяния, соответствующей полугруппе $V_S^\sharp(t)$

Согласно [4] (см. также [10]), всякой унитарной полугруппе Лакса–Филлипса, в частности, полугруппе $V_S^\sharp(t)$, канонически соответствует некоторая консервативная система рассеяния. Обозначим консервативную систему рассеяния, соответствующую полугруппе $V_S^\sharp(t)$, через λ_{C_S}. Обозначим ее коэффициенты через B_S, L_S и N_S. Ниже в этом параграфе мы покажем, что B_S совпадает с тем оператором, который обсуждается во введении.

Опишем сперва линеал $\mathfrak{D}_{B_S, L_S}$ и оператор N_S (смысл обозначений см. в §1). В работе [10] приведено следующее описание области определения $\mathfrak{D}_{B^\sharp}$ полугруппы Лакса–Филлипса $V^\sharp(t)$ (применительно к нашему случаю мы заменяем полуось $[0, +\infty)$ на полуось $(-\infty, 0]$):

$$\mathfrak{D}_B^\sharp = \Big\{\langle f(\tau), y, g(t)\rangle | g(t) \in W_2^1\big((-\infty, 0]; \mathfrak{N}^-\big),\ y \in Y,$$

$$f(\tau) \in W_2^1\big((-\infty, 0]; \mathfrak{N}^+\big),\ \widehat{B}y + Lg(0) \in Y,\ f(0) = N(y, g(0))\Big\}; \quad (13)$$

здесь B, L, N – коэффициенты системы, соответствующей полугруппе $V^\sharp(t)$; W_2^1 – пространство Соболева.

С другой стороны, по построению полугруппы $V_S^\sharp(t)$, из описания области определения $\mathfrak{D}_{\widetilde{B}_S}$ следует такое описание множества $\mathfrak{D}_{B_S^\sharp}$ (здесь $B_S^\sharp$ – генератор полугруппы $V_S^\sharp(t)$):

$$\mathfrak{D}_{B_S^\sharp} = \Big\{\langle f_S(\tau), y_S, g_S(t)\rangle | g_S(t) \in W_2^1(-\infty, 0]; \quad f_S(\tau) \in W_2^1(-\infty, 0];$$

$$y_S = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in L^2_{\frac{1}{2}dx}[0, \mathcal{L}\rangle \oplus L^2_{\frac{1}{2}d\mathcal{M}(x)}[0, \mathcal{L}\rangle\Big\};$$

функция $v_1(x)$ абсолютно непрерывна относительно меры $d\mathcal{M}(x)$ и ее производная принадлежит $L^2_{\frac{1}{2}d\mathcal{M}(x)}[0, \mathcal{L}\rangle$; функция $v_2(x)$ абсолютно непрерывна относительно dx и ее производная принадлежит $L^2_{\frac{1}{2}dx}[0,\mathcal{L}\rangle$; выполнено граничное условие на правом конце промежутка $[0,\mathcal{L}\rangle$; справедливы равенства $g_S(0)=\frac{1}{2}(v_{1-}(0)-v_2(0))$, $f_S(0)=\frac{1}{2}(v_{1-}(0)+v_2(0))$.

Сопоставляя это описание с описанием (13), находим:

$$\mathfrak{D}_{B_S,L_S}=\left\{(y,\varphi^{(-)})|y=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\in Y_S,\quad \varphi^{(-)}\in\mathbb{C},\right.$$

выполнены все условия абсолютной непрерывности для функций v_1 и v_2; выполнено граничное условие на правом конце промежутка $[0,\mathcal{L}\rangle$; на левом его конце выполнено неоднородное граничное условие $\left.\dfrac{1}{2}(v_{1-}(0)-v_2(0))=\varphi^{(-)}\right\}$;

$$N_S(y,\varphi^-)=\frac{1}{2}(v_{1-}(0)+v_2(0)). \tag{14}$$

Так как включение $(y,0)\in\mathfrak{D}_{B_S,L_S}$ равносильно включению $y\in\mathfrak{D}_{B_S}$ [18], то для основного оператора B_S системы λ_{C_S} область определения задается так же, как $\mathfrak{D}_{B_S,L_S}$, но граничное условие на левом конце промежутка $[0,\mathcal{L}\rangle$ имеет вид (2). Как показано в [10],

$$B_S^\sharp\big(f_S(\tau),y_S,g_S(t)\big)=\big(f'(\tau),\widehat{B}_S y_S+L_S g_S(0),-g_S'(\tau)\big)$$

(штрих означает производную). Следовательно, в силу определения оператора $B_S^\sharp$ (см. §2)

$$\widehat{B}_S\begin{pmatrix}v_1(x)\\v_2(x)\end{pmatrix}+L_S\varphi^-=\begin{pmatrix}0&\dfrac{d}{dx}\\\dfrac{d}{d\mathcal{M}(x)}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1(x)\\v_2(x)\end{pmatrix}$$

$$\text{при}\quad\left(\begin{pmatrix}v_1(x)\\v_2(x)\end{pmatrix},\varphi^{(-)}\right)\in\mathfrak{D}_{B_S,L_S}; \tag{15}$$

в частности, при $\varphi^{(-)}=0$ мы получаем, что оператор B_S задается на своей области определения формулой (1).

Подставляя снова значение $\varphi^{(-)}=0$, из формулы (14) получаем:

$$M_S\begin{pmatrix}v_1(x)\\v_2(x)\end{pmatrix}=v_{1-}(0)\quad(=v_2(0))\quad\text{при}\quad\begin{pmatrix}v_1(x)\\v_2(x)\end{pmatrix}\in\mathfrak{D}_{B_S}.$$

Чтобы выяснить, как действует функционал $L_S \in Y_-(B^*)$, рассмотрим сопряженную систему $\lambda^*_{C_S}$. Эта система порождена унитарной группой Лакса–Филлипса $V_S^\sharp(t)^* = V_S^\sharp(-t)$, генерируемой оператором $-B_S^\#$. Легко видеть, что для такой группы функции $a(x)$ и $b(x)$ (см. формулу (11)), а с ними приходящее и уходящее подпространства полугруппы Лакса–Филлипса, меняются ролями – поэтому для сопряженного оператора B_S^*, задаваемого формулой

$$B_S^* = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{d\mathcal{M}(x)} & 0 \end{pmatrix},$$

граничное условие на левом конце выглядит так: $v_{1-}(0) = -v_2(0)$ (граничное условие на правом конце такое же, как у оператора B_S). Оператор N_{S^*} действует по формуле

$$N_{S^*}\left(\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} + \varphi^{(-)}\right) = \frac{1}{2}(v_{1-}(0) - v_2(0)).$$

В частности, для $\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}_{B_S^*}$ имеем:

$$M_{S^*}\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} = v_{1-}(0) \quad (= -v_2(0)).$$

Но, по определению сопряженной системы, $M_{S^*} = L_S^*$, то есть

$$L_S^*\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} = v_{1-}(0) \quad (= -v_2(0)), \quad \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} \in Y_+(B_S^*).$$

Оператор L_S действует из $\mathbb{C}$ в $Y_-(B^*)$, поэтому естественно отождествить его с функционалом $L_S 1 \in Y_-(B_S^*)$. Имеем:

$$L_S\left(\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}\right) = L_S 1\left(\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}\right) = L_S^*\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}\cdot 1, \ \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} \in Y_+(B_S^*),$$

откуда

$$L_S\left(\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}\right) = v_{1-}(0) \ \ (= -v_2(0)), \quad \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} \in Y_+(B_S^*).$$

§4. Простота оператора B_S

Лемма 1. *Основной оператор B всякой консервативной системы λ_C вида (9) является максимальным антиаккретивным оператором.*

Доказательство. В статье [4] показано, что следующие формулы переводят консервативную систему рассеяния с непрерывным временем λ_C вида (9) в консервативную систему рассеяния с дискретным временем λ вида (6):

$$\begin{aligned} &T = (I+B)(I-B)^{-1}, \quad F = \sqrt{2}\,(I-\widehat{B})^{-1}L, \\ &G = \sqrt{2}\,M(I-B)^{-1}, \qquad H = \theta_{\lambda_C}(1) = N\big((I-\widehat{B})^{-1}L \oplus I_{\mathfrak{N}^-}\big), \end{aligned} \tag{16}$$

где $I_{\mathfrak{N}^-}$ – единичный оператор в пространстве $\mathfrak{N}^-$.

Так как основной оператор T консервативной системы рассеяния λ с дискретным временем является сжимающим, то преобразование Кэли оператора B есть сжатие, откуда, согласно [8], B есть максимальный антиаккретивный оператор, что и требовалось. $\square$

Лемма 2. *Если последовательность* $\left\{\begin{pmatrix} v_1^{(n)}(x) \\ v_2^{(n)}(x) \end{pmatrix}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset Y_+(B_S)$ *сходится к паре функций* $\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}$ *в метрике пространства* $Y_{S+}(B_S)$, *то она сходится к этой паре функций поточечно.*

Доказательство. Мы докажем поточечную сходимость $v_1^{(n)} \to v_1$; для второй компоненты доказательство аналогично.

Из сходимости $v_1^{(n)} \to v_1$ в $L^2_{\frac{1}{2}dx}$ следует, что можно выделить подпоследовательность $v_1^{(n_k)}$, сходящуюся к v_1 почти всюду по мере dx [20]. Поэтому существует точка $x_0 \in [0,\mathcal{L}\rangle$ такая, что $v_1^{(n_k)}(x_0) \to v_1(x_0)$.

Пусть $x \in [0,\mathcal{L}\rangle$ – произвольная точка. Имеем:

$$v_1(x) = v_1(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dv_1(\xi)}{d\mathcal{M}(\xi)}\,d\mathcal{M}(\xi) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(v_1^{(n_k)}(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dv_1^{(n_k)}(\xi)}{d\mathcal{M}(\xi)}\, d\mathcal{M}(\xi) \right) = \lim_{k\to\infty} v_1^{(n_k)}(x);$$

равенство

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dv_1^{(n_k)}(\xi)}{d\mathcal{M}(\xi)}\, d\mathcal{M}(\xi) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dv_1(\xi)}{d\mathcal{M}(\xi)}\, d\mathcal{M}(\xi)$$

следует из определения метрики пространства $Y_+(B_S)$ и того факта, что на конечном отрезке сходимость в $L^2_{\frac{1}{2}d\mathcal{M}}$ влечет сходимость в $L^1_{d\mathcal{M}}$.

Тем же способом можно показать, что из любой подпоследовательности последовательности $v_1^{(n)}(x)$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к $v_1(x)$. Отсюда следует предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} v_1^{(n)}(x) = v_1(x).$$

Ввиду произвольности точки x, наше утверждение доказано для первой компоненты пары $\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}$. □

Напомним некоторые определения и обозначения спектральной теории струны Крейна [13–15].

Через $\varphi(x,\mu)$ обозначается решение уравнения

$$-\frac{d^2 g(x)}{dx\, d\mathcal{M}(x)} - \mu g(x) = 0, \tag{17}$$

удовлетворяющее начальным условиям $g(0) = 1$, $g^-(0) = 0$ (здесь и в дальнейшем знак “$-$” вверху означает производную слева по x, знак “$+$” вверху означает производную справа по x; подробности см. в [15]).

Через $\psi(x,\mu)$ обозначается решение уравнения (17), удовлетворяющее начальным условиям $g(0) = 0$, $g^-(0) = 1$.

Для регулярной струны S с уравнением (17) и граничным условием $g(\mathcal{L}) = 0$ на правом конце ассоциируется функция

$$\Gamma(\mu) = \frac{\psi(\mathcal{L},\mu)}{\varphi(\mathcal{L},\mu)}, \quad \mu \notin [0,\infty), \tag{18}$$

называемая коэффициентом динамической податливости струны.

Если граничное условие на правом конце струны S имеет вид $g^+(\mathcal{L}) = 0$, то формула (18) переписывается так:

$$\Gamma(\mu) = \frac{\psi^+(\mathcal{L}, \mu)}{\varphi^+(\mathcal{L}, \mu)}, \quad \mu \notin [0, +\infty). \tag{19}$$

В случае сингулярной струны S существует общий предел

$$\lim_{x \to \mathcal{L}-0} = \frac{\psi(x, \mu)}{\varphi(x, \mu)} = \lim_{x \to \mathcal{L}-0} = \frac{\psi^+(x, \mu)}{\varphi^+(x, \mu)}, \quad \mu \notin [0, +\infty), \tag{20}$$

который и принимается равным коэффициенту динамической податливости $\Gamma(\mu)$.

Во всех случаях имеет место интегральное представление

$$\Gamma(\mu) = \gamma + \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\tau(s)}{s - \mu}, \quad \mu \notin [0, +\infty), \tag{21}$$

где γ – неотрицательное число, $\tau(s)$ – неубывающая функция, заданная на промежутке $[0, +\infty)$ и удовлетворяющая условию

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\tau(s)}{1 + s} < +\infty.$$

Функция $\tau(s)$ называется главной спектральной функцией струны S, а порожденная ей мера Лебега–Стилтьеса $d\tau(s)$ – главной спектральной мерой струны S.

Отображение

$$f(x) \to \int\limits_0^{\mathcal{L}} \varphi(x, s) f(x) d\mathcal{M}(x) \tag{22}$$

осуществляет изоморфизм между пространствами $L^2_{d\mathcal{M}}[0, \mathcal{L}\rangle$ и $L^2_{d\tau}[0, +\infty)$; интеграл понимается в смысле сходимости в среднем. Обратное преобразование задается тем же ядром $\varphi(x, s)$.

Напомним, что максимальный антиаккретивный оператор B, действующий в пространстве Y, называется простым, если не существует разбиения $Y = Y_1 \oplus Y_2$ с $Y_1 \neq \{0\}$, порождающего разбиение $B = B_1 \oplus B_2$ такое, что оператор B_1, действующий в пространстве Y_1, является кососамосопряженным.

Теорема 2. *Для всякой струны S оператор B_S является простым максимальным антиаккретивным.*

Доказательство. Согласно §3, B_S есть основной оператор консервативной системы рассеяния λ_{C_S}. По лемме 1, он является максимальным антиаккретивным.

Допустим, что оператор B_S не прост. Тогда существует вектор $y \in \mathfrak{D}_{B_S}$, такой, что

$$\|V_S(t)y\| = \|y\|, \quad \|V_S(t)^* y\| = \|y\| \tag{23}$$

при всех $t \geqslant 0$; здесь $V_S(t)$ – C_0-полугруппа, генерируемая оператором B_S.

Известно (это легко проверяется), что сужение C_0-полугруппы $V(t)$, генерируемой некоторым оператором B в пространстве Y, на область определения $\mathfrak{D}_B$ порождает C_0-полугруппу в $Y_+(B)$. Обозначим эту полугруппу через $V^{(+)}(t)$.

Рассмотрим преобразование Лапласа

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} V_S^{(+)}(t) e^{-pt} y\,dt, \quad \operatorname{Re} p > 0, \tag{24}$$

где интеграл берется в метрике пространства $Y_{S+}(B_S)$.

Так как оператор B_S максимальный антиаккретивный, то полугруппа $V_S(t)$, а вместе с ней и полугруппа $V_S^{(+)}(t)$, сжимающая, поэтому интеграл (24) сходится.

Из сходимости в метрике $Y_{S+}(B_S)$ следует сходимость в метрике Y_S, поэтому

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} V_S(t) e^{-pt} y\,dt, \quad \operatorname{Re} p > 0. \tag{25}$$

Интеграл (25) берется в метрике пространства Y_S и равен

$$F(p) = (pI_{Y_S} - B_S)^{-1} y$$

(см., например, [21, гл. VIII]); здесь I_{Y_S} – единичный оператор пространства Y_S.

Пусть

$$y = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}, \quad \left(pI_{Y_S} - B_S\right)^{-1} y = \begin{pmatrix} w_1(x,p) \\ w_2(x,p) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим эволюцию системы λ_{C_S} с начальным условием y и входом $\varphi^{(-)}(t) \equiv 0$. В силу консервативности системы λ_{C_S} имеем:

$$\frac{d\|V_S(t)y\|^2}{dt} = 0^2 - \|MV_S(t)y\|^2, \quad t \geqslant 0,$$

откуда $M_S V_S(t) y = 0, \quad t \geqslant 0$, и, учитывая формулу для M_S (см. §3), видим, что обе компоненты пары функций $V_S(t)y \in \mathfrak{D}_{B_S}$ обращаются в 0 при $x = 0$ и любом $t \geqslant 0$. В силу леммы 2 преобразование Лапласа (24) над этой парой функций можно выполнять поточечно; в частности,

$$w_{1-}(0,p) = 0, \quad w_2(0,p) = 0, \quad \operatorname{Re} p > 0. \tag{26}$$

Распишем подробно равенство

$$\big(pI_{Y_S} - B_S\big)\begin{pmatrix} w_1(x,p) \\ w_2(x,p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} pw_1(x,p) - \frac{dw_2(x,p)}{dx} &= v_1(x), \\ pw_2(x,p) - \frac{dw_1(x,p)}{d\mathcal{M}(x)} &= v_2(x). \end{aligned}$$

Введем вспомогательную функцию $u(x,p) = \frac{1}{p} w_2(x,p)$. После несложных выкладок получаем для $u(x,p)$ такое уравнение:

$$p^2 u(x,p) - \frac{d^2 u(x,p)}{dx\, d\mathcal{M}(x)} = \frac{1}{p}\,\frac{dv_1(x)}{d\mathcal{M}(x)} + v_2(x); \tag{27}$$

заметим, что правая часть принадлежит $L^2_{d\mathcal{M}}$ в силу включения $y \in \mathfrak{D}_{B_S}$ (см. §3).

Далее, легко видеть, что $u_-(x,p) = w_{1-}(x,p) - \frac{1}{p} v_{1-}(x)$. Поэтому при $x = 0$ имеем граничное условие

$$u_-(0,p) = 0. \tag{28}$$

В случае регулярной струны S граничное условие $v_2(\mathcal{L}) = 0$ дает $u(\mathcal{L},p) = 0$, а граничное условие $v_{1+}(\mathcal{L}) = 0$ дает $u^+(\mathcal{L},p) = 0$.

В случае сингулярной струны S имеем:

$$u(x,p) \in L^2_{d\mathcal{M}}[0,\mathcal{L}), \quad u^+(x,p) \in L^2_{dx}[0,\mathcal{L}\rangle.$$

В случае, когда второй момент $\int\limits_0^{\mathcal{L}} x^2 d\mathcal{M}(x)$ конечен, имеем: $\mathcal{L} = +\infty$ и из условий $\frac{du^+(x,p)}{d\mathcal{M}(x)} \in L^2_{d\mathcal{M}}$ и $\int\limits_0^{\mathcal{L}} d\mathcal{M} < +\infty$ вытекает, что существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} u^+(x,p)$, а из условия $u^+(x,p) \in L^2_{dx}$ вытекает, что этот предел равен 0 (см. постановку краевой задачи в книге [19]).

Вводя обозначение $\mu = -p^2$ и обозначая правую часть уравнения (27) через $f_p(x)$, приходим к уравнению

$$-\frac{d^2u(x,p)}{dx d\mathcal{M}(x)} - \mu u(x,p) = f_p(x) \tag{29}$$

со сформулированными выше граничными условиями; при этом известно, что решение уравнения (29) удовлетворяет условию

$$u(0,p) = 0 \tag{30}$$

(см. (26)).

Согласно [19], решение уравнения (29) дается формулой

$$u(x,p) = \int\limits_0^{\mathcal{L}} K(x,\xi,\mu) f_p(\xi) d\mathcal{M}(\xi), \quad \mu \notin [0,+\infty), \tag{31}$$

где

$$K(x,\xi,\mu) = \begin{cases} \varphi(x,\mu)D(\xi,\mu), & x \leqslant \xi, \\ \varphi(\xi,\mu)D(x,\mu), & x \geqslant \xi, \end{cases} \tag{32}$$

а $D(x,\mu)$ – решение уравнения (17), удовлетворяющее тем же граничным условиям, что и $u(x,p)$, за исключением условия (28), которое заменяется условием $D^-(0,\mu) = -1$.

Покажем, что

$$D(x,\mu) = -\psi(x,\mu) + \Gamma(\mu)\varphi(x,\mu). \tag{33}$$

В случае регулярной струны формула (33) очевидна. В случае сингулярной струны с конечным вторым моментом эту формулу легко получить из граничного условия $\lim_{x\to\mathcal{L}} D^+(x,\mu) = 0$. Если струна сингулярна и имеет бесконечный второй момент, то можно воспользоваться формулой

$$\psi(x,\mu) - \Gamma(\mu)\varphi(x,\mu) = \int\limits_0^{\mathcal{L}} \frac{\varphi(x,s)}{s-\mu} d\tau(s), \quad \mu \notin [0,+\infty) \tag{34}$$

(см. [13]). Так как ядро $\varphi(x,s)$ осуществляет изоморфизм между пространствами $L^2_{d\tau}$ и $L^2_{d\mathcal{M}}$, то функция в левой части равенства принадлежит $L^2_{d\mathcal{M}}$, то есть удовлетворяет граничному условию на правом конце промежутка $[0,\mathcal{L}\rangle$. Так как второй момент бесконечен, то

$$\int\limits_0^{\mathcal{L}} |\varphi(x,\mu)|^2 d\mathcal{M}(x) = +\infty, \quad \mu \notin [0,+\infty)$$

(см. [13]), откуда легко следует, что функция в правой части (33) – единственная, удовлетворяющая уравнению (17) и граничным условиям, наложенным на функцию $D(x,\mu)$.

Из формулы (34) следует, что

$$D(x,\mu)^\wedge = \frac{1}{s-\mu}, \quad \mu \notin [0,+\infty), \tag{35}$$

где символом "$\wedge$" обозначено изоморфное отображение $L^2_{d\mathcal{M}} \to L^2_{d\tau}$, задаваемое ядром $\varphi(x,s)$ с помощью формулы (22).

Воспользуемся условием (30). В силу формулы (31)

$$0 = u(0,p) = \int\limits_0^{\mathcal{L}} K(0,x,\mu) f_p(x) d\mathcal{M}(x) = \Big(D(x,\mu), \overline{f_p(x)}\Big)_{L^2_{d\mathcal{M}}}$$

(символом $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{L^2_{d\mathcal{M}}}$ обозначено скалярное произведение в $L^2_{d\mathcal{M}}$, $\mu = -p^2$). В силу того, что отображение (22) есть изоморфизм, можно продолжить эту цепочку равенств:

$$0 = \Big(D(x,\mu), \overline{f_p(x)}\Big)_{L^2_{d\mathcal{M}}} = \Big(D(x,\mu)^\wedge, (\,\overline{f_p(x)}\,)^\wedge\Big)_{L^2_{d\tau}} =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{(\,\overline{f_p(x)}\,)^\wedge(s)}{s-\mu} d\tau(s) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\overline{\left(\frac{1}{p}\,\frac{dv_1(x)}{d\mathcal{M}(x)} + v_2(x)\right)}^{\,\wedge}(s)}{s-\mu}\, d\tau(s);$$

применение формулы (35) корректно, поскольку при $\operatorname{Re} p > 0$ выполнено соотношение $\mu = -p^2 \notin [0,+\infty)$.

В силу второго из равенств (23), все предыдущие рассуждения можно повторить для полугруппы $V_S(t)^*$, при этом, в силу формулы для оператора B_S^* (см. §3), функция $f_p(x)$ заменяется функцией

$$f_{p^*}(x) = -\frac{1}{p}\,\frac{dv_1(x)}{d\mathcal{M}(x)} + v_2(x).$$

Имеем систему равенств:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{p}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\left(\overline{\frac{dv_1(x)}{d\mathcal{M}(x)}}\right)^{\wedge}(s)}{s-\mu}\,d\tau(s) + \int\limits_0^{+\infty}\frac{\left(\overline{v_2(x)}\right)^{\wedge}(s)}{s-\mu}\,d\tau(s) = 0, \\
\mu \notin [0,+\infty) \\
-\frac{1}{p}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\left(\overline{\frac{dv_1(x)}{d\mathcal{M}(x)}}\right)^{\wedge}(s)}{s-\mu}\,d\tau(s) + \int\limits_0^{+\infty}\frac{\left(\overline{v_2(x)}\right)^{\wedge}(s)}{s-\mu}\,d\tau(s) = 0
\end{gathered}$$

или, иначе,

$$\begin{gathered}
W_1(\mu) \overset{\mathrm{Df}}{=} \int\limits_0^{+\infty}\frac{\left(\overline{\frac{dv_1(x)}{d\mathcal{M}(x)}}\right)^{\wedge}(s)}{s-\mu}\,d\tau(s) = 0, \\
\mu \notin [0,+\infty) \\
W_2(\mu) \overset{\mathrm{Df}}{=} \int\limits_0^{+\infty}\frac{\left(\overline{v_2(x)}\right)^{\wedge}(s)}{s-\mu}\,d\tau(s) = 0.
\end{gathered}$$

Разберем второе из этих равенств; первое разбирается аналогично. Введем обозначения:

$$R(s) = \operatorname{Re}\left(\overline{v_2(x)}\right)^{\wedge}(s), \qquad I(s) = \operatorname{Im}\left(\overline{v_2(x)}\right)^{\wedge}(s).$$

При $\mu \in (-\infty, 0)$ имеем:

$$\begin{aligned}
0 = \operatorname{Re} W_2(\mu) &= \int\limits_0^{+\infty}\frac{R(s)}{s-\mu}d\tau(s), \\
0 = \operatorname{Im} W_2(\mu) &= \int\limits_0^{+\infty}\frac{I(s)}{s-\mu}d\tau(s).
\end{aligned} \tag{36}$$

Так как выражения в правых частях формул (36) суть функции, голомофрные вне луча $[0, +\infty)$ [22], то всюду вне этого луча эти выражения обращаются в 0. Используя формулу обращения Стилтьеса [22], находим: $\left(\overline{v_2(x)}\right)^{\wedge}(s) = 0$ почти везде по мере $d\tau(s)$, откуда $v_2(x) = 0$ почти везде по мере $d\mathcal{M}(x)$.

Аналогично доказывается равенство $\frac{dv_1(x)}{d\mathcal{M}(x)} = 0$ почти везде по мере $d\mathcal{M}(x)$, откуда, с учетом граничного условия $v_{1-}(0) = 0$, следует равенство $v_1(x) = 0, \quad x \in [0, \mathcal{L}\rangle$.

Таким образом, равенства (23) влекут равенство нулю пары $y = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}$ как элемента пространства Y_S, откуда вытекает простота оператора B_S. Теорема доказана. $\square$

§5. Связь между характеристической функцией оператора B_S и коэффициентом динамической податливости струны S

Лемма 3. *Всякий максимальный антиаккретивный оператор B может быть включен в качестве основного оператора в консервативную систему рассеяния λ_C вида* (9). *При дополнительных ограничениях* $\operatorname{Ker} L = \{0\}$, $\operatorname{Ker} M^* = \{0\}$ *эта система единственна с точностью до изоморфизма внешних пространств* $\mathfrak{N}^-$, $\mathfrak{N}^+$.

Доказательство. Возможность включения произвольного сжатия T в консервативную систему рассеяния λ с дискретным временем вида (6) (или, что то же, в унитарный узел α вида (5)) известна (см. [23]). Хорошо известно (это легко показать), что при дополнительных ограничениях $\operatorname{Ker} F = \{0\}$, $\operatorname{Ker} G^* = \{0\}$ система λ единственна с точностью до изоморфизма внешних пространств $\mathfrak{N}^-$, $\mathfrak{N}^+$.

Пусть имеется максимальный антиаккретивный оператор B. Его преобразование Кэли

$$T = (I + B)(I - B)^{-1}$$

есть сжатие. Включим его в консервативную систему рассеяния с дискретным временем λ вида (6). Формулы

$$\begin{gathered} L = \frac{1}{\sqrt{2}}(I - \widehat{B})F, \quad M = \frac{1}{\sqrt{2}}G(I - B), \\ N(a, \varphi^{(-)}) = M(a - (I - \widehat{B})^{-1}L\varphi^{(-)}) + H\varphi^{(-)} \end{gathered} \tag{37}$$

задают консервативную систему рассеяния λ_C вида (9), для которой B служит основным оператором [4].

Из формул (16), (37) видно, что при дополнительных ограничениях $\operatorname{Ker} L = \{0\}$, $\operatorname{Ker} M^* = \{0\}$ мы будем иметь $\operatorname{Ker} F = \{0\}$, $\operatorname{Ker} G^* = \{0\}$, откуда ясно, что система λ_C определена однозначно с точностью до изоморфизма внешних пространств $\mathfrak{N}^-$, $\mathfrak{N}^+$. $\square$

Замечание. Описанная в статье [23] процедура построения унитарного узла, включающего заданное сжатие T, приводит к такому узлу, для которого $\operatorname{Ker} F = \{0\}$, $\operatorname{Ker} G^* = \{0\}$. Таким образом, всякий сжимающий оператор T может быть включен в унитарный узел, для которого $\operatorname{Ker} F = \{0\}$, $\operatorname{Ker} G^* = \{0\}$ и, следовательно, всякий максимальный антиаккретивный оператор B может быть включен в консервативную систему рассеяния вида (9), для которой $\operatorname{Ker} L = \{0\}$, $\operatorname{Ker} M^* = \{0\}$.

Определение. *Характеристической функцией максимального антиаккретивного оператора B (обозначение: $\theta_B(p)$) называется передаточная функция консервативной системы рассеяния с непрерывным временем λ_C вида (9), для которой B служит основным оператором и такой, что* $\operatorname{Ker} L = \{0\}$, $\operatorname{Ker} M^* = \{0\}$.

В силу леммы 3, характеристическая функция $\theta_B(p)$ определена с точностью до изоморфизма внешних пространств системы λ_C.

Теорема 3. *Имеет место формула*

$$\theta_{B_S}(p) = \frac{1 - p\Gamma(-p^2)}{1 + p\Gamma(-p^2)}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \tag{38}$$

где $\Gamma(\mu)$ – коэффициент динамической податливости струны S, порождающей оператор B_S.

Доказательство. Пусть p, $\varphi^{(-)} \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > 0$, $\varphi^{(-)} \neq 0$. Положим $y = (pI - \widehat{B}_S)^{-1} L_S \varphi^{(-)}$. Тогда $(y, \varphi^{(-)}) \in \mathfrak{D}_{B_S, L_S}$ [4]. Пусть $y = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}$. Тогда, в силу §3, $\varphi^{(-)} = \frac{1}{2}(v_{1-}(0) - v_2(0))$.

С другой стороны,

$$\theta_{B_S}(p)\varphi^{(-)} = \theta_{\lambda_{C_S}}(p)\varphi^{(-)} = N_S\big((pI - \widehat{B}_S)^{-1} L_S \varphi^{(-)}, \varphi^{(-)}\big)$$

$$= N_S(y, \varphi^{(-)}) = \frac{1}{2}\big(v_{1-}(0) + v_2(0)\big)$$

(см. (14)).

Далее, имеем $py = \widehat{B}_S y + L_S\varphi^{(-)}$ или (см. (15))

$$pv_1(x) = \frac{dv_2(x)}{dx}, \quad pv_2(x) = \frac{dv_1(x)}{d\mathcal{M}(x)}. \tag{39}$$

Вводя вспомогательную функцию $u(x) = \frac{1}{p}v_2(x)$, после несложных преобразований получаем для нее уравнение

$$p^2u(x) - \frac{d^2u(x)}{dx d\mathcal{M}(x)} = 0.$$

Вводя обозначение $\mu = -p^2$, получаем уравнение

$$-\mu u(x) - \frac{d^2u(x)}{dx d\mathcal{M}(x)} = 0, \tag{40}$$

совпадающее с уравнением (17).

Так как $y \in \mathfrak{D}_{B_S,L_S}$, то для пары $\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}$ выполнено граничное условие на правом конце струны, а для функции $u(x)$ выполнено соответствующее граничное условие, как это описано в §4. Решение уравнения (40), удовлетворяющее такому граничному условию на правом конце струны и условию $u^-(0) = -1$ на ее левом конце, равно $D(x,\mu) = -\psi(x,\mu) + \Gamma(\mu)\varphi(x,\mu)$ (см. §4). Поэтому решение уравнения (40), удовлетворяющее тому же граничному условию на правом конце струны и граничному условию $u^-(0) = v_{1-}(0)$ (см. (39)) на ее левом конце, равно $u(x) = v_{1-}(0)(\psi(x,\mu) - \Gamma(\mu)\varphi(x,\mu))$. В частности, $u(0) = -\Gamma(\mu)v_{1-}(0)$, откуда $v_2(0) = -p\Gamma(\mu)v_{1-}(0) = -p\Gamma(-p^2)v_{1-}(0)$. Поэтому

$$\varphi^{(-)} = \frac{1}{2}(v_{1-}(0) - v_2(0)) = \frac{1}{2}(1 + p\Gamma(p^2))v_{1-}(0),$$

$$\theta_{B_S}(p)\varphi^{(-)} = \frac{1}{2}(v_{1-}(0) + v_2(0)) = \frac{1}{2}(1 - p\Gamma(p^2))v_{1-}(0),$$

так что

$$\theta_{B_S}(p) = \frac{1 - p\Gamma(-p^2)}{1 + p\Gamma(-p^2)},$$

что и требовалось. $\square$

Следствие. *Всякий простой максимальный антиаккретивный оператор, имеющий скалярную характеристическую функцию, принимающую вещественные значения на полуоси* $(0,+\infty)$*, реализуется как оператор струны.*

В частности, имеется большой запас струн, для которых оператор B_S ограничен.

Доказательство. Пусть B – максимальный антиаккретивный оператор, $\theta_B(p)$ – его характеристическая функция, причем

$$\begin{aligned} &\theta_B(p) \in \mathbb{C}, \qquad && \operatorname{Re} p > 0, \\ &\theta_B(p) \in \mathbb{R}, \qquad && p \in (0,+\infty). \end{aligned}$$

Пусть

$$\chi(p) = \frac{1-\theta_B(p)}{1+\theta_B(p)}.$$

Так как функция $\theta_B(p)$ сжимающая [4], то функция $\chi(p)$ позитивная: $\operatorname{Re}\chi(p) \geqslant 0$, $\operatorname{Re} p > 0$, причем $\chi(p) \in \mathbb{R}$, $p \in (0,+\infty)$.

Известно, что позитивная функция, принимающая вещественные значения на положительной полуоси, представляется в виде $\chi(p) = p\Gamma(-p^2)$, где $\Gamma(\mu)$ – стилтьесовская функция, т.е. функция, голоморфная в области $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$ и такая, что

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im}\Gamma(\mu) \geqslant 0, \qquad && \operatorname{Im}\mu > 0, \\ &\Gamma(\mu) \geqslant 0, \qquad && \mu < 0 \end{aligned}$$

(см. [24]).

Стилтьесовская функция $\Gamma(\mu)$ допускает представление (21) (см. [24]).

Всякая стилтьесовская функция является коэффициентом динамической податливости некоторой струны S (см. [19], где этот результат сформулирован в терминах меры $d\tau(s)$).

Пусть струна S порождает оператор B_S. В силу теоремы 3, имеет место равенство $\theta_B(p) = \theta_{B_S}(p)$, $\operatorname{Re} p > 0$.

Так как простая консервативная система рассеяния с непрерывным временем определяется своей передаточной функцией с точностью до унитарного подобия [4], то оператор B_S унитарно подобен оператору B, что и требовалось. $\square$

§6. Критерий устойчивости струны

Теорема 4. *Для того, чтобы C_0-полугруппа $V_S(t)$, порожденная оператором B_S, сильно стремилась к нулю при $t \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы главная спектральная мера $d\tau(s)$ соответствующей струны S была сингулярна относительно меры Лебега.*

Доказательство. Из построения функциональной модели полугруппы Лакса–Филлипса [11] следует, что полугруппа $V_S(t)$ сильно стремится к нулю тогда и только тогда, когда субоператор рассеяния [11] полугруппы $V_S(t)$ (см. §2) является внутренней функцией.

Известно, что субоператор рассеяния унитарной полугруппы Лакса–Филлипса с точностью до постоянного левого унитарного множителя совпадает с передаточной функцией соответствующей консервативной системы рассеяния (в случае дискретного времени это видно на функциональной модели, а переход к непрерывному случаю осуществляется с помощью преобразования Кэли, см. формулы (16), (8)). Поэтому $s\text{-}\lim_{t\to+\infty} V_S(t) = 0$ тогда и только тогда, когда характеристическая функция $\theta_{B_S}(p)$ является внутренней.

В силу теоремы 3, последнее верно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}\lim_{\varepsilon\to+0}\Gamma(\varkappa \pm i\varepsilon) = 0$ при почти всех $\varkappa \in (0, +\infty)$, причем, в силу принадлежности $\Gamma(\mu)$ классу стилтьесовских функций, существование предела обеспечено почти везде на $(0, +\infty)$.

Выражение

$$\operatorname{Im}\Gamma(\varkappa \pm i\varepsilon) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\pm\varepsilon}{(s-x)^2+y^2}\, d\tau(s)$$

только отсутствием множителя $\pm\frac{1}{\pi}$ отличается от интеграла Пуассона, порожденного мерой $d\tau(s)$. Поэтому

$$\operatorname{Im}\lim_{\varepsilon\to+0}\Gamma(\varkappa \pm i\varepsilon) = \pm\pi \frac{d\tau(s)}{ds}\bigg|_{s=\varkappa}$$

при почти всех $\mu \in (0, +\infty)$ [25], откуда следует утверждение теоремы. □

Следствие. *Если коэффициент динамической податливости* $\Gamma(\mu)$ *есть мероморфная функция во всей комплексной плоскости, то*

$$s\text{-}\lim_{t\to+\infty} V_S(t) = 0.$$

Доказательство. Из интегрального представления (21) и формулы обращения Стилтьеса [22] вытекает, что функция $\Gamma(\mu)$ является мероморфной тогда и только тогда, когда мера $d\tau(s)$ дискретна. Такая мера, конечно, является сингулярной относительно меры Лебега, что и требовалось. □

§7. Обобщение результата М. Г. Крейна и А. А. Нудельмана о полноте оператора струны

Если имеется регулярная струна S, то, в зависимости от граничного условия на ее правом конце, ее коэффициент динамической податливости равен $\Gamma(\mu) = \frac{\psi(\mathcal{L},\mu)}{\varphi(\mathcal{L},\mu)}$ или $\Gamma(\mu) = \frac{\psi^+(\mathcal{L},\mu)}{\varphi^+(\mathcal{L},\mu)}$ (см. (18), (19)).

Так как $\varphi(\mathcal{L},\mu)$, $\psi(\mathcal{L},\mu)$, $\varphi^+(\mathcal{L},\mu)$, $\psi(\mathcal{L},\mu)$ суть целые функции от параметра μ [15], то для регулярной струны функция $\Gamma(\mu)$ является мероморфной и, следовательно, главная спектральная мера $d\tau(s)$ дискретна. Для сингулярной струны S в статье [16] доказан такой критерий дискретности главной спектральной меры $d\tau(s)$: в случае $\mathcal{L} = +\infty$ должны выполняться условия

$$\mathcal{M}(+\infty) < +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x(\mathcal{M}(+\infty) - \mathcal{M}(x)) = 0, \tag{41}$$

в случае $\mathcal{M}(\mathcal{L}-0) = +\infty$ – условия

$$\mathcal{L} < +\infty, \quad \lim_{x\to\mathcal{L}-0} \mathcal{M}(x)(\mathcal{L}-x) = 0. \tag{42}$$

Если

$$\int_0^{\mathcal{L}} x d\mathcal{M}(x) < +\infty, \tag{43}$$

как это требуется в статье [2], то либо струна является регулярной, либо $\mathcal{L} = +\infty$ и выполнены условия (41). Поэтому главная спектральная мера такой струны дискретна. В статье [2] доказано, что при выполнении условия (43) оператор B_S^{-1} полон тогда и только тогда, когда струна является приведенной, то есть у нее отсутствует однородный участок плотности 1, примыкающий к левому концу (при условии (43) оператор B_S^{-1} оказывается ограниченным).

Мы будем исследовать полноту оператора $T_S = (I + B_S)(I - B_S)^{-1}$. Так как оператор B_S максимальный антиаккретивный (см. теорему 2), то оператор T_S сжимающий [8].

Теорема 5. *Пусть струна S регулярна или сингулярна и удовлетворяет условиям* (41) *или* (42). *Для того, чтобы оператор T_S был полон, необходимо и достаточно, чтобы струна S была приведенной.*

Доказательство. В условиях данной теоремы характеристическая функция $\theta_{B_S}(p)$ является внутренней (см. доказательство теоремы 4 и ее следствия). Поэтому характеристическая функция $\theta_{T_S}(z)$, связанная с функцией $\theta_{B_S}(p)$ формулой (8), также является внутренней. Согласно [26], оператор T_S полон тогда и только тогда, когда $\theta_{T_S}(z)$ является произведением Бляшке в единичном круге или, что равносильно, $\theta_{B_S}(p)$ является произведением Бляшке в правой полуплоскости.

Допустим, что струна S не является приведенной. Тогда она может быть представлена как однородный участок плотности 1 длины $a > 0$, примыкающий к ее левому концу, продолженный некоторым участком $S^{\sim}$. Пусть $\Gamma^{\sim}(\mu)$ – коэффициент динамической податливости этого участка, $\Gamma(\mu)$ – коэффициент динамической податливости струны S. Согласно [14], имеет место формула

$$\Gamma(\mu) = \frac{\psi^{-}(a)\Gamma^{\sim}(\mu) + \psi(a)}{\varphi^{-}(a)\Gamma^{\sim}(\mu) + \varphi(a)}, \quad \mu \notin [0, +\infty).$$

По определению функций φ и ψ (см. §4), имеем: при $0 \leqslant x \leqslant a$

$$\varphi(x, \mu) = \cos\sqrt{\mu}\, x, \quad \psi(x, \mu) = \frac{\sin\sqrt{\mu}\, x}{\sqrt{\mu}}$$

(выбор ветви ветви корня не имеет значения, поскольку обе функции четные относительно $\sqrt{\mu}$). Поэтому

$$\Gamma(\mu) = \frac{\cos(\sqrt{\mu}\, a)\Gamma^{\sim}(\mu) + \frac{\sin(\sqrt{\mu}\, a)}{\sqrt{\mu}}}{-\sqrt{\mu}\sin(\sqrt{\mu}\, a)\Gamma^{\sim}(\mu) + \cos\sqrt{\mu}\, a}, \quad \mu \notin [0, +\infty).$$

Подставляя это выражение в формулу (38), после громоздких, но несложных преобразований получаем:

$$\theta_{B_S}(p) = e^{-2pa}\theta_{B_{\tilde{S}}}(p), \quad \operatorname{Re} p > 0. \tag{44}$$

Функция $\theta_{B_{\tilde{S}}}(p)$ голоморфна в открытой правой полуплоскости, а функция e^{-2pa} – сингулярная внутренняя в этой области. Поэтому, в силу формулы (44), функция $\theta_{B_S}(p)$ не есть произведение Бляшке, так что и $\theta_{T_S}(z)$ не есть произведение Бляшке и оператор T_S не полон.

Обратно, допустим $\theta_{B_S}(p)$ не есть произведение Бляшке и, следовательно, представляется в виде $\theta_{B_S}(p) = G(p)Q(p)$, $\operatorname{Re} p > 0$, где $G(p)$ – произведение Бляшке, $Q(p)$ – сингулярная внутренняя функция. Согласно [25], общий вид сингулярной внутренней функции есть

$$Q(p) = \exp\left(-\left(i\alpha + 2ap + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{p-it} - \frac{it}{1+t^2}\right)d\sigma_s(t)\right)\right),$$
$$\alpha \in R, \quad a \geqslant 0, \quad \operatorname{Re} p > 0, \tag{45}$$

где σ_s – сингулярная мера (множитель 2 перед a поставлен для удобства). В силу теоремы о спектре функции [26], функция $\theta_{B_S}(p)$ не может быть аналитически продолжена через точки множества $i\operatorname{supp}\sigma_s$ ($\operatorname{supp}\sigma_s$ – носитель меры σ_s). Но, в силу формулы (38), в условиях данной теоремы функция $\theta_{B_S}(p)$ мероморфная, причем полюсы на мнимой оси отсутствуют, поскольку она внутренняя. Поэтому носитель меры σ_s пуст и в формуле (45) множитель $Q(p)$ принимает вид $Q(p) = e^{-(i\alpha+2ap)}$, $\operatorname{Re} p > 0$ (см. также [27]).

По предположению, $\theta_{B_S}(p)$ не есть произведение Бляшке и, следовательно, $a > 0$. Так как функция $\theta_{B_S}(p) = \theta_{\alpha_{CS}}(p)$ вещественна на $(0, +\infty)$, то и функция $e^{-i\alpha}G(p)$ также вещественна на $(0, +\infty)$. В силу следствия к теореме 3, существует струна $S^{\sim}$, для которой $\theta_{B_{S^{\sim}}}(p) = e^{-i\alpha}G(p)$, $\operatorname{Re} p > 0$. Достроим к этой струне слева однородный участок длины a плотности 1. В силу формулы (44) для полученной струны S' имеем: $\theta_{B_{S'}}(p) = \theta_{B_S}(p)$, $\operatorname{Re} p > 0$. Поэтому совпадают коэффициенты динамической податливости этих струн и $S = S'$ в силу теоремы единственности [19]. Следовательно, струна S начинается с однородного участка плотности 1 длины a и, значит, не является приведенной. $\square$

Литература

1. Д. З. Аров, *Реализация канонической системы с диссипативным граничным условием на одном конце сегмента по коэффициенту динамической податливости.* — Сиб. мат. ж. **16,** No. 3 (1975), 540–563.
2. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *О некоторых спектральных свойствах неоднородной струны с диссипативным граничным условием.* — J. Operator Theory, **22** (1989), 369–395.
3. S. V. Hruščev, *The Regge problem for strings, unconditionally convergent eigenfunction expansions, and unconditional bases of exponentials in* $L^2(-T,T)$. — J. Operator Theory, **14** (1985), 67–85.
4. D. Z. Arov, M. A. Nudelman, *Passive linear stationary dynamical scattering systems with continuous time.* — Integr. Equat. Oper. Th., **24**, No. 1 (1996), 1–45.
5. Д. З. Аров, *Пассивные линейные стационарные динамические системы.* — Сиб. мат. ж. **20,** No. 2 (1979), 211–228.
6. Д. З. Аров, *Устойчивые диссипативные линейные стационарные системы рассеяния.* — J. Operator Theory, No. 2 (1979), 96–126.
7. Д. З. Аров, *Линейные стационарные пассивные системы с потерями.* Дисс. д-ра физ.-мат. наук, Одесса (1985).
8. Б. Сёкефальви-Надь, Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.* Мир, Москва (1970).
9. П. Лакс, Р. Филлипс, *Теория рассеяния.* Мир, М. (1971).
10. Ю. Л. Шмульян, *Инвариантные подпространства полугрупп и схема Лакса–Филлипса.* — Одесский ин-т инженеров морского флота, Одесса (1986), Деп. в ВИНИТИ 12.11.86, No. 8009-B86.
11. В. М. Адамян, Д. З. Аров, *Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов.* — Мат. исследования (Кишинев), **1**, No. 2 (1966), 3–64.
12. М. А. Нудельман, *Достаточные условия абсолютной устойчивости оптимальных пассивных систем рассеяния.* — Алгебра и анализ, **6**, No. 4 (1994), 187–203.
13. М. Г. Крейн, *Об одном обобщении исследований Стилтьеса.* — ДАН СССР, **87**, No. 6 (1952), 881–884.
14. М. Г. Крейн, *О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции.* — ДАН СССР, **93**, No. 4 (1953), 617–620.
15. И. С. Кац, М. Г. Крейн, *О спектральных функциях струны.* — Дополнение II к книге Ф. Аткинсона “Дискретные и непрерывные задачи”. Мир, М. (1968).
16. И. С. Кац, М. Г. Крейн, *Критерий дискретности спектра сингулярной струны.* — Изв. вузов, Сер. матем., **3**, No. 2 (1958), 136–153.
17. Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.* Наукова думка, Киев (1965).
18. Э. Р. Цекановский, Ю. Л. Шмульян, *Метод обобщенных функций в теории расширений неограниченных линейных операторов.* ДонГУ, Донецк (1973).
19. H. Dym, H. P. McKean, *Gaussian Processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem.* Acad. Press, N.Y. (1976).

20. Б. З. Вулих, *Краткий курс теории функций вещественной переменной.* Наука, М. (1965).
21. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория.* ИЛ, М. (1962).
22. И. С. Кац, М. Г. Крейн, *R-функции – функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя.* — Дополнение I к книге Ф. Аткинсона "Дискретные и непрерывные задачи" Мир, М. (1968).
23. М. С. Бродский, *Унитарные узлы и их характеристические функции.* — Усп. мат. наук, **33**, No. 4(202) (1978), 141–168.
24. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.* Наука, М. (1973).
25. К. Гофман, *Банаховы пространства аналитических функций.* ИЛ, М. (1963).
26. Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига.* Наука, М. (1980).
27. М. Г. Крейн, *Об одном специальном классе целых и мероморфных функций.* — В кн.: Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов. ГОНТИ (1938), 208–253.
28. S. Hassi, H. De Snoo, H. Winkler, *Boundary-value problems for two-dimensional canonical systems.* — Integr. Equat. Oper. Th., **36**, No. 4 (2000), 445–479.

Nudelman M. A. The Krein string and characteristic functions of maximal dissipative operators.

The theory of the Krein string is considered in the framework of a continual analogue of the theory of unitary operator nodes. On this basis, the generalization of M. G. Krein and A. A. Nudelman result on the completeness of the string operator is obtained.

Интегрированные банковские
информационные системы
Одесса
nudelman@odtel.net

Поступило 12 октября 2002 г.