Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 290, 2002 г.

Анар Досиев

АЛГЕБРЫ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ОТ ЭЛЕМЕНТОВ АЛГЕБРЫ ЛИ И СПЕКТРЫ СЛОДКОВСКОГО

Введение

Известная теорема И. М. Гельфанда (см. [1, п. 2.2.15]) утверждает, что если D – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, содержащая спектр $\sigma(a)$ элемента a банаховой алгебры A, то существует единственный непрерывный гомоморфизм алгебры $H(D)$ голоморфных в D функций в алгебру A такой, что постоянная функция 1 переходит в единицу 1_A алгебры A, а координатная функция z отображается в a. Соответствующая задача в случае нескольких коммутирующих операторов может быть представлена следующим образом. Пусть $A = B(X)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в банаховом пространстве X, и пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ – набор коммутирующих операторов из A. Для каких областей D в $\mathbb{C}^n$ стандартный гомоморфизм $P_n \to A$, $p \mapsto p(a)$, где P_n – алгебра комплексных полиномов от n переменных, может быть продолжен до непрерывного гомоморфизма алгебр $H(D) \to A$ (т.е. когда X становится $H(D)$-модулем)? Эта задача была решена Дж. Тейлором [2] в терминах введенного им совместного спектра коммутативного семейства операторов. Совместным спектром $\sigma(a)$ Тейлор называет (см. [3]) множество тех точек $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, для которых нарушается точность комплекса Кошуля $\mathrm{Kos}(a-\lambda, X)$, порожденного семейством $a-\lambda$. Если область D содержит совместный спектр Тейлора $\sigma(a)$, то требуемый гомоморфизм $H(D) \to A$ существует. Кроме того, имеет место теорема об отображении спектра (см. [2]): если $\sigma(a) \subset D$, то $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$, где $f = (f_1, \dots, f_n) : D \to \mathbb{C}^n$ голоморфное отображение с координатными функциями $f_i \in H(D)$, и $f(a) = (f_1(a), \dots, f_n(a))$. Это свойство спектра Тейлора выполняется (см. [4, п. 2.6]) также для подспектров $\sigma_{\pi,k}(a)$ и $\sigma_{\delta,k}(a)$ (зависящих от целого числа k, $0 \leqslant k \leqslant n$), определенных З. Слодковским в [5]. Следует отметить, что спектры $\sigma_{\pi,k}(a)$, $\sigma_{\delta,k}(a)$ используются при изучении свойств границы спектра Тейлора (см. [6]).

Для некоммутирующих операторов $a_1, \dots, a_n$ общая схема построения функционального исчисления и некоторые ее частные случаи были предложены Тейлором в [7]. В общем случае алгебра P_n заменяется свободной алгеброй F_n от n переменных. Если же $a_1, \dots, a_n$ порождают конечномерную алгебру Ли E, то F_n заменяется универсальной обертывающей алгеброй $U(E)$. Задача о функциональном исчислении для заданного гомоморфизма $\alpha : U(E) \to A$ относительно некоторого семейства топологических алгебр "функций" H_ι и отмеченных гомоморфизмов $\varphi_\iota : U(E) \to H_\iota$ может быть сформулирована как задача о существовании непрерывных гомоморфизмов $\alpha_\iota : H_\iota \to A$ со свойством $\alpha_\iota \varphi_\iota = \alpha$. Разумеется, частью задачи является и сам поиск достаточно содержательного класса топологических алгебр H_ι. Первые шаги в построении таких алгебр предпринял Тейлор в [7]. Алгебра "целых" функций от элементов алгебры Ли E определяется (см. [7]) как некоторая топологическая оболочка $\widetilde{U}(E)$ (в современной терминологии, как оболочка Аренса–Майкла, см. [1, п. 2.21]) алгебры $U(E)$. При этом в [7] доказано, что $\widetilde{U}(E) = H(\mathbb{C}^n)$ – алгебра целых функций, если E – коммутативная алгебра Ли и $\dim(E) = n$, а если E – полупростая алгебра Ли, то $\widetilde{U}(E)$ – счетное топологическое прямое произведение полных матричных алгебр.

Естественно было бы ожидать, что в задаче о голоморфном функциональном исчислении аналоги совместного спектра Тейлора должны играть заметную роль и в некоммутативном случае. Если семейство операторов a порождает конечномерную подалгебру Ли E в $B(X)$, А. С. Файнштейн [8] определил совместный спектр $\sigma(a)$ как множество тех $\lambda \in \mathbb{C}^n$, для которых нарушается точность комплекса Кошуля, соответствующего модулю X над алгеброй Ли, порожденной семейством $a - \lambda$. Была доказана следующая конечномерная теорема об отображении спектра (см. [8]): если a порождает конечномерную нильпотентную алгебру Ли E и подалгебра Ли F в $U(E)$, порожденная семейством $f = (f_1, \dots, f_m)$, конечномерна, то $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$. В частности, выполняется проекционное свойство $\sigma(a') = \varphi(\sigma(a))$, где $a' = (a_{i_1}, \dots, a_{i_m})$ – подсемейство в a и $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ – стандартная проекция.

Для случая, когда E конечномерная разрешимая алгебра Ли, аналогичные варианты спектров Слодковского и Тейлора приведены в [9]. Там же доказано, что эти спектры обладают проекционным свойством на идеалы (т.е. когда подсемейство операторов порождает идеал) этой алгебры Ли E, но не обладают этим свойством для подалгебр Ли в E. Этот недостаток спектра в разрешимом случае устранен в [10] модификацией тейлоровского спектра, предложенного в [8]. Тем не менее, общий вопрос об отображении спектра полиномами остается открытым и в этом случае.

В данной работе мы вводим в рассмотрение (в качестве кандидатов в алгебры H_ι) топологические алгебры сходящихся степенных рядов от элементов некоторой (не обязательно конечномерной) алгебры Ли $\mathfrak{J}$. По каждой насыщенной возрастающей системе $\mathfrak{p}$ мультипликативных преднорм алгебры Ли $\mathfrak{J}$ определяются топологическая алгебра "функций" $\mathcal{O}_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{p})$ и канонический гомоморфизм $\varphi_{\mathfrak{p}} : U(\mathfrak{J}) \to \mathcal{O}_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{p})$ с плотным образом. Алгебра $\mathcal{O}_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{p})$ является обратным пределом некоторого семейства банаховых алгебр, соответствующего системе преднорм. Если $\mathfrak{p}$ – множество всех мультипликативных преднорм алгебры Ли $\mathfrak{J}$, то $\mathcal{O}_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{p})$ является оболочкой Аренса–Майкла алгебры $U(\mathfrak{J})$. Предложенная конструкция конкретизируется следующим образом для конечномерной алгебры Ли.

Пусть E – конечномерная алгебра Ли. Тогда насыщенная возрастающая система норм $\mathfrak{p}$ в E однозначным образом определяет область D в дуальном пространстве E^*, которая представляется в виде объединения единичных по дуальным нормам шаров с центром в нуле, т.е. D – абсолютно выпуклая область. С другой стороны, любая абсолютно выпуклая область D в E^* может быть задана некоторой насыщенной возрастающей системой норм в E. Соответствующую алгебру Фреше $\mathcal{O}_E(\mathfrak{p})$ обозначим через $\mathcal{O}_E(D)$. Если E – коммутативная алгебра Ли, то алгебра $\mathcal{O}_E(D)$ сводится к алгебре $H(D)$, где D – абсолютно выпуклая область в $\mathbb{C}^n$.

Если E – конечномерная нильпотентная алгебра Ли и $e = (e_1, \ldots, e_n)$ – базис, согласованный с нижним центральным рядом, то любой элемент $f \in \mathcal{O}_E(D)$ представляется и притом единственным способом в виде степенного ряда $f = \sum a_{t_1 \ldots t_n} e_1^{t_1} \cdots e_n^{t_n}$.

Для конечномерной разрешимой алгебры Ли E доказывается, что фактор алгебры $\mathcal{O}_E(D)$ по ее радикалу Джекобсона $\operatorname{Rad}\mathcal{O}_E(D)$ топологически изоморфен алгебре обычных голоморфных функций $H(D_{\mathrm{s}})$, где $D_{\mathrm{s}} = D \cap \Delta(E)$ и $\Delta(E)$ – множество характеров алгебры Ли E. При этом D_{s} совпадает с множеством непрерывных характеров алгебры $\mathcal{O}_E(D)$. Если D является полидиском, то $\mathcal{O}_E(D) = \operatorname{Rad}\mathcal{O}_E(D) \oplus \mathcal{C}_E$, где $\mathcal{C}_E$ – подпространство в $\mathcal{O}_E(D)$, которое топологически изоморфно алгебре $H(D_{\mathrm{s}})$. В частности, оболочка Аренса–Майкла $\widetilde{U}(E)$ разлагается в топологическую прямую сумму радикала и подпространства, изоморфного алгебре целых функций в $\mathbb{C}^m$, где $m = \operatorname{codim}[E, E]$. Таким образом, любой элемент $f \in \mathcal{O}_E(D)$ определяет голоморфную функцию на D_{s} (обозначаемую нами также через f) как образ естественного гомоморфизма $\mathcal{O}_E(D) \to H(D_{\mathrm{s}})$.

Пусть теперь E – конечномерная алгебра Ли с базисом e и $\alpha : U(E) \to A$ гомоморфизм алгебр в произвольную банахову алгебру A. Пространство E^* можно отождествить с $\mathbb{C}^n$ относительно базиса e. Мы рассматриваем задачу функционального исчисления для гомоморфизма α относительно семейства топологических алгебр $\mathcal{O}_E(D)$, где D пробегает абсолютно выпуклые области в $\mathbb{C}^n$. Для полидисков $D_r = D_{r_1} \times \cdots \times D_{r_n}$ из $\mathbb{C}^n$ эта задача решается в терминах оценки совместного спектрального радиуса образа $a = \alpha(e)$. В случае произвольной абсолютной выпуклой области D нами получен следующий результат. Пусть $A = B(X)$ и E – конечномерная нильпотентная алгебра Ли. Тогда гомоморфизм α продолжается до непрерывного гомоморфизма алгебр $\alpha : \mathcal{O}_E(D) \to A$ в том и только в том случае, когда $\sigma(a) \subset D$.

Основным результатом работы является “конечномерная” теорема об отображении спектров Слодковского: $\sigma_{\delta,k}(f(a)) = f(\sigma_{\delta,k}(a))$, $\sigma_{\pi,k}(f(a)) = f(\sigma_{\pi,k}(a))$ относительно семейства функций $f = (f_1, \ldots, f_k)$ и непрерывного гомоморфизма $\alpha : \mathcal{O}_E(D) \to B(X)$, $\alpha(f) = f(a)$, для конечномерной нильпотентной алгебры Ли E.

Опишем содержание статьи по параграфам.

В §1 собраны предварительные понятия и результаты. В частности, определяются спектры Слодковского конечного банахова комплекса, параметризованного переменной из некоторого топологического пространства, и обсуждаются их свойства.

§2 посвящен описанию ассоциативных оболочек мультинормированной алгебры Ли. В частности, определяется банахова обертывающая алгебра $A(\mathfrak{J})$ банаховой алгебры Ли $\mathfrak{J}$. Алгебра

$A(\mathfrak{J})$ является отделимым пополнением [21, Гл. 2, п. 3.7] универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{J})$ относительно некоторой преднормы, продолжающей норму в $\mathfrak{J}$. Далее, по мультинормированной алгебре Ли $\mathfrak{J}$, топология которой задана с помощью множества $\mathfrak{p}$ мультипликативных преднорм, строится проективная система $\{A(\mathfrak{J}_p), u_{pq}; p, q \in \mathfrak{p}\}$, где $\mathfrak{J}_p$ – отделимое пополнение преднормированной алгебры Ли $\mathfrak{J}$ относительно преднормы p из $\mathfrak{p}$. Топологическая алгебра $\mathcal{O}_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{p})$ "функций" от элементов мультинормированной алгебры Ли $\mathfrak{J}$ определяется в виде обратного предела указанной проективной системы.

Основным результатом §3 является теорема 3.6 о существовании базиса в банаховой обертывающей алгебре $A(E)$ конечномерной нильпотентной алгебры Ли E.

В §4, в частности, доказано, что абсолютно выпуклая область D в дуальном пространстве E^* конечномерной алгебры Ли E однозначным образом определяет возрастающее множество $\mathfrak{p}_D$ норм в алгебре Ли E. Согласно предложенной в §2 схеме, возникает топологическая алгебра $\mathcal{O}_E(D) = \mathcal{O}_E(\mathfrak{p}_D)$ "функций" от элементов мультинормированной алгебры Ли E, снабженной множеством норм $\mathfrak{p}_D$. Центральным результатом §4 является теорема 4.13 о существовании однородного базиса в алгебре $\mathcal{O}_E(D)$ при условии, что алгебра Ли E конечномерна и нильпотентна.

В §5 для заданного гомоморфизма α конечномерной нильпотентной алгебры Ли E в банахову ассоциативную алгебру $\mathcal{A}$ установлен критерий существования функционального исчисления относительно семейства топологических алгебр $\mathcal{O}_E(D)$, когда D пробегает абсолютно выпуклые области в дуальном пространстве E^*. В случае, когда D пробегает полидиски, задача о функциональном исчислении рассматривается также для конечномерной разрешимой алгебры Ли E.

В §6 определены спектры пар представлений как спектры банахова комплекса, полученного с помощью тотализации банахова бикомплекса, порожденного этими представлениями. Доказывается наличие проекционного свойства спектра пары на спектр представителя этой пары.

Результаты §6 применяются в §7 для доказательства теоремы об отображении спектра, которая была сформулирована выше.

Автор благодарит Ю. В. Туровского за постановку задачи и ценные советы, и В. С. Шульмана, А. Я. Хелемского, А. С.

Файнштейна, Д. Белтиту, А. Ю. Пирковского за полезные обсуждения. Автор признателен рецензенту за содержательные замечания, способствовавшие улучшению изложения. В частности, ему принадлежит идея использования градуированных нильпотентных алгебр Ли для доказательства теоремы 3.6. Следствие 4.9 независимо доказано А. Ю. Пирковским (устное сообщение).

§1. Предварительные сведения

Все рассматриваемые в тексте векторные пространства (в том числе алгебры) предполагаются комплексными. Для банаховых пространств X и Y через $B(X,Y)$ обозначим пространство всех ограниченных линейных операторов из X в Y, наделенное операторной нормой. Положим $B(X) = B(X,X)$. Замкнутый единичный шар произвольного банахова пространства X обозначим через $X_{(1)}$.

1.1. Полинормированные алгебры. Пусть X – полинормированное (или локально выпуклое) пространство с определяющим топологию множеством преднорм $\mathfrak{p}$. Всегда можно считать, что множество $\mathfrak{p}$ *насыщено*, т.е. содержит максимумы своих конечных подмножеств. Если топология, порожденная множеством $\mathfrak{p}$, является хаусдорфовой, то $\mathfrak{p}$ называется *отделимым множеством преднорм*.

Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная (не обязательно ассоциативная) алгебра. Говорят [1, п. 1.2.2], что $\mathcal{A}$ – *полинормированная алгебра*, если $\mathcal{A}$ является полинормированным пространством и умножение в $\mathcal{A}$ раздельно непрерывно. Преднорма p в алгебре $\mathcal{A}$ называется *мультипликативной*, если существует такая константа $C > 0$, что $p(ab) \leqslant Cp(a)p(b)$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$. Если при этом $C = 1$ и $p(1_{\mathcal{A}}) = 1$ в случае, когда $\mathcal{A}$ имеет единичный элемент $1_{\mathcal{A}}$, то преднорма p называется *алгебраической*. Через $\mathfrak{n}(\mathcal{A})$ обозначим класс всех насыщенных отделимых множеств мультипликативных преднорм в $\mathcal{A}$. Банахова (не обязательно ассоциативная) алгебра определяется как алгебра, являющаяся банаховым пространством относительно мультипликативной нормы. Пусть M – подмножество банаховой ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$, $\operatorname{abc}(M)$ – абсолютно выпуклая оболочка множества M, $M^n = \{m_1 \cdots m_n : m_i \in M\}$ и $\|M\| = \sup\{\|m\| : m \in M\}$. Объединение $\mathrm{SG}(M) = \cup_{n\in\mathbb{N}} M^n$ называют мультипликативной полугруппой, порожденной множеством M. Если M ограничено, то число $\rho(M) = \lim_n \|M^n\|^{1/n}$ называется (совместным) *спектральным радиусом* множества M [11]. Следует отметить, что предел $\lim_n \|M^n\|^{1/n}$ всегда существует и равен $\inf_n \|M^n\|^{1/n}$ (см. детали в [11]). Легко проверить следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Пусть M – ограниченное подмножество банаховой ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$. Если $\rho(M) < 1$, то M порождает ограниченную полугруппу в $\mathcal{A}$.*

Пусть $\mathcal{A}$ – банахова ассоциативная алгебра и $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ – множество всех алгебраических норм в $\mathcal{A}$, эквивалентных исходной норме в $\mathcal{A}$. Как доказано в [11] (см. также [12]) $\rho(M) = \inf\{q(M) : q \in \mathcal{N}(\mathcal{A})\}$. Поскольку $q(\mathrm{abc}(M)) = q(M)$ для $q \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$, мы имеем $\rho(\mathrm{abc}(M)) = \rho(M)$ [12].

Радикал Джекобсона (см. [1, п. 1.3.4]) ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ с единицей будем обозначать через $\mathrm{Rad}\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}$ – полинормированная ассоциативная алгебра, то множество всех непрерывных характеров (т.е. мультипликативных линейных функционалов) алгебры $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathbf{X}(\mathcal{A})$.

Пусть теперь $\mathcal{A}$ – произвольная полинормированная алгебра, топология которой порождается множеством преднорм $\mathfrak{p}$. Если $\mathfrak{p}$ состоит из мультипликативных преднорм, то алгебру $\mathcal{A}$ мы назовем мультинормированной. Напомним конструкцию проективной системы банаховых алгебр, сопутствующей заданной мультинормированной алгебре. Обычно эта конструкция используется для ассоциативных алгебр (см. [1, п. 5.2.10]).

Пусть $\mathcal{A}$ – мультинормированная (не обязательно ассоциативная) алгебра относительно насыщенного множества мультипликативных преднорм $\mathfrak{p} = \{p_\iota\}_{\iota\in\Lambda}$. Положим $\iota \leqslant \kappa$, если $p_\iota \leqslant p_\kappa$ (последнее означает, что $p_\iota(x) \leqslant p_\kappa(x)$ для всех $x \in \mathcal{A}$). Ясно, что $I_\iota = \{x \in \mathcal{A} : p_\iota(x) = 0\}$ является двусторонним идеалом алгебры $\mathcal{A}$ и фактор-преднорма $p_\iota^\sim$ в фактор-алгебре $\mathcal{A}/I_\iota$ является нормой. Пусть $\mathcal{A}_\iota$ – пополнение алгебры $\mathcal{A}/I_\iota$ по этой норме. Определим гомоморфизм алгебр $\varepsilon_\iota : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_\iota$, полагая $\varepsilon_\iota(x) = x^\sim(\mathrm{mod}\, I_\iota)$ для всех $x \in \mathcal{A}$. Ясно, что ε_ι имеет плотный образ. Если $\iota \leqslant \kappa$, то $I_\iota \supseteq I_\kappa$, и в этом случае определим гомоморфизм алгебр $\varepsilon_{\iota\kappa} \in B(\mathcal{A}_\kappa, \mathcal{A}_\iota)$, полагая $\varepsilon_{\iota\kappa}(x^\sim(\mathrm{mod}\, I_\kappa)) = x^\sim(\mathrm{mod}\, I_\iota)$ для всех $x \in \mathcal{A}$. Ясно, что $\varepsilon_{\iota\kappa}\varepsilon_\kappa = \varepsilon_\iota$ и $\|\varepsilon_{\iota\kappa}\| \leqslant 1$. В частности, образ гомоморфизма $\varepsilon_{\iota\kappa}$ плотен. Мы получим проективную систему банаховых алгебр $\mathcal{A}_\mathfrak{p} = \{\{\mathcal{A}_\iota\}, \{\varepsilon_{\iota\kappa}\}, \Lambda\}$, которую мы назовем *сопутствующей* мультинормированной алгебре $\mathcal{A}$ (см. также

[1, п. 5.1.1]). Ясно, что обратный предел (см. [1, п. 5.2.13]) $\overleftarrow{\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}}$ этой системы является хаусдорфовой полной мультинормированной алгеброй. При этом определен канонический гомоморфизм алгебр $\mathcal{A} \to \overleftarrow{\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}}$, $x \mapsto (\varepsilon_\iota(x))_{\iota\in\Lambda}$. Используя стандартные рассуждения (см. [1, п. 5.2.10]), нетрудно доказать, что этот гомоморфизм имеет плотный образ, а также является вложением, если $\mathfrak{p}$ отделимое множество преднорм, т.е. когда $\mathfrak{p} \in \mathrm{n}(\mathcal{A})$. Если к тому же алгебра $\mathcal{A}$ полна, то $\mathcal{A}$ совпадает с $\overleftarrow{\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}}$ с точностью до топологического изоморфизма (см. [1, п. 5.2.17]). Отделимая полная мультинормированная ассоциативная алгебра $\mathcal{A}$ называется *алгеброй Аренса–Майкла* [1, п. 2.2.4]. *Оболочкой Аренса-Майкла* [1, п. 5.2.21] полинормированной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ называется пара $(\widetilde{\mathcal{A}}, \omega)$, где $\widetilde{\mathcal{A}}$ алгебра Аренса–Майкла и $\omega : \mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$ непрерывный гомоморфизм алгебр с "универсально-проективным" свойством: для любой алгебры Аренса–Майкла $\mathcal{B}$ и любого непрерывного гомоморфизма $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ существует единственный непрерывный гомоморфизм $\widetilde{\pi} : \widetilde{\mathcal{A}} \to \mathcal{B}$, $\widetilde{\pi} \cdot \omega = \pi$.

1.2. Банаховы комплексы. Все рассматриваемые ниже банаховы комплексы считаются конечными, коцепными и неотрицательными, т.е. банахов комплекс $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ $(\mathfrak{X} = \{X_p\}, \mathfrak{d} = \{d_p\})$ есть последовательность банаховых пространств вида $0 \to X_0 \xrightarrow{d^0} X_1 \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{p-1}} X_p \xrightarrow{d^p} \cdots$, где $d^p \in B(X_p, X_{p+1})$, $d^{p+1} \cdot d^p = 0$, причем существует такое наименьшее целое число $n \geqslant 0$, что $X_p = \{0\}$ для всех $p > n$. Число n называется *длиной комплекса*. Индекс при d^p мы обычно опускаем, если это не вызывает недоразумений. Пространства когомологий комплекса $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ обозначаются через $H^p(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$, $p \geqslant 0$. Напомним, что $H^p(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ является преднормированным фактор-пространством ядра дифференциала d^p по образу d^{p-1} относительно фактор-преднормы. Если образ дифференциала замкнут, то $H^p(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ – банахово пространство. Последовательность $(\mathfrak{X}^*, \mathfrak{d}^*)$: $\cdots \xrightarrow{l^{p-1}} Y_p \xrightarrow{l^p} \cdots$, состоящая из сопряженных пространств $Y_p = X^*_{n-p}$ и сопряженных операторов $l^p = \left(d^{n-p-1}\right)^*$, называется сопряженным комплексом.

1.3. Ультрастепень и функтор Садовского. В дальнейшем мы часто будем использовать ультрастепень банахова пространства. Вкратце напомним ее конструкцию. Пусть S бесконечное множество и $\mathfrak{U}$ нетривиальный (т.е. $\bigcap_{M\in\mathfrak{U}} M = \varnothing$) ультрафильтр в S. Говорят, что $\mathfrak{U}$ является *счетно неполным* (см. [15]), если существует счетное разбиение $\{S_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ множества S такое, что $S_n \notin \mathfrak{U}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Всюду в дальнейшем под ультрафильтром подразумеваем счетно-неполный ультрафильтр, если это особо не оговорено. Пусть X – банахово пространство, $\ell_\infty(S,X)$ – банахово пространство всех ограниченных семейств $(x_i)_{i\in S}$ из X с sup-нормой (если $S = \mathbb{N}$, то пишем $\ell_\infty(X)$ вместо $\ell_\infty(\mathbb{N},X)$), $\mathfrak{U}$ – нетривиальный ультрафильтр в S и $N_{\mathfrak{U}}(X)$ – замкнутое подпространство, состоящее из всех семейств $(x_i)_{i\in S}$, которые сходятся по ультрафильтру $\mathfrak{U}$ к нулю, т.е. $\lim_{\mathfrak{U}} x_i = 0$. Фактор-пространство $X_{\mathfrak{U}} = \ell_\infty(S,X)/N_{\mathfrak{U}}(X)$ называется *ультрастепенью* (по ультрафильтру $\mathfrak{U}$) банахова пространства X. Класс смежности семейства $(x_i)_{i\in S} \in \ell_\infty(S,X)$ обозначим через $[x_i]$. Ясно, что $\|[x_i]\| = \lim_{\mathfrak{U}} \|x_i\|$, и подпространство X отождествляется (с точностью до изометрии) с замкнутым подпространством в $X_{\mathfrak{U}}$, порожденным всеми константными семействами $[x_i]$, где $x_i = x$ для всех $i \in S$. Ультрастепень подмножества $C \subseteq X$ определяется как $C_{\mathfrak{U}} = \{[s_i] \in X_{\mathfrak{U}} : s_i \in C\}$. Произвольный оператор $T \in B(X,Y)$ банаховых пространств допускает "расширение" $T_{\mathfrak{U}} \in B(X_{\mathfrak{U}}, Y_{\mathfrak{U}})$, определенное равенством $T_{\mathfrak{U}}[x_i] = [Tx_i]$ для всех $(x_i)_{i\in S} \in \ell_\infty(S,X)$, причем $\|T_{\mathfrak{U}}\| = \|T\|$, $\ker(T)_{\mathfrak{U}} \subseteq \ker(T_{\mathfrak{U}})$ и $\operatorname{im}(T_{\mathfrak{U}}) \subseteq \operatorname{im}(T)_{\mathfrak{U}}$. Если $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ банахов комплекс, то последовательность $\cdots \xrightarrow{d^{p-1}_{\mathfrak{U}}} X_{p_{\mathfrak{U}}} \xrightarrow{d^{p}_{\mathfrak{U}}} \cdots$ является банаховым комплексом, который назовем ультрастепенью комплекса $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ и обозначим через $(\mathfrak{X}_{\mathfrak{U}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}})$. Следующее утверждение используется в дальнейшем и доказано в [15, предложения 15–17].

Предложение 1.2. *Если $T \in B(X,Y)$, то $\ker(T) = \ker(T_{\mathfrak{U}}) \cap X$, $\overline{\operatorname{im}(T)} = Y \cap \overline{\operatorname{im}(T_{\mathfrak{U}})}$, и следующие утверждения равносильны:* a) *образ* $\operatorname{im}(T)$ *замкнут;* b) *образ* $\operatorname{im}(T_{\mathfrak{U}})$ *замкнут;* c) $\ker(T)_{\mathfrak{U}} = \ker(T_{\mathfrak{U}})$; d) $\operatorname{im}(T)_{\mathfrak{U}} = \operatorname{im}(T_{\mathfrak{U}})$.

Пусть теперь $k(X)$ – замкнутое подпространство в $\ell_\infty(X)$, состоящее из всех предкомпактных последовательностей из X. Положим $X^\circ = \ell_\infty(X)/k(X)$. Для $T \in B(X,Y)$ определим $T_\infty \in B(\ell_\infty(X), \ell_\infty(Y))$, $T_\infty(x_i)_{i\in\mathbb{N}} = (Tx_i)_{i\in\mathbb{N}}$ для всех $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty(X)$. Так как $T_\infty k(X) \subseteq k(Y)$, то естественным образом определяется оператор $T^\circ \in B(X^\circ, Y^\circ)$ равенством $T^\circ[x_i] = [Tx_i]$ для всех $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty(X)$. Таким образом, определен функтор $X \mapsto X^\circ$,

$T \mapsto T^\circ$, который называют *функтором Садовского* (см. [13, 14]); пусть $(\mathfrak{X}^\circ, \mathfrak{d}^\circ)$ – образ банахова комплекса $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ при действии этого функтора.

1.4. Параметризованные банаховы комплексы. В этом пункте мы рассматриваем спектры конечных банаховых комплексов, параметризированных топологическим пространством. Пусть Ω – топологическое пространство и $\mathfrak{X} = \{X_p : p \geqslant 0\}$ – совокупность банаховых пространств, причем $X_p = \{0\}$, $p > n$. Предположим, что существует совокупность непрерывных отображений $\mathfrak{d} = \{d^p\}$, $d^p : \Omega \to B(X_p, X_{p+1})$, для которых $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}(\lambda))$ банахов комплекс длины n при любом $\lambda \in \Omega$, где $\mathfrak{d}(\lambda) = \{d^p(\lambda)\}$. Такую совокупность банаховых комплексов $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}(\lambda))$, $\lambda \in \Omega$, назовем *банаховым комплексом, параметризованным пространством* Ω (это понятие восходит к Дж. Тейлору [3]). Для краткости, мы будем писать "Ω-банахов комплекс $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$". Число n назовем *длиной Ω-банахова комплекса* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$. Ω-банахов комплекс, состоящий из совокупности банаховых комплексов $(\mathfrak{X}^*, \mathfrak{d}(\lambda)^*)$, $\lambda \in \Omega$, назовем *сопряженным* с $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ и обозначим через $(\mathfrak{X}^*, \mathfrak{d}^*)$. Если $\mathfrak{U}$ ультрафильтр на множестве S, то возникает Ω-банахов комплекс $(\mathfrak{X}_\mathfrak{U}, \mathfrak{d}(\lambda)_\mathfrak{U})$, $\lambda \in \Omega$ (см. п. 1.3), который назовем *ультрастепенью* комплекса $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ и обозначим через $(\mathfrak{X}_\mathfrak{U}, \mathfrak{d}_\mathfrak{U})$. Аналогично определяется Ω-банахов комплекс $(\mathfrak{X}^\circ, \mathfrak{d}^\circ)$ при действии функтора Садовского (см. п. 1.3).

Пусть теперь $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ есть Ω-банахов комплекс длины n. Для любого $p \geqslant 0$ введем множество $\Sigma_p(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) = \{\lambda \in \Omega : H^p(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}(\lambda)) \neq \{0\}\}$ (соответственно, $\Sigma_p^{\mathrm{e}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) = \{\lambda \in \Omega : \dim H^p(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}(\lambda)) = \infty\}$). Пусть $\sigma_{\delta,k}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) = \bigcup_{n-k \leqslant p \leqslant n} \Sigma_p(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ (соответственно, $\sigma^{\mathrm{e}}_{\delta,k}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) = \bigcup_{n-k \leqslant p \leqslant n} \Sigma^{\mathrm{e}}_p(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$), и пусть $\sigma_{\pi,k}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ (соответственно, $\sigma^{\mathrm{e}}_{\pi,k}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$) есть множество всех $\lambda \in \Omega$, для которых $\lambda \in \bigcup_{0 \leqslant p \leqslant k} \Sigma_p(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ (соответственно, $\lambda \in \bigcup_{0 \leqslant p \leqslant k} \Sigma^{\mathrm{e}}_p(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$) или дифференциал $d^k(\lambda)$ комплекса $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}(\lambda))$ имеет незамкнутый образ, где $0 \leqslant k \leqslant n$. Мы также положим $\sigma_{\mathrm{t}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) = \bigcup_{p \geqslant 0} \Sigma_p(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$. Очевидно, что $\sigma_{\mathrm{t}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) = \sigma_{\pi,n}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) = \sigma_{\delta,n}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$.

Определение 1.3. *Совокупность $\mathfrak{S}$ всех функций σ_{t}, $\sigma_{\delta,k}$, $\sigma_{\pi,k}$, $k \geqslant 0$, определенных на классе всех параметризованных конечных банаховых комплексов, назовем* семейством спектров Слодковского. *Функцию σ_{t} мы назовем спектром Тейлора. Соответственно, семейство существенных спектров Слодковского есть $\mathfrak{S}^{\mathrm{e}} = \{\sigma^{\mathrm{e}} : \sigma \in$*

$\mathfrak{S}\} = \{\sigma^{\mathrm{e}}_{\mathrm{t}}, \sigma^{\mathrm{e}}_{\delta,k}, \sigma^{\mathrm{e}}_{\pi,k} : k \geqslant 0\}$.

Следует отметить, что обычный спектр оператора $T \in B(X)$ совпадает со спектром Тейлора параметризованного (пространством $\mathbb{C}$) банахова комплекса $0 \to X \xrightarrow{T-\lambda} X \to 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, длины 1. Поэтому спектр оператора T мы также обозначим через $\sigma_{\mathrm{t}}(T)$.

Применяя [4, лемма 2.6.5], нетрудно показать, что

$$\sigma^{\mathrm{e}}_{\delta,k}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) = \sigma_{\delta,k}(\mathfrak{X}^{\circ}, \mathfrak{d}^{\circ}),\ \sigma^{\mathrm{e}}_{\pi,k}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) = \sigma_{\pi,k}(\mathfrak{X}^{\circ}, \mathfrak{d}^{\circ}). \tag{1.1}$$

Далее, используя известный (см., например, [5, лемма 2.1]) результат об одновременной точности банахова комплекса и сопряженного с ним комплекса, легко видеть, что

$$\sigma_{\delta,k}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) = \sigma_{\pi,k}(\mathfrak{X}^{*}, \mathfrak{d}^{*}), \quad \sigma_{\pi,k}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) = \sigma_{\delta,k}(\mathfrak{X}^{*}, \mathfrak{d}^{*}). \tag{1.2}$$

Кроме того, из [3, теорема 2.1 (a)] следует, что все спектры $\sigma_{\delta,k}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$, $\sigma_{\pi,k}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ являются замкнутыми подмножествами в Ω.

Предложение 1.4. *Если $\mathfrak{U}$ – ультрафильтр на множестве S, то $\sigma_{\pi,k}(\mathfrak{X}_{\mathfrak{U}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}}) = \bigcup_{p=0}^{k} \Sigma_p(\mathfrak{X}_{\mathfrak{U}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}})$, $0 \leqslant k \leqslant n$.*

Доказательство. По определению 1.3,

$$\bigcup_{p=0}^{k} \Sigma_p(\mathfrak{X}_{\mathfrak{U}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}}) \subseteq \sigma_{\pi,k}(\mathfrak{X}_{\mathfrak{U}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}}).$$

Пусть теперь $\lambda \notin \bigcup_{p=0}^{k} \Sigma_p(\mathfrak{X}_{\mathfrak{U}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}})$. Покажем, что тогда образ $\mathrm{im}(d^k(\lambda)_{\mathfrak{U}})$ замкнут (и, следовательно, $\lambda \notin \sigma_{\pi,k}(\mathfrak{X}_{\mathfrak{U}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}})$). Действительно, $\ker(d^k(\lambda)_{\mathfrak{U}}) = \mathrm{im}(d^{k-1}(\lambda)_{\mathfrak{U}})$, отсюда образ $\mathrm{im}(d^{k-1}(\lambda)_{\mathfrak{U}})$ замкнут. По предложению 1.2, $\mathrm{im}(d^{k-1}(\lambda)) = X_k \cap \mathrm{im}(d^{k-1}(\lambda)_{\mathfrak{U}}) = X_k \cap \ker(d^k(\lambda)_{\mathfrak{U}}) = \ker(d^k(\lambda))$. Далее, $\ker(d^k(\lambda))_{\mathfrak{U}} = \mathrm{im}(d^{k-1}(\lambda))_{\mathfrak{U}} = \mathrm{im}(d^{k-1}(\lambda)_{\mathfrak{U}}) = \ker(d^k(\lambda)_{\mathfrak{U}})$. Опять по предложению 1.2, образ $\mathrm{im}(d^k(\lambda)_{\mathfrak{U}})$ замкнут. $\square$

Предложение 1.5. *Если $\sigma \in \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{U}$ – ультрафильтр на S, то $\sigma(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) = \sigma(\mathfrak{X}_{\mathfrak{U}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}})$.*

Доказательство. Покажем, что $\Sigma_p(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) \subseteq \Sigma_p(\mathfrak{X}_{\mathfrak{U}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}})$. Пусть $\lambda \in \Sigma_p(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$. Если образ $\mathrm{im}(d^{p-1}(\lambda))$ не замкнут, то, по предложению 1.2, образ $\mathrm{im}(d^{p-1}(\lambda)_{\mathfrak{U}})$ также не замкнут, т.е. $\lambda \in \Sigma_p(\mathfrak{X}_{\mathfrak{U}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}})$. Пусть образ $\mathrm{im}(d^{p-1}(\lambda))$ замкнут и $x \in \ker(d^p(\lambda)) \backslash \mathrm{im}(d^{p-1}(\lambda))$. По предложению 1.2, $\mathrm{im}(d^{p-1}(\lambda)_{\mathfrak{U}}) \cap X_p = \mathrm{im}(d^{p-1}(\lambda))$, поэтому

$x \notin \operatorname{im}(d^{p-1}(\lambda)_{\mathfrak{U}})$. Но $x \in \ker(d^p(\lambda))_{\mathfrak{U}}$ и $\ker(d^p(\lambda))_{\mathfrak{U}} \subseteq \ker(d^p(\lambda)_{\mathfrak{U}})$, т.е. $\lambda \in \Sigma_p(\mathfrak{X}_{\mathfrak{U}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}})$. Отсюда $\sigma_{\delta,k}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) \subseteq \sigma_{\delta,k}(\mathfrak{X}_{\mathfrak{U}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}})$ и, по предложению 1.2, $\sigma_{\pi,k}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) \subseteq \sigma_{\pi,k}(\mathfrak{X}_{\mathfrak{U}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}})$.

Обратно, пусть $\lambda \in \sigma_{\pi,k}(\mathfrak{X}_{\mathfrak{U}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}})$. Согласно предложениям 1.2 и 1.4, можно считать, что $\lambda \in \Sigma_p(\mathfrak{X}_{\mathfrak{U}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}})$ и образы $\operatorname{im}(d^{p-1}(\lambda)_{\mathfrak{U}})$, $\operatorname{im}(d^p(\lambda)_{\mathfrak{U}})$ замкнуты для некоторого p, $0 \leqslant p \leqslant k$. По предложению 1.2, $\ker(d^p(\lambda))_{\mathfrak{U}} = \ker(d^p(\lambda)_{\mathfrak{U}})$, $\operatorname{im}(d^{p-1}(\lambda))_{\mathfrak{U}} = \operatorname{im}(d^{p-1}(\lambda)_{\mathfrak{U}})$, и существует $[x_i] \in \ker(d^p(\lambda)_{\mathfrak{U}}) \setminus \operatorname{im}(d^{p-1}(\lambda)_{\mathfrak{U}})$, где $x_i \in \ker(d^p(\lambda))$. Тогда $x_{i_0} \notin \operatorname{im}(d^{p-1}(\lambda))$ для некоторого $i_0 \in S$, т.е. $x_{i_0} \in \ker(d^p(\lambda)) \setminus \operatorname{im}(d^{p-1}(\lambda))$ и $\lambda \in \sigma_{\pi,k}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$. Наконец, $\sigma_{\delta,k}(\mathfrak{X}_{\mathfrak{U}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}}) = \sigma_{\mathrm{t}}(\mathfrak{X}_{\mathfrak{U}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}}) \setminus \sigma_{\pi,n-k-1}(\mathfrak{X}_{\mathfrak{U}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}}) = \sigma_{\mathrm{t}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) \setminus \sigma_{\pi,n-k-1}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) \subseteq \sigma_{\delta,k}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$. $\square$

1.5. Конус эндоморфизма Ω-банахова комплекса. Пусть $\beta = \{\beta_p \in B(X_p)\}$ – ограниченный эндоморфизм Ω-банахова комплекса $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ (т.е. $d^p(\lambda)\beta_p = \beta_{p+1} d^p(\lambda)$ для любых $\lambda \in \Omega$ и $p \geqslant 0$). Спектром $\sigma_{\mathrm{t}}(\beta)$ эндоморфизма β назовем объединение обычных спектров $\sigma_{\mathrm{t}}(\beta_p)$. Если $\mu \in \mathbb{C}$, то *конусом эндоморфизма* $\beta - \mu = \{\beta_p - \mu\}$ называется следующий Ω-банахов комплекс, который обозначим через $\operatorname{Con}((\mathfrak{X}, \mathfrak{d}), \beta - \mu)$:

$$0 \to X_0 \xrightarrow{\gamma^0(\lambda,\mu)} X_1 \oplus X_0 \xrightarrow{\gamma^1(\lambda,\mu)} \cdots \xrightarrow{\gamma^{p-1}(\lambda,\mu)} X_p \oplus X_{p-1} \xrightarrow{\gamma^p(\lambda,\mu)} \cdots,$$

где $\gamma^p(\lambda, \mu)(x, y) = (d^p(\lambda)x, -d^{p-1}(\lambda)y + (\beta_p - \mu)x)$, $(x, y) \in X_p \oplus X_{p-1}$, $p \geqslant 0$ (для $\mu = 0$ положим $\gamma^p(\lambda, \mu) = \gamma^p(\lambda)$). Легко проверить, что совокупность банаховых комплексов $\operatorname{Con}((\mathfrak{X}, \mathfrak{d}(\lambda)), \beta - \mu)$, $(\lambda, \mu) \in \Omega \times \mathbb{C}$, порождает $\Omega \times \mathbb{C}$-банахов комплекс, который обозначим через $\operatorname{Con}_\beta(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$. Нетрудно также проверить, что с точностью до топологического изоморфизма Ω-банаховых комплексов выполнено равенство

$$\operatorname{Con}((\mathfrak{X}, \mathfrak{d}), \beta)^* = \operatorname{Con}((\mathfrak{X}^*, \mathfrak{d}^*), \beta^*). \tag{1.3}$$

Следующий результат существенно используется в дальнейшем.

Теорема 1.6. *Пусть $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ есть Ω-банахов комплекс и β – ограниченный эндоморфизм этого комплекса. Для любого $p \geqslant 0$ выполнены следующие включения:* $\Sigma_{p-1}(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) \cup \Sigma_p(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) \supseteq \Sigma_p(\operatorname{Con}((\mathfrak{X}, \mathfrak{d}), \beta))$, $\Sigma_p(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) \subseteq \bigcup_{\mu \in \sigma_{\mathrm{t}}(\beta)} \Sigma_{p+1}(\operatorname{Con}((\mathfrak{X}, \mathfrak{d}), \beta - \mu))$. *Если* $\sigma \in \mathfrak{S}$ *и* $\Pi : \Omega \times \mathbb{C} \to \Omega$ *– каноническая проекция, то* $\sigma(\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) = \Pi(\sigma(\operatorname{Con}_\beta(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})))$.

Доказательство. Пусть $\ker(d^p(\lambda)) = \operatorname{im}(d^{p-1}(\lambda))$ и $\ker(d^{p-1}(\lambda)) = \operatorname{im}(d^{p-2}(\lambda))$ для некоторого $\lambda \in \Omega$. Если $(x, y) \in X_p \oplus X_{p-1}$,

$\gamma^p(\lambda)(x,y) = 0$, то $d^p(\lambda)x = 0$, $\beta_p x = d^{p-1}(\lambda)y$. Тогда существует пара $(x',y') \in X_{p-1} \oplus X_{p-2}$ такая, что $d^{p-1}(\lambda)x' = x$ и $-y + \beta_{p-1}x' = d^{p-2}(\lambda)y'$, т.е. $\gamma^{p-1}(\lambda)(x',y') = (x,y)$.

Докажем второе включение. Пусть $\ker(d^p(\lambda)) \neq \operatorname{im}(d^{p-1}(\lambda))$ для некоторого $\lambda \in \Omega$ и $\lambda \notin \bigcup_{\mu\in\sigma_{\mathrm{t}}(\beta)} \Sigma_{p+1}(\mathrm{Con}((\mathfrak{X},\mathfrak{d}),\beta-\mu))$. Для всех $x \in \ker(d^p(\lambda))$ и $\mu \in \sigma_{\mathrm{t}}(\beta)$ имеем $(0,x) \in \ker(\gamma^{p+1}(\lambda,\mu))$. Тогда существует пара $(x',y') \in X_p \oplus X_{p-1}$ такая, что $(0,x) = \gamma^p(\lambda,\mu)(x',y')$. Следовательно, $d^p(\lambda)(x') = 0$, $x = -d^{p-1}(\lambda)y' + (\beta_p - \mu)x'$, т.е. $\ker(d^p(\lambda)) = \operatorname{im}(d^{p-1}(\lambda)) + (\beta_p - \mu)\ker(d^p(\lambda))$. Поскольку $d^p(\lambda)\beta_p = \beta_{p+1}d^p(\lambda)$, последнее равенство выполнено не только при $\mu \in \sigma_{\mathrm{t}}(\beta)$, но и при всех $\mu \in \mathbb{C}$. Получаем противоречие с леммой 1.6 из [5] (известной как лемма Слодковского). Это доказывает равенство $\sigma(\mathfrak{X},\mathfrak{d}) = \Pi(\sigma(\mathrm{Con}_\beta(\mathfrak{X},\mathfrak{d}))$ для спектров Слодковского $\sigma = \sigma_{\delta,k}$. Теперь утверждение для $\sigma_{\pi,k}$ следует из формул (1.2) и (1.3). $\square$

1.6. Банаховы представления алгебры Ли. Пусть $\mathfrak{J}$ – произвольная алгебра Ли и $U(\mathfrak{J})$ - ее универсальная обертывающая алгебра [16, Гл. 1]. Алгебра $U(\mathfrak{J})$ является полинормированной алгеброй (см. п. 1.1) относительно сильнейшей локально выпуклой топологии (т.е. относительно всех существующих на ней преднорм). Ввиду хорошо известного [16, Гл. 1, п. 2.1] свойства универсальности алгебры $U(\mathfrak{J})$, всякий лиев гомоморфизм $\pi : \mathfrak{J} \to \mathcal{A}$ в произвольную ассоциативную алгебру $\mathcal{A}$ (которая является алгеброй Ли относительно взятия обычного коммутатора $[x,y] = xy - yx$, x, $y \in \mathcal{A}$) продолжается единственным способом до гомоморфизма ассоциативных алгебр $U(\mathfrak{J}) \to \mathcal{A}$, который также обозначим через π. В частности, множество всех характеров $\mathbf{X}(U(\mathfrak{J}))$ отождествляется с множеством $\Delta(\mathfrak{J}) = \{\lambda \in \mathfrak{J}^* : \lambda([\mathfrak{J},\mathfrak{J}]) = \{0\}\}$, где $[\mathfrak{J},\mathfrak{J}]$ – коммутант алгебры Ли $\mathfrak{J}$.

Пусть $\mathfrak{J}$ – банахова алгебра Ли и X – банахово пространство. Если задано ограниченное представление $\alpha : \mathfrak{J} \to B(X)$, то X автоматически наделяется структурой $\mathfrak{J}$-модуля: $a \cdot x = \alpha(a)x$, $a \in \mathfrak{J}$, $x \in X$. При этом мы говорим, что пара (X,α) является банаховым $\mathfrak{J}$-модулем. Представление $\alpha^\circ : \mathfrak{J} \to B(X^\circ)$, $\alpha^\circ(u) = \alpha(u)^\circ$, наделяет X° (см. п. 1.3) структурой $\mathfrak{J}$-модуля. Если $\mathfrak{U}$ – ультрафильтр и $X_{\mathfrak{U}}$ – ультрастепень X (см. п. 1.3), то α индуцирует представление $\alpha_{\mathfrak{U}} : \mathfrak{J} \to B(X_{\mathfrak{U}})$, $\alpha_{\mathfrak{U}}(u) = \alpha(u)_{\mathfrak{U}}$, т.е. пара $(X_{\mathfrak{U}},\alpha_{\mathfrak{U}})$ есть $\mathfrak{J}$-модуль.

Пусть теперь $\mathfrak{J}$ – конечномерная алгебра Ли, $\wedge\mathfrak{J} = \bigoplus_{p\geqslant 0} \wedge^p\mathfrak{J}$

– внешняя алгебра для $\mathfrak{J}$, и пусть $C^p(\mathfrak{J}, X) = B(\wedge^p \mathfrak{J}, X)$. Рассмотрим коцепной банахов комплекс $C^\bullet(\alpha)$, порожденный банаховым $\mathfrak{J}$-модулем $(X, \alpha) : 0 \to X \xrightarrow{d^0} C^1(\mathfrak{J}, X) \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{p-1}} C^p(\mathfrak{J}, X) \xrightarrow{d^p} \cdots$, где $(d^p\omega)(u_1 \wedge \ldots \wedge u_{p+1}) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \alpha(u_i)\omega(u_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{u}_i \wedge \ldots \wedge u_{p+1}) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([u_i, u_j] \wedge u_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{u}_i \wedge \ldots \wedge \widehat{u}_j \wedge \ldots \wedge u_{p+1})$, $u_i \in \mathfrak{J}$, $\omega \in C^p(\mathfrak{J}, X)$, здесь $\widehat{u}_i$ означает пропуск переменной u_i. Соответствующие пространства когомологий обозначим через $H^p(\alpha)$, $p \geqslant 0$.

Легко проверить следующее утверждение.

Лемма 1.7. *Пусть $\mathfrak{J}$ – конечномерная алгебра Ли и (X, α) – банахов $\mathfrak{J}$-модуль. Тогда $C^\bullet(\alpha)^\circ = C^\bullet(\alpha^\circ)$ и $C^\bullet(\alpha_{\mathfrak{U}}) = C^\bullet(\alpha)_{\mathfrak{U}}$ с точностью до изоморфизма соответствующих банаховых комплексов.*

Пусть $\theta : \mathfrak{J} \to B(B(\wedge \mathfrak{J}, X))$ – представление (см. [17, п. 3.1]), определенное формулой $\theta(\nu) = L_{\alpha(\nu)} - R_{T(\nu)}$, где $T(\nu) = \sum_{p=0}^n T_p(\nu) \in B(\wedge \mathfrak{J})$, $T_p(\nu)(u_1 \wedge \ldots \wedge u_p) = \sum_{i=1}^p u_1 \wedge \ldots \wedge [\nu, u_i] \wedge \ldots \wedge u_p$, а также $L_{\alpha(\nu)}(\omega) = \alpha(\nu)\omega$ и $R_{T(\nu)}(\omega) = \omega T(\nu)$ – операторы умножения. Представление θ задает структуру $\mathfrak{J}$-модуля в пространстве $B(\wedge \mathfrak{J}, X)$. Ясно, что $T : \mathfrak{J} \to B(\wedge \mathfrak{J})$ – гомоморфизм алгебр Ли, т.е. $\wedge \mathfrak{J}$ является $\mathfrak{J}$-модулем. Кроме того, все подпространства $\wedge^p \mathfrak{J}$ являются подмодулями этого модуля. Следует отметить, что представление, порожденное $\mathfrak{J}$-подмодулем $\wedge^1 \mathfrak{J}(= \mathfrak{J})$, сводится к присоединенному представлению алгебры Ли $\mathfrak{J}$.

Лемма 1.8. *Если для некоторого $\nu \in \mathfrak{J}$ оператор присоединенного представления $\mathrm{ad}(\nu) \in B(\mathfrak{J})$, $\mathrm{ad}(\nu)(u) = [\nu, u]$, является нильпотентным, то $T(\nu)$ нильпотентный оператор. При этом, если (X, α) – банахов $\mathfrak{J}$-модуль, то $\sigma_{\mathrm{t}}(\theta(\nu)) = \sigma_{\mathrm{t}}(\alpha(\nu))$.*

Доказательство. Нильпотентность оператора $T(\nu)$ проверяется непосредственно. Ясно, что $L_{\alpha(\nu)} R_{T(\nu)} = R_{T(\nu)} L_{\alpha(\nu)}$ и оператор $R_{T(\nu)}$ нильпотентен. По теореме об отображении спектра (например, Тейлора для коммутативных семейств) $\sigma_{\mathrm{t}}(\theta(\nu)) = \sigma_{\mathrm{t}}(L_{\alpha(\nu)}) = \sigma_{\mathrm{t}}(\alpha(\nu))$. $\square$

Пусть $\nu \in \mathfrak{J}$ и рассмотрим оператор $i(\nu) \in B(B(\wedge \mathfrak{J}, X))$, определенный равенством $(i(\nu)\omega)(u) = \omega(\nu \wedge u)$ для всех $\omega \in B(\wedge \mathfrak{J}, X)$ и $u \in \wedge \mathfrak{J}$, который назовем оператором гомотопии комплекса $C^\bullet(\alpha)$. Хорошо известны (см. [17, п. 3.1]) следующие формулы:

$$d\theta(\nu) = \theta(\nu) d, \tag{1.4}$$

$$di(\nu) + i(\nu)d = \theta(\nu), \tag{1.5}$$

где d дифференциал комплекса $C^\bullet(\alpha)$.

Пусть $f \in U(\mathfrak{I})$, $\lambda \in \Delta(\mathfrak{I})$ и пусть $\omega \in C^p(\mathfrak{I}, X)$ принадлежит ядру дифференциала d_λ комплекса $C^\bullet(\alpha - \lambda)$. Используя (1.4) и (1.5), легко проверить, что

$$(\theta(f) - \lambda(f))\omega \in \mathrm{im}(d_\lambda). \tag{1.6}$$

Пусть теперь $\mathfrak{I}$ конечномерная алгебра Ли и (X, α) – банахов $\mathfrak{I}$-модуль. Мы имеем $\Delta(\mathfrak{I})$-банахов комплекс $C^\bullet(\alpha - \lambda)$, $\lambda \in \Delta(\mathfrak{I})$, который обозначим через $\mathcal{C}(\alpha)$.

Определение 1.9. *Пусть (X, α) – банахов $\mathfrak{I}$-модуль и $\sigma \in \mathfrak{S}$. Множество $\sigma(\mathcal{C}(\alpha))$ назовем* спектром Слодковского *представления α и обозначим через $\sigma(\alpha)$. Если $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ семейство образующих алгебры Ли $\mathfrak{I}$, то* $\mathfrak{I}$-спектром *операторного семейства $\alpha(u)$ назовем множество $\sigma(\alpha(u)) = \bar{u}(\sigma(\alpha))$, где $\bar{u} : \Delta(\mathfrak{I}) \to \mathbb{C}^n$, $\bar{u}(\lambda) = (\lambda(u_i))_{i=1}^n$.*

Аналогично определяются существенные спектры Слодковского $\sigma^{\mathrm{e}}(\alpha)$ и существенные $\mathfrak{I}$-спектры $\sigma^{\mathrm{e}}(\alpha(u))$, $\sigma \in \mathfrak{S}$.

Теорема 1.10. *Пусть $\sigma \in \mathfrak{S}$. Тогда $\sigma^{\mathrm{e}}(\alpha) = \sigma(\alpha^\circ)$, $\sigma(\alpha) = \sigma(\alpha_{\mathfrak{U}})$.*

Доказательство. Согласно (1.1) и лемме 1.7, $\sigma^{\mathrm{e}}(\alpha) = \sigma(\alpha^\circ)$. Аналогично, согласно предложению 1.5 и лемме 1.7, $\sigma(\alpha) = \sigma(\alpha_{\mathfrak{U}})$. □

1.7. Однородные базисы в пополнении алгебры $U(\mathfrak{I})$. Пусть $\mathfrak{I}$ – конечномерная алгебра Ли. Напомним, что нижний центральный ряд алгебры Ли $\mathfrak{I}$ определяется следующим образом: $\mathfrak{I}^{(1)} = \mathfrak{I}$ и далее рекуррентно по формуле $\mathfrak{I}^{(k+1)} = [\mathfrak{I}, \mathfrak{I}^{(k)}]$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Говорят, что $\mathfrak{I}$ является нильпотентной алгеброй Ли p-го порядка, если $\mathfrak{I}^{(p)} = \{0\}$.

Если $\mathfrak{I}$ – конечномерная разрешимая (соответственно, нильпотентная) алгебра Ли, то в $\mathfrak{I}$ существует базис, относительно которого присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{I}$ приводится к (соответственно, строго) верхнетреугольному виду. Такой базис для краткости будем называть (соответственно, строго) треугольным базисом алгебры $\mathfrak{I}$.

Пусть теперь $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – строго треугольный базис нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{I}$. Рассмотрим мономы $x_{i_1} \ldots x_{i_s}$ в $U(\mathfrak{I})$. Если $J = (j_1, \ldots, j_n)$ – набор неотрицательных целых чисел, то для упорядоченного монома $x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}$ мы используем сокращенное обозначение x^J. Согласно теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта (см. [16, Гл. 1, п. 2.7]) множество всех упорядоченных мономов $\{x^J\}$ образуют (алгебраический) базис в алгебре $U(\mathfrak{J})$. Определим степень deg произвольного монома в алгебре $U(\mathfrak{J})$. Положим $\deg(x_i) = \max\{k : x_i \in \mathfrak{J}^{(k)}\}$ для элементов базиса x. *Степень* $\deg(\nu)$ монома $\nu = x_{i_1}\dots x_{i_s} \in U(\mathfrak{J})$ определим как сумму степеней сомножителей. Пусть $U^k(x)$ – подпространство в $U(\mathfrak{J})$, порожденное мономами $\nu = x_{i_1}\dots x_{i_s}$, степени которых не меньше, чем k. Нетрудно проверить, что $U^k(x)U^m(x) \subseteq U^{k+m}(x)$ и $\dim(U^k(x)/U^{k+1}(x)) < \infty$. Кроме того, семейство подпространств $\{U^k(x)\}$ задает фильтрацию в $U(\mathfrak{J})$, то есть $\cap_{k\geqslant 1}U^k(x) = \{0\}$.

В дальнейшем мы часто будем иметь дело с полинормированными пополнениями (см. п. 1.1) алгебры $U(\mathfrak{J})$. В связи с этим полезно ввести следующее понятие. Пусть $\mathcal{A}$ – некоторая алгебра Аренса–Майкла, являющяяся пополнением $U(\mathfrak{J})$, где $\mathfrak{J}$ – конечномерная нильпотентная алгебра Ли. Мы скажем, что упорядоченные мономы $\{x^J\}$ от элементов строго треугольного базиса x алгебры Ли $\mathfrak{J}$ образуют *однородный базис* в $\mathcal{A}$, если для любого $u \in \mathcal{A}$ существуют однозначно определенные комплесные числа a_J, такие, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ безусловно сходится к u в $\mathcal{A}$, где $u_k = \sum_{\deg\{x^J\}=k} a_J x^J$. В этом случае имеет место единственное разложение элемента u в ряд $\sum_J a_J x^J$, и мы скажем, что ряд $\sum_J a_J x^J$ *однородно сходится* к u.

§2. Мультинормированные алгебры Ли

В этом параграфе по произвольной мультинормированной алгебре Ли $\mathfrak{J}$ определяется мультинормированная ассоциативная алгебра сходящихся степенных рядов от элементов алгебры Ли $\mathfrak{J}$.

2.1. Банахова обертывающая алгебра банаховой алгебры Ли. По каждой банаховой (не обязательно конечномерной) алгебре Ли можно определить банахову ассоциативную алгебру со свойством универсальности относительно класса “относительно сжимающих” гомоморфизмов (см. ниже) банаховой алгебры Ли в банаховы ассоциативные алгебры.

Пусть $\mathcal{A}$ – банахова ассоциативная алгебра, X – полинормированное пространство, топология которого порождена семейством преднорм $\{p_\iota\}_{\iota\in\Lambda}$. Линейный оператор $T : X \to \mathcal{A}$ назовем *относительно сжимающим*, если для некоторых $q \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$ и $\iota \in \Lambda$ справедливо $q(Tx) \leqslant p_\iota(x)$, $x \in X$.

Лемма 2.1. *Пусть $M_\iota = \{x \in X : p_\iota(x) \leqslant 1\}$. Оператор $T : X \to \mathcal{A}$ является относительно сжимающим в том и только в том случае, когда $\|\mathrm{SG}(TM_\iota)\| < \infty$ для некоторого $\iota \in \Lambda$.*

Доказательство. Если $T : X \to \mathcal{A}$ – относительно сжимающий оператор, то $q(TM_\iota) \leqslant 1$ для некоторых $q \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$ и $\iota \in \Lambda$. Тогда $q(\mathrm{SG}(TM_\iota)) \leqslant 1$ и $\|\mathrm{SG}(TM_\iota)\| < \infty$. Обратно, если $\|\mathrm{SG}(TM_\iota)\| < \infty$, то, согласно [18, лемма 2.7], $q(\mathrm{SG}(TM_\iota)) \leqslant 1$ для некоторой $q \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$. Тогда $q(TM_\iota) \leqslant 1$, т.е. $q(Tx) \leqslant p_\iota(x)$ для всех $x \in X$. $\square$

Предложение 2.2. *Для всякой банаховой алгебры Ли $\mathfrak{J}$ существуют банахова ассоциативная алгебра $A(\mathfrak{J})$ и гомоморфизм алгебр Ли $\varphi : \mathfrak{J} \to A(\mathfrak{J})$ с нормой $\|\varphi\| \leqslant 1$ такие, что $\mathrm{im}(\varphi)$ порождает плотную подалгебру в $A(\mathfrak{J})$, и выполнено следующее универсально-проективное свойство: для любой банаховой алгебры $\mathcal{A}$ и любого относительно сжимающего гомоморфизма алгебр Ли $u \in B(\mathfrak{J}, \mathcal{A})$ существует единственный гомоморфизм алгебр $u_A \in B(A(\mathfrak{J}), \mathcal{A})$ со свойством $u_A \cdot \varphi = u$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{J}^{\widehat{\otimes} n} = \mathfrak{J}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}\mathfrak{J}$ (n раз) – проективное тензорное произведение [1, п. 0.3.4] и $\ell_1(\mathfrak{J}) = \Big\{(y_n) \in \prod_{n\geqslant 0}\mathfrak{J}^{\widehat{\otimes} n}: \sum_{n\geqslant 0}\|y\| < +\infty\Big\}$ – банахова алгебра с умножением $(y_n)\cdot(y'_n) = (\sum_{p+q=n} y_p \otimes y'_q)$ и с нормой $\|(y_n)\| = \sum_{n\geqslant 0}\|y_n\|$. Нетрудно проверить, что тензорная алгебра $T(\mathfrak{J})$ всюду плотна в $\ell_1(\mathfrak{J})$. Пусть I – двусторонний идеал в $T(\mathfrak{J})$, порожденный тензорами вида $x\otimes y - y\otimes x - [x,y]$, $x, y \in \mathfrak{J}$, и J – замыкание идеала I в $\ell_1(\mathfrak{J})$. Положим $A(\mathfrak{J}) = \ell_1(\mathfrak{J})/J$ и пусть $\varphi : \ell_1(\mathfrak{J}) \to A(\mathfrak{J})$ – каноническое отображение. Ясно, что $\mathrm{im}(\varphi)$ порождает плотную подалгебру в $A(\mathfrak{J})$.

Пусть теперь $\mathcal{A}$ – банахова алгебра, $u \in B(\mathfrak{J}, \mathcal{A})$ – относительно сжимающий гомоморфизм алгебр Ли и $C = \|\mathrm{SG}(u(\mathfrak{J}_{(1)}))\|$. По лемме 2.1 $C < \infty$, т.е. $\|(u(\mathfrak{J}_{(1)}))^n\| \leqslant C$ для любого n. Тогда u порождает операторы $u^n \in B(\mathfrak{J}^{\widehat{\otimes} n}, \mathcal{A})$, $u^n(x_1\otimes\cdots\otimes x_n) = u(x_1)\cdots u(x_n)$, $x_k \in \mathfrak{J}$, с нормой $\|u^n\| = \|(u(\mathfrak{J}_{(1)}))^n\|$. Если $(y_n) \in \ell_1(\mathfrak{J})$, то ряд $\sum_{n\geqslant 0} u^n(y_n)$ сходится в $\mathcal{A}$, так что определен оператор $\bar{u} \in B(\ell_1(\mathfrak{J}), \mathcal{A})$ по формуле $\bar{u}(y_n) = \sum_{n\geqslant 0} u^n(y_n)$. Нетрудно проверить, что $\|\bar{u}\| \leqslant C$, $\bar{u}|_{\mathfrak{J}} = u$ и $\bar{u}$ – гомоморфизм алгебр. Поскольку $\ker(\varphi) = J \subseteq \ker(\bar{u})$, существует единственный гомоморфизм $u_A : A(\mathfrak{J}) \to \mathcal{A}$ такой, что $u_A \cdot \varphi = \bar{u}$. $\square$

Замечание 2.3. Если $\|u\| \leqslant 1$ или $\rho(u(\mathfrak{J}_{(1)})) < 1$, то u является относительно сжимающим, и $\|u_A\| \leqslant 1$ при $\|u\| \leqslant 1$. Используя это, легко вывести из предложения 2.2, что алгебра $A(\mathfrak{J})$ определяется универсально-проективным свойством однозначно с точностью до изометрического изоморфизма. Пусть теперь $U(\mathfrak{J}) = T(\mathfrak{J})/I$ – универсальная обертывающая алгебра [16, п. 1.2.1] алгебры Ли $\mathfrak{J}$. Тогда мы определим каноническое отображение $\varphi_{\mathfrak{J}} : U(\mathfrak{J}) \to A(\mathfrak{J})$ равенством $\varphi_{\mathfrak{J}}(f^{\sim}(\operatorname{mod} I)) = f^{\sim}(\operatorname{mod} J)$, $f \in T(\mathfrak{J})$. Отображение $\varphi_{\mathfrak{J}}$ имеет плотный образ.

Банахову ассоциативную алгебру $A(\mathfrak{J})$ мы назовем *банаховой обертывающей алгеброй* банаховой алгебры Ли $\mathfrak{J}$.

Пусть теперь $S_{\mathfrak{J}}$ – пересечение единичного шара в $\mathfrak{J}^*$ с аннулятором коммутанта $\mathfrak{J}$, т.е. $S_{\mathfrak{J}} = \{\lambda \in \mathfrak{J}^* : \lambda([\mathfrak{J}, \mathfrak{J}]) = 0, \|\lambda\| \leq 1\}$.

Следствие 2.4. *Сопряженное отображение $\varphi^* : A(\mathfrak{J})^* \to \mathfrak{J}^*$ осуществляет гомеоморфизм пространств $\mathbf{X}(A(\mathfrak{J}))$ и $S_{\mathfrak{J}}$ относительно $*$-слабых топологий пространств $A(\mathfrak{J})^*$ и $\mathfrak{J}^*$.*

Доказательство. Согласно предложению 2.2, $\operatorname{im}(\varphi)$ порождает плотную подалгебру в $A(\mathfrak{J})$. Поэтому $\varphi^* : \mathbf{X}(A(\mathfrak{J})) \to S_{\mathfrak{J}}$ является инъективным и (слабо) непрерывным отображением. Ввиду компактности пространства характеров $\mathbf{X}(A(\mathfrak{J}))$, достаточно показать, что отображение $\varphi^* : \mathbf{X}(A(\mathfrak{J})) \to S_{\mathfrak{J}}$ сюръективно. Пусть $\mu \in S_{\mathfrak{J}}$. Тогда $\|\mu\| \leq 1$ и, согласно замечанию 2.3, существует элемент $\lambda \in \mathbf{X}(A(\mathfrak{J}))$ такой, что $\lambda\varphi = \mu$, т.е. $\varphi^*(\lambda) = \mu$. $\square$

Предложение 2.5. *Пусть I – замкнутый идеал в $\mathfrak{J}$ и R_I – замкнутый двусторонний идеал в $A(\mathfrak{J})$, порожденный множеством $\varphi_{\mathfrak{J}}(I)$. Тогда банаховы алгебры $A(\mathfrak{J})/R_I$ и $A(\mathfrak{J}/I)$ изометричны.*

Доказательство. Ясно, что гомоморфизм алгебр Ли $\alpha : \mathfrak{J} \to A(\mathfrak{J}/I)$, определенный равенством $\alpha(x) = \varphi_{\mathfrak{J}/I}(x^{\sim}(\operatorname{mod} I))$ для всех $x \in \mathfrak{J}$, имеет норму не выше 1. По предложению 2.2 существует гомоморфизм $\alpha_A : A(\mathfrak{J}) \to A(\mathfrak{J}/I)$ со свойством $\alpha_A\varphi_{\mathfrak{J}} = \alpha$ и с нормой $\|\alpha_A\| \leqslant 1$. Ясно, что $\alpha_A\varphi_{\mathfrak{J}} = \varphi_{\mathfrak{J}/I}\alpha'$ и $R_I \subseteq \ker(\alpha_A)$, где $\alpha' : U(\mathfrak{J}) \to U(\mathfrak{J}/I)$ – канонический эпиморфизм. Рассмотрим теперь гомоморфизм алгебр Ли $\beta : \mathfrak{J}/I \to A(\mathfrak{J})/R_I$, определенный равенством $\beta(x^{\sim}(\operatorname{mod} I)) = \varphi_{\mathfrak{J}}(x)^{\sim}(\operatorname{mod} R_I)$ для всех $x \in \mathfrak{J}$. Так как $\|\varphi_{\mathfrak{I}}\| \leqslant 1$, то $\|\beta\| \leqslant 1$. По предложению 2.2 существует гомоморфизм алгебр $\beta_A : A(\mathfrak{I}/I) \to A(\mathfrak{I})/R_I$ со свойством $\beta_A \varphi_{\mathfrak{I}/I} = \beta$ и с нормой $\|\beta_A\| \leqslant 1$. Тогда $(\beta_A \cdot \alpha_A)(\varphi_{\mathfrak{I}}(x)) = \beta_A(\varphi_{\mathfrak{I}/I}(x^\sim(\operatorname{mod} I))) = \beta(x^\sim(\operatorname{mod} I)) = \varphi_{\mathfrak{I}}(x)^\sim(\operatorname{mod} R_I)$. Так как образ алгебры $U(\mathfrak{I})$ в $A(\mathfrak{I})$ плотен, то $\beta_A \cdot \alpha_A = \tau$, где $\tau : A(\mathfrak{I}) \to A(\mathfrak{I})/R_I$ фактор-отображение. Следовательно, $\ker(\alpha_A) \subseteq R_I$. Изометричность алгебр $A(\mathfrak{I})/R_I$ и $A(\mathfrak{I}/I)$ следует теперь из плотности $\operatorname{im}(\alpha_A)$ в $A(\mathfrak{I}/I)$. $\square$

2.2. Алгебра Аренса–Майкла $\mathcal{O}_{\mathfrak{I}}(D)$. Пусть теперь $\mathfrak{I}$ – мультинормированная алгебра Ли (см. п. 1.1) с определяющим топологию множеством преднорм $\mathfrak{p} = \{p_\iota\}_{\iota \in \Lambda} \in \mathrm{n}(\mathfrak{I})$. Рассмотрим проективную систему банаховых алгебр Ли $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}} = \{\{\mathfrak{I}_\iota\}, \{\varepsilon_{\iota\kappa}\}, \Lambda\}$, сопутствующую мультинормированной алгебре Ли $\mathfrak{I}$, где $\mathfrak{I}_\iota$ – банахова алгебра Ли, построенная по преднорме p_ι (см. п. 1.1). Пусть $A(\mathfrak{I}_\iota)$ банаховы обертывающие алгебры банаховых алгебр Ли $\mathfrak{I}_\iota$ и пусть $\varphi_\iota : \mathfrak{I}_\iota \to A(\mathfrak{I}_\iota)$ канонические гомоморфизмы алгебр Ли (см. замечание 2.3). Для любых $\iota \leqslant \kappa$ имеем $\|\varphi_\iota \varepsilon_{\iota\kappa}\| \leqslant 1$. По предложению 2.2 существуют гомоморфизмы алгебр $u_{\iota\kappa} : A(\mathfrak{I}_\kappa) \to A(\mathfrak{I}_\iota)$ с нормой $\|u_{\iota\kappa}\| \leqslant 1$ (см. замечание 2.3), $u_{\iota\kappa}\varphi_\kappa = \varphi_\iota \varepsilon_{\iota\kappa}$ и $u_{\iota\kappa} u_{\kappa\gamma} = u_{\iota\gamma}$, если $\iota \leqslant \kappa \leqslant \gamma$, т.е. $A(\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}) = \{\{A(\mathfrak{I}_\iota)\}, \{u_{\iota\kappa}\}, \Lambda\}$ – проективная система банаховых ассоциативных алгебр и $\{\varphi_\iota\} : \mathfrak{I}_{\mathfrak{p}} \to A(\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}})$ – морфизм этих систем. Композиция морфизма $\overleftarrow{\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}} \to \overleftarrow{A(\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}})}$ обратных пределов этих систем и канонического вложения $\mathfrak{I} \to \overleftarrow{\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}}$ индуцирует гомоморфизм алгебр $\varphi : U(\mathfrak{I}) \to \overleftarrow{A(\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}})}$. Определим преднормы $\widetilde{p}_\iota$ на алгебре $U(\mathfrak{I})$ правилом $\widetilde{p}_\iota(u) = \|\varphi_\iota(u)\|_{A(\mathfrak{I}_\iota)}$ для всех $u \in U(\mathfrak{I})$. Ясно, что $\widetilde{p}_\iota(u\nu) \leqslant \widetilde{p}_\iota(u)\widetilde{p}_\iota(\nu)$, и $U(\mathfrak{I})$ является мультинормированной алгеброй с сопутствующей системой банаховых алгебр $A(\mathfrak{I}_\iota)$, $\iota \in \Lambda$ (см. п. 1.1). Таким образом, отображение φ имеет плотный образ, т.е. $\overleftarrow{A(\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}})}$ – отделимое пополнение алгебры $U(\mathfrak{I})$.

Пусть $\mathfrak{p} = \{p_\iota\}_{\iota \in \Lambda}$, $\mathfrak{q} = \{q_\kappa\}_{\kappa \in \Omega} \in \mathrm{n}(\mathfrak{I})$. Множество $\Xi = \Lambda \cup \Omega$ формально превращается в частично упорядоченное, если положить $\iota \leqslant \kappa$ для $\iota \in \Lambda$ и $\kappa \in \Omega$ при условии $p_\iota \leqslant q_\kappa$. Мы будем писать $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{q}$, если для любого $\iota \in \Lambda$ (соответственно, $\kappa \in \Omega$) существует точка $\kappa \in \Omega$ (соответственно, $\iota \in \Lambda$) такая, что $\iota < \kappa$ (соответственно, $\kappa < \iota$). Пусть $\omega(\mathfrak{I})$ – подкласс в $\mathrm{n}(\mathfrak{I})$, состоящий из всех $\mathfrak{p}$ таких, что $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{p}$ (таким образом, в каждом семействе $\mathfrak{p}$

из $\omega(\mathfrak{J})$ отсутствует максимальный элемент). Отношение $\sim$ очевидно является отношением эквивалентности в $\omega(\mathfrak{J})$.

Лемма 2.6. *Пусть* $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \omega(\mathfrak{J})$, *и пусть* $\mathfrak{J}_\mathfrak{p} = \{\{\mathfrak{J}_\iota\}, \{\varepsilon_{\delta\iota}\}, \Lambda\}$, $\mathfrak{J}_\mathfrak{q} = \{\{\mathfrak{J}_\kappa\}, \{\tau_{\kappa\gamma}\}, \Omega\}$ *– проективные системы. Если* $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{q}$, *то алгебры* $\underleftarrow{A(\mathfrak{J}_\mathfrak{p})}$ *и* $\underleftarrow{A(\mathfrak{J}_\mathfrak{q})}$ *топологически изоморфны.*

Доказательство. Для любых $\iota \in \Lambda$ и $\kappa \in \Omega$ условие $\iota < \kappa$ (соответственно, $\kappa < \iota$) равносильно соотношению $p_\iota < q_\kappa$ (соответственно, $q_\kappa < p_\iota$). В этом случае $I_\kappa \subseteq I_\iota$ (соответственно, $I_\iota \subseteq I_\kappa$) (см. п. 1.1) и существуют канонические гомоморфизмы алгебр Ли $g_{\iota\kappa} \in B(\mathfrak{J}_\kappa, \mathfrak{J}_\iota)$ (соответственно, $f_{\kappa\iota} \in B(\mathfrak{J}_\iota, \mathfrak{J}_\kappa)$) такие, что $g_{\iota\gamma} = g_{\iota\kappa}\tau_{\kappa\gamma}$, $g_{\delta\kappa} = \varepsilon_{\delta\iota}g_{\iota\kappa}$ (соответственно, $f_{\gamma\iota} = \tau_{\gamma\kappa}f_{\kappa\iota}$, $f_{\kappa\delta} = f_{\kappa\iota}\varepsilon_{\iota\delta}$), где $\delta \in \Lambda$, $\gamma \in \Omega$, $\delta \leqslant \iota < \kappa \leqslant \gamma$ (соответственно, $\gamma \leqslant \kappa < \iota \leqslant \delta$) (см. п. 1.1). При этом, $f_{\gamma\iota}g_{\iota\kappa} = \tau_{\gamma\kappa}$ при $\gamma < \iota < \kappa$ и $g_{\delta\kappa}f_{\kappa\iota} = \varepsilon_{\delta\iota}$ при $\delta < \kappa < \iota$. Поскольку нормы всех присутствующих операторов не превосходят 1, можно применить функтор из предложения 2.2. Тогда существуют аналогичные операторы банаховых обертывающих алгебр банаховых алгебр Ли $\mathfrak{J}_\iota$, $\iota \in \Lambda\cup\Omega$, с вышеприведенными соотношениями, что влечет изоморфность обратных пределов $\underleftarrow{A(\mathfrak{J}_\mathfrak{p})}$ и $\underleftarrow{A(\mathfrak{J}_\mathfrak{q})}$. $\square$

Лемма 2.6 оправдывает следующее определение.

Определение 2.7. *Пусть* $\mathfrak{J}$ *– произвольная алгебра Ли,* $\mathfrak{p} \in \omega(\mathfrak{J})$ *и* D *– класс эквивалентности системы* $\mathfrak{p}$. *Алгебру* $\underleftarrow{A(\mathfrak{J}_\mathfrak{p})}$ *назовем* алгеброй сходящихся степенных рядов от элементов алгебры Ли $\mathfrak{J}$ относительно D *и обозначим через* $\mathcal{O}_\mathfrak{J}(D)$. *Если* $\mathfrak{p}$ *– множество всех мультипликативных преднорм, то алгебру* $\mathcal{O}_\mathfrak{J}(D)$ *обозначим через* $\mathcal{O}_\mathfrak{J}$ *и назовем алгеброй целых функций от элементов алгебры Ли* $\mathfrak{J}$.

Ясно, что $\mathcal{O}_\mathfrak{J}(D)$ является алгеброй Аренса-Майкла и существует канонический гомоморфизм алгебр Ли $\varphi : U(\mathfrak{J}) \to \mathcal{O}_\mathfrak{J}(D)$ с плотным образом.

Напомним, что $U(\mathfrak{J})$ является полинормированной алгеброй относительно сильнейшей локально выпуклой топологии (см. п. 1.6).

Теорема 2.8. *Алгебра* $\mathcal{O}_\mathfrak{J}$ *является оболочкой Аренса–Майкла (см.* [1, *п.* 5.2.21]*) полинормированной алгебры* $U(\mathfrak{J})$.

Доказательство. Пусть $u : U(\mathfrak{J}) \to \mathcal{A}$ произвольный гомоморфизм алгебр, где $\mathcal{A}$ алгебра Аренса-Майкла. Тогда $\mathcal{A}$ – обратный предел $\varprojlim\{\{\mathcal{A}_\iota\}, \{\nu_{\iota\kappa}\}, \Lambda\}$ сопутствующей ей проективной системы банаховых алгебр (см. п. 1.1). Для каждого $\iota \in \Lambda$ рассмотрим преднорму $p_\iota(x) = \|\nu_\iota u(x)\|$, $x \in \mathfrak{J}$, где $\nu_\iota : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_\iota$ канонический гомоморфизм обратного предела. Очевидно, что p_ι – мультипликативная преднорма в $\mathfrak{J}$, и $I_\iota = \{x \in \mathfrak{J} : p_\iota(x) = 0\}$ является идеалом алгебры Ли $\mathfrak{J}$. Пусть $\mathfrak{J}_\iota$ – пополнение алгебры Ли $\mathfrak{J}/I_\iota$ относительно нормы $p_\iota^\sim$ (см. п. 1.1). Поскольку $\|\nu_{\iota\kappa}\| \leqslant 1$ (см. п. 1.1), $p_\iota(x) = \|\nu_{\iota\kappa}\nu_\kappa u(x)\| \leqslant \|\nu_{\iota\kappa}\| p_\kappa(x) \leqslant p_\kappa(x)$ $(\iota \leqslant \kappa)$, т.е. норма гомоморфизма $\varepsilon_{\iota\kappa} \in B(\mathfrak{J}_\kappa, \mathfrak{J}_\iota)$, $\varepsilon_{\iota\kappa}(x^\sim \operatorname{mod} I_\kappa) = (x^\sim \operatorname{mod} I_\iota)$, не превышает 1. Ясно, что норма гомоморфизма алгебр Ли $\nu_\iota u : \mathfrak{J}_\iota \to \mathcal{A}_\iota$, определенного формулой $\nu_\iota u(x^\sim \operatorname{mod} I_\iota) = \nu_\iota(u(x))$ для всех $x \in \mathfrak{J}$, также не превышает 1. По предложению 2.2 существует гомоморфизмы банаховых алгебр $\omega_\iota : A(\mathfrak{J}_\iota) \to \mathcal{A}_\iota$ со свойствами $\omega_\iota\varphi_\iota = \nu_\iota u$, где $\varphi_\iota : \mathfrak{J}_\iota \to A(\mathfrak{J}_\iota)$ – канонический гомоморфизм. Легко видеть, что $\nu_{\iota\kappa}\omega_\kappa = \omega_\iota u_{\iota\kappa}$, если $\iota \leqslant \kappa$. Пусть $\{p_\pi\}_{\pi\in\Xi}$ множество всех мультипликативных преднорм в $\mathfrak{J}$. Можно считать, что $\Lambda \subseteq \Xi$. По определению 2.7, $\mathcal{O}_{\mathfrak{J}} = \varprojlim\{\{A(\mathfrak{J}_\pi)\}, \{u_{\pi\nu}\}, \Xi\}$. Определим гомоморфизм $\widetilde{u} : \mathcal{O}_{\mathfrak{J}} \to \mathcal{A}$ формулой $\widetilde{u}(f_\pi)_{\pi\in\Xi} = (\omega_\iota(f_\iota))_{\iota\in\Lambda}$ для всех $f_\pi \in A(\mathfrak{J}_\pi)$. Тогда $\widetilde{u}$ непрерывен и $\widetilde{u}\varphi(x) = \widetilde{u}(\varphi_\pi(x^\sim \operatorname{mod} I_\pi))_{\pi\in\Xi} = (\omega_\iota\varphi_\iota(x^\sim \operatorname{mod} I_\iota))_{\iota\in\Lambda} = (\nu_\iota(u(x)))_{\iota\in\Lambda} = u(x)$, т.е. $\widetilde{u}\varphi = u$. $\square$

Теорема 2.9. *Пусть $\mathfrak{J}$ – мультинормированная алгебра Ли, топология которой порождается множеством $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \omega(\mathfrak{J})$, и пусть D – класс эквивалентности $\mathfrak{p}$ в $\omega(\mathfrak{J})$. Если $\mathcal{B}$ – банахова ассоциативная алгебра, и $\tau : \mathfrak{J} \to \mathcal{B}$ – гомоморфизм алгебр Ли, то непрерывный гомоморфизм алгебр $\widetilde{\tau} : \mathcal{O}_{\mathfrak{J}}(D) \to \mathcal{B}$, $\widetilde{\tau}\varphi = \tau$, существует тогда и только тогда, когда τ – относительно сжимающий оператор.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{p} = \{p_\iota\}_{\iota\in\Lambda}$ и пусть существует непрерывный гомоморфизм алгебр $\widetilde{\tau} : \mathcal{O}_{\mathfrak{J}}(D) \to \mathcal{B}$, $\widetilde{\tau}\varphi = \tau$, т.е. существует непрерывное продолжение естественного отображения $\tau' : (U(\mathfrak{J}), \{\widetilde{p}_\iota\}_{\iota\in\Lambda}) \to \mathcal{B}$, $\tau'|_{\mathfrak{J}} = \tau$. Так как в множестве $\{\widetilde{p}_\iota\}_{\iota\in\Lambda}$ отсутствует максимальный элемент, то $\|\tau'(u)\| \leqslant C\widetilde{p}_\iota(u)$, $u \in U(\mathfrak{J})$, для некоторых $\iota \in \Lambda$ и $C > 0$. Тогда $\|\mathrm{SG}(\tau(M_\iota))\| = \|\mathrm{SG}(\tau'(M_\iota))\| = \|\tau'\mathrm{SG}(M_\iota)\| \leqslant C\widetilde{p}_\iota(\mathrm{SG}(M_\iota)) \leqslant C$, где $M_\iota = \{x \in \mathfrak{J} : p_\iota(x) \leqslant 1\}$. По лемме 2.1 гомоморфизм τ является относительно сжимающим.

Обратно, пусть $q(\tau(u)) \leqslant p_\iota(u)$, $u \in \mathfrak{J}$, для некоторых $q \in \mathcal{N}(\mathcal{B})$ и $\iota \in \Lambda$, и пусть $\mathfrak{J}_\iota$ – отделимое пополнение $\mathfrak{J}$ относительно преднормы p_ι. Тогда τ продолжается по непрерывности до относительно сжимающего гомоморфизма алгебр $\tau_\iota : \mathfrak{J}_\iota \to \mathcal{B}$. По предложению 2.2 существует гомоморфизм алгебр $\tau_{\iota A} \in B(A(\mathfrak{J}_\iota), \mathcal{B})$ такой, что $\tau_{\iota A}\varphi_\iota = \tau_\iota$. Остается взять в качестве искомого гомоморфизма композицию отображений $\mathcal{O}_{\mathfrak{J}}(D) \to A(\mathfrak{J}_\iota) \xrightarrow{\tau_{\iota A}} \mathcal{B}$. $\square$

§3. Базис банаховой обертывающей алгебры конечномерной нильпотентной алгебры Ли

В этом параграфе мы покажем, что элементы банаховой алгебры $A(\mathfrak{J})$ представляются и притом единственным образом в виде степенных рядов от элементов строго треугольного базиса e конечномерной нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{J}$.

3.1. Теорема о норме. Пусть $\mathfrak{J}$ – нормированная конечномерная алгебра Ли. Рассмотрим канонический гомоморфизм $\varphi_{\mathfrak{J}} : U(\mathfrak{J}) \to A(\mathfrak{J})$ (см. замечание 2.3). Если ядро этого гомоморфизма тривиально, то $U(\mathfrak{J})$ является нормированной алгеброй с индуцированной из $A(\mathfrak{J})$ нормой, и ее пополнение есть $A(\mathfrak{J})$. В общем случае мы имеем мультипликативную преднорму $p(u) = \|\varphi_{\mathfrak{J}}(u)\|_{A(\mathfrak{J})}$, $u \in U(\mathfrak{J})$, где $\|\cdot\|_{A(\mathfrak{J})}$ – норма в $A(\mathfrak{J})$. Найдем явный вид этой преднормы, когда $\mathfrak{J}$ наделяется ℓ_1-нормой $\|\sum a_i x_i\| = \sum |a_i|$ относительно некоторого базиса $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ в $\mathfrak{J}$. Рассмотрим различные мономы вида $\nu = x_{i_1} \dots x_{i_s} \in U(\mathfrak{J})$ и пусть $\nu^* = x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_s}$ – соответствующий тензор в $T(\mathfrak{J})$. Каждый элемент $u \in U(\mathfrak{J})$ представляется в виде линейной комбинации различных мономов $u = a_1\nu_1 + \dots + a_m\nu_m$; пусть $u^* = a_1\nu_1^* + \dots + a_m\nu_m^*$. Тогда $p(u) \leqslant \sum_i |a_i|\ \|\varphi_{\mathfrak{J}}(\nu_i)\| \leqslant \sum_i |a_i|$. Так как $U(\mathfrak{J}) = T(\mathfrak{J})/I$ и $A(\mathfrak{J}) = \ell_1(\mathfrak{J})/J$ (см. п. 2.1), где J – замыкание I в $\ell_1(\mathfrak{J})$, то $p(u) = \inf\{\|f\|_{\ell_1(\mathfrak{J})} : f \in u^* + J\} = \inf\{\|f\|_{\ell_1(\mathfrak{J})} : f \in u^* + I\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует тензор $t \in T(\mathfrak{J})$ такой, что $\|t\|_{\ell_1(\mathfrak{J})} < p(u) + \varepsilon$ и $u = t^\sim (\operatorname{mod} I)$. Разложим t по базису $\{x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_s} : 1 \leqslant i_1, \dots, i_s \leqslant n\}$ в $T(\mathfrak{J})$: $t = b_1\nu_{j_1}^* + \dots + b_k\nu_{j_k}^*$. Тогда $u = b_1\nu_{j_1} + \dots + b_k\nu_{j_k}$ и $\|t\|_{\ell_1(\mathfrak{J})} = |b_1| + \dots + |b_k|$. Таким образом,

$$p(u) = \inf\{|a_1| + \dots + |a_m| : u = a_1\nu_1 + \dots + a_m\nu_m\}, \tag{3.1}$$

где нижняя грань берется по всем представлениям элемента u в виде конечной линейной комбинации мономов.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{J}$ конечномерная нильпотентная алгебра Ли с нормой $\|\cdot\|$ и пусть p – преднорма в $U(\mathfrak{J})$, индуцированная нормой* *из* $A(\mathfrak{J})$, *то есть* $p(f) = \|\varphi_{\mathfrak{J}}(f)\|_{A(\mathfrak{J})}$ *для любого* $f \in U(\mathfrak{J})$. *Тогда* p – *норма в* $U(\mathfrak{J})$ *и* $\ker(\varphi_{\mathfrak{J}}) = \{0\}$.

Доказательство. Рассмотрим ℓ_1-норму l_x в $\mathfrak{J}$ относительно некоторого строго треугольного базиса $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, такую, что $l_x \leqslant \|\cdot\|$. Банахову обертывающую алгебру банаховой алгебры Ли $\mathfrak{J}$ с нормой l_x обозначим через $A(l_x)$, и пусть $\varphi_x : U(\mathfrak{J}) \to A(l_x)$ – канонический гомоморфизм. По предложению 2.2 существует ограниченный гомоморфизм $u : A(\mathfrak{J}) \to A(l_x)$ с нормой $\|u\| \leqslant 1$, такой, что $u\varphi_{\mathfrak{J}} = \varphi_x$. Тогда $\|\varphi_x(f)\|_{A(l_x)} \leqslant p(f)$ для любого $f \in A(\mathfrak{J})$. Таким образом, достаточно доказать утверждение для случая, когда $\|\cdot\| = l_x$ в $\mathfrak{J}$. Для этого мы применим фильтрацию $\{U^k(x)\}$ в алгебре $U(\mathfrak{J})$, построенную по базису x (см. п.1.7), и формулу (3.1). Пусть $f \in U(\mathfrak{J})$. Ввиду нильпотентности алгебры Ли $\mathfrak{J}$, в (3.1) при представлении элемента u в виде линейной комбинации мономов можно ограничиться мономами, степени которых ограничены сверху константой, зависящей от f и n. Поскольку количество различных мономов такого вида конечно, равенство $p(f) = 0$ возможно только тогда, когда $f = 0$, т.е. p – норма. В частности, $\ker(\varphi_{\mathfrak{J}}) = \{0\}$. $\square$

3.2. Базис в $A(\mathfrak{J})$ для градуированной нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{J}$ с ℓ_1-радикальной нормой. Пополнение $A(\mathfrak{J})$ имеет явное описание в случае, когда $\mathfrak{J}$ является градуированной нильпотентной алгеброй Ли.

Пусть E – конечномерная разрешимая алгебра Ли, $e = (e_1, \dots, e_n)$ – такой треугольный базис в E, что $e_{m+1}, \dots, e_n$ – базис в $[E, E]$. Очевидно, что такой базис всегда существует. Норму $\|\cdot\|$ в E назовем *ℓ_1-радикальной нормой* относительно e, если существует норма $\|\cdot\|'$ в подпространстве, порожденном векторами $e_1, \dots, e_m$, такая, что $\|\sum_{i=1}^n a_i e_i\| = \|\sum_{i=1}^m a_i e_i\|' + \sum_{i=m+1}^n |a_i|$.

Пусть теперь $\mathfrak{L}$ – свободная алгебра Ли с образующими $x = (x_1, \dots, x_m)$ и пусть $\mathfrak{L}_i(x)$ – подпространство в $\mathfrak{L}$, порожденное коммутаторами от образующих x длины i (см. [16, Гл. 2, п. 2.6]). Хорошо известно [16, Гл. 2, п. 2.6], что $[\mathfrak{L}_i(x), \mathfrak{L}_j(x)] \subseteq \mathfrak{L}_{i+j}(x)$, и $\mathfrak{L}^{(k)} = \oplus_{i \geq k} \mathfrak{L}_i(x)$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и членов $\mathfrak{L}^{(k)}$ нижнего центрального ряда алгебры Ли $\mathfrak{L}$. Пусть $\mathfrak{J} = \mathfrak{L}/\mathfrak{L}^{(c+1)}$, где $c \in \mathbb{N}$. Образы свободных образующих x в $\mathfrak{J}$ при фактор-отображении $\mathfrak{L} \to \mathfrak{J}$ также обозначим через $x = (x_1, \dots, x_m)$, и пусть $\mathfrak{J}_i(x)$ – подпространство в $\mathfrak{J}$, порожденное коммутаторами от x длины

i. Тогда $\mathfrak{J}$ – конечномерная нильпотентная алгебра Ли $(c+1)$-го порядка, которая имеет конечную градуировку. Таким образом, $\mathfrak{J} = \oplus_{i=1}^{c} \mathfrak{J}_i(x)$, $[\mathfrak{J}_i(x), \mathfrak{J}_j(x)] \subseteq \mathfrak{J}_{i+j}(x)$, причем $\mathfrak{J}_i(x) = \{0\}$ при всех $i > c$. Так как любая конечнопорожденная алгебра Ли является фактором некоторой конечнопорожденной свободной алгебры Ли (см. [16, Гл. 2, п. 2.2]), то любую конечномерную нильпотентную алгебру Ли E $(c+1)$-го порядка, т.е. $E^{(c+1)} = \{0\}$, можно представить в виде фактора $\mathfrak{J}/\mathcal{I}$ по некоторому идеалу $\mathcal{I}$.

Пусть $l_i = \dim(\oplus_{j=1}^{i} \mathfrak{J}_j(x))$. Выберем произвольный базис $\xi_i = (y_{l_{i-1}+1}, \dots, y_{l_i})$ в $\mathfrak{J}_i(x)$ при $i \geqslant 2$, и пусть $\xi_1 = (x_1, \dots, x_m)$. Тогда $y = \xi_1 \cup \dots \cup \xi_c$ является строго треугольным базисом в $\mathfrak{J}$ и $\deg(y_q) = i$ для всех q, $l_{i-1} < q \leq l_i$. Кроме того, $[y_j, y_i]$ является линейной комбинацией элементов базиса y степени $s+t$, где $s = \deg(y_j)$, $t = \deg(y_i)$. Мы скажем, что y является *градуированным базисом* в $\mathfrak{J}$.

Пусть $U_k(y)$ – подпространство в $U(\mathfrak{J})$, порожденное мономами $y_{i_1} \cdots y_{i_s}$ степени k (см. п. 1.7), то есть $U_k(y)$ – множество всех однородных полиномов k-ой степени.

Лемма 3.2. *Семейство подпространств $\{U_k(y)\}$ задает $\mathbb{N}$-градуировку алгебры $U(\mathfrak{J})$, то есть $U(\mathfrak{J}) = \oplus_{k \geqslant 0} U_k(y)$ и $U_k(y) U_m(y) \subseteq U_{k+m}(y)$ для всех $k, m \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Согласно теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта, множество всех произведений вида $y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n}$ образует базис в $U(\mathfrak{J})$. Любое произведение образующих представляется после перестановки сомножителей в виде линейной комбинации мономов той же степени. Поэтому базисные мономы степени k образуют базис в $U_k(y)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, откуда $U(\mathfrak{J}) = \oplus_{n=0}^{\infty} U_k(y)$. Осталось лишь заметить, что степени мономов при перемножении складываются. $\square$

Теорема 3.3. *Пусть $\mathfrak{J}$ – градуированная нильпотентная алгебра Ли с ℓ_1-радикальной нормой относительно градуированного базиса y. Банахова алгебра $A(\mathfrak{J})$ является ℓ_1-прямой суммой своих конечномерных подпространств $\{U_k(y)\}$. В частности, множество всех упорядоченных мономов $\{y^J\}$ является однородным базисом в $A(\mathfrak{J})$.*

Доказательство. Норму в $A(\mathfrak{J})$ обозначим через q. Согласно теореме 3.1, преднорма p, где $p = q\varphi_{\mathfrak{J}}$, является нормой в $U(\mathfrak{J})$.

Пусть $u \in U(\mathfrak{J})$ и пусть $u = \sum_s u_s$ – разложение по однородным компонентам (лемма 3.2). Определим норму $\widetilde{q}(u) = \sum_s p(u_s)$ в алгебре $U(\mathfrak{J})$. Ясно, что $p \leq \widetilde{q}$. Проверим, что $\widetilde{q}$ – алгебраическая норма. Если $u = \sum_s u_s$, $v = \sum_s v_s$ – соответствующие разложения по однородным компонентам, то, согласно лемме 3.2, $\sum_s(\sum_{k+t=s} u_k v_t)$ – разложение элемента uv по однородным компонентам и $\widetilde{q}(uv) = \sum_s p(\sum_{k+t=s} u_k v_t) \leq \sum_s \sum_{k+t=s} p(u_k)p(v_t) = \widetilde{q}(u)\widetilde{q}(v)$.

Пусть $\mathcal{B}$ – пополнение $U(\mathfrak{J})$ относительно нормы $\widetilde{q}$ и $\iota : \mathfrak{J} \to \mathcal{B}$ – тождественное вложение. Мы имеем $\widetilde{q}(\sum a_i y_i) = \widetilde{q}(\sum_i \sum_{l_{i-1}<j\leq l_i} a_j y_j) = \sum_i p(\sum_{l_{i-1}<j\leq l_i} a_j y_j) \leq \sum_i \| \sum_{l_{i-1}<j\leq l_i} a_j y_j \| = \| \sum_{1\leq i\leq m} a_i x_i \|' + \sum_{j>m} |a_j| = \| \sum a_i y_i \|$, где x_i свободные образующие алгебры Ли $\mathfrak{J}$. Таким образом, если $\mathfrak{J}$ наделить нормой $\|\cdot\|$, то ι имеет норму не выше 1. По предложению 2.2, существует гомоморфизм алгебр $\iota_A : A(\mathfrak{J}) \to \mathcal{B}$, $\iota_A \varphi_{\mathfrak{J}} = \iota$. Более того, согласно замечанию 2.3, ι_A тоже имеет норму не выше 1, то есть $\widetilde{q} \leq p$. Учитывая противоположное неравенство $p \leq \widetilde{q}$, мы получим, что $p = \widetilde{q}$ и $\mathcal{B} = A(\mathfrak{J})$. Таким образом, $A(\mathfrak{J})$ является ℓ_1-прямой суммой конечномерных подпространств $\{U_k(y)\}$. Тогда для произвольного $f \in A(\mathfrak{J})$ мы имеем разложение $f = \sum_J a_J y^J$ такое, что $p(f) = \sum_k p(\sum_{\deg(y^J)=k} a_J y^J)$. Отсюда следует, что коэффициенты a_J однозначно определяются по f, т.е. $\{y^J\}$ является однородным базисом в $A(\mathfrak{J})$ (см. п. 1.7). $\square$

Рассмотрим подпространство $U^k(y)$ (см. п. 1.7) в $U(E)$, порожденное мономами, степени которых не меньше, чем k.

Следствие 3.4. *Пусть $\mathfrak{J}$ – градуированная нильпотентная алгебра Ли с ℓ_1-радикальной нормой относительно градуированного базиса y. Тогда замыкание $\overline{U^k(y)}$ в $A(\mathfrak{J})$ состоит из всех однородно сходящихся рядов вида $\sum_J a_J y^J$, где $a_J = 0$ для всех J, таких, что $\deg(y^J) < k$. Кроме того, если $z = (z_1, \ldots, z_{l_c})$ – произвольный строго треугольный базис в $\mathfrak{J}$ такой, что $z_i = x_i$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant m$, то $A(\mathfrak{J}) = U_0(z) \oplus \ldots \oplus U_{k-1}(z) \oplus \overline{U^k(z)}$ и $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{U^k(z)} = \{0\}$, где $U_j(z)$ – подпространство в $U(\mathfrak{J})$, порожденное базисными мономами z^J степени j.*

Доказательство. Пусть M_k – подпространство в $A(\mathfrak{J})$, порожденное однородно сходящимися рядами вида $\sum_J a_J y^J$, где $a_J = 0$ для всех J таких, что $\deg(y^J) < k$. Очевидно, что $U^k(y) \subseteq M_k \subseteq$

$\overline{U^k(y)}$. С другой стороны, согласно теореме 3.3, M_k оказывается ℓ_1-прямой суммой конечномерных подпространств $\{U_i(y)\}$, $i \geqslant k$. Следовательно, M_k замкнуто и $M_k = \overline{U^k(y)}$. В частности, вновь используя теорему 3.3, получим, что $A(\mathfrak{J}) = U_0(y) \oplus \ldots \oplus U_{k-1}(y) \oplus \overline{U^k(y)}$ и $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{U^k(y)} = \{0\}$.

Пусть теперь $\eta_i = (z_{l_{i-1}+1}, \ldots, z_{l_i})$ – элементы базиса z, имеющие степень i. Ясно, что η_i является базисом некоторого алгебраического дополнения к $\mathfrak{J}^{(i+1)}$ в $\mathfrak{J}^{(i)}$. Поскольку $\mathfrak{J}^{(i)} = \mathfrak{J}_i(x) \oplus \mathfrak{J}^{(i+1)}$, существует проектор π_i из $\mathfrak{J}^{(i)}$ на $\mathfrak{J}_i(x)$ вдоль $\mathfrak{J}^{(i+1)}$. Пусть $u_q = \pi_i(z_q)$. Ясно, что $\{u_q\}$ является базисом в $\mathfrak{J}_i(x)$. Тогда $U^k(z) = U^k(y)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, и $A(\mathfrak{J}) = U_0(z) \oplus \ldots \oplus U_{k-1}(z) \oplus \overline{U^k(z)}$. $\square$

Следствие 3.5. *Пусть E – коммутативная алгебра Ли с ℓ_1-нормой относительно некоторого базиса e. Тогда банахова алгебра $A(E)$ состоит из всех абсолютно сходящихся рядов $f = \sum_J a_J e^J$, и $p(f) = \sum_J |a_J|$, где p – норма в $A(E)$.*

Доказательство. Пусть $u \in U(E)$ и пусть $u = \sum_J a_J e^J$ – разложение элемента u по базисным мономам. Поскольку E – коммутативная алгебра Ли, из формулы (3.1) легко вывести, что $p(u) = \sum_J |a_J|$. Остается применить теорему 3.3. $\square$

Пусть теперь E – нильпотентная алгебра Ли порядка $c+1$ и $e = (e_1, \ldots, e_n)$ – строго треугольный базис такой, что $e_{m+1}, \ldots, e_n$ является базисом в $E^{(2)}$. Поскольку E является фактором градуированной нильпотентной алгебры Ли, существует эпиморфизм алгебр Ли $\tau : \mathfrak{J} \to E$ такой, что $\tau(x_s) = e_s$, $1 \leq s \leq m$, где $\mathfrak{J}$ – нильпотентная градуированная алгебра Ли порядка $c+1$ с образующими $x_1, \ldots, x_m$.

Пусть p – некоторая норма в E. С этой нормой можно связать ℓ_1-радикальную норму $q_{y,p}$ в $\mathfrak{J}$ относительно градуированного базиса y: $q_{y,p}(\sum_j a_j y_j) = q'_{y,p}(\sum_{j=1}^m a_j x_j) + \sum_{j>m} |a_j|$, где $q'_{y,p}(\sum_{j=1}^m a_j x_j) = p^\sim(\sum_{j=1}^m a_j e_j^\sim (\operatorname{mod} E^{(2)}))$, $p^\sim$ – фактор-норма в $E/E^{(2)}$. Фактор-норму $q_{y,p}^\sim$ в $E = \mathfrak{J}/\ker(\tau)$ обозначим через $l(p)$. Нетрудно проверить, что фактор-норма $l(p)^\sim$ в $E/E^{(2)}$ совпадает с $p^\sim$.

Теорема 3.6. *Пусть E – нильпотентная алгебра Ли со строго треугольным базисом e и с нормой p, $A(E)$ – банахова обертывающая алгебра, построенная по норме $l(p)$ в E. Тогда $A(E) = U_0(e) \oplus \ldots \oplus U_{k-1}(e) \oplus \overline{U^k(e)}$ для любого $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Определим числа d_k, $1 \leqslant k \leqslant c$ $(d_1 = m)$ так, чтобы $\deg(e_i) = k$ для всех i, $d_{k-1} < i \leqslant d_k$. Фиксируем некоторое k, $1 < k \leqslant c$. Пусть $z_i \in \tau^{-1}(e_i) \cap \mathfrak{J}^{(k)}$, $d_{k-1} < i \leqslant d_k$. Так как $e_i \notin E^{(k+1)}$ для всех i, $d_{k-1} < i \leqslant d_k$, то $z_i \notin \mathfrak{J}^{(k+1)}$. Ясно, что множество $\{z_i : d_{k-1} < i \leqslant d_k\}$ является линейно независимым. Кроме того, если $\sum_{d_{k-1}<i\leqslant d_k} a_i z_i \in \mathfrak{J}^{(k+1)}$ для некоторых a_i, то $\sum_{d_{k-1}<i\leqslant d_k} a_i e_i \in E^{(k+1)}$ в силу того, что $\tau(\mathfrak{J}^{(j)}) = E^{(j)}$ для всех j. Отсюда $a_i = 0$ для всех i. Таким образом, подпространство в $\mathfrak{J}^{(k)}$, порожденное множеством $\{z_i : d_{k-1} < i \leqslant d_k\}$, имеет нулевое пересечение с $\mathfrak{J}^{(k+1)}$. Дополним эти векторы элементами ядра $\ker(\tau)$ до базиса ξ_k некоторого алгебраического дополнения к $\mathfrak{J}^{(k+1)}$ в $\mathfrak{J}^{(k)}$. Переобозначим элементы ξ_k в виде $\{z_i, l_{k-1} < i \leqslant l_k\}$, где $l_k = \dim \oplus_{j=0}^{k} \mathfrak{J}_j(x)$ $(l_1 = d_1)$. Ясно, что $z = \xi_1 \cup \cdots \cup \xi_c$ является строго треугольным базисом в $\mathfrak{J}$, при этом существуют такие числа $t_1, \ldots, t_n$, что $\tau(z_{t_s}) = e_s$ для всех s и $\tau(z_j) = 0$, если $j \neq t_s$ для всех s.

Пусть $A(\mathfrak{J})$ – банахова обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{J}$ с ℓ_1-радикальной нормой $q_{y,p}$. По предложению 2.5, $A(\mathfrak{J})/R_\tau = A(E)$ с точностью до изометричного изоморфизма, где R_τ – замкнутый идеал в $A(\mathfrak{J})$, порожденный ядром $\ker(\tau)$.

Согласно следствию 3.4, $A(\mathfrak{J}) = U_0(z) \oplus \ldots \oplus U_{k-1}(z) \oplus \overline{U^k(z)}$ при любом k. В силу выбора базиса z в $\mathfrak{J}$ получим, что $R_\tau = \oplus_{i=0}^{k-1}(R_\tau \cap U_i(z)) \oplus (R_\tau \cap \overline{U^k(z)})$. Докажем замкнутость образа $\widetilde{\tau}(\overline{U^k(y)})$, где $\widetilde{\tau} : A(\mathfrak{J}) \to A(E)$ – фактор-отображение. Для этого сначала отметим, что $\widetilde{\tau}(\overline{U^k(y)}) = \widetilde{\tau}(\overline{U^k(y)} + (R_\tau \cap \oplus_{i=0}^{k-1} U_i(y)))$. Но $\overline{U^k(y)} + (R_\tau \cap \oplus_{i=0}^{k-1} U_i(y))$ – замкнутое подпространство, содержащее R_τ. Следовательно, образ $\widetilde{\tau}(\overline{U^k(y)} + (R_\tau \cap \oplus_{i=0}^{k-1} U_i(y)))$ также замкнут. Далее, ввиду замкнутости $\widetilde{\tau}(\overline{U^k(y)})$, мы получим, что $\widetilde{\tau}(\overline{U^k(y)}) = \overline{U^k(e)}$. Теперь отсюда нетрудно вывести, что $A(E) = U_0(e) \oplus \ldots \oplus U_{k-1}(e) \oplus \overline{U^k(e)}$. □

§4. Абсолютно выпуклые области

В данном параграфе мы изучим структурные свойства алгебр $\mathcal{O}_{\mathfrak{J}}(D)$ в случае, когда $\mathfrak{J}$ есть конечномерная алгебра Ли.

4.1. Строго возрастающие множества норм. Пусть L – конечномерное пространство, $M \subseteq L$ и $F \subseteq L^*$. *F-выпуклой оболочкой* множества M назовем совокупность $\widehat{M_F}$ точек $z \in L$ таких, что

$|\lambda(z)| \leqslant \sup\{|\lambda(w)| : w \in M\}$, для любого $\lambda \in F$. Область (то есть открытое связное множество) D в L называется F-выпуклой, если $\widehat{K}_F \subset D$ для любого компакта $K \subset D$. Поскольку $L^{**} = L$, можно говорить о M-выпуклой оболочке $\widehat{F}_M$ множества F. Следующая простая лемма хорошо известна.

Лемма 4.1. *Пусть K – компакт в L с непустой внутренностью* $\mathrm{int}K$. *Тогда $\widehat{K}_{L^*} = \mathrm{abc}(K)$. В частности, область D в L является L^*-выпуклой в том и только в том случае, когда D является абсолютно выпуклой областью.*

Пусть $\mathfrak{p} = \{p_\iota\}_{\iota \in \Lambda}$ – насыщенное множество норм в L. Мы скажем, что $\mathfrak{p}$ является *строго возрастающим*, если для любого $\iota \in \Lambda$ существует такой индекс $\kappa \in \Lambda$, что $p_\iota(x) < p_\kappa(x)$, $x \neq 0$ (в этом случае мы будем писать $p_\iota \ll p_\kappa$). По любому строго возрастающему множеству норм в L можно определить абсолютно выпуклую область в L^*. А именно, пусть $\mathfrak{p}$ – строго возрастающее множество норм в L и пусть M_ι – единичный шар в L^* относительно дуальной нормы p_ι^*. Пусть $p_\iota \ll p_\kappa$ и $\lambda \in M_\iota$. Тогда $p_\iota \leqslant \epsilon_{\iota\kappa} p_\kappa$, где $\epsilon_{\iota\kappa} < 1$, и $\sup\{|\lambda(x)| : p_\kappa(x) \leqslant 1\} \leqslant \epsilon_{\iota\kappa}$, т.е. $\lambda \in \mathrm{int}M_\kappa$. Тем самым $M_\iota \subseteq \mathrm{int}M_\kappa$. Положим $D = \cup_{\iota\in\Lambda} M_\iota$. Ясно, что D – область в L^*, которую назовем *областью, ассоциированной с* $\mathfrak{p}$. Очевидно, что D является абсолютно выпуклой областью в L^*.

Лемма 4.2. *Пусть D – абсолютно выпуклая область в L^*. Существует строго возрастающее множество норм $\mathfrak{p}$ в L, ассоциированная область которого совпадает с областью D.*

Доказательство. Ясно, что $0 \in D$. Пусть $\Lambda = \{K_\iota\}$ – система всех компактов таких, что $K_\iota \subset D$ и $0 \in \mathrm{int}K_\iota$. Положим $p_\iota(x) = \sup\{|\lambda(x)| : \lambda \in K_\iota\}$, $x \in L$ для $K_\iota \in \Lambda$. Ясно, что p_ι – норма в L. Если $K_\iota \subset \mathrm{int}K_\kappa$, то по принципу максимума модуля $p_\iota(x) < p_\kappa(x)$, $x \neq 0$, т.е. $\mathfrak{p} = \{p_\iota\}$ – строго возрастающее множество норм. Пусть M_ι – единичный шар в L^* относительно нормы p_ι^*. Ясно, что $M_\iota = \widehat{K_\iota}_L$. По лемме 4.1, $M_\iota = \mathrm{abc}(K_\iota) \subset D$ и $D = \cup_\iota M_\iota$, т.е. D ассоциирована с $\mathfrak{p}$. $\square$

Пусть теперь E – алгебра Ли размерности n, $\mathfrak{p} = \{p_\iota\}_{\iota\in\Lambda}$ – строго возрастающее множество норм в E. Ясно, что $\mathfrak{p} \in \omega(E)$ (см. п. 2.2). Пусть $A(E_\mathfrak{p}) = \{\{A(p_\iota)\}, \{u_{\iota\kappa}\}, \Lambda\}$ – проективная система банаховых алгебр (см. п. 2.2), $\overleftarrow{A(E_\mathfrak{p})}$ – ее обратный предел, где $A(p_\iota) = A(E)$ – банахова обертывающая алгебра банаховой алгебры Ли E с нормой p_ι. Согласно следствию 2.4, $\mathbf{X}(A(p_\iota))$ отождествляется с $M_\iota \cap \Delta(E)$, где M_ι – единичный шар в E^* относительно нормы p_ι^*. Пусть $D = \cup_{\iota \in \Lambda} M_\iota$ – область, ассоциированная с множеством норм $\mathfrak{p}$. Ясно, что $\mathbf{X}(A(p_\iota)) \subseteq \operatorname{int}\mathbf{X}(A(p_\kappa))$, если $p_\iota \ll p_\kappa$, и $D \cap \Delta(E) = \cup_{\iota \in \Lambda} \mathbf{X}(A(p_\iota))$. Наконец, $\mathbf{X}(A(\underleftarrow{E_{\mathfrak{p}}})) = D \cap \Delta(E)$ согласно [1, п. 5.1.8].

Ясно, что область D не меняется при переходе к эквивалентному с $\mathfrak{p}$ множеству норм в E. Более того, если $\mathfrak{q} = \{q_\nu\}_{\nu \in \Omega}$ – другое строго возрастающее множество норм, ассоциированная область которого совпадает с D, то легко понять, что $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ эквивалентны.

Таким образом, используя лемму 4.2, можно отождествить абсолютно выпуклые области в E^* с классами эквивалентности строго возрастающих множеств норм в E и алгебру $A(\underleftarrow{E_{\mathfrak{p}}})$ можно обозначить через $\mathcal{O}_E(D)$ (см. определение 2.7), где D – абсолютно выпуклая область в E^*, ассоциированная с $\mathfrak{p}$.

Пример 4.3. Выбрав базис $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ в E, мы отождествляем E^* с $\mathbb{C}^n$ при помощи отображения $\lambda \mapsto (\lambda(e_1), \dots, \lambda(e_n))$. Пусть $D_r = D_{r_1} \times \cdots \times D_{r_n}$ – полидиск в $\mathbb{C}^n$ мультирадиуса r, $r = (r_1, \dots, r_n)$, $r_i > 0$. Легко проверить, что D_r ассоциирован со строго возрастающим множеством ℓ_1-норм $\mathfrak{l}_e = \{l_{e,t}\}$, где $l_{e,t}(\sum a_i e_i) = \sum |a_i| t_i$, $0 < t_i < r_i$.

4.2. Алгебра $\mathcal{O}_E(D)$ для коммутативной алгебры Ли E. Пусть E – конечномерная коммутативная алгебра Ли и D – абсолютно выпуклая область в E^*. Покажем, что $\mathcal{O}_E(D)$ сводится к алгебре голоморфных функций (с компактно-открытой топологией) $H(D)$.

Действительно, сначала рассмотрим произвольную норму p в E и соответствующую (коммутативную) банахову алгебру $A(E)$. Норму в $A(E)$ обозначим также через p. Пусть K – единичный шар в дуальном пространстве E^* относительно нормы p. Согласно следствию 2.4, $K = \mathbf{X}(A(E))$. Выберем базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ в E и отождествим K с абсолютно выпуклым компактом в $\mathbb{C}^n$ с помощью канонической биекции $K \to \mathbb{C}^n$, $\lambda \mapsto (\lambda(e_1), \dots, \lambda(e_n))$. Преобразование Гельфанда определяет гомоморфизм алгебр $A(E) \to C(K)$, $f \mapsto \widehat{f}$, с нормой не выше 1: $\widehat{f}(\lambda) = \lambda(f)$. Поскольку E – градуированная алгебра Ли (см. п. 3.2) и всякая норма на ней является ℓ_1-радикальной, элемент f алгебры $A(E)$ представляется согласно теореме 3.3 в виде однородно сходящегося степенного ряда $f = \sum_J a_J e^J$ и $p(f) = \sum_k p(\sum_{|J|=k} a_J e^J)$, где $|J| = \sum_i j_i$ для $J = (j_1, \dots, j_n)$. Тогда $\widehat{f}(z) = \sum_k \sum_{|J|=k} a_J z^J$ $(z^J = z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n})$ и $\|\widehat{f}\|_K \leqslant \sum_k \| \sum_{|J|=k} a_J z^J \|_K < \infty$. Следовательно, $\widehat{f}$ является голоморфной функцией в области $\mathrm{int}K$, т.е. $\widehat{f} \in H(\mathrm{int}K)$. В силу единственности разложения в ряд для числовых степенных рядов, гомоморфизм $A(E) \to H(\mathrm{int}K)$, $f \mapsto \widehat{f}$, инъективен. Поскольку ядро преобразования Гельфанда совпадает с радикалом Джекобсона $\mathrm{Rad}A(E)$ (см. [1, п. 2.2.2]), $A(E)$ оказывается полупростой алгеброй.

Пусть теперь $\mathfrak{p} = \{p_\iota\}_{\iota \in \Lambda}$ – строго возрастающее множество норм в E, порождающее область D (см. лемму 4.2), и пусть $K_\iota = \mathbf{X}(A(p_\iota))$. Если $K_\iota \subseteq \mathrm{int}K_\kappa$, то $A(p_\kappa) \subseteq A(p_\iota)$. Кроме того, $D = \cup_{\iota \in \Lambda} K_\iota$. Тогда обратный предел построенных выше гомоморфизмов $A(p_\iota) \to H(\mathrm{int}K_\iota)$ определяет инъективный непрерывный гомоморфизм алгебр $\mathcal{O}_E(D) \to H(D)$, тождественный на полиномах.

Обратно, пусть K_ι – спектр коммутативной банаховой алгебры $A(p_\iota)$. Так как K_ι лежит в D, то по теореме о голоморфном функциональном исчислении [2] существует непрерывный гомоморфизм алгебр $H(D) \to A(p_\iota)$, тождественный на полиномах. Тогда существует непрерывный гомоморфизм алгебр $H(D) \to \mathcal{O}_E(D)$, тождественный на полиномах. Таким образом, $\mathcal{O}_E(D)$ и $H(D)$ топологически изоморфны.

4.3. Алгебра $\mathcal{O}_E(D)$ в случае разрешимой алгебры Ли E. Пусть теперь E – конечномерная разрешимая алгебра Ли и $\mathfrak{p} = \{p_\iota\}_{\iota \in \Lambda}$ – строго возрастающее множество норм в E (см. п. 4.1). Для любого $\iota \in \Lambda$, пусть $p_\iota^\sim$ есть фактор-норма в коммутативной алгебре Ли $F = E/[E,E]$ и пусть $\varphi_\iota : U(E) \to A(p_\iota)$ – канонический гомоморфизм (см. замечание 2.3). По предложению 2.5 $A(p_\iota)/R_{[E,E]} = A(p_\iota^\sim)$ с точностью до изометрического изоморфизма, где $R_{[E,E]}$ – замкнутый двусторонний идеал в $A(p_\iota)$, порожденный множеством $\varphi_\iota([E,E])$. Ввиду полупростоты алгебры $A(p_\iota^\sim)$ (см. п. 4.2), $\mathrm{Rad}A(p_\iota) \subseteq R_{[E,E]}$. Согласно [19] и [20], $A(p_\iota)$ коммутативна по модулю радикала $\mathrm{Rad}A(p_\iota)$, откуда $[E,E] \subseteq \mathrm{Rad}A(p_\iota)$ и $R_{[E,E]} \subseteq \mathrm{Rad}A(p_\iota)$. Таким образом, $\mathrm{Rad}A(p_\iota) = R_{[E,E]}$ и $R_{[E,E]}$ есть множество всех квазинильпотентов.

Пусть $K_\iota = \mathbf{X}(A(p_\iota))$ и $D = \cup_{\iota \in \Lambda} M_\iota$, где M_ι – единичный шар относительно дуальной нормы p_ι^*. Согласно следствию 2.4, $K_\iota = M_\iota \cap \Delta(E)$. Если $p_\iota \ll p_\kappa$, то для любого $x^\sim \in F$, $x^\sim \neq 0^\sim$, имеем $p_\kappa^\sim(x^\sim) = \inf\{p_\kappa(x+y) : y \in [E,E]\} = \inf\{p_\kappa(x+y) : y \in S_x\}$, где $S_x = \{y \in [E,E] : p_\kappa(y) \leqslant 2p_\kappa(x)\}$. Ввиду компактности множества S_x, существует элемент $y_0 \in S_x$ такой, что $\inf\{p_\kappa(x+y) : y \in S_x\} = p_\kappa(x+y_0)$. Но $p_\kappa(x+y_0) > p_\iota(x+y_0) \geqslant p_\iota^\sim(x^\sim)$, т.е. $p_\kappa^\sim(x^\sim) > p_\iota^\sim(x^\sim)$. Таким образом, $\mathfrak{p}^\sim = \{p_\iota^\sim\}_{\iota \in \Lambda}$ – строго возрастающее множество норм в F. Отождествляя F^* с $\Delta(E)$ и применяя следствие 2.4, мы получим, что $\mathbf{X}(A(p_\iota^\sim)) = K_\iota$.

Пусть $A(E_\mathfrak{p}) = \{\{A(p_\iota)\}, \{u_{\iota\kappa}\}, \Lambda\}$ – проективная система банаховых алгебр, порожденная мультинормированной алгеброй Ли E с определяющей системой норм $\mathfrak{p}$ (см. п. 2.2). Так как $u_{\iota\kappa}(\mathrm{Rad}A(p_\kappa)) \subseteq \mathrm{Rad}A(p_\iota)$ при $p_\iota \ll p_\kappa$, то $u_{\iota\kappa}$ индуцирует при факторизации гомоморфизм алгебр $u_{\iota\kappa}^\sim \in B(A(p_\kappa^\sim), A(p_\iota^\sim))$, и совокупность $A(F_{\mathfrak{p}^\sim}) = \{\{A(p_\iota^\sim)\}, \{u_{\iota\kappa}^\sim\}, \Lambda\}$ является проективной системой, порожденной мультинормированной алгеброй Ли F с определяющим семейством норм $\mathfrak{p}^\sim$. Кроме того, семейство фактор-отображений $\alpha_\iota : A(p_\iota) \to A(p_\iota^\sim)$, $\iota \in \Lambda$, определяет морфизм проективных систем $\alpha : A(E_\mathfrak{p}) \to A(F_{\mathfrak{p}^\sim})$, $\alpha = \{\alpha_\iota\}$. По доказанному (см. п. 4.2), $\mathcal{O}_F(D_\mathrm{s}) = \underleftarrow{A(F_{\mathfrak{p}^\sim})} = H(D_\mathrm{s})$ (с точностью до топологического изоморфизма), где $D_\mathrm{s} = D \cap \Delta(E)$, и мы имеем непрерывный гомоморфизм обратных пределов $\underleftarrow{\alpha} : \mathcal{O}_E(D) \to H(D_\mathrm{s})$.

Лемма 4.4. *Гомоморфизм* $\underleftarrow{\alpha}$ *является эпиморфизмом.*

Доказательство. Пусть $g = (g_\iota)_{\iota \in \Lambda} \in H(D_\mathrm{s})$, где $g_\iota \in A(p_\iota^\sim)$, и пусть $X_\iota = \alpha_\iota^{-1}(g_\iota)$, $\iota \in \Lambda$. Ясно, что $u_{\iota\kappa}(X_\kappa) \subseteq X_\iota$, где $\iota \leqslant \kappa$. Таким образом, семейство $\mathfrak{X} = \{\{X_\iota\}, \{u_{\iota\kappa}\}, \Lambda\}$ определяет проективную систему полных метризуемых равномерных пространств. Поскольку область D можно представить в виде счетного объединения шаров $M_\iota = \{\lambda : p_\iota^*(\lambda) \leqslant 1\}$, множество индексов Λ содержит счетное кофинальное подмножество Λ'. Пусть $f_\iota \in X_\iota$. Так как $\ker(\alpha_\iota) = \mathrm{Rad}A(p_\iota)$, то $X_\iota = f_\iota + \mathrm{Rad}A(p_\iota)$. Поскольку $\mathrm{Rad}A(p_\iota) = R_{[E,E]}$, множество $u_{\iota\kappa}(\mathrm{Rad}A(p_\kappa))$ плотно в $\mathrm{Rad}A(p_\iota)$, где ι, $\kappa \in \Lambda$, $\kappa \geqslant \iota$. Далее, имеем $\overline{u_{\iota\kappa}(X_\kappa)} = u_{\iota\kappa}(f_\kappa) + \mathrm{Rad}A(p_\iota) = f_\iota + (u_{\iota\kappa}(f_\kappa) - f_\iota) + \mathrm{Rad}A(p_\iota)$. Но $\alpha_\iota(u_{\kappa\iota}(f_\kappa) - f_\iota) = u_{\iota\kappa}^\sim(g_\kappa) - g_\iota = 0$, т.е. $u_{\kappa\iota}(f_\kappa) - f_\iota \in \mathrm{Rad}A(p_\iota)$. Таким образом, $u_{\iota\kappa}(X_\kappa)$ плотно в X_ι, т.е. $\mathfrak{X}$ является системой Миттаг–Леффлера (см. [21, Гл. 2, п. 3.5], [4, п. 3.2.10]). Тогда обратный предел $\underleftarrow{\mathfrak{X}}$ проективной системы $\mathfrak{X}$ непуст. Пусть $f = (f_\iota)_{\iota\in\Lambda} \in \underleftarrow{\mathfrak{X}}$. Тогда $f \in \mathcal{O}_E(D)$ и $\alpha(f) = (\alpha_\iota(f_\iota))_{\iota\in\Lambda} = (g_\iota)_{\iota\in\Lambda} = g$. $\square$

Пусть p – ℓ_1-норма относительно треугольного базиса $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ разрешимой алгебры Ли E и пусть $\bar{e} = \{e_1, \dots, e_m\}$ – базис дополнительного к $[E, E]$ подпространства. Ясно, что фактор-норма $p^\sim$ в коммутативной алгебре Ли $F = E/[E, E]$ является ℓ_1-нормой относительно базиса $e^\sim = \{e_1^\sim, \dots, e_m^\sim\}$. Пусть $A(p)$ – банахова алгебра из предложения 2.2, полученная по банаховой алгебре Ли E с нормой p. Пусть $A_{\mathrm{s}}(p)$ – подпространство в $A(p)$ всех степенных рядов $f = \sum_J a_J \varphi(\bar{e})^J$, для которых $\sum_J |a_J| < \infty$, где $\varphi : U(E) \to A(p)$ – канонический гомоморфизм и $\varphi(\bar{e})^J = \varphi(e_1^{j_1} \cdots e_m^{j_m})$.

Лемма 4.5. *Подпространство $A_{\mathrm{s}}(p)$ замкнуто и $A(p) = \mathrm{Rad}A(p) \oplus A_{\mathrm{s}}(p)$.*

Доказательство. Так как класс $f^\sim \in A(p^\sim)$ ненулевого элемента $f \in A_{\mathrm{s}}(p)$ по модулю радикала определяет голоморфную функцию в некотором полидиске (см. п. 4.2), то $f \notin \mathrm{Rad}A(p)$. Отсюда следует, что $A_{\mathrm{s}}(p) \cap \mathrm{Rad}A(p) = \{0\}$. С другой стороны, согласно следствию 3.5, $A(p^\sim)$ состоит из всех абсолютно сходящихся рядов $g = \sum_J a_J e^{\sim J}$ и $\|g\|_{A(p^\sim)} = \sum_J |a_J| < \infty$. Поэтому отображение $\gamma : A(p^\sim) \to A(p)$, $\gamma(\sum_J a_J e^{\sim J}) = \sum_J a_J \varphi(\bar{e})^J$, является ограниченным линейным оператором с нормой не выше 1, и композиция $\gamma\alpha$ есть проектор на подпространство $A_{\mathrm{s}}(p)$ вдоль $\mathrm{Rad}A(p)$, где $\alpha : A(p) \to A(p^\sim)$ – фактор-отображение. Таким образом, $A_{\mathrm{s}}(p)$ – замкнутое подпространство и $A(p) = \mathrm{Rad}A(p) \oplus A_{\mathrm{s}}(p)$. $\square$

Теорема 4.6. *Пусть E – конечномерная разрешимая алгебра Ли, D – абсолютно выпуклая область в E^* и $D_{\mathrm{s}} = D \cap \Delta(E)$. Тогда алгебры $\mathcal{O}_E(D)/\mathrm{Rad}\mathcal{O}_E(D)$ и $H(D_{\mathrm{s}})$ топологически изоморфны. Если D является полидиском при выборе треугольного базиса e алгебры Ли E, то $\mathcal{O}_E(D)$ разлагается в топологическую прямую сумму подпространств: $\mathcal{O}_E(D) = \mathrm{Rad}\mathcal{O}_E(D) \oplus \mathcal{C}_E$, и $\mathcal{C}_E$ топологически изоморфно алгебре $H(D_{\mathrm{s}})$.*

Доказательство. Рассмотрим эпиморфизм $\underleftarrow{\alpha} : \mathcal{O}_E(D) \to H(D_{\mathrm{s}})$ из леммы 4.4. Достаточно показать, что $\mathrm{Rad}\mathcal{O}_E(D) = \ker(\underleftarrow{\alpha})$. Поскольку любой непрерывный характер χ алгебры $\mathcal{O}_E(D)$ представляется в виде $\chi = \widetilde{\chi} \cdot u_\iota$ [1, п. 5.1.8], где $\widetilde{\chi}$ – характер алгебры

$A(p_\iota)$, $\iota \in \Lambda$, и $u_\iota : \mathcal{O}_E(D) \to A(p_\iota)$ – каноническое отображение обратного предела, нетрудно показать, что $\ker(\underleftarrow{\alpha})$ совпадает с пересечением ядер непрерывных характеров алгебры $\mathcal{O}_E(D)$. Следовательно, $\mathrm{Rad}\mathcal{O}_E(D) \subseteq \ker(\underleftarrow{\alpha})$. Докажем, что $\mathrm{Rad}\mathcal{O}_E(D)$ в точности совпадает с пересечением ядер характеров алгебры $\mathcal{O}_E(D)$. Пусть $\chi(f) = 0$ для всех $\chi \in \mathbf{X}(\mathcal{O}_E(D))$. Для того, чтобы проверить включение $f \in \mathrm{Rad}\mathcal{O}_E(D)$, достаточно показать, что элемент $1 - gf$ обратим для каждого $g \in \mathcal{O}_E(D)$. Но $\chi(gf) = 0$ для всех $\chi \in \mathbf{X}(\mathcal{O}_E(D))$. Поэтому достаточно лишь показать, что элемент $1 - f$ обратим в $\mathcal{O}_E(D)$ как только $\chi(f) = 0$ для всех $\chi \in \mathbf{X}(\mathcal{O}_E(D))$. Согласно [1, п. 5.2.11], обратимость элемента $1-f$ в $\mathcal{O}_E(D)$ равносильна обратимости всех элементов $1-u_\iota(f)$ в $A(p_\iota)$, $\iota \in \Lambda$. Но $\widetilde{\chi}(u_\iota(f)) = 0$ для произвольного характера $\widetilde{\chi}$ алгебры $A(p_\iota)$. Поскольку алгебра $A(p_\iota)$ коммутативна по модулю своего радикала, $\mathrm{Rad}A(p_\iota)$ совпадает с пересечением ядер характеров. Тогда $u_\iota(f) \in \mathrm{Rad}A(p_\iota)$ и элемент $1-u_\iota(f)$ обратим. Таким образом, $\ker(\underleftarrow{\alpha}) = \mathrm{Rad}\mathcal{O}_E(D)$ и $\mathcal{O}_E(D)/\mathrm{Rad}\mathcal{O}_E(D) = H(D_{\mathrm{s}})$.

Пусть теперь $D = D_r$ является полидиском, который ассоциирован с множеством ℓ_1-норм $\{l_{e,s} : s < r\}$ относительно треугольного базиса e (см. пример 4.3). Ясно, что $u_{ts}(A_{\mathrm{s}}(l_{e,s})) \subseteq A_{\mathrm{s}}(l_{e,t})$, где $t < s < r$. Пусть $\mathcal{C}_E = \varprojlim\{\{A_{\mathrm{s}}(l_{e,t})\}, \{u_{ts}\}, t < r\}$ – подпространство в $\mathcal{O}_E(D)$. Тогда $\mathcal{O}_E(D) = \mathrm{Rad}\mathcal{O}_E(D) \oplus \mathcal{C}_E$ согласно лемме 4.5. $\square$

Следствие 4.7. *Оболочка Аренса–Майкла алгебры $U(E)$ разлагается в топологическую прямую сумму радикала и подпространства, изоморфного алгебре целых функций от m комплексных переменных, где $m = \dim(E/[E,E])$.*

Для доказательства достаточно применить теоремы 2.8 и 4.6.

4.4. Пространство характеров $\mathbf{X}(\mathcal{O}_E(D))$. Пусть D и D' – абсолютно выпуклые области в E^*.

Теорема 4.8. *Пусть E – конечномерная разрешимая алгебра Ли. Если $\mathbf{X}(\mathcal{O}_E(D)) = \mathbf{X}(\mathcal{O}_E(D'))$, то существует топологический изоморфизм алгебр $\mathcal{O}_E(D) \to \mathcal{O}_E(D')$, индуцирующий тождественное отображение на $U(E)$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{p} = \{p_\iota : \iota \in \Lambda\}$ и $\mathfrak{q} = \{q_\nu : \nu \in \Omega\}$ – строго возрастающие множества норм в E, с которыми ассоциированы области D и D' соответственно (см. п. 4.1). Через M_ι и M'_ν обозначим замкнутые единичные шары в E^* относительно дуальных норм p^*_ι и q^*_ν, и пусть $K_\iota = M_\iota \cap \Delta(E)$ и $K'_\nu = M'_\nu \cap \Delta(E)$. Согласно следствию 2.4, множества K_ι и K'_ν отождествляются с $\mathbf{X}(A(p_\iota))$ и $\mathbf{X}(A(q_\nu))$. Поскольку $D \cap \Delta(E) = \mathbf{X}(\mathcal{O}_E(D)) = \mathbf{X}(\mathcal{O}_E(D')) = D' \cap \Delta(E)$, для любого $\iota \in \Lambda$ существует такой элемент $\nu \in \Omega$, что $K_\iota \subseteq \mathrm{int} K'_\nu$ и обратно. Покажем, что тождественное отображение на $U(E)$ индуцирует непрерывный гомоморфизм алгебр $h_{\iota\nu} : A(q_\nu) \to A(p_\iota)$. Для этого воспользуемся предложением 2.2. Если S_ν – единичный шар относительно нормы q_ν и $\varphi_\iota : E \to A(p_\iota)$ – канонический гомоморфизм, то, согласно [22], имеем $\rho(\varphi_\iota(S_\nu)) = \max\{\rho(\varphi_\iota(x)) : x \in S_\nu\}$, т.е. существует элемент $x_0 \in S_\nu$ такой, что $\rho(\varphi_\iota(S_\nu)) = \rho(\varphi_\iota(x_0))$. Далее, $\rho(\varphi_\iota(x_0)) = \rho(\varphi_\iota(x_0)\tilde{}\,\mathrm{mod}(\mathrm{Rad}A(p_\iota)))$. Поскольку $A(p_\iota)/\mathrm{Rad}A(p_\iota)$ – коммутативная банахова алгебра, мы имеем $\rho(\varphi_\iota(x_0)\tilde{}\,\mathrm{mod}(\mathrm{Rad}A(p_\iota))) = \max\{|\lambda(x_0)| : \lambda \in K_\iota\} < \max\{|\lambda(x_0)| : \lambda \in K'_\nu\} \leqslant \max\{|\lambda(x_0)| : \lambda \in M'_\nu\} \leqslant q_\nu(x_0) \leqslant 1$. Таким образом, $\rho(\varphi_\iota(S_\nu)) < 1$. По предложению 2.2 (см. также замечание 2.3), существует ограниченный гомоморфизм $h_{\iota\nu} : A(q_\nu) \to A(p_\iota)$ такой, что $h_{\iota\nu}\varphi_\nu = \varphi_\iota$, где $\varphi_\nu : E \to A(p_\nu)$ – канонический гомоморфизм. Переходя к обратным пределам, получим непрерывный гомоморфизм $\mathcal{O}_E(D) \to \mathcal{O}_E(D')$, который индуцирует тождественное отображение на полиномах. Аналогичным образом строится обратное отображение. $\square$

Следствие 4.9. *Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ – треугольный базис разрешимой алгебры Ли E, такой, что $e_{m+1}, \ldots, e_n$ – базис коммутанта алгебры Ли E, D_r и D_s – полидиски в $\mathbb{C}^n$ мультирадиуса $r = (r_1, \ldots, r_n)$ и $s = (s_1, \ldots, s_n)$ соответственно. Предположим, что $r_i = s_i$ для всех i, $1 \leq i \leq m$. Тогда алгебры $\mathcal{O}_E(D_r)$ и $\mathcal{O}_E(D_s)$ топологически изоморфны.*

Пусть теперь E – нильпотентная алгебра Ли, D – абсолютно выпуклая область в E^* и $\mathfrak{p}$ – строго возрастающее множество норм в E, ассоциированная область которого совпадает с D (лемма 4.2). Рассмотрим счетную кофинальную часть $\{p_k : k \in \mathbb{N}\}$ множества $\mathfrak{p}$, и пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ – строго треугольный базис в E. Как мы уже отметили (см. п. 3.2), E является фактором градуированной алгебры Ли $\mathfrak{J}$ при эпиморфизме $\tau : \mathfrak{J} \to E$, $\tau(x_i) = e_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$ $(m = \mathrm{codim}\,([E, E]))$. Пусть y – градуированный базис в $\mathfrak{J}$ и $r = \{r^{(k)} = (r^{(k)}_{m+1}, \ldots, r^{(k)}_{l_c}) : k \in \mathbb{N}\}$ $(l_c = \dim(\mathfrak{J}))$ –

счетное множество наборов положительных чисел со свойством: $r^{(k)} < r^{(s)}$ $(r_i^{(k)} < r_i^{(s)})$ как только $p_k \ll p_s$. С каждой нормой p_k можно связать норму $l(p_k)$ (см. п. 3.2), которая является фактор-нормой ℓ_1-радикальной нормы $q_{y^{(k)},p_k}$ относительно градуированного базиса $y^{(k)} = (y_1^{(k)}, \dots, y_n^{(k)})$, где $y_i^{(k)} = x_i$, если $1 \le i \le m$, и $y_i^{(k)} = (r_i^{(k)})^{-1} y_i$, если $m < i \le l_c$.

Лемма 4.10. *Множество норм $\{l(p_k)\}$ является строго возрастающим и $\mathbf{X}(A(p_k)) = \mathbf{X}(A(l(p_k)))$ для всех k.*

Доказательство. Пусть $p_k \ll p_s$. Тогда $p_k^\sim \ll p_s^\sim$ (см. п. 4.3) и $r^{(k)} < r^{(s)}$. Отсюда следует, что $q_{y^{(k)},p_k} \ll q_{y^{(s)},p_s}$. Тогда $l(p_k) \ll l(p_s)$, т.е. $\{l(p_k)\}$ – строго возрастающее множество норм в E. Согласно предложению 2.5, $A(l(p_k))/\operatorname{Rad} A(l(p_k)) = A(l(p_k)^\sim)$ с точностью до изометрического изоморфизма. Тогда имеем $\mathbf{X}(A(p_k)) = \mathbf{X}(A(p_k^\sim)) = \mathbf{X}(A(l(p_k)^\sim)) = \mathbf{X}(A(l(p_k)))$. $\square$

Пусть $\{\{A(l(p_k))\}, \{u_{ks}\}, \mathbb{N}\}$ – проективная система, порожденная мультинормированной алгеброй Ли E с определяющим семейством норм $\{l(p_k)\}$, и пусть $\mathcal{O}_e(D, r)$ – обратный предел этой системы.

Следствие 4.11. *Если e – строго треугольный базис нильпотентной алгебры Ли E, то существует топологический изоморфизм алгебр $\mathcal{O}_E(D) \to \mathcal{O}_e(D, r)$, продолжающий тождественное отображение на $U(E)$.*

Доказательство. По лемме 4.10, $\{l(p_k)\}$ является строго возрастающим множеством норм. Тогда с $\{l(p_k)\}$ связана абсолютно выпуклая область D' в E^*, $D' = \cup_k M_k$, где M_k – единичный шар в E^* относительно дуальной нормы $l(p_k)^*$. По определению 2.7, $\mathcal{O}_e(D, r) = \mathcal{O}_E(D')$. Используя лемму 4.10, получаем, что $\mathbf{X}(\mathcal{O}_E(D')) = D' \cap \Delta(E) = \cup_k (M_k \cap \Delta(E)) = \cup_k \mathbf{X}(A(l(p_k)) = \cup_k \mathbf{X}(A(p_k))$. Поскольку $\{p_k\}$ – кофинальная часть $\mathfrak{p}$, справедливо равенство $\cup_k \mathbf{X}(A(p_k)) = \mathbf{X}(\mathcal{O}_E(D))$ [1. п. 5.1.8]. Таким образом, $\mathbf{X}(\mathcal{O}_E(D')) = \mathbf{X}(\mathcal{O}_E(D))$. Остается применить теорему 4.8. $\square$

4.5. Однородный базис в $\mathcal{O}_E(D)$.

В этом пункте мы докажем, что упорядоченные мономы $\{e^J\}$ образуют однородный базис (см. п. 1.7) в алгебре $\mathcal{O}_E(D)$, если e – градуированный базис.

Сначала отметим, что $U(E)$ является плотной подалгеброй в $\mathcal{O}_E(D)$, т.е. канонический гомоморфизм $\varphi : U(E) \to \mathcal{O}_E(D)$ инъективен. Действительно, достаточно показать, что $\ker(\varphi_\iota) = \{0\}$ для некоторого $\iota \in \Lambda$, где $\varphi_\iota : U(E) \to A(p_\iota)$ – канонический гомоморфизм. Но последнее следует из теоремы 3.1.

Как показывает следующий пример, вообще говоря $\ker(\varphi) \neq \{0\}$, если E – ненильпотентная алгебра Ли.

Пример 4.12. Пусть E алгебра Ли с базисом $e = \{e_1, e_2\}$, $[e_1, e_2] = e_2$, и $D = D_r$ полидиск в $\mathbb{C}^2$ с центром в нуле и мультирадиуса $r = (r_1, r_2) > 0$. Рассмотрим систему ℓ_1-норм $l_{e,r} = \{l_{e,s}\}_{s<r}$ (см. пример 4.3). Тогда $\mathcal{O}_E(D_r) = \varprojlim\{\{A(l_{e,s})\}, \{u_{st}\}, s < r\}$, и $\mathcal{O}_E(D_r) = \mathrm{Rad}\mathcal{O}_E(D_r) \oplus H(D_{r_1})$ согласно теореме 4.6. Ясно, что $\mathrm{Rad}\mathcal{O}_E(D_r)$ является идеалом, порожденным элементом $\varphi(e_2)$. Покажем, что $\varphi(e_2)^n = 0$ при $n \geqslant 2r_1$. Так как $[\varphi_s(e_1), \varphi_s(e_2)^n] = n\varphi_s(e_2)^n$ (где $0 < s < r$ и $\varphi_s : U(E) \to A(l_{e,s})$ – канонический гоморфизм), то $\varphi_s(e_2)^n = 0$ при $n > 2s_1 = 2l_{e,s}(e_1) \geqslant 2\|\varphi_s(e_1)\|$. Если $n \geqslant 2r_1$, то $\varphi_s(e_2)^n = 0$ для всех s, $0 < s < r$, и отсюда $\varphi(e_2)^n = 0$. В частности, если $r_1 < 1/2$, то $\varphi_s(e_2) = 0$ и алгебра $\mathcal{O}_E(D_r)$ полупроста, а если $r_1 = 1$, то $\varphi_s(e_2)^2 = 0$. □

Теорема 4.13. *Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ – строго треугольный базис нильпотентной алгебры Ли E. Тогда $\mathcal{O}_E(D) = U_0(e) \oplus \ldots \oplus U_{k-1}(e) \oplus \overline{U^k(e)}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, для любого $f \in \mathcal{O}_E(D)$ существует и притом единственное представление в виде степенного ряда $f = \sum_J a_J e^J$ такое, что $f - \sum_{\deg(e^J)<k} a_J e^J \in \overline{U^k(e)}$ при всех k. Кроме того, если базис e градуирован, то множество всех упорядоченных мономов $\{e^J\}$ является однородным базисом в $\mathcal{O}_E(D)$.*

Доказательство. Согласно следствию 4.11, существует топологический изоморфизм алгебр $\mathcal{O}_E(D) \to \mathcal{O}_e(D, r)$, продолжающий тождественное отображение на $U(E)$. По определению (см. п. 4.4), $\mathcal{O}_e(D, r) = \varprojlim\{\{A(l(p_k))\}, \{u_{ks}\}, \mathbb{N}\}$, где $l(p_k)$ есть фактор-норма ℓ_1-радикальной нормы $q_{y^{(k)},p_k}$ относительно градуированного базиса $y^{(k)}$ (см. п. 4.4). По теореме 3.6, $A(l(p_k)) = U_0(e) \oplus \ldots \oplus U_{k-1}(e) \oplus \overline{U^k(e)}$. Если базис e градуирован (т.е. $e = y$), то, имея в виду, что $l(p_k) = q_{y^{(k)},p_k}$ и $y_i^{(k)} = y_i$ для $1 \leq i \leq m$, $y_i^{(k)} = (r_i^{(k)})^{-1} y_i$ для $i > m$, мы получим, что множество $\{e^J\}$ является однородным базисом в $A(l(p_k))$ согласно теореме 3.3. Теперь утверждение теоремы легко получается путем перехода к обратному пределу. □

Следствие 4.14. *Пусть $\mathcal{O}_E(D)^{(k)}$ есть k-й член нижнего центрального ряда алгебры Ли $\mathcal{O}_E(D)$. Если алгебра Ли E градуирована, то $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\mathcal{O}_E(D)^{(k)}} = \{0\}$. В частности, любая конечномерная подалгебра Ли в $\mathcal{O}_E(D)$ является нильпотентной.*

Доказательство. Рассмотрим банахову алгебру $A(E)$, построенную по ℓ_1-норме относительно некоторого градуированного базиса e в E, такую, что существует непрерывный гомоморфизм $\pi : \mathcal{O}_E(D) \to A(E)$, продолжающий тождественное отображение на $U(E)$. Поскольку $U^k(e)U^m(e) \subseteq U^{k+m}(e)$, имеем $U(E)^{(k)} \subseteq U^k(e)$ при $k > 1$. Поскольку $U(E)$ является плотной подалгеброй в $\mathcal{O}_E(D)$, нетрудно доказать, что $\mathcal{O}_E(D)^{(k)} \subseteq \overline{U(E)^{(k)}} \subseteq \overline{U^k(e)}$, $k > 1$. Тогда $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\mathcal{O}_E(D)^{(k)}} \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{U^k(e)}$. По теореме 4.13, отображение π имеет нулевое ядро. Используя следствие 3.4, получим, что $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{U^k(e)} = \{0\}$, откуда $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\mathcal{O}_E(D)^{(k)}} = \{0\}$. $\square$

Отметим, что, используя стандартные рассуждения, нетрудно показать, что алгебра $\mathcal{O}_E(D)$ для любой конечномерной алгебры Ли E и абсолютно выпуклой области D в E^* является монтелевским пространством, т.е. любое ограниченное множество в ней является предкомпактным.

§5. Функциональное исчисление

Всюду в этом параграфе E – конечномерная алгебра Ли и D – абсолютно выпуклая область в E^*, ассоциированная со строго возрастающим множеством норм $\mathfrak{p} = \{p_\iota\}_{\iota \in \Lambda}$ в E (см. п. 4.1). Для каждого $\iota \in \Lambda$ пусть S_ι – единичный шар в E относительно нормы p_ι. Мы рассмотрим задачу о продолжении заданного гомоморфизма алгебр Ли $\alpha : E \to \mathcal{B}$ в банахову ассоциативную алгебру $\mathcal{B}$ до непрерывного гомоморфизма алгебр $\alpha : \mathcal{O}_E(D) \to \mathcal{B}$. Пусть (X, α) – банахов E-модуль (см. п. 1.6). Будем писать $\mathcal{O}_E(D) \succ (X, \alpha)$, если представление $\alpha : E \to B(X)$ продолжается до непрерывного гомоморфизма $\mathcal{O}_E(D) \to B(X)$, который обозначим также через α.

Лемма 5.1. *Гомоморфизм алгебр Ли $\alpha : E \to \mathcal{B}$ в банахову ассоциативную алгебру $\mathcal{B}$ продолжается до непрерывного гомоморфизма алгебр $\alpha : \mathcal{O}_E(D) \to \mathcal{B}$ в том и только в том случае, когда $\rho(\alpha(S_\iota)) < 1$ для некоторого $\iota \in \Lambda$.*

Доказательство. Алгебра Ли E с множеством $\mathfrak{p}$ норм является мультинормированной алгеброй Ли. Если $\rho(\alpha(S_\iota)) < 1$, то $\|\mathrm{SG}(\alpha(S_\iota))\| < \infty$ согласно лемме 1.1. Далее, по лемме 2.1 представление $\alpha : E \to \mathcal{B}$ является относительно сжимающим оператором, и по теореме 2.9 α продолжается до непрерывного гомоморфизма алгебр $\alpha : \mathcal{O}_E(D) \to \mathcal{B}$.

Обратно, если существует такое продолжение, то, согласно теореме 2.9, $\alpha : E \to \mathcal{B}$ – относительно сжимающий оператор. По лемме 2.1, $C = \|\mathrm{SG}(\alpha(S_\iota))\| < \infty$ для некоторого $\iota \in \Lambda$. Выберем индекс $\kappa \in \Lambda$ такой, что $p_\iota \leqslant \varepsilon p_\kappa$, где $0 < \varepsilon < 1$. Тогда $S_\kappa \subseteq \varepsilon S_\iota$ и $\|\alpha(S_\kappa)^m\| \leqslant \varepsilon^m C$, т.е. $\rho(\alpha(S_\kappa)) < 1$. $\square$

Пусть (X, α) – банахов E-модуль. Напомним (см. п. 1.6), что пространство $B(\wedge E, X)$ имеет структуру банахового E-модуля, индуцированную представлением θ.

Лемма 5.2. *Пусть E – конечномерная нильпотентная алгебра Ли, (X, α) – банахов E-модуль. Тогда $\mathcal{O}_E(D) \succ (X, \alpha)$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{O}_E(D) \succ (B(\wedge E, X), \theta)$.*

Доказательство. Достаточно доказать, согласно лемме 5.1, что если $\rho(\alpha(S_\iota)) < 1$ для некоторого $\iota \in \Lambda$, то $\rho(\theta(S_\iota)) < 1$. Пусть $M = \{L_{\alpha(u)} : u \in S_\iota\}$, $P = T(S_\iota)$ и $N = \{-R_{T(u)} : u \in S_\iota\}$, где $T : E \to B(\wedge E)$ – представление, продолжающее присоединенное представление алгебры Ли E (см. п. 1.6). Так как $\theta(u) = L_{\alpha(u)} - R_{T(u)}$ и $[L_{\alpha(u)}, R_{T(u)}] = 0$ для любых $u, \nu \in E$, то, применяя [12, Лемма 2.13], получим, что $\rho(\theta(S_\iota)) \leqslant \rho(M + N) \leqslant \rho(M) + \rho(N) \leqslant \rho(\alpha(S_\iota)) + \rho(P)$. Так как $T(E)$ нильпотентная алгебра Ли и, согласно лемме 1.8, состоит из нильпотентных операторов, действующих в конечномерном пространстве $\wedge E$, то $T(E)$ порождает нильпотентную ассоциативную алгебру по теореме Энгеля. Тогда $P^k = 0$ для достаточно большого k, т.е. $\rho(P) = 0$. Таким образом, $\rho(\theta(S_\iota)) \leqslant \rho(\alpha(S_\iota))$. $\square$

Пусть теперь E – произвольная конечномерная алгебра Ли и $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ – базис в E. Тогда E^* отождествляется с $\mathbb{C}^n$ (см. пример 4.3). Пусть D_r – полидиск в $\mathbb{C}^n$ мультирадиуса r, $r > 0$, и пусть $r^{-1}\alpha(e) = \{r_i^{-1}\alpha(e_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Теорема 5.3. *Пусть $\mathcal{B}$ – банахова ассоциативная алгебра. Гомоморфизм алгебр Ли $\alpha : E \to \mathcal{B}$ продолжается до непрерывного гомоморфизма алгебр $\alpha : \mathcal{O}_E(D_r) \to \mathcal{B}$ в том и только в том случае, когда $\rho(r^{-1}\alpha(e)) < 1$.*

Доказательство. Пусть S_t – единичный шар относительно нормы $l_{e,t}$ (см. пример 4.3). Тогда $S_t = \{\sum a_i e_i : \sum |a_i| t_i \leqslant 1,\}$, т.е. $S_t = \mathrm{abc}(t^{-1}e)$ и $\rho(S_t) = \rho(t^{-1}e)$. Если существует непрерывный гомоморфизм $\alpha : \mathcal{O}_E(D_r) \to \mathcal{B}$, то по теореме 2.9 $q(r^{-1}\alpha(e)) \leqslant l_{e,t}(r^{-1}e) = \max(r^{-1}t) < 1$ для некоторой нормы $q \in \mathcal{N}(\mathcal{B})$ и некоторого $t < r$. Тогда $\rho(r^{-1}\alpha(e)) \leqslant q(r^{-1}\alpha(e)) < 1$.

Обратно, пусть $\gamma = \rho(r^{-1}\alpha(e)) < 1$. Выберем набор t так, чтобы $r_i^{-1} < t_i^{-1} < (1+\varepsilon)r_i^{-1}$, $0 < \varepsilon < (1/\gamma) - 1$. Тогда $\|(t^{-1}\alpha(e))^k\|^{1/k} \leqslant \max(t^{-1}r) \cdot \|(r^{-1}\alpha(e))^k\|^{1/k}$ и $\rho(t^{-1}\alpha(e)) \leqslant (1+\varepsilon)\gamma < 1$. Поэтому $\rho(\alpha(S_t)) = \rho(\mathrm{abc}(t^{-1}\alpha(e))) = \rho(t^{-1}\alpha(e)) < 1$ (см. п. 1.1). Остается применить лемму 5.1. $\square$

Следствие 5.4. *Пусть E – конечномерная разрешимая алгебра Ли, (X, α) – банахов E-модуль. Тогда $\mathcal{O}_E(D_r) \succ (X, \alpha)$ в том и только в том случае, если спектр $\sigma(\alpha(e_i))$ содержится в D_{r_i} для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Доказательство. Согласно [22], $\rho(r^{-1}\alpha(e)) = \max\{\rho(r_i^{-1}\alpha(e_i)) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Если $\sigma(\alpha(e_i)) \subset D_{r_i}$, то $\rho(r_i^{-1}\alpha(e_i)) < 1$ для всех i, т.е. $\rho(r^{-1}\alpha(e)) < 1$. Теперь утверждение следует из теоремы 5.3. $\square$

Теорема 5.5. *Пусть E – конечномерная нильпотентная алгебра Ли, D – абсолютно выпуклая область в E^*, (X, α) – банахов E-модуль и $\sigma \in \mathfrak{S}$. Тогда $\mathcal{O}_E(D) \succ (X, \alpha)$ в том и только в том случае, если $\sigma(\alpha) \subset D$.*

Доказательство. Если $\mathcal{O}_E(D) \succ (X, \alpha)$, то $\rho(\alpha(S_\iota)) < 1$ для некоторого $\iota \in \Lambda$, согласно лемме 5.1. Пусть $\lambda \in \sigma(\alpha)$. Тогда $\lambda \in \sigma_{\mathrm{t}}(\alpha) \subset \Delta(E)$. Если $x_j \in S_\iota$ и $T_j = \alpha(x_j)$ для $1 \leqslant j \leqslant k$, то $\lambda(x_1)\cdots\lambda(x_k) \in \sigma_{\mathrm{t}}(T_1 \cdots T_k)$ согласно теореме об отображении спектра [8]. Таким образом, $|\lambda(x_1)\cdots\lambda(x_k)| \leqslant \|T_1 \cdots T_k\| \leqslant \|\alpha(S_\iota)^k\|$ и $\rho(\lambda(S_\iota)) < 1$. По лемме 5.1, λ продолжается до непрерывного характера алгебры $\mathcal{O}_E(D)$, т.е. $\lambda \in \mathbf{X}(\mathcal{O}_E(D))$. Но $\mathbf{X}(\mathcal{O}_E(D)) = D \cap \Delta(E)$ (см. п. 4.1). Значит, $\lambda \in D$. Пусть теперь $\sigma(\alpha) \subset D \cap \Delta(E)$. Если K_ι – множество характеров алгебры $A(p_\iota)$, то $D \cap \Delta(E) = \cup_{\iota\in\Lambda} K_\iota$. Ясно, что $D \cap \Delta(E) = \cup_{\iota\in\Lambda} \mathrm{int} K_\iota$. Так как спектр $\sigma(\alpha)$ компактен (см. [9]) и $\mathfrak{p}$ – строго возрастающее множество норм, то $\sigma(\alpha) \subset \mathrm{int} K_\iota$ для некоторого $\iota \in \Lambda$. По лемме 5.1 нам достаточно доказать, что $\rho(M) < 1$, где $M = \alpha(S_\iota)$. Пусть $x \in S_\iota$ и $T = \alpha(x)$. Рассмотрим линейную функцию $\bar{x} : \Delta(E) \to \mathbb{C}$, $\bar{x}(\lambda) = \lambda(x)$. По проекционному свойству (см. [9]), $\sigma(T) = \{\lambda(x) : \lambda \in \sigma(\alpha)\}$. Пусть $\partial\sigma_{\mathrm{t}}(T)$ – топологическая граница спектра $\sigma_{\mathrm{t}}(T)$

оператора T. Тогда $\partial\sigma_{\mathrm{t}}(T) \subseteq \sigma_{\pi,0}(T) \cap \sigma_{\delta,0}(T) \subseteq \sigma(T)$ (см. [6]). Поэтому $\rho(T) = \max\{|z| : z \in \sigma(T)\} = \max\{|\bar{x}| : \lambda \in \sigma(\alpha)\} < \max\{|\bar{x}| : \lambda \in K_\iota\} \leqslant p_\iota(x) \leqslant 1$ согласно принципу максимума модуля. Пусть теперь $\mathcal{A}$ замкнутая наполненная подалгебра в $B(X)$, порожденная нильпотентной алгеброй Ли $\alpha(E)$. Согласно [19], алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна по модулю радикала $R = \mathrm{Rad}\mathcal{A}$. Поскольку $\rho(T) = \rho(T^{\sim} \bmod R)$ для любого $T \in \mathcal{A}$, спектральный радиус ρ является непрерывной функцией на $\mathcal{A}$. В силу компактности множества M имеем $\sup\{\rho(T) : T \in M\} = \max\{\rho(T) : T \in M\} < 1$. Но $\rho(M) = \max\{\rho(T) : T \in M\}$ согласно [22]. Таким образом, $\rho(M) < 1$. $\square$

Отметим, что из теоремы 5.5 следует, что для банахова представления α конечномерной нильпотентной алгебры Ли выполнено равенство $\mathrm{abc}(\sigma(\alpha)) = \mathrm{abc}(\sigma'(\alpha))$ для любых спектров Слодковского σ и σ'.

§6. Спектры пар представлений подалгебр Ли

В этом параграфе мы вводим спектры для пар представлений подалгебр Ли в $\mathcal{O}_E(D)$, которые играют основную роль при доказательстве конечномерной теоремы об отображении спектра (§7). Всюду далее E – конечномерная нильпотентная алгебра Ли, D – абсолютно выпуклая область в E^*, $D_{\mathrm{s}} = D \cap \Delta(E)$ и (X, α) – банахов E-модуль. Напомним, что D_{s} отождествляется с пространством характеров $\mathbf{X}(\mathcal{O}_E(D))$ алгебры $\mathcal{O}_E(D)$ (см. п. 4.1).

6.1. Банаховы бикомплексы. Напомним, что коммутативная диаграмма вида

$$\begin{array}{ccccc} & & \vdots & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle \beta^{p,q}} & & \\ \cdots & \xrightarrow{\kappa^{p-1,q}} & X_{pq} & \xrightarrow{\kappa^{p,q}} & \cdots \\ & & \uparrow{\scriptstyle \beta^{p,q-1}} & & \\ & & \vdots & & \end{array}$$

$(p,\, q \geqslant 0)$ называется *банаховым бикомплексом* $(\mathfrak{X}, \kappa, \beta)$, если каждые ее строка и столбец – банаховы комплексы. *Тотализацией* $\mathrm{Tot}(\mathfrak{X}, \kappa, \beta)$ бикомплекса называется банахов комплекс $\cdots \xrightarrow{\gamma^{s-1}} T_s \xrightarrow{\gamma^s} \cdots$, $T_s = \bigoplus_{i+j=s} X_{ij}$, $\gamma^s x = \kappa^{ij} x + (-1)^i \beta^{ij} x$, $x \in X_{ij}$ $(i + j = s)$.

Если $(\mathfrak{X}_q, \kappa)$ – q-я строка бикомплекса $(\mathfrak{X}, \kappa, \beta)$, то при каждом $p \geqslant 0$ мы имеем ассоциированный комплекс когомологий

$$0 \to H^p(\mathfrak{X}_0, \kappa) \xrightarrow{\dot\beta^{p0}} H^p(\mathfrak{X}_1, \kappa) \xrightarrow{\dot\beta^{p1}} \cdots \xrightarrow{\dot\beta^{pq-1}} H^p(\mathfrak{X}_q, \kappa) \xrightarrow{\dot\beta^{pq}} \cdots, \quad (6.1)$$

где $H^p(\mathfrak{X}_q, \kappa)$ – p-е пространство когомологий комплекса $(\mathfrak{X}_q, \kappa)$, $\dot\beta^{pq}$ – оператор, индуцированный оператором β^{pq} на соответствущем пространстве когомологий. Следующую лемму можно найти в [8, лемма 1.7].

Лемма 6.1. *Если при каждом $p \geqslant 0$ комплекс* (6.1) *точен, то комплекс* $\mathrm{Tot}(\mathfrak{X}, \kappa, \beta)$ *точен. В частности, если все строки бикомплекса $(\mathfrak{X}, \kappa, \beta)$ точны, то его тотализация точна.*

Рассмотрим комплекс $C^\bullet(\alpha)$, порожденный E-модулем (X, α) (см. п. 1.6).

Лемма 6.2. *Если $\mathcal{O}_E(D) \succ (X, \alpha)$ (см. п. 5), то $C^\bullet(\alpha)$ есть комплекс банаховых $\mathcal{O}_E(D)$-модулей.*

Доказательство. По лемме 5.2, $\mathcal{O}_E(D) \succ (B(\wedge E, X), \theta)$. Согласно формуле (1.6), $d\theta(f) = \theta(f)d$ для всех $f \in U(E)$, где d – дифференциал комплекса $C^\bullet(\alpha)$. Поскольку $U(E)$ – плотная подалгебра в $\mathcal{O}_E(D)$ (теорема 4.13), $d\theta(f) = \theta(f)d$ для любого $f \in \mathcal{O}_E(D)$, т.е. $C^\bullet(\alpha)$ есть комплекс банаховых $\mathcal{O}_E(D)$-модулей. $\square$

Лемма 6.3. *Пусть $\lambda \in D_{\mathrm{s}}$ и d_λ – дифференциал комплекса $C^\bullet(\alpha - \lambda)$. Если образ $\mathrm{im}(d_\lambda^{p-1})$ замкнут, то $(\theta(f) - \lambda(f))\omega \in \mathrm{im}(d_\lambda^{p-1})$ для любых $\omega \in \ker(d_\lambda^p)$ и $f \in \mathcal{O}_E(D)$.*

Доказательство. Представим f в виде предела $f = \lim_n p_n$, $p_n \in U(E)$. Согласно формуле (1.6), $(\theta(p_n) - \lambda(p_n))\omega \in \mathrm{im}(d_\lambda^{p-1})$. Остается сослаться на замкнутость образа $\mathrm{im}(d_\lambda^{p-1})$ и непрерывность характера λ. $\square$

По лемме 5.2 и теореме 4.13 пространство $B(\wedge I, X)$ является замкнутым $\mathcal{O}_E(D)$-подмодулем в $B(\wedge E, X)$, где I – идеал в E, и по лемме 6.2 комплекс $C^\bullet(\alpha|_I - \lambda)$ $(\lambda \in \Delta(I))$ является комплексом банаховых $\mathcal{O}_E(D)$-модулей, где $\alpha|_I$ – сужение представления α на идеал I. Пусть $\mathfrak{J}$ – конечномерная подалгебра Ли в $\mathcal{O}_E(D)$ и $\theta_{p,I} : \mathfrak{J} \to B(C^p(I, X))$ – представление, определенное по правилу $\theta_{p,I}(u) = \theta(u)|_{C^p(I,X)}$. Положим $\theta_p = \theta_{p,E}$. Введем банахов бикомплекс

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \beta_\mu \uparrow & & \beta_\mu \uparrow & & \\ \ldots \xrightarrow{\kappa_\lambda} & & C^q(\mathfrak{J}, C^{p-1}(I,X)) & \xrightarrow{\kappa_\lambda} & C^q(\mathfrak{J}, C^p(I,X)) & \xrightarrow{\kappa_\lambda} \ldots & \\ & & \beta_\mu \uparrow & & \beta_\mu \uparrow & & \\ \ldots \xrightarrow{\kappa_\lambda} & & C^{q-1}(\mathfrak{J}, C^{p-1}(I,X)) & \xrightarrow{\kappa_\lambda} & C^{q-1}(\mathfrak{J}, C^p(I,X)) & \xrightarrow{\kappa_\lambda} \ldots & \\ & & \beta_\mu \uparrow & & \beta_\mu \uparrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \end{array} \tag{6.2}$$

где $\kappa_\lambda(\Phi) = d_\lambda \cdot \Phi$, $\Phi \in C^q(\mathfrak{J}, C^p(I,X))$ (d_λ – дифференциал комплекса $C^\bullet(\alpha|_I - \lambda)$, $\lambda \in \Delta(I)$) и β_μ – дифференциал комплекса $C^\bullet(\theta_{p,I} - \mu)$, $\mu \in \Delta(\mathfrak{J})$. Строки этого бикомплекса суть $C^q(\mathfrak{J}, C^\bullet(\alpha|_I - \lambda))$, $q \geqslant 0$, и столбцы – $C^\bullet(\theta_{p,I} - \mu)$, $p \geqslant 0$. Мы обозначим этот бикомплекс через $\mathcal{B}_{\lambda,\mu}(I, \mathfrak{J}, X)$, а его тотализацию через $\mathrm{Tot}_{\lambda,\mu}(I, \mathfrak{J}, X)$. Получим $\Delta(I) \times \Delta(\mathfrak{J})$-банахов комплекс $\mathrm{Tot}_{\lambda,\mu}(I, \mathfrak{J}, X)$, $(\lambda, \mu) \in \Delta(I) \times \Delta(\mathfrak{J})$, который обозначим через $\mathrm{Tot}_{\kappa,\beta}(I, \mathfrak{J}, X)$. Пусть $M|_\mathfrak{J} = \{\chi|_\mathfrak{J} : \chi \in M\}$ для $M \subseteq D$. Пусть $\tau \in \Delta(I \times \mathfrak{J})$. Положим

$$\tau_I(\nu) = \tau(\nu, 0), \quad \tau_\mathfrak{J}(f) = \tau(0, f),$$

где $\nu \in I$, $f \in \mathfrak{J}$. Множества $\Delta(I \times \mathfrak{J})$ и $\Delta(I) \times \Delta(\mathfrak{J})$ отождествляются посредством биекции $\tau \mapsto (\tau_I, \tau_\mathfrak{J})$. Тогда $\mathrm{Tot}_{\kappa,\beta}(I, \mathfrak{J}, X)$ есть $\Delta(I \times \mathfrak{J})$-банахов комплекс.

Определение 6.4. *Пусть $\sigma \in \mathfrak{S}$. Множество $\sigma(\mathrm{Tot}_{\kappa,\beta}(I, \mathfrak{J}, X))$ назовем (соответствующим) спектром Слодковского пары $(\alpha|_I, \alpha|_\mathfrak{J})$ и обозначим через $\sigma(\alpha|_I, \alpha|_\mathfrak{J})$.*

Пусть $\mathcal{O}_E(D) \succ (X, \alpha)$ и $\mathfrak{U}$ ультрафильтр на бесконечном множестве S. Ясно, что $\mathcal{O}_E(D) \succ (X_\mathfrak{U}, \alpha_\mathfrak{U})$ и, по лемме 5.2, $\mathcal{O}_E(D) \succ (B(\wedge E, X_\mathfrak{U}), \theta_\mathfrak{U})$. Пусть $\kappa_{\mathfrak{U}\lambda}$ и $\beta_{\mathfrak{U}\mu}$ дифференциалы бикомплекса $\mathcal{B}_{\lambda,\mu}(I, \mathfrak{J}, X_\mathfrak{U})$ (см. (6.2)).

Лемма 6.5. *Для любых $\lambda \in \Delta(I)$ и $\mu \in \Delta(\mathfrak{J})$ банаховы комплексы $\mathrm{Tot}_{\lambda,\mu}(I, \mathfrak{J}, X_\mathfrak{U})$ и $\mathrm{Tot}_{\lambda,\mu}(I, \mathfrak{J}, X)_\mathfrak{U}$ изоморфны. В частности, $\sigma(\alpha_\mathfrak{U}|_I, \alpha_\mathfrak{U}|_\mathfrak{J}) = \sigma(\alpha|_I, \alpha|_\mathfrak{J})$, $\sigma \in \mathfrak{S}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}$ – ультрафильтр на S. Используя [15, лемма 8], получим, что оператор $\iota : (\oplus_{p+q=r} C^q(\mathfrak{J}, C^p(I,X)))_\mathfrak{U} \to \oplus_{p+q=r} C^q(\mathfrak{J}, C^p(I, X_\mathfrak{U}))$, действующий по правилу $\iota\left[\sum_{p+q=r} \Phi_i^{pq}\right] =$

$\sum_{p+q=r}\Phi^{pq}$, является изометрией, где $\left[\sum_{p+q=r}\Phi_i^{pq}\right]$ – класс смежности семейства $(\sum_{p+q=r}\Phi_i^{pq})_{i\in S}\in\ell_\infty(S,\oplus_{p+q=r}C^q(\mathfrak{J},C^p(I,X)))$ и $(\Phi^{pq}u)\nu=[(\Phi_i^{pq}u)\nu]$, $u\in\wedge^q\mathfrak{J}$, $\nu\in\wedge^p I$. По лемме 1.7, ι осуществляет изоморфизм строк $\iota: C^q(\mathfrak{J},C^\bullet(\alpha|_I-\lambda))_{\mathfrak{U}}\to C^q(\mathfrak{J},C^\bullet(\alpha_{\mathfrak{U}}|_I-\lambda))$ и столбцов $\iota: C^\bullet(\theta_{p,I}-\mu)_{\mathfrak{U}}\to C^\bullet((\theta_{\mathfrak{U}})_{p,I}-\mu)$, т.е. $\kappa_{\mathfrak{U}\lambda}\iota=\iota\kappa_{\lambda\mathfrak{U}}$, $\beta_{\mathfrak{U}\mu}\iota=\iota\beta_{\mu\mathfrak{U}}$. Таким образом, бикомплексы $\mathcal{B}_{\lambda,\mu}(I,\mathfrak{J},X)_{\mathfrak{U}}$ и $\mathcal{B}_{\lambda,\mu}(I,\mathfrak{J},X_{\mathfrak{U}})$ изоморфны. Тем самым комплексы $\mathrm{Tot}_{\lambda,\mu}(I,\mathfrak{J},X)_{\mathfrak{U}}$ и $\mathrm{Tot}_{\lambda,\mu}(I,\mathfrak{J},X_{\mathfrak{U}})$ изоморфны. Равенство $\sigma(\alpha_{\mathfrak{U}}|_I,\alpha_{\mathfrak{U}}|_{\mathfrak{J}})=\sigma(\alpha|_I,\alpha|_{\mathfrak{J}})$ следует из предложения 1.5. $\square$

Пусть теперь $I=E$. Рассмотрим ассоциированные комплексы когомологий (см. (6.1)) бикомплекса $\mathcal{B}_{\lambda,\mu}(E,\mathfrak{J},X)$:

$$\begin{gathered}0\to H^p(\alpha-\lambda)\xrightarrow{\beta_\mu^\sim}C^1(\mathfrak{J},H^p(\alpha-\lambda))\xrightarrow{\beta_\mu^\sim}\cdots\\ \cdots\xrightarrow{\beta_\mu^\sim}C^q(\mathfrak{J},H^p(\alpha-\lambda))\xrightarrow{\beta_\mu^\sim}\cdots,\end{gathered}\tag{6.3}$$

где $H^p(\alpha-\lambda)$ $(p\geqslant 0)$ есть p-я когомология комплекса $C^\bullet(\alpha-\lambda)$. Поскольку $\mathfrak{J}$ конечномерная алгебра Ли, любой элемент $\xi\in C^q(\mathfrak{J},H^p(\alpha-\lambda))$ представляется в виде $\xi=\Phi^\sim$, где $\Phi\in C^q(\mathfrak{J},\ker(d_\lambda^p))$ и $\Phi^\sim(\nu)=(\Phi(\nu))^\sim(\mathrm{mod}(\mathrm{im}d_\lambda^{p-1}))$ для всех $\nu\in\wedge^q\mathfrak{J}$. Преднормированное пространство $H^p(\alpha-\lambda)$ имеет структуру $\mathfrak{J}$-модуля, задаваемую представлением $\theta_p^\sim(f)=(\theta_p(f))^\sim$, $f\in\mathfrak{J}$, где $(\theta_p(f))^\sim$ – оператор, индуцированный оператором $\theta_p(f)\in B(\ker(d_\lambda^p))$. Тогда комплекс (6.3) совпадает с комплексом $C^\bullet(\theta_p^\sim-\mu)$, порожденным $\mathfrak{J}$-модулем $(H^p(\alpha-\lambda),\theta_p^\sim-\mu)$. Комплекс $C^\bullet(\theta_p^\sim-\mu)$ является комплексом $\mathfrak{J}$-модулей, определяемых представлением $\Theta_\mu^\sim:\mathfrak{J}\to B(C^q(\mathfrak{J},H^p(\alpha-\lambda)))$, $\Theta_\mu^\sim(f)=L_{\theta_p^\sim(f)}-R_{T_q(f)}-\mu(f)$ (см. п. 1.6). Согласно (1.4) и (1.5), имеем

$$\beta_\mu^\sim\cdot\Theta_\mu^\sim(f)=\Theta_\mu^\sim(f)\cdot\beta_\mu^\sim,\tag{6.4}$$

$$\beta_\mu^\sim\cdot I^\sim(f)+I^\sim(f)\cdot\beta_\mu^\sim=\Theta_\mu^\sim(f),\tag{6.5}$$

где $f\in\mathfrak{J}$ и $I^\sim(f)$ – оператор гомотопии комплекса $C^\bullet(\theta_p^\sim)$ (см. п. 1.6).

Лемма 6.6. *Пусть $\lambda\in D_{\mathrm{s}}$, $f\in\mathfrak{J}$ и $\Phi\in C^q(\mathfrak{J},\ker(d_\lambda^p))$. Если образ $\mathrm{im}(d_\lambda^{p-1})$ замкнут, то $\Theta_\mu^\sim(f)(\Phi^\sim)=((\lambda(f)-\mu(f)-R_{T_q(f)})\Phi)^\sim$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что $L_{\theta_p^\sim(f)}(\Phi^\sim)=\lambda(f)\cdot\Phi^\sim$. По лемме 6.3, $(\theta_p(f)-\lambda(f))\Phi(h)\in\mathrm{im}(d_\lambda^{p-1})$ для всех $h\in\wedge^q\mathfrak{J}$. Тогда $L_{\theta_p^\sim(f)}(\Phi^\sim)=(\theta_p(f)\Phi)^\sim=(\lambda(f)\Phi)^\sim$. $\square$

6.2. Проекционное свойство спектров пар представлений. Пусть $\mathcal{O}_E(D) \succ (X,\alpha)$ и λ – характер алгебры Ли E, принадлежащий спектру Тейлора $\sigma_{\mathrm{t}}(\alpha)$ представления α. По теореме 5.5, $\lambda \in D_{\mathrm{s}}$. Рассмотрим сужение $\lambda|_{\mathfrak{J}}$ характера λ на конечномерную нильпотентную подалгебру Ли $\mathfrak{J} \subset \mathcal{O}_E(D)$.

Лемма 6.7. *Пусть $\mu \in \Delta(\mathfrak{J})$. Если $\lambda|_{\mathfrak{J}} \neq \mu$, то $(\lambda,\mu) \notin \sigma_{\mathrm{t}}(\alpha,\alpha|_{\mathfrak{J}})$.*

Доказательство. По лемме 6.5 достаточно показать, что $(\lambda,\mu) \notin \sigma_{\mathrm{t}}(\alpha_{\mathfrak{U}},\alpha_{\mathfrak{U}}|_{\mathfrak{J}})$, т.е. $\mathrm{Tot}_{\lambda,\mu}(E,\mathfrak{J},X_{\mathfrak{U}})$ является точным комплексом, где $\mathfrak{U}$ – ультрафильтр. В силу леммы 6.1 для последнего достаточно доказать точность комплексов когомологий (6.3) при всех $p \geqslant 0$ для бикомплекса $\mathcal{B}_{\lambda,\mu}(E,\mathfrak{J},X_{\mathfrak{U}})$.

По теореме 1.10 $\lambda \in \sigma_{\mathrm{t}}(\alpha_{\mathfrak{U}})$. Пусть k – наименьшее целое число такое, что $\lambda \in \Sigma_k(\mathcal{C}(\alpha_{\mathfrak{U}}))$ (см. п. 1.6). Пусть $d_{\mathfrak{U}}^{k-1}(\lambda)$ – дифференциал комплекса $C^{\bullet}(\alpha_{\mathfrak{U}}-\lambda)$. Если образ $\mathrm{im}(d_{\mathfrak{U}}^{k-1}(\lambda))$ не замкнут, то $\lambda \in \sigma_{\pi,k-1}(\alpha_{\mathfrak{U}})$ по определению 1.3, и по предложению 1.4 $\lambda \in \Sigma_i(\mathcal{C}(\alpha_{\mathfrak{U}}))$ для некоторого i, $i \leqslant k-1$. Но это противоречит выбору числа k. Итак, образ $\mathrm{im}(d_{\mathfrak{U}}^{k-1}(\lambda))$ замкнут. Пусть $\lambda(f) \neq \mu(f)$ для некоторого $f \in \mathfrak{J}$. Рассмотрим $\Gamma_{pq} \in B(C^q(\mathfrak{J},C^p(E,X_{\mathfrak{U}})))$, $\Gamma_{pq} = \lambda(f)-\mu(f)-R_{T_q(f)}$. Ясно, что $\kappa_{\mathfrak{U}\lambda}^{p-1}\cdot\Gamma_{p-1q} = \Gamma_{pq}\cdot\kappa_{\mathfrak{U}\lambda}^{p-1}$, где $\kappa_{\mathfrak{U}\lambda}^{p-1}$ – дифференциал строки бикомплекса $\mathcal{B}_{\lambda,\mu}(E,\mathfrak{J},X_{\mathfrak{U}})$. По лемме 6.6, обратимость всех операторов Γ_{pq} влечет обратимость $\Theta_{\mu}^{\sim}(f)$, а это в силу формул (6.4) и (6.5) влечет точность комплексов $C^{\bullet}((\theta_{\mathfrak{U}})_p^{\sim}-\mu)$. Остается показать обратимость операторов Γ_{pq}. Но оператор присоединенного представления $\mathrm{ad}(f) \in B(\mathfrak{J})$ нильпотентен. Тогда, по лемме 1.8, $\sigma_{\mathrm{t}}(R_{T_q(f)}) = 0$. Следовательно, оператор Γ_{pq} обратим. □

Теорема 6.8. *Пусть E – конечномерная нильпотентная алгебра Ли, $\mathcal{O}_E(D) \succ (X,\alpha)$ и $\tau \in \sigma(\alpha|_I,\alpha|_{\mathfrak{J}})$, где $\sigma \in \mathfrak{S}$. Тогда $\tau_I \in \sigma_{\mathrm{t}}(\alpha|_I)$. Если $I = E$, то есть $\tau \in \sigma(\alpha,\alpha|_{\mathfrak{J}})$, то $\tau_E|_{\mathfrak{J}} = \tau_{\mathfrak{J}}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что комплекс $C^{\bullet}(\alpha|_I-\tau_I)$ не точен. Поскольку $\mathfrak{J}$ – конечномерная алгебра Ли, из точности комплекса $C^{\bullet}(\alpha|_I-\tau_I)$ следует точность всех строк бикомплекса $\mathcal{B}_{\tau_I,\tau_{\mathfrak{J}}}(I,\mathfrak{J},X)$. Тогда, по лемме 6.1, комплекс $\mathrm{Tot}_{\tau_I,\tau_{\mathfrak{J}}}(I,\mathfrak{J},X)$ точен, что противоречит условию $\tau \in \sigma(\alpha|_I,\alpha|_{\mathfrak{J}})$. Пусть теперь $\tau \in \sigma(\alpha,\alpha|_{\mathfrak{J}}) \subseteq \sigma_{\mathrm{t}}(\alpha,\alpha|_{\mathfrak{J}})$. Тогда $\tau_E \in \sigma_{\mathrm{t}}(\alpha)$ и по лемме 6.7 $\tau_E|_{\mathfrak{J}} = \tau_{\mathfrak{J}}$. □

Лемма 6.9. *Пусть I и J идеалы в E, $I \supset J$ и $\dim(I/J) = 1$, и пусть $u \in I \backslash J$. Тогда для любых $\lambda \in \Delta(I)$ и $\mu \in \Delta(\mathfrak{J})$ существует ограниченный эндоморфизм $\delta(u)$ банахова комплекса $\mathrm{Tot}_{\lambda|_J,\mu}(J,\mathfrak{J},X)$ такой, что*

$$\mathrm{Tot}_{\lambda,\mu}(I,\mathfrak{J},X) = \mathrm{Con}(\mathrm{Tot}_{\lambda|_J,\mu}(J,\mathfrak{J},X), \delta(u) - \lambda(u)). \tag{6.6}$$

Доказательство. Данное утверждение является коцепным аналогом леммы 5.2 из [8] и доказывается совершенно аналогично. Отметим, что лемма 5.2 из [8] доказана в чуть более стеснительных условиях, а именно, для подалгебры Ли $\mathfrak{J}$ в $U(E)$; это не меняет рассуждений. Как и в лемме 5.2 из [8], эндоморфизм $\delta(u)$ представляется на членах комплекса в виде верхних треугольных операторных матриц, главная диагональ которых состоит из элементов, равных оператору $\theta(u)$. $\square$

Теорема 6.10. *Пусть E – конечномерная нильпотентная алгебра Ли, I и J идеалы в E, $I \supset J$, $\dim(I/J) = 1$, и пусть $\sigma \in \mathfrak{S}$. Тогда $\sigma(\alpha|_J, \alpha|_{\mathfrak{J}}) = \sigma(\alpha|_I, \alpha|_{\mathfrak{J}})|_{J\times\mathfrak{J}}$. В частности, $\sigma(\alpha|_{\mathfrak{J}}) = \sigma(\alpha, \alpha|_{\mathfrak{J}})|_{\mathfrak{J}}$.*

Доказательство. Согласно формуле (6.6)

$$\sigma(\mathrm{Tot}_{\kappa,\beta}(I,\mathfrak{J},X)) \subseteq \sigma(\mathrm{Con}_{\delta(u)}(\mathrm{Tot}_{\kappa,\beta}(J,\mathfrak{J},X))).$$

Обратно, пусть $(\tau, c) \in \sigma(\mathrm{Con}_{\delta(u)}(\mathrm{Tot}_{\kappa,\beta}(J,\mathfrak{J},X)))$. По теореме 1.6 $\tau \in \sigma(\mathrm{Tot}_{\kappa,\beta}(J,\mathfrak{J},X))$, т.е. $\tau \in \sigma(\alpha|_J, \alpha|_{\mathfrak{J}})$, и, согласно теореме 6.8, $\tau_J \in \sigma_{\mathrm{t}}(\alpha|_J)$. Поскольку $[I,I] \subseteq J$ и $\alpha([I,I])$ состоит из квазинильпотентов (см. [20]), $\tau_J([I,I]) = 0$. Поэтому любое линейное продолжение τ_J на идеал I является характером. Пусть $\lambda \in I^*$, $\lambda|_J = \tau_J$, $\lambda(u) = c$. По лемме 6.9, $\mathrm{Tot}_{\lambda,\tau_{\mathfrak{J}}}(I,\mathfrak{J},X) = \mathrm{Con}(\mathrm{Tot}_{\tau_J,\tau_{\mathfrak{J}}}(J,\mathfrak{J},X), \delta(u) - c)$, т.е. $(\tau, c) \in \sigma(\mathrm{Tot}_{\kappa,\beta}(I,\mathfrak{J},X))$. Согласно теореме 1.6, $\sigma(\alpha|_J, \alpha|_{\mathfrak{J}}) = \sigma(\alpha|_I, \alpha|_{\mathfrak{J}})|_{J\times\mathfrak{J}}$.

В нильпотентной алгебре Ли E рассмотрим убывающую цепочку идеалов $E = I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} = \{0\}$ такую, что $\dim(I_i/I_{i+1}) = 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Так как для любого i справедливо равенство $\sigma(\alpha|_{I_{i+1}}, \alpha|_{\mathfrak{J}}) = \sigma(\alpha|_{I_i}, \alpha|_{\mathfrak{J}})|_{I_{i+1}\times\mathfrak{J}}$, то $\sigma(\alpha, \alpha|_{\mathfrak{J}})|_{\mathfrak{J}} = \cdots = \sigma(\alpha|_{I_n}, \alpha|_{\mathfrak{J}})|_{\mathfrak{J}} = \sigma(\alpha|_{\mathfrak{J}})$. $\square$

Лемма 6.11. *Пусть $\mathfrak{J}$ – конечномерная подалгебра Ли в $\mathcal{O}_E(D)$ и $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Q}$ идеалы в $\mathfrak{J}$, $\mathcal{F} \supset \mathcal{Q}$ и $\dim(\mathcal{F}/\mathcal{Q}) = 1$. Если $f \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{Q}$, то для любых $\lambda \in \Delta(E)$ и $\mu \in \Delta(\mathcal{F})$*

$$\mathrm{Tot}_{\lambda,\mu}(E,\mathcal{F},X) = \mathrm{Con}(\mathrm{Tot}_{\lambda,\mu|_{\mathcal{Q}}}(E,\mathcal{Q},X), \Theta(f) - \mu(f)), \tag{6.7}$$

где $\Theta(f) = \{\Theta^{p,q}(f)\}$, $\Theta^{p,q}(f) = L_{\theta_p(f)} - R_{T_q(f)}$.

Доказательство. Для любого $\Phi \in C^q(\mathcal{F}, C^p(E,X))$ через $\Phi|_{\mathcal{Q}}$ обозначим сужение Φ на $\wedge^q \mathcal{Q}$. Если $I_p(f)$ оператор гомотопии комплекса $C^\bullet(\theta_p|_{\mathcal{F}} - \mu)$, то нетрудно проверить, что отображение $l_{p,q} : C^q(\mathcal{F}, C^p(E,X)) \to C^q(\mathcal{Q}, C^p(E,X)) \oplus C^{q-1}(\mathcal{Q}, C^p(E,X))$, заданное по правилу $l_{p,q}(\Phi) = (\Phi|_{\mathcal{Q}}, (-1)^p (I_p(f)\Phi)|_{\mathcal{Q}})$, является топологическим изоморфизмом. По определению $\gamma_{\lambda,\mu}(\Phi) = \kappa_\lambda(\Phi) + (-1)^p \beta_\mu(\Phi)$, где $\Phi \in C^q(\mathcal{F}, C^p(E,X))$, $\gamma_{\lambda,\mu}$ – дифференциал комплекса $\mathrm{Tot}_{\lambda,\mu}(E,\mathcal{F},X)$. Найдем компоненты $l_{p+1,q}(\kappa_\lambda(\Phi))$ и $l_{p,q+1}(\beta_\mu(\Phi))$ в соответствующих разложениях. Так как $\kappa_\lambda(\Phi) = d_\lambda \cdot \Phi$ (d_λ – дифференциал комплекса $C^\bullet(\alpha - \lambda)$), то $\kappa_\lambda(\Phi)|_{\mathcal{Q}} = d_\lambda \cdot (\Phi|_{\mathcal{Q}})$. Для второго члена имеем $(I_{p+1}(f)(d_\lambda \cdot \Phi))|_{\mathcal{Q}}(\nu) = d_\lambda \cdot \Phi(f \wedge \nu) = d_\lambda \cdot (I_p(f)\Phi)(\nu)$, $\nu \in \wedge^{q-1}\mathcal{Q}$, т.е. $l_{p+1,q}(\kappa_\lambda(\Phi)) = (\kappa_\lambda(\Phi|_{\mathcal{Q}}), -\kappa_\lambda((-1)^p(I_p(f)\Phi)|_{\mathcal{Q}}))$. Далее, $\beta_\mu(\Phi)|_{\mathcal{Q}} = \beta_{\mu|_{\mathcal{Q}}}(\Phi|_{\mathcal{Q}})$ и по формуле (1.5) $I_p(f)\beta_\mu(\Phi)|_{\mathcal{Q}} = -\beta_{\mu|_{\mathcal{Q}}}((I_p(f)\Phi)|_{\mathcal{Q}}) + \Theta_\mu(f)(\Phi|_{\mathcal{Q}})$, где $\Theta_\mu(f) = \Theta(f) - \mu(f)$. Тогда $l_{p,q+1}((-1)^p\beta_\mu(\Phi)) = ((-1)^p \beta_{\mu|_{\mathcal{Q}}}(\Phi|_{\mathcal{Q}}),$ $-(-1)^p\beta_{\mu|_{\mathcal{Q}}}((-1)^p(I_p(f)\Phi)|_{\mathcal{Q}}) + \Theta_\mu(f)(\Phi|_{\mathcal{Q}}))$. Отсюда с точностью до изоморфизма получим

$$\gamma_{\lambda,\mu}(\Phi|_{\mathcal{Q}}, (-1)^p(I_p(f)\Phi)|_{\mathcal{Q}}) =$$
$$= (\gamma_{\lambda,\mu|_{\mathcal{Q}}}(\Phi|_{\mathcal{Q}}), -\gamma_{\lambda,\mu|_{\mathcal{Q}}}((-1)^p(I_p(f)\Phi)|_{\mathcal{Q}}) + \Theta_\mu(f)(\Phi|_{\mathcal{Q}})).$$

Таким образом, $\gamma_{\lambda,\mu}$ является дифференциалом соответствующего конуса (см. п. 1.5). Формула (6.7) доказана. □

Теорема 6.12. *Пусть E – конечномерная нильпотентная алгебра Ли, $\mathcal{O}_E(D) \succ (X,\alpha)$, $\mathfrak{J}$ – конечномерная нильпотентная подалгебра Ли в $\mathcal{O}_E(D)$, и пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Q}$ идеалы в $\mathfrak{J}$, $\mathcal{F} \supset \mathcal{Q}$ и $\dim(\mathcal{F}/\mathcal{Q}) = 1$. Тогда $\sigma(\alpha, \alpha|_{\mathcal{Q}}) = \sigma(\alpha, \alpha|_{\mathcal{F}})|_{E\times\mathcal{Q}}$ и $\sigma(\alpha) = \sigma(\alpha,\alpha|_{\mathcal{F}})|_E$ для всех $\sigma \in \mathfrak{S}$.*

Доказательство. Согласно формуле (6.7)

$$\sigma(\mathrm{Tot}_{\kappa,\beta}(E,\mathcal{F},X)) \subseteq \sigma(\mathrm{Con}_{\Theta(f)}(\mathrm{Tot}_{\kappa,\beta}(E,\mathcal{Q},X))).$$

Обратно, если $(\tau, c) \in \sigma(\mathrm{Con}_{\Theta(f)}(\mathrm{Tot}_{\kappa,\beta}(E,\mathcal{Q},X)))$, то

$$\tau \in \sigma(\mathrm{Tot}_{\kappa,\beta}(E,\mathcal{Q},X)) = \sigma(\alpha,\alpha|_{\mathcal{Q}})$$

по теореме 1.6. По теореме 6.10 $\tau_{\mathcal{Q}} \in \sigma(\alpha|_{\mathcal{Q}})$. Тогда $[\mathcal{F},\mathcal{F}] \subseteq \mathcal{Q}$ и $[\mathcal{F},\mathcal{F}] \subseteq \mathrm{Rad}\mathcal{O}_E(D)$, т.е. $\alpha([\mathcal{F},\mathcal{F}])$ состоит из квазинильпотентных операторов. По проекционному свойству [9], $\tau_{\mathcal{Q}}([\mathcal{F},\mathcal{F}]) = 0$.

Поэтому любое линейное продолжение $\tau_{\mathcal{Q}}$ на $\mathcal{F}$ является характером. Пусть $\mu \in \mathcal{F}^*$, $\mu|_{\mathcal{Q}} = \tau_{\mathcal{Q}}$, $\mu(f) = c$. Тогда

$$\mathrm{Tot}_{\tau_E,\mu}(E, \mathcal{F}, X) = \mathrm{Con}(\mathrm{Tot}_{\tau_E,\tau_{\mathcal{Q}}}(E, \mathcal{Q}, X), \Theta(f) - c)$$

согласно лемме 6.11. Значит, $(\tau, c) \in \sigma(\mathrm{Tot}_{\tau_E,\mu}(E, \mathcal{F}, X)) = \sigma(\alpha, \alpha|_{\mathcal{F}})$ и $\sigma(\alpha, \alpha|_{\mathcal{Q}}) = \sigma(\alpha, \alpha|_{\mathcal{F}})|_{E\times\mathcal{Q}}$ по теореме 1.6.

Рассмотрим теперь цепочку идеалов $\mathfrak{J} = \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{F}_t \supset \mathcal{F}_{t+1} = \{0\}$ такую, что $\dim(\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i+1}) = 1$, $1 \leqslant i \leqslant t$. По доказанному $\sigma(\alpha, \alpha|_{\mathcal{F}_{i+1}}) = \sigma(\alpha, \alpha|_{\mathcal{F}_i})|_{E\times\mathcal{F}_{i+1}}$ для всех i. Тогда $\sigma(\alpha, \alpha|_{\mathcal{F}_1})|_E = \cdots = \sigma(\alpha, \alpha|_{\mathcal{F}_t})|_E = \sigma(\alpha)$. $\square$

§7. Теорема об отображении спектра

Теорема 7.1. *Пусть E – конечномерная нильпотентная алгебра Ли, (X, α) – банахов E-модуль, D – абсолютно выпуклая область в E^* и σ – какой-либо спектр Слодковского. Если $\sigma(\alpha) \subset D$, то α продолжается до непрерывного представления $\alpha : \mathcal{O}_E(D) \to B(X)$ алгебры сходящихся степенных рядов $\mathcal{O}_E(D)$ в X, и точки из $\sigma(\alpha)$ отождествляются с непрерывными характерами алгебры $\mathcal{O}_E(D)$. При этом для любой конечномерной нильпотентной подалгебры Ли $\mathfrak{J}$ в $\mathcal{O}_E(D)$ характеры из спектра суженного представления $\alpha|_{\mathfrak{J}}$ являются сужениями на $\mathfrak{J}$ характеров из $\sigma(\alpha)$, то есть $\sigma(\alpha|_{\mathfrak{J}}) = \sigma(\alpha)|_{\mathfrak{J}}$, $\sigma^{\mathrm{e}}(\alpha|_{\mathfrak{J}}) = \sigma^{\mathrm{e}}(\alpha)|_{\mathfrak{J}}$.*

Доказательство. Первая часть утверждения установлена в теореме 5.5. Докажем вторую часть.

Пусть $\mu \in \sigma(\alpha|_{\mathfrak{J}})$. По теореме 6.10, $\mu = \tau|_{\mathfrak{J}}$ для некоторого $\tau \in \sigma(\alpha, \alpha|_{\mathfrak{J}})$. Тогда, согласно теореме 6.12, $\tau_E \in \sigma(\alpha)$, где τ_E – сужение функционала $\tau \in \Delta(E \times \mathfrak{J})$ на E. По теореме 6.8, $\tau_E|_{\mathfrak{J}} = \tau_{\mathfrak{J}} = \mu$.

Обратно, пусть $\lambda \in \sigma(\alpha)$. По теореме 6.12, $\lambda = \tau|_E = \tau_E$ для некоторого $\tau \in \sigma(\alpha, \alpha|_{\mathfrak{J}})$ и, по теореме 6.10, $\tau_{\mathfrak{J}} = \tau|_{\mathfrak{J}} \in \sigma(\alpha|_{\mathfrak{J}})$. Но, согласно теореме 6.8, $\lambda|_{\mathfrak{J}} = \tau_{\mathfrak{J}}$.

Далее, $\mathcal{O}_E(D) \succ (X^\circ, \alpha^\circ)$. Тогда $\sigma^{\mathrm{e}}(\alpha|_{\mathfrak{J}}) = \sigma(\alpha|_{\mathfrak{J}}^\circ) = \sigma(\alpha^\circ|_{\mathfrak{J}})$ согласно теореме 1.10. По доказанному $\sigma(\alpha^\circ|_{\mathfrak{J}}) = \sigma(\alpha^\circ)|_{\mathfrak{J}}$, и $\sigma^{\mathrm{e}}(\alpha) = \sigma(\alpha^\circ)$ по теореме 1.10. $\square$

Следствие 7.2. *Пусть $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_s\}$ – произвольное семейство образующих алгебры Ли E и $p(\nu) = \{p_1(\nu), \dots, p_t(\nu)\}$ – семейство полиномов (т.е. элементов обертывающей алгебры $U(E)$) от переменных $\nu_1, \dots, \nu_s$, порождающих конечномерную алгебру Ли. Если*

$\sigma \in \mathfrak{S}$, (X,α) – банахов E-модуль и $a = \alpha(\nu)$, то $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$, $\sigma^{\mathrm{e}}(p(a)) = p(\sigma^{\mathrm{e}}(a))$.

Действительно, пусть $D = E^*$. По теореме 2.8, $\mathcal{O}_E(D) \succ (X,\alpha)$. Если $\mathfrak{J}$ – подалгебра Ли в $U(E)$, порожденная $p(\nu)$, и $\mu(p(\nu)) \in \sigma(p(a))$ для некоторого $\mu \in \sigma(\alpha|_{\mathfrak{J}})$, то по теореме 7.1 $\mu(p_i(\nu)) = \lambda(p_i(\nu)) = p_i(\lambda(\nu))$, $1 \leqslant i \leqslant t$, для некоторого $\lambda \in \sigma(\alpha)$. По определению 1.9, $\lambda(\nu) \in \sigma(a)$. Аналогично доказывается второе равенство. $\square$

Пусть теперь e – треугольный базис, $\mathcal{O}_E(D) \succ (X,\alpha)$, $a = \alpha(e)$, $m = \operatorname{codim}[E,E]$. Выбор базиса e определяет отождествление пространства E^* с $\mathbb{C}^n$ (см. пример 4.3), и при этом $\Delta(E) = \mathbb{C}^m$. Согласно теореме 4.6, существует непрерывный гомоморфизм алгебр $\mathcal{O}_E(D) \to H(D_{\mathrm{s}})$, где $D_{\mathrm{s}} = D \cap \Delta(E)$, т.е. любой элемент $f \in \mathcal{O}_E(D)$ определяет голоморфную функцию f в области D_{s}. По определению 1.9 и теореме 5.5, $\sigma_{\mathrm{t}}(a) \subset D_{\mathrm{s}}$. Поэтому имеет смысл выражение $f(\sigma(a))$ для любых $f \in \mathcal{O}_E(D)$ и $\sigma \in \mathfrak{S}$.

Следствие 7.3. *Пусть $\sigma \in \mathfrak{S}$, $f = \{f_1,\ldots,f_t\}$ семейство из $\mathcal{O}_E(D)$, порождающее нильпотентную подалгебру Ли, и пусть $f(a) = \alpha(f)$. Тогда $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$, $\sigma^{\mathrm{e}}(f(a)) = f(\sigma^{\mathrm{e}}(a))$.*

Достаточно повторить рассуждение, проведенное в доказательстве следствия 7.2, и использовать теоремы 6.10, 6.12, 7.1. $\square$

В заключение мы поясним применение следствия 7.3 на простом примере.

Пример 7.4. Пусть E алгебра Гейзенберга с базисом $e = \{e_1,e_2,e_3\}$ и соотношениями $[e_1,e_2] = e_3$, $[e_1,e_3] = [e_2,e_3] = 0$, и D открытый полидиск в $\mathbb{C}^3$ с центром в нуле и полирадиуса 1. Пусть $f_1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-1}(e_1e_2)^n$ и $f_2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-1}(e_2e_1)^n$. По теореме 4.6 $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_E(D)$. Поскольку $[e_1e_2, e_2e_1] = 0$, f_1 и f_2 взаимно коммутируют. Пусть теперь $\mathcal{O}_E(D) \succ (X,\alpha)$ и $a = \alpha(e_1)$, $b = \alpha(e_2)$. Положим $f_i(a,b) = \alpha(f_i)$, $i = 1,2$. Рассмотрим голоморфную в единичном круге функцию $\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-1}z^n$ (однозначная ветвь логарифма). Тогда $f_1(a,b) = \ln(1+ab)$, $f_2(a,b) = \ln(1+ba)$ и согласно следствию 7.3, $\sigma(\ln(1+ab), \ln(1+ba)) = \{(\ln(1+\lambda_1\lambda_2), \ln(1+\lambda_1\lambda_2)) : (\lambda_1,\lambda_2) \in \sigma(a,b)\}$, $\sigma \in \mathfrak{S}$.

Литература

1. А. Я. Хелемский, *Банаховы и полинормированные алгебры.* Наука, М. (1989).
2. J. L. Taylor, *The analytic functional calculus for several commuting operators.* — Acta. Math. **125** (1970), 1–38.
3. J. L. Taylor, *A joint spectrum for several commuting operators.* — J. Func. Anal. **6** (1970), 172–191.
4. J. Eschmeier, M. Putinar, *Spectral decompositions and analytic sheaves.* Clarendon Press, Oxford (1996).
5. Z. Slodkowski, *An infinite family of joint spectra.* — Studia Math. **LXI** (1977), 239–255.
6. V. Muller, *The Slodkowski spectra and higher Shilov boundaries.* — Studia Math. **105**, (1) (1993), 69–75.
7. J. L. Taylor, *A general framework for a multi-operator functional calculus.* — Adv. Math. **9** (1972), 183–252.
8. A. S. Fainshtein, *Taylor joint spectrum for families of operators generating nilpotent Lie algebras.* — J. Operator Theory **29** (1993), 3–27.
9. E. Boasso, *Dual properties and joint spectra for solvable Lie algebras of operators.* — J. Operator Theory **33** (1995), 105–116.
10. D. Beltita, *Spectrum for a solvable Lie algebra of operators.* — Studia Math. **135**, (2) (1999), 163–178.
11. G.-C. Rota, W. G. Strang, *A note on the joint spectral radius.* — Indag. Math. **22** (1960), 379–381.
12. V. S. Shulman, Y. V. Turovskii, *Joint spectral radius, operator semigroups, and a problem of W. Wojtynski.* — J. Func. Anal. **177** (2000) 383–441.
13. Б. Н. Садовский, *Предельно компактные и уплотняющие операторы.* Успехи матем. наук **27** (1972), 81–146.
14. J. J. Buoni, R. Harte, T. Wickstead, *Upper and lower Fredholm spectra.* — Proc. Amer. Math. Soc. **66** (1977), 309–314.
15. M. Conzales, A. Martinez-Abejon, *Ultrapowers and semi-Fredholm operators.* — Bollettino U.M.I. **(7)**, 11-B (1997), 415–433.
16. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Мир, М. (1976).
17. М. Гото, Ф. Гроссханс, *Полупростые алгебры Ли.* Мир, М. (1981).
18. F. F. Bonsall, J. Duncan, *Numerical ranges of operators on normed algebras.* London Math. Soc. Lect. Note, Ser. 2, Cambridge Univ. Press, London (1971).
19. Ю. В. Туровский, *О коммутативности по модулю радикала Джекобсона ассоциативной оболочки алгебры Ли.* В сб.: Спектральная теория операторов и ее прил., **8**, Баку (1987), с. 119-211.
20. Ю. В. Туровский, *Спектральные свойства элементов нормированных алгебр и инвариантные подпространства.* — Функц. анализ и его прил. **18**, вып. 2 (1984), 77–78.
21. Н. Бурбаки, *Общая топология, основные структуры.* Наука, М. (1968).
22. Ю. В. Туровский, В. С. Шульман, *Радикалы банаховых алгебр и некоторые задачи теории радикальных банаховых алгебр.* — Функц. анализ и его прил. **35**, вып. 4 (2001), 88–91.

Dosiev A. A. Algebras of power series of elements of a Lie algebra, and Slodkowski spectra

Topological algebras of (convergent) power series of elements of a Lie algebra are introduced and the existence of continuous homomorphisms of these algebras into an operator algebra is studied. For Slodkowski spectra, the spectral mapping theorem $\sigma_{\delta,k}(f(a)) = f(\sigma_{\delta,k}(a))$, $\sigma_{\pi,k}(f(a)) = f(\sigma_{\pi,k}(a))$ is proved for generators a of a finite-dimensional nilpotent Lie algebra of bounded linear operators whenever the family f of elements of a power series algebra is finite-dimensional.

Институт Математики
и Механики АН Азерб.
E-mail: yuri@sinam.net,
dosiev@yahoo.com

Поступило 2 февраля 1999 г.,
а в окончательном виде
25 июня 2002 г.