Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 290, 2002 г.

П. Г. Доддс[1], **Б. де Пагтер**,
А. А. Седаев[2], **Е. М. Семенов**[2], **Ф. А. Сукочев**[1]

СИНГУЛЯРНЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

§1. Введение

В работе [1] Ж. Диксмье показал существование сингулярных следов на факторе фон Неймана $B(H)$, т.е. нетривиальных следов, которые обращаются в ноль на всех конечномерных операторах. Значение таких следов стало впоследствии очевидным ввиду их приложений к задачам некоммутативной геометрии, которые описаны в монографии А. Конна [2]. Как было показано в [3], методы, применяемые Диксмье, тесно связаны с идеями, известными из теории (коммутативных) симметричных банаховых функциональных пространств. Подход, продемонстрированный в [3], состоит в том, что сингулярные следы Диксмье рассматриваются как непрерывные линейные функционалы на специальных операторных идеалах Марцинкевича. При этом основополагающим является понятие положительного функционала на пространстве измеримых функций, который монотонен относительно специального отношения порядка – полуупорядоченности Харди–Литтлвуда. Такие функционалы называются симметричными. В [3] было показано, что изучение сингулярных следов в смысле Диксмье, а также сингулярных следов на более общих некоммутативных банаховых пространствах измеримых операторов [4] может быть сведено к изучению симметричных функционалов на (коммутативных) симметричных банаховых пространствах измеримых функций на полуоси.

Данная работа продолжает изучение симметричных сингулярных функционалов на вполне симметричных банаховых пространствах измеримых функций, начатое в [3]. Нами описывается и систематически исследуется одна новая конструкция сингуляр-

[1] Работа поддержана Australian Research Council

[2] Работа поддержена РФФИ, грант 98-01-00135 и программой "Университеты России", грант 3667.

ных симметричных функционалов, которая основана на свойствах банаховых пределов – положительных нормированных и инвариантных относительно сдвига линейных функционалов на пространстве $l_\infty(\mathbb{N})$.

Предлагаемая конструкция существенно отличается от оригинального подхода Диксмье, который основан на свойствах нормированных функционалов, инвариантных относительно операции растяжения. Наш основной результат о (сингулярных) симметричных функционалах, определенных на пространствах Марцинкевича с помощью банаховых пределов, дан в §3 (теорема 3.8) и характеризует их существование в терминах асимптотического поведения функции ψ, порождающей само пространство Марцинкевича. При этом основную роль в нашей характеризации играет понятие почти сходящейся последовательности, принадлежащее Г. Г. Лоренцу [5].

Даный подход существенно уточняет и дополняет результаты статьи [3]. В частности, с помощью новой конструкции мы легко получаем (см. замечание после теоремы 3.8 и лемму 3.9) основной результат из [3] (см. теорему 2.2 ниже) об описании тех пространств Марцинкевича, на которых существуют нетривиальные сингулярные симметричные функционалы.

В §4 мы изучаем множество сингулярных симметричных функционалов на заданном пространстве Марцинкевича как подмножество единичной сферы сопряженного пространства. Основной результат этого параграфа – описание в терминах асимптотического поведения порождающей пространство Марцинкевича функции ψ необходимых и достаточных условий, при которых полунорма, порожденная симметричными функционалами, совпадает (теорема 4.1) или эквивалентна (теорема 4.3) некоторой естественной полунорме, связанной с пространством Марцинкевича.

§2. Определения и предварительные сведения

Напомним некоторые основные понятия и обозначения, применяемые в дальнейшем. Банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ вещественных, измеримых на интервале $[0,\infty)$ функций будет называться *симметричным пространством*, если (i) E есть идеальное пространство (решетка); (ii) E – перестановочно-инвариантное пространство, то есть, если $y \in E$, и x есть некоторая измеримая функция на $[0,\infty)$ такая, что $x^* = y^*$, то $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Здесь x^* означает невозрастающую, непрерывную справа перестановку функции x, задаваемую формулой

$$x^*(t) = \inf\{\ s \geqslant 0 : m(\{|\ x\ |> s\}) \leqslant t\ \}, \quad t > 0.$$

Основные свойства перестановок и симметричных пространств можно узнать из монографий [6, 7]. Отметим, что для произвольного симметричного E справедливы непрерывные вложения

$$L^1[0,\infty) \cap L^\infty[0,\infty) \subset E \subset L^1[0,\infty) + L^\infty[0,\infty).$$

Мы будем обозначать через E' симметричное пространство, ассоциированное с E и состоящее из измеримых функций y таких, что

$$\|y\|_{E'} := \sup\{\int_0^\infty |x(t)y(t)|dt : \ x \in E,\ \|x\|_E \leq 1\} < \infty.$$

Если E^* означает банахово сопряженное к E пространство, то, как известно, $E' \subset E^*$ и $E' = E^*$ в том и только том случае, если норма $\|\cdot\|_E$ является порядково непрерывной, то есть, из $\{x_n\} \subseteq E, x_n \downarrow_n 0$ следует, что $\|x_n\|_E \to 0$. Напомним, что норма $\|\cdot\|_E$ симметричного пространства E порядково непрерывна в том и только том случае, если E сепарабельно. При этом $\lim_{t\to\infty} x^*(t) = 0$ для всех $x \in E$.

Пусть $x,\ y \in L^1[0,\infty) + L^\infty[0,\infty)$. Будем говорить, что элемент x *мажорирован* элементом y в смысле полуупорядоченности Харди-Литтвуда и писать $x \prec\!\!\prec y$, если $\int_0^t x^*(s)ds \leqslant \int_0^t y^*(s)ds$ для всех $t > 0$.

Симметричное пространство E на $[0,\infty)$ называется *вполне симметричным* тогда и только тогда, когда из соотношений $x \prec\!\!\prec y$, $y \in E$ вытекает, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$. Хорошо известно (см., например, [6]), что $(E, \|\cdot\|_E)$ является вполне симметричным в том и только том случае, если E есть интерполяционное пространство пары $(L^1[0,\infty),\ L^\infty[0,\infty))$ с интерполяционной константой 1. В частности, если E сепарабельно или сопряжено к сепарабельному, то E вполне симметрично.

Для $\lambda > 0$ и функции f на $[0,\infty)$ определим оператор растяжения $D_\lambda f(t) := f(\frac{t}{\lambda})$. Для каждого $\lambda > 0$ оператор D_λ является ограниченным линейным оператором в E (см. [6, гл. II]).

Согласно [3], положительный линейный функционал $0 \le f \in E^*$ на вполне симметричном пространстве E называется *симметричным*, если для $0 \le x, y \in E$ из $x \prec\prec y$ следует, что $f(x) \le f(y)$. Через E^*_{sym} обозначим конус всех (положительных) симметричных сингулярных функционалов на E. Напомним, что сингулярность функционала на идеальном пространстве F означает, что его ядро содержит некоторый фундамент X из самого пространства F. В нашем случае $X = L^1 \cap L^\infty$.

Для каждого $f \in E^*_{\mathrm{sym}}$ и $\lambda > 0$ имеем

$$f(D_\lambda x) = \lambda f(x), \;\; x \in E \tag{2.1}$$

(см. [3, предложение 2.3]).

Напомним ([3, определение 2.7]), что симметричный функционал f называется *сосредоточенным в* 0 (соответственно, *сосредоточенным в* ∞), если $f = 0$ на $E \cap L^\infty[0,\infty)$ (соответственно, $f = 0$ на $E \cap L^1[0,\infty)$). Через $E^*_{\mathrm{sym},0}$ (соответственно, $E^*_{\mathrm{sym},\infty}$) обозначим множество тех элементов пространства E^*_{sym}, которые сосредоточены в 0 (соответственно, в ∞). Согласно [3, теорема 2.10] имеем

$$E^*_{\mathrm{sym}} = E^*_{\mathrm{sym},0} + E^*_{\mathrm{sym},\infty}.$$

Через Ω обозначим множество всех вогнутых неотрицательных функций $\psi(t)$ на $[0,\infty)$ таких, что $\psi(0) = 0$. Через Ω_∞ обозначим совокупность всех $\psi \in \Omega$, для которых $\psi(\infty) = \lim_{t\to\infty} \psi(t) = \infty$, и через Ω_0 – множество всех $\psi \in \Omega$, удовлетворяющих условию $\psi(0+) = \lim\limits_{t\downarrow 0} \psi(t) = \lim\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{t}{\psi(t)} = 0$.

Для каждой функции $\psi \in \Omega$ через $M(\psi)$ обозначим пространство Марцинкевича на $[0,\infty)$, состоящее из всех измеримых функций x на $[0,\infty)$, для которых

$$\|x\|_{M(\psi)} = \sup_{t>0} \frac{1}{\psi(t)} \int\limits_0^t x^*(s)\, ds < \infty.$$

Основные свойства пространств Марцинкевича можно найти в монографии [6].

Обозначим через $M_1(\psi)$ и $M_\infty(\psi)$ замыкания в $M(\psi)$ решеточных идеалов $M(\psi) \cap L_1[0,\infty)$ и $M(\psi) \cap L_\infty[0,\infty)$ соответственно.

Для $\psi \in \Omega$ рассмотрим решеточные полунормы Рисса ρ_i, $i = 1, \infty$, определяемые на $M(\psi)$ формулой

$$\rho_i(x) = \inf\left\{ \|x - y\|_{M(\psi)} : y \in M_i(\psi) \right\}, \quad i = 1, \infty,$$

для всех $x \in M(\psi)$.

Ясно, что полунорма ρ_i может быть отождествлена с нормой факторпространства $M(\psi)/M_i(\psi)$, $i = 1, \infty$, а множество $M(\psi)^*_{\mathrm{sym},\infty}$ (соответственно, $M(\psi)^*_{\mathrm{sym},0}$) может быть отождествлено с подмножеством сопряженного пространства $\left(M(\psi)/M_1(\psi)\right)^*$ (соответственно, $(M(\psi)/M_\infty(\psi))^*$).

Нам понадобятся следующие хорошо известные и легко доказываемые альтернативные описания полунорм ρ_1, ρ_∞ и пространств $M_1(\psi)$, $M_\infty(\psi)$.

Предложение 2.1.

(i) *Если* $\psi \in \Omega_\infty$, *то* $\rho_1(x) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\psi(t)} \int\limits_0^t x^*(s)\,ds$ *и*

$$M_1(\psi) = \left\{ x \in M\left(\psi\right) : \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\psi(t)} \int\limits_0^t x^*(s)\,ds = 0 \right\}.$$

(ii) *Если* $\psi \in \Omega_0$, *то* $\rho_\infty(x) = \limsup_{t\downarrow 0} \frac{1}{\psi(t)} \int\limits_0^t x^*(s)\,ds$ *и*

$$M_\infty(\psi) = \left\{ x \in M(\psi) : \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{\psi(t)} \int\limits_0^t x^*(s)\,ds = 0 \right\}.$$

Один из основных результатов статьи [3] содержится в следующей теореме.

Теорема 2.2. *Если* $\psi \in \Omega$, *то*
(i) *ненулевой сосредоточенный в* ∞ *симметричный функционал на* $M(\psi)$ *существует тогда и только тогда, когда* $\psi \in \Omega_\infty$ *и*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1; \tag{2.2}$$

(ii) *ненулевой сосредоточенный в* 0 *симметричный функционал на* $M(\psi)$ *существует тогда и только тогда, когда* $\psi \in \Omega_0$ *и*

$$\liminf_{t\downarrow 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$$

§3. Сингулярные симметричные функционалы, определяемые банаховыми пределами

В этом параграфе мы описываем общую конструкцию симметричных функционалов на пространствах Марцинкевича $M(\psi)$. Хотя существует определенное сходство с некоторыми из построений, представленных в [3], данная конструкция является существенно новой. Как станет ясно из следующего параграфа, совокупность симметричных функционалов, полученных этим методом, является достаточно представительной, а конструкция имеет широкую область применения. Мы ограничимся симметричными функционалами, сосредоточенными в ∞, хотя все результаты, измененные соответствующим образом, верны также для симметричных функционалов, сосредоточенных в 0.

Отметим, что всякий функционал $0 \le f \in M(\psi)^*_{\mathrm{sym},\infty}$ обладает свойством

$$\|f\| = f(\psi').$$

Действительно, так как $\|\psi'\|_{M(\psi)} = 1$, то $f(\psi') \le \|f\|$. С другой стороны, в силу предложения 3.3 из [3] и условия $\psi(\infty) = \infty$ имеем

$$0 \le f(x) \le \left\{ \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\psi(t) - \psi(0+)} \int_0^t x^*(s)\,ds \right\} f(\psi')$$

$$= \left\{ \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t x^*(s)\,ds \right\} f(\psi') \le \|x\|_{M(\psi)} f(\psi')$$

для всех $0 \le x \in M(\psi)$. Следовательно, $\|f\| \le f(\psi')$, что доказывает наше утверждение.

Заметим, что отсюда вытекает интересное свойство: $\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$ для всех $0 \le f, g \in M(\psi)^*_{\mathrm{sym},\infty}$.

Для описания новой конструкции симметричных функционалов удобно ввести следующие обозначения. Пусть $\mathbf{t} = \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ –

последовательность $0 < t_1 < t_2 < \cdots \nearrow \infty$, и пусть $\psi \in \Omega_\infty$. Для $0 \le x \in M(\psi)$ мы определим

$$a(x, t_n) = \frac{1}{\psi(t_n)} \int_0^{t_n} x^*(s)\, ds, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.1}$$

Положим $a(x, \mathbf{t}) = \{a(x, t_n)\}_{n=1}^\infty$, тогда $a(x, \mathbf{t}) \in l_\infty$ для всех $0 \le x \in M(\psi)$. Из хорошо известного неравенства мажоризации для полуупорядоченности Харди–Литтлвуда (см., например, [6, гл. II, (2.17)]) следует, что

$$a(x + y, \mathbf{t}) \le a(x, \mathbf{t}) + a(y, \mathbf{t}) \tag{3.2}$$

для всех $0 \le x, y \in M(\psi)$. Далее, если $0 \le x, y \in M(\psi)$ и $x \prec\!\!\prec y$, то неравенство $0 \le a(x, \mathbf{t}) \le a(y, \mathbf{t})$ справедливо для поточечной упорядочности на l_∞.

Предлагаемая конструкция симметричных функционалов состоит в следующем. Пусть $0 \le \varphi \in l_\infty^*$, определим

$$f_{\varphi, \mathbf{t}}(x) = \varphi(a(x, \mathbf{t})) \tag{3.3}$$

для всех $0 \le x \in M(\psi)$. Из (3.2) видно, что функционал $f_{\varphi,\mathbf{t}} \colon M(\psi)^+ \to [0, \infty)$ всегда является субаддитивным и положительно однородным. Отсюда следует, что $f_{\varphi,\mathbf{t}}$ расширяется до симметричного функционала на $M(\psi)$ тогда и только тогда, когда $f_{\varphi,\mathbf{t}}$ является аддитивным на $M(\psi)^+$, или, что эквивалентно, когда $\varphi(a(x, \mathbf{t}) + a(y, \mathbf{t}) - a(x + y, \mathbf{t})) = 0$ для всех $0 \le x, y \in M(\psi)$. В этом случае мы будем говорить, что $f_{\varphi,\mathbf{t}}$ определяет симметричный функционал на $M(\psi)$, и писать $f_{\varphi,\mathbf{t}} \in M(\psi)^*_{\mathrm{sym},\infty}$.

Аддитивность, а значит, и симметричность $f_{\varphi,\mathbf{t}}$ зависит как от свойств функционала $\varphi \in l_\infty^*$, так и от свойств последовательности $\mathbf{t}$. Ниже мы рассмотрим эти свойства отдельно.

Для любой упомянутой выше последовательности $\mathbf{t} = \{t_n\}_{n=1}^\infty$ определим конус $B_\psi^+(\mathbf{t}) = \left\{0 \le \varphi \in l_\infty^* : f_{\varphi,\mathbf{t}} \in M(\psi)^*_{\mathrm{sym}}\right\}$. Используя формулу (3.2), легко доказать, что:

(i) если $\varphi_1,\ \varphi_2 \in B_\psi^+(\mathbf{t})$ и $0 \le \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in B_\psi^+(\mathbf{t})$;

(ii) если φ_1 из $B_\psi^+(\mathbf{t})$ и φ_2 из l_∞^* таковы, что $0 \le \varphi_2 \le \varphi_1$, то $\varphi_2 \in B_\psi^+(\mathbf{t})$;

(iii) если $\varphi_\tau \in B_\psi^+(\mathbf{t})$ и $\varphi_\tau \uparrow \varphi \in l_\infty^*$, то $\varphi \in B_\psi^+(\mathbf{t})$.

Обозначим через $(l_\infty)_n^*$ и $(l_\infty)_s^*$ множество нормальных (порядково непрерывных) и множество сингулярных функционалов из l_∞^*. Таким образом, $l_\infty^* = (l_\infty)_n^* \oplus (l_\infty)_s^*$ и $(l_\infty)_n^* \cong l_1$. Кроме того $c_0^\perp = (l_\infty)_s^*$, а $^\perp (l_\infty)_s^* = c_0$.

Следующая лемма показывает, в частности, что, если формула (3.3) определяет элемент пространства $M(\psi)_{\mathrm{sym}}^*$, то $0 \le \varphi \in (l_\infty)_s^*$.

Лемма 3.1. *Если $\psi \in \Omega_\infty$, то*
(i) $B_\psi^+(\mathbf{t}) \subseteq (l_\infty)_s^*$;
(ii) $f_{\varphi,\mathbf{t}} \in M(\psi)_{\mathrm{sym},\infty}^*$ *для всех* $\varphi \in B_\psi^+(\mathbf{t})$;
(iii) $\|f_{\varphi,\mathbf{t}}\| = \|\varphi\|$ *для всех* $\varphi \in B_\psi^+(\mathbf{t})$.

Доказательство. (i) Возьмем $0 \le \varphi \in B_\psi^+(\mathbf{t})$ и пусть $\varphi = \varphi_n + \varphi_s$ с $0 \le \varphi_n \in (l_\infty)_n^*$ и $0 \le \varphi_s \in (l_\infty)_s^*$. Из $0 \le \varphi_n \le \varphi$ следует, что $\varphi_n \in B_\psi^+(\mathbf{t})$.

Так как $\varphi_n(\xi) = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \xi_k$ для всех $\xi = (\xi_k) \in l_\infty$ и некоторой последовательности $(\alpha_k) \in l_1^+$, то определим $0 \le \varphi_n^k \in l_\infty^*$ равенством $\varphi_n^k(\xi) = \alpha_k \xi_k$. Так как $0 \le \varphi_n^k \le \varphi_n$, то из этого следует, что $\varphi_n^k \in B_\psi^+(\mathbf{t})$ для всех $k \in \mathbb{N}$, и, если $\alpha_k \ne 0$, то это означает, что отображение $x \mapsto \int\limits_0^{t_k} x^*(s)\,ds$ является аддитивным на $M(\psi)^+$. Полагая $x = \chi_{[0,t_k)}$, $y = \chi_{[t_k,2t_k)}$, легко получаем $2\int\limits_0^{t_k}(x+y)^*(s)\,ds = \int\limits_0^{t_k} x^*(s)\,ds + \int\limits_0^{t_k} y^*(s)\,ds$, что приводит к противоречию. Следовательно, $\alpha_k = 0$. Это показывает, что $\varphi_n = 0$ и, значит, $\varphi = \varphi_s \in (l_\infty)_s^*$.

Доказательство утверждений (ii) и (iii) теперь легко следует из (i), предложения 2.1 и равенства $\|f\| = f(\psi')$, доказанного выше. •

Наша ближайшая цель – для данного $0 \le \varphi \in (l_\infty)_s^*$ охарактеризовать такие последовательности $\mathbf{t}$, для которых $\varphi \in B_\psi^+(\mathbf{t})$. В связи с этим нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3.2. *Пусть $\psi \in \Omega_\infty$, пусть $\mathbf{t} = \{t_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность из $(0,\infty)$ такая, что $t_n \nearrow \infty$, и пусть $0 \le \varphi \in l_\infty^*$. Тогда*

(i) *если* $\varphi \in B_{\psi}^{+}(\mathbf{t})$, *то* $\varphi\left(\left\{\dfrac{1}{\psi(t_n)}\displaystyle\int_{\frac{t_n}{\lambda}}^{t_n} x^*(s)\,ds\right\}_{n=1}^{\infty}\right) = 0$

для всех $0 \le x \in M(\psi)$ *и всех* $\lambda > 0$;

(ii) *если* $\varphi \in B_{\psi}^{+}(\mathbf{t})$ *и* $\varphi(\mathbf{1}) = 1$, *то* $\varphi\left(\left\{\dfrac{\psi(t_n)}{\psi(t_{n+1})}\right\}_{n=1}^{\infty}\right) = 1$.

Доказательство. (i) Из (2.1) следует, что $\lambda f_{\varphi,\mathbf{t}}(x) = f_{\varphi,\mathbf{t}}(D_\lambda x)$ при $\lambda > 0$. Это дает равенство

$$\varphi\left(\left\{\frac{1}{\psi(t_n)}\int_0^{t_n} x^*(s)\,ds\right\}_{n=1}^{\infty}\right) = \varphi\left(\left\{\frac{1}{\psi(t_n)}\int_0^{\frac{t_n}{\lambda}} x^*(s)\,ds\right\}_{n=1}^{\infty}\right),$$

откуда следует наше утверждение.

(ii) Положим $z(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(t_{n+1}) - \psi(t_n)}{t_{n+1} - t_n}\chi_{(t_n, t_{n+1}]}(t)$, $t > 0$. Так как z является условным математическим ожиданием функции ψ' относительно σ-алгебры, порожденной разбиением $\{[t_n, t_{n+1}) : n \in \mathbb{N}\}$, то отсюда вытекает, что $z \prec\!\!\prec \psi'$, и, следовательно, $z \in M(\psi)$. При этом справедливо соотношение $\displaystyle\int_{\frac{t_n}{2}}^{t_n} z^*(s)ds > \frac{1}{2}(\psi(t_n) - \psi(t_{n-1}))$, $n \in \mathbb{N}$.

Действительно, если $t_{n-1} > t_n/2$, то $\displaystyle\int_{\frac{t_n}{2}}^{t_n} z^*(s)ds > \int_{t_{n-1}}^{t_n} z^*(s)ds = \psi(t_n) - \psi(t_{n-1})$, а если $t_{n-1} \le \frac{t_n}{2}$, то

$$\int_{\frac{t_n}{2}}^{t_n} z^*(s)ds = \frac{t_n}{2}\frac{\psi(t_n) - \psi(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} > \frac{1}{2}(\psi(t_n) - \psi(t_{n-1})).$$

Следовательно, $\dfrac{1}{\psi(t_n)}\displaystyle\int_{\frac{t_n}{2}}^{t_n} z^*(s)ds > \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\psi(t_{n-1})}{\psi(t_n)}\right) \geqslant 0, \quad n \in \mathbb{N}.$

Сочетание этого неравенства с утверждением (i), доказанным выше, и тем фактом, что φ является положительным сингулярным функционалом, сразу же дает $\varphi\left(\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\psi(t_{n-1})}{\psi(t_n)}\right)\right\}_{n=2}^{\infty}\right)=0$, что равносильно соотношению $\varphi\left(\left\{\frac{\psi(t_n)}{\psi(t_{n+1})}\right\}_{n=1}^{\infty}\right)=1.\bullet$

Предложение 3.3. *Пусть* $\mathbf{t}=\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность из* $(0,\infty)$ *такая, что* $t_n\nearrow\infty$, *и пусть* $0\le\varphi\in l_\infty^*$. *Тогда следующие два утверждения эквивалентны:*
(i) $\varphi\in B_\psi^+(\mathbf{t})$;
(ii) *для всех* $0\le x\in M(\psi)$ *имеем*

$$\varphi\left(\left\{\frac{1}{\psi(t_n)}\int\limits_{t_n}^{2t_n}x^*(s)\,ds\right\}_{n=1}^{\infty}\right)=0. \tag{3.4}$$

Доказательство. Импликация (i)$\Longrightarrow$(ii) непосредственно вытекает из леммы 3.2 при $\lambda=1/2$.

Предположим теперь, что (ii) выполнено, и пусть $0\le x,y\in M(\psi)$. Тогда, в силу [6, гл. II, (2.14)] получаем, что

$$\begin{aligned} a(x,t_n)+a(y,t_n)&\le\frac{1}{\psi(t_n)}\int\limits_0^{2t_n}(x+y)^*\,ds\\ &=a(x+y,t_n)+\frac{1}{\psi(t_n)}\int\limits_{t_n}^{2t_n}(x+y)^*\,ds\end{aligned}$$

для всех $n\in\mathbb{N}$. Таким образом, согласно (ii) мы находим, что

$$\varphi(a(x,\mathbf{t}))+\varphi(a(y,\mathbf{t}))\le\varphi(a(x+y,\mathbf{t})).$$

Это показывает, что $f_{\varphi,\mathbf{t}}(x)+f_{\varphi,\mathbf{t}}(y)\le f_{\varphi,\mathbf{t}}(x+y)$ для всех $0\le x,y\in M(\psi)$, и, так как обратное всегда верно (см. (3.2)), то из этого следует, что $\varphi\in B_\psi^+(\mathbf{t}).\bullet$

Для дальнейшего изложения нам потребуется следующая простая лемма.

Лемма 3.4. *Предположим, что* $0\le\varphi\in l_\infty^*$. *Если* $\eta\in l_\infty$ *и* $A\in\mathbb{R}$ *таковы, что* $\varphi(|\eta-A\mathbf{1}|)=0$ *и* $\varphi(\mathbf{1})=1$, *то* $\varphi(\eta\xi)=\varphi(\eta)\varphi(\xi)$ *для всех* $\xi\in l_\infty$.

Доказательство. Так как $\varphi \geqslant 0$, то отсюда немедленно следует, что $|\varphi((\eta - A\mathbf{1})\xi)| \leq \varphi(\{|\eta - A\mathbf{1}|\})\|\xi\|_\infty = 0, \quad \forall \xi \in l_\infty$, и, в частности, $\varphi(\eta) = A$. Таким образом $\varphi(\eta\xi) = \varphi((\eta - A\mathbf{1})\xi) + A\varphi(\xi) = \varphi(\eta)\varphi(\xi)$.•

Напомним, что положительный линейный функционал $0 \leq \mathcal{L} \in l_\infty^*$ называется банаховым пределом, если $\mathcal{L}$ является инвариантным относительно сдвига, $\mathcal{L}(\mathbf{1}) = 1$ и $\mathcal{L}(\xi) = 0$ для всех $\xi \in c_0$. Отсюда следует, что $\mathcal{L} \in (l_\infty)_s^*$. Обозначим совокупность всех банаховых пределов на l_∞ через $BL(l_\infty)$. Заметим, что $\|\mathcal{L}\| = 1$ для всех $\mathcal{L} \in BL(l_\infty)$.

Одним из основных результатов настоящего параграфа является характеризация всех последовательностей $\mathbf{t}$, обладающих тем свойством, что каждый банахов предел определяет симметричный функционал на $M(\psi)$, сосредоточенный в ∞, то есть, что $BL(l_\infty) \subseteq B_\psi^+(\mathbf{t})$.

Напомним, что последовательность $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l_\infty$ называется *почти сходящейся* к $A \in \mathbb{R}$, что обозначается

$$F\text{-}\lim_{n\to\infty} \xi_n = A, \tag{3.5}$$

тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}(\xi) = A$ для всех $\mathcal{L} \in BL(l_\infty)$. Понятие почти сходящейся последовательности ввел Г.Г. Лоренц [5], который показал, что $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ является почти сходящейся к A тогда и только тогда, когда равенство

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\xi_n + \xi_{n+1} + \cdots + \xi_{n+p-1}}{p} = A \tag{3.6}$$

выполняется равномерно по $n = 1, 2, \ldots$.

Лемма 3.5. *Пусть $\psi \in \Omega_\infty$ и $\mathbf{t} = \{t_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность из $(0,\infty)$ такая, что $t_n \nearrow \infty$. Для любого $\mathcal{L} \in BL(l_\infty)$ следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\mathcal{L}\left(\left\{\frac{\psi(t_n)}{\psi(t_{n+1})}\right\}_{n=1}^\infty\right) = 1$;

(ii) $\mathcal{L}\left(\left\{\frac{\psi(t_n)}{\psi(t_{n+m})}\right\}_{n=1}^\infty\right) = 1$ *для всех* $m = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Очевидно, достаточно показать импликацию (i)⇒(ii). Так как $\dfrac{\psi(t_n)}{\psi(t_{n+m})} = \dfrac{\psi(t_n)}{\psi(t_{n+1})} \cdot \dfrac{\psi(t_{n+1})}{\psi(t_{n+2})} \cdots \dfrac{\psi(t_{n+m-1})}{\psi(t_{n+m})}$ для $m \in \mathbb{N}$, и $\dfrac{\psi(t_k)}{\psi(t_{k+1})} \leq 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то утверждение леммы вытекает из предположения (i), инвариантности функционала $\mathcal{L}$ относительно сдвига и повторного применения леммы 3.4. •

Следующий результат показывает, что утверждение, обратное лемме 3.2 (ii), верно для некоторого специального класса последовательностей $\mathbf{t}$ при дополнительном условии, что φ является банаховым пределом.

Лемма 3.6. *Предположим, что $\psi \in \Omega_\infty$ и что $\mathbf{t} = \{t_n\}_{n=1}^\infty$ является возрастающей последовательностью из $(0, \infty)$, для которой существует число $m \in \mathbb{N}$ такое, что $t_{n+m} \geq 2t_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Если $\mathcal{L} \in BL(l_\infty)$, то следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\mathcal{L} \in B_\psi^+(\mathbf{t})$; (ii) $\mathcal{L}\left(\left\{\frac{\psi(t_n)}{\psi(t_{n+1})}\right\}_{n=1}^\infty\right) = 1$.

Доказательство. Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) следует из леммы 3.2 (ii). Для доказательства импликации (ii)$\Longrightarrow$(i) предположим, что $t_{n+m} \geqslant 2t_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и некоторого $m \in \mathbb{N}$. Ввиду замечаний, следующих за определением (3.3), достаточно показать, что функционал $f_{\mathcal{L},\mathbf{t}}$ является аддитивным на положительном конусе $M(\psi)^+$. Для $0 \leq x, y \in M(\psi)$, согласно [6, гл. II, 2.14], находим:

$$\int_0^{t_n} (x+y)^* ds \leqslant \int_0^{t_n} x^* ds + \int_0^{t_n} y^* ds \leqslant \int_0^{2t_n} (x+y)^* ds \leqslant \int_0^{t_{n+m}} (x+y)^* ds.$$

Замечая, что $\dfrac{\psi(t_n)}{\psi(t_{n+m})} \leqslant 1$, $n, m \in \mathbb{N}$, и используя лемму 3.4, инвариантность относительно сдвига банахова предела $\mathcal{L}$ и приведенные выше неравенства, получаем, что

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{L},\mathbf{t}}(x+y) &= \mathcal{L}\left(\{a(x+y,t_n)\}_{n=1}^\infty\right) = \mathcal{L}\left(\{a(x+y,t_{n+m})\}_{n=1}^\infty\right) \\ &\geqslant \mathcal{L}\left(\left\{\frac{\psi(t_n)}{\psi(t_{n+m})}\right\}_{n=1}^\infty\right) \mathcal{L}\left(\{a(x,t_n)\}_{n=1}^\infty + \{a(y,t_n)\}_{n=1}^\infty\right) \\ &= \mathcal{L}\left(\{a(x,t_n)\}_{n=1}^\infty\right) + \mathcal{L}\left(\{a(y,t_n)\}_{n=1}^\infty\right) = f_{\mathcal{L},\mathbf{t}}(x) + f_{\mathcal{L},\mathbf{t}}(y) \end{aligned}$$

для всех $0 \leq x, y \in M(\psi)$. Следовательно, так как функционал $f_{\mathcal{L},\mathbf{t}}$ всегда является субаддитивным на $M(\psi)^+$ (см. (3.2)), то отсюда следует аддитивность функционала $f_{\mathcal{L},\mathbf{t}}$ на $M(\psi)^+$, что завершает доказательство импликации. •

Лемма 3.7. *Предположим, что* $\psi \in \Omega_\infty$ *и что* $\mathbf{t} = \{t_n\}_{n=1}^\infty$ *– последовательность из* $(0,\infty)$ *такая, что* $t_n \nearrow \infty$. *Если* $BL(l_\infty) \subseteq B_\psi^+(\mathbf{t})$, *то существует* $m \in \mathbb{N}$ *такое, что* $t_{n+m} \geq 2t_n$ *для всех* n.

Доказательство. Если утверждение леммы неверно, то для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует $N = N(k) \in \mathbb{N}$ такое, что $t_N \leq t_{N+k} \leq \cdots \leq t_{N+k^2-k} \leq t_{N+k^2} \leq 2t_N$. Отсюда следует, что

$$\prod_{j=0}^{k-1} \frac{t_{N+(j+1)k}}{t_{N+jk}} \leq 2, \quad k \in \mathbb{N},$$

и, значит, существует подпоследовательность $t_{n(k)}$ такая, что

$$1 \leq \frac{t_{n(k)}}{t_{n(k)-k}} \leq 2^{\frac{1}{k}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

При этом, если $\{k(j)\}$ – некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел, то из (3.7) также вытекает, что $1 \leq \frac{t_{n(k(j))}}{t_{n(k(j))-j}} \leq \frac{t_{n(k(j))}}{t_{n(k(j))-k(j)}} \leq 2^{\frac{1}{k(j)}}, \quad j \in \mathbb{N}$. Следовательно, переходя к новой подпоследовательности и перенумеровывая, если необходимо, мы можем дополнительно к (3.7) предположить, что $2t_{n(k-1)} < t_{n(k)-k}, \quad k \in \mathbb{N}$, и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{t_{n(k-1)}}{t_{n(k)}} = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\psi(t_{n(k-1)})}{\psi(t_{n(k)})} = 0. \tag{3.8}$$

Здесь мы используем равенство $\psi(\infty) = \infty$. Наконец отметим, что, как следует из (3.7), $\psi(t_{n(k)-k}) \leq \psi(t_{n(k)}) \leq \psi(2^{\frac{1}{k}} t_{n(k)-k}) \leq 2^{\frac{1}{k}} \psi(t_{n(k)-k})$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(t_{n(k)})}{\psi(t_{n(k)-k})} = 1. \tag{3.9}$$

Полагая для $t > 0$

$$y(t) := \sum_k \frac{\psi(t_{n(k)}) - \psi(t_{n(k-1)})}{t_{n(k)} - t_{n(k-1)}} \chi_{(t_{n(k-1)}, t_{n(k)}]}(t),$$

мы видим, что $y = y^* \in M(\psi)$. Применяя (3.7)–(3.9), мы получаем, что

$$\int_{\frac{t_{n(k)-j}}{2}}^{t_{n(k)-j}} y^*(s)ds = \frac{t_{n(k)-j}}{2} \frac{\psi(t_{n(k)}) - \psi(t_{n(k-1)})}{t_{n(k)} - t_{n(k-1)}} = \frac{\psi(t_{n(k)})}{2}(1 + o(1))$$

для $j = 0, 1, 2, \ldots, k$. Повторно применяя (3.9), находим, что

$$\frac{1}{\psi(t_{n(k)-j})} \int\limits_{\frac{t_{n(k)-j}}{2}}^{t_{n(k)-j}} y^*(s)ds = \frac{1}{2} + o(1) > \frac{1}{3}$$

для всех достаточно больших k и всех $j = 0, 1, 2, \ldots, k$. Следовательно, если

$$s = \frac{1}{\psi(t_n)} \int\limits_{\frac{t_n}{2}}^{t_n} y^*(s)ds, \quad \text{то} \quad \frac{s_{n(k)-k} + s_{n(k)-k+1} + \cdots + s_{n(k)}}{k} > \frac{1}{3}$$

для всех достаточно больших k. Согласно (3.9) это противоречит лемме 3.2 при $x = y$ и $\lambda = 2$. •

Теперь мы можем сформулировать основной результат параграфа.

Теорема 3.8. *Пусть $\psi \in \Omega_\infty$ и $\mathbf{t} = \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность из $(0, \infty)$ такая, что $t_n \nearrow \infty$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *$f_{\mathcal{L},\mathbf{t}}$ определяет симметричный функционал (который является ненулевым и сосредоточенным в ∞) на $M(\psi)$ для каждого банахового предела $\mathcal{L} \in BL(l_\infty)$;*

(ii) *существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $t_{n+m} \geq 2t_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и*

$$F\text{-}\lim_{n\to\infty} \frac{\psi(t_n)}{\psi(t_{n+1})} = 1. \tag{3.10}$$

Доказательство теоремы сразу следует из комбинации лемм 3.5, 3.6 и 3.7.

Заметим, что теорема 3.4 из [3] (см. теорему 2.2 (i) выше) является прямым следствием предыдущей теоремы 3.8 и следующей леммы.

Лемма 3.9. *Если $\psi \in \Omega_\infty$ и $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$, то существует последовательность $\mathbf{t} = \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая удовлетворяет условию теоремы 3.8 (ii).*

Доказательство. Из предположения теоремы следует, что существует последовательность $0 < s_0 < s_1 < \cdots \nearrow \infty$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi\left(2^{2^k} s_k\right)}{\psi\left(s_k\right)} = 1 \tag{3.11}$$

(см. [6, гл. II, лемма 1.3], или [3, стр. 61–62]). Так как (3.11) сохраняется при переходе к подпоследовательности, мы можем предположить, что $s_{k+1} > 2^{2^k} s_k$ при всех $k = 0, 1, \ldots$. Для $n = 2^k + j$ $(k = 0, 1, \ldots;\ j = 0, \ldots, 2^k - 1)$ определим $t_n = 2^j s_k$. Легко увидеть, что $2t_n \le t_{n+1}$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Тогда, если $n = 2^k + j$, а $0 \le j < 2^k - 1$, то

$$1 \ge \frac{\psi\left(t_n\right)}{\psi\left(t_{n+1}\right)} = \frac{\psi\left(2^j s_k\right)}{\psi\left(2^{j+1} s_k\right)} \ge \frac{\psi\left(s_k\right)}{\psi\left(2^{2^k} s_k\right)}.$$

Отсюда и из (3.11) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty,\ n\ne 2^{k+1}-1} \dfrac{\psi\left(t_n\right)}{\psi\left(t_{n+1}\right)} = 1$. Так как последовательность $\left\{\psi\left(t_n\right)/\psi\left(t_{n+1}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то, применяя критерий Лоренца (3.6), получаем $F\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\psi\left(t_n\right)}{\psi\left(t_{n+1}\right)} = 1$. Следовательно, последовательность $\mathbf{t} = \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию теоремы 3.8 (ii). •

Замечание 3.10. Переходя к подпоследовательности и перенумеровывая, если необходимо, отметим, что последовательность $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$, построенная выше в доказательстве леммы 3.9, может быть выбрана удовлетворяющей условию $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\psi\left(2^{2^k} s_k\right)}{\psi\left(s_{k+1}\right)} = 0$. Отсюда следует, что импликация (i)$\Longrightarrow$(ii) в теореме 3.8 не выполняется, если в (3.10) утверждение о почти сходимости заменить утверждением об обычной сходимости.

Пример 3.11. Пусть функция $\psi(\cdot)$ из Ω_∞ задана формулой

$$\psi(t) := \begin{cases} t/2, & 0 \le t \le 4, \\ \log_2(t), & t \geqslant 4. \end{cases}$$

Покажем, что существуют последовательности $\mathbf{t} = \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathbf{s} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ и банахов предел $\mathcal{L}'$ такие, что $f_{\mathcal{L}',\mathbf{t}}$ и $f_{\mathcal{L}',\mathbf{s}}$ определяют симметричные линейные функционалы на пространстве Марцинкевича $M(\psi)$, для которых $f_{\mathcal{L}',\mathbf{t}} \neq f_{\mathcal{L}',\mathbf{s}}$.

Определим функцию ϕ_0, полагая

$$\phi_0(t) := \begin{cases} t/2, & 0 \le t \le 4, \\ 2^n + \dfrac{2^n}{2^{2^{n+1}} - 2^{2^n}}(t - 2^{2^n}), & 2^{2^n} \le t \le 2^{2^{n+1}}, \quad n \geqslant 1, \end{cases}$$

и пусть $x_0(t) := \phi_0'(t)$, $t \geqslant 0$. Заметим, что функция ϕ_0 является кусочно-линейной и совпадает с функцией ψ в каждой из точек 2^{2^n}, $n \geqslant 1$. Это прямо указывает на то, что $x_0 \in M(\psi)$. Положим $\mathbf{s} := \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ и заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\psi(s_n)}{\psi(s_{n+1})} = 1$. Из теоремы 3.8 следует, что $f_{\mathcal{L},\mathbf{s}}$ определяет ненулевой симметричный функционал на $M(\psi)$ для каждого банахова предела $\mathcal{L} \in BL(l_\infty)$.

Далее заметим, что существует банахов предел $\mathcal{L}'$ такой, что

$$f_{\mathcal{L}',\mathbf{s}}(x_0) = \mathcal{L}'\left(\{a(x_0, s_n)\}_{n=1}^{\infty}\right) < 1.$$

Действительно, если это не так, то ввиду того, что $a(x_0, s_n) \le 1$ для всех $n \geqslant 1$, получаем, что $F\text{-}\lim_{n\to\infty} a(x_0, s_n) = 1$. С другой стороны, для каждого $n \geqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned}\max_{2^{2^{n+1}-n} \le m \le 2^{2^{n+1}-1}} a(x_0, s_m) &= \max_{1\le k\le n} \frac{\phi_0(2^{2^{n+1}-k})}{\psi(2^{2^{n+1}-k})} \\ &= \max_{1\le k\le n} \frac{2^n + \frac{2^n(2^{2^{n+1}-k} - 2^{2^n})}{2^{2^{n+1}} - 2^{2^n}}}{2^{n+1} - k} \le \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что соотношение

$$\lim_{p\to\infty} \frac{a(x_0, s_n) + a(x_0, s_{n+1}) + \cdots + a(x_0, s_{n+p})}{p} = 1$$

не выполняется равномерно по n, что противоречит предположению $F\text{-}\lim_{n\to\infty} a(x_0, s_n) = 1$.

Определим последовательность $\mathbf{t} = \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, полагая $t_n := 2^{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$, где

$$k_{n+1} := \begin{cases} 2, & n = 0, \\ k_n + 1, & n \neq 2^m, \quad m \in \mathbb{N}, \\ 2^{2^m}, & n = 2^m, \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Очевидно, что $t_{n+1} \geqslant 2t_n$, $\quad \dfrac{\psi(t_n)}{\psi(t_{n+1})} = \dfrac{k_n}{k_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}$.

Далее положим

$$l_n := \begin{cases} 1, & n \neq 2^m, \quad m \in \mathbb{N}, \\ 0, & n = 2^m, \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

С помощью прямой проверки по критерию Лоренца (3.6) получаем, что $F\text{-}\lim_{n\to\infty} l_n = 1$. Так как $\lim_{n\to\infty}(\frac{k_n}{k_{n+1}} - l_n) = 0$, мы заключаем, что $F\text{-}\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{k_{n+1}} = 1$, и, значит, $F\text{-}\lim_{n\to\infty} \frac{\psi(t_n)}{\psi(t_{n+1})} = 1$. Следовательно, по теореме 3.8 $f_{\mathcal{L},\mathbf{t}}$ определяет ненулевой симметричный функционал на $M(\psi)$ для каждого банахова предела $\mathcal{L} \in BL(l_\infty)$.

Покажем, что $f_{\mathcal{L}',\mathbf{t}}(x_0) = \mathcal{L}'(\{a(x_0,t_n)\}_{n=1}^\infty) = 1$. Для этого достаточно проверить, что

$$\lim_{n\to\infty} a(x_0,t_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi_0(t_n)}{\psi(t_n)} = 1. \tag{3.12}$$

Зададим $m \in \mathbb{N}$ и пусть $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию

$$2^m \leq n < 2^{m+1}. \tag{3.13}$$

В силу определения k_n и t_n удовлетворяют неравенствам

$$2^{2^m} \leq k_n < 2^{2^m} + 2^m, \quad 2^{2^{2^m}} \leq t_n < 2^{2^{2^m}+2^m}.$$

Тогда, если $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет (3.13), то

$$1 \geqslant a(x_0,t_n) = \frac{\phi_0(t_n)}{\psi(t_n)} \geqslant \frac{\phi_0(2^{2^{2^m}})}{\psi(2^{2^{2^m}+2^m})} = \frac{\psi(2^{2^{2^m}})}{\psi(2^{2^{2^m}+2^m})} = \frac{2^{2^m}}{2^{2^m}+2^m}.$$

Устремляя m к ∞, мы приходим к (3.12). Из (3.12) сразу следует, что $f_{\mathcal{L},\mathbf{t}}(x_0) = \mathcal{L}(\{a(x_0,t_n)\}_{n=1}^\infty) = 1$ для каждого банахова предела $0 \leq \mathcal{L} \in l_\infty^*$. В частности, мы получаем, что $f_{\mathcal{L}',\mathbf{s}}(x_0) < 1 = f_{\mathcal{L}',\mathbf{t}}(x_0)$ и, следовательно, $f_{\mathcal{L}',\mathbf{t}} \neq f_{\mathcal{L}',\mathbf{s}}$.

Как было отмечено ранее, основные результаты данного параграфа, касающиеся симметричных функционалов, сосредоточенных в ∞, сохраняется также (с необходимыми поправками в формулировках) и для симметричных функционалов, сосредоточенных в 0.

§4. Полунормы, определяемые сингулярными симметричными функционалами

В этом параграфе мы опишем те $\psi \in \Omega$, для которых полунормы ρ_1, ρ_∞ из предложения 2.1 определяются, соответственно, множествами $M(\psi)^*_{\mathrm{sym},\infty}$, $M(\psi)^*_{\mathrm{sym},0}$. Положим

$$F_\infty(x) = \sup\left\{f(|x|) : f \in M(\psi)^*_{\mathrm{sym},\infty}, \|f\| = 1\right\} \quad \text{для} \quad x \in M(\psi).$$

Ясно, что функция F_∞ есть полунорма на $M(\psi)$, которая симметрична в следующем смысле: из соотношений $x, y \in M(\psi)$, $x \lll y$ вытекает, что $F_\infty(x) \leq F_\infty(y)$. Более того, ясно, что $F_\infty(x) = 0$ для всех $x \in M_1(\psi)$. Это означает, что F_∞ индуцирует полунорму на факторпространстве $M(\psi)/M_1(\psi)$.

Теорема 4.1. *Для $\psi \in \Omega_\infty$ следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\rho_1(x) = F_\infty(x)$, $x \in M(\psi)$;

(ii) $\lim_{t\to\infty} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$; $\qquad (4.1)$

(iii) $\rho_1(x) = \sup\{f_{\mathcal{L},\mathbf{p}}(|x|) : \mathcal{L} \in BL(l_\infty)\}$ *для x из $M(\psi)$ и* $\mathbf{p} = \{2^n\}_{n=1}^\infty$.

Доказательство. (i)$\Longrightarrow$(ii) Из (2.1) и утверждения (i) следует, что

$$\rho_1(D_\lambda x) = \lambda \rho_1(x)$$

для всех $0 \leq x \in M(\psi)$ и всех $0 < \lambda \in \mathbb{R}$. Следовательно, предложение 2.1 влечет

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t x^*\left(\frac{s}{\lambda}\right) ds = \lambda \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t x^*(s)\, ds$$

для всех $0 \leq x \in M(\psi)$ и всех $0 < \lambda \in \mathbb{R}$. Замена переменных в левой части приводит к эквивалентному равенству

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\psi(\lambda t)} \int_0^t x^*(s)\, ds = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t x^*(s)\, ds.$$

Полагая $\lambda = \frac{1}{2}$, $x = \psi'$ и используя то, что $\psi(\infty) = \infty$, мы находим, что $\limsup_{t\to\infty} \dfrac{\psi(t) - \psi(0+)}{\psi\left(\frac{t}{2}\right)} = \limsup_{t\to\infty} \dfrac{\psi(t) - \psi(0+)}{\psi(t)} = 1$. Следовательно, утверждение (ii) доказано.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Предположим, что ψ удовлетворяет условию (ii). Ясно, что последовательность $\mathbf{p} = \{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию теоремы 3.8 (ii). Отсюда $f_{\mathcal{L},\mathbf{p}}$ определяет симметричный функционал, сосредоточенный в ∞, и $\|f_{\mathcal{L},\mathbf{p}}\| = 1$ для всех $\mathcal{L} \in BL\,(l_\infty)$. Поэтому, если мы положим $q(x) := \sup\{f_{\mathcal{L},\mathbf{p}}\,(|x|) : \mathcal{L} \in BL\,(l_\infty)\}$, $\quad x \in M\,(\psi)$, то $q(x) \leq \rho_1(x)$ для всех $x \in M\,(\psi)$. Для доказательства противоположного неравенства возьмем $0 \leq x \in M\,(\psi)$ с $\rho_1\,(x) = 1$ и $0 < \varepsilon < 1$. Для $n = 1, 2, \ldots$ определим $a_n = \dfrac{1}{\psi\,(2^n)} \displaystyle\int_0^{2^n} x^*\,(s)\,ds$. Из предложения 2.1 следует, что $\displaystyle\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\psi\,(t)} \int_0^t x^*\,(s)\,ds = \rho_1\,(x) = 1$, поэтому существует такая последовательность $1 \leq t_1 < t_2 < \cdots \nearrow \infty$, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\psi\,(t_k)} \int_0^{t_k} x^*\,(s)\,ds > 1 - \frac{\varepsilon}{3}$$

при всех k. Для каждого k определим $n_k \in \mathbb{N}$ так, чтобы $2^{n_k - 1} \leq t_k \leq 2^{n_k}$. Тогда

$$\frac{1}{\psi\,(t_k)} \int_0^{t_k} x^*\,(s)\,ds \leq \frac{1}{\psi\,(2^{n_k-1})} \int_0^{2^{n_k}} x^*\,(s)\,ds = a_{n_k} \frac{\psi\,(2^{n_k})}{\psi\,(2^{n_k-1})}.$$

Так как $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то из предположения (ii) следует, что $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{\psi\,(2^{n_k})}{\psi\,(2^{n_k-1})} = 1$, откуда $a_{n_k} > 1 - \dfrac{\varepsilon}{3}$ для достаточно больших k (без ограничения общности можно предполагать, что это неравенство справедливо для всех $k \geq 1$). Более того, так как (ii) влечет равенство $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\psi\,(2^k t)}{\psi\,(t)} = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то, переходя к подпоследовательности $\{n_k\}$, мы можем далее предполагать, что $\dfrac{\psi\,(2^{n_k+k})}{\psi\,(2^{n_k})} < 1 + \dfrac{\varepsilon}{3}$ для всех $k \geq 1$. Тогда

$$a_{n_k+i} \geq \frac{\psi\,(2^{n_k})}{\psi\,(2^{n_k+k})} \frac{1}{\psi\,(2^{n_k})} \int_0^{2^{n_k}} x^*\,(s)\,ds > \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{3}} a_{n_k} > \frac{1-\frac{\varepsilon}{3}}{1+\frac{\varepsilon}{3}} \geq 1 - \varepsilon$$

для всех $i = 1, \ldots, k$ и всех $k \geq 1$. Отсюда $\dfrac{a_{n_k+1} + \cdots + a_{n_k+k}}{k} > 1 - \varepsilon$, что влечет $\sup\limits_{j \geq 1} \dfrac{a_j + \cdots + a_{j+k-1}}{k} > 1 - \varepsilon$ для всех $k \geq 1$. В силу теоремы Л. Сачестона [8],

$$\sup \left\{ \mathcal{L} \left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \right) : \mathcal{L} \in BL \left(l_\infty \right) \right\} = \lim_{k \to \infty} \sup_{j \geq 1} \frac{a_j + \cdots + a_{j+k-1}}{k}.$$

Следовательно, существует $\mathcal{L} \in BL\left(l_\infty\right)$ такой, что $\mathcal{L}\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \geqslant 1 - \varepsilon$. Отсюда вытекает, что $q\left(x\right) \geqslant 1 - \varepsilon$. Так как это справедливо при всех $0 < \varepsilon < 1$, мы заключаем, что $q\left(x\right) \geq 1$, а, значит, $q\left(x\right) = 1$. Следовательно, (iii) доказано.

Так как (iii) очевидно влечет (i), то доказательство теоремы завершено. •

Теорема 4.1 характеризует те $\psi \in \Omega_\infty$, для которых полунорма F_∞ на $M\left(\psi\right)/M_1\left(\psi\right)$ совпадает с фактор-нормой. Теперь мы охарактеризуем те $\psi \in \Omega_\infty$, для которых полунорма F_∞ эквивалентна фактор-норме на $M\left(\psi\right)/M_1\left(\psi\right)$. Для этой цели нам понадобится характеризация тех функций $\varphi \in \Omega_\infty$, которые эквивалентны функции $\psi \in \Omega_\infty$, удовлетворяющей (4.1).

Лемма 4.2. *Для $\varphi \in \Omega_\infty$ следующие утверждения эквивалентны:*
(i) *существует функция $\widetilde{\psi} \in \Omega_\infty$, которая эквивалентна φ и удовлетворяет условию* (4.1);
(ii) $$\lim_{\lambda \to \infty} \limsup_{t \to \infty} \frac{\varphi\left(\lambda t\right)}{\varphi\left(t\right)} < \infty. \tag{4.2}$$

Доказательство. Легко видеть, что (i) влечет (ii). Предположим теперь, что φ удовлетворяет (4.2) и возьмем $C \geq 2$ так, чтобы $\limsup\limits_{t \to \infty} \dfrac{\varphi\left(\lambda t\right)}{\varphi\left(t\right)} < C$ для всех $\lambda > 0$. Выберем такую последовательность $\{T_n\}_{n=2}^{\infty}$, что $0 < T_2 < T_3 < \cdots \nearrow \infty$ и $\dfrac{\varphi\left(nt\right)}{\varphi\left(t\right)} < C$ для $t \geq T_n$. Для каждого $n \geq 2$ возьмем $k_n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $n^{k_n} T_n \geq T_{n+1}$, и пусть $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяет неравенству $m > C$. Определим последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$t_1 = mT_m,\ t_2 = m^2 T_m,\ \ldots,\ t_{k_m} = m^{k_m} T_m,$$
$$t_{k_m+1} = \left(m+1\right) t_{k_m},\ \ldots,\ t_{k_m+k_{m+1}} = \left(m+1\right)^{k_{m+1}} t_{k_m},$$
$$t_{k_m+k_{m+1}+1} = \left(m+2\right) t_{k_m+k_{m+1}}, \ldots .$$

Ясно, что

$$C \leq \frac{t_{n+1}}{t_n} \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{и} \quad \frac{\varphi(t_{n+1})}{\varphi(t_n)} < C \quad \text{для} \quad n \geq 1. \tag{4.3}$$

Определим функцию $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ равенством

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если} \quad 0 \leq t \leq t_1, \\ b_n t^{\nu_n}, & \text{если} \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \end{cases} \tag{4.4}$$

где b_n, $\nu_n \in \mathbb{R}$ определяются уравнениями

$$\begin{cases} \varphi(t_n) = b_n t_n^{\nu_n} \\ \varphi(t_{n+1}) = b_n t_{n+1}^{\nu_n}. \end{cases}$$

Отсюда $\nu_n = \dfrac{\log\left(\frac{\varphi(t_{n+1})}{\varphi(t_n)}\right)}{\log\left(\frac{t_{n+1}}{t_n}\right)}$.

Таким образом из (4.3) следует, что $0 < \nu_n \leq 1$ для всех $n \geq 1$ и $\lim_{n\to\infty} \nu_n = 0$. Убедимся, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1. \tag{4.5}$$

Действительно, если $t > 0$ таково, что $t_n \leq t < 2t \leq t_{n+1}$ для некоторого $n \geq 1$, то из (4.4) следует

$$\frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = \frac{b_n (2t)^{\nu_n}}{b_n (t)^{\nu_n}} = 2^{\nu_n}. \tag{4.6}$$

Теперь предположим, что $t > 0$ таково, что $t < t_n < 2t$ для некоторого $n \geq 2$. Тогда $t_{n-1} \leq \frac{t_n}{2} < t$, откуда следует, что

$$1 \leq \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} \leq \frac{\psi(2t_n)}{\psi\left(\frac{t_n}{2}\right)} = \frac{\psi(2t_n)}{\psi(t_n)} \frac{\psi(t_n)}{\psi\left(\frac{t_n}{2}\right)} = 2^{\nu_n} 2^{\nu_{n-1}}. \tag{4.7}$$

Так как $\nu_n \to 0$ при $n \to \infty$, то отсюда ясно, что (4.6) и (4.7) влекут утверждение (4.5). Далее заметим, что функция ψ эквивалентна функции φ, ибо из (4.3) следует, что для $t \in [t_n, t_{n+1}]$ мы имеем

$$C^{-1} \leq \frac{\varphi(t_n)}{\varphi(t_{n+1})} = \frac{\psi(t_n)}{\varphi(t_{n+1})} \leq \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} \leq \frac{\psi(t_{n+1})}{\varphi(t_n)} = \frac{\varphi(t_{n+1})}{\varphi(t_n)} \leq C.$$

Так как ψ возрастающая, а $t \longmapsto \frac{\psi(t)}{t}$ убывающая функции, то ψ есть квазивогнутая, но, вообще говоря, не вогнутая функция. Обозначим через $\widetilde{\psi}$ ее наименьшую вогнутую мажоранту. Тогда $\widetilde{\psi}$ и ψ эквивалентны (см. например, [6, II.1.1]), а значит, $\widetilde{\psi}$ эквивалентна φ. Остается показать, что $\widetilde{\psi}$ удовлетворяет (4.1). Так как $Q = \left\{t \in (0,\infty) : \psi(t) = \widetilde{\psi}(t)\right\}$ является замкнутым подмножеством полуоси $(0,\infty)$, то открытое множество $(0,\infty)\setminus Q$ может быть записано как объединение дизъюнктивных интервалов: $(0,\infty)\setminus Q = \bigcup\limits_i (\alpha_i, \beta_i)$. При этом $\alpha_i, \beta_i \in Q$ для всех i. Если $t > 0$ таково, что $2t \in Q$, то $\widetilde{\psi}(2t) = \psi(2t)$ и $\widetilde{\psi}(t) \geq \psi(t)$. Поэтому $1 \leq \dfrac{\widetilde{\psi}(2t)}{\widetilde{\psi}(t)} \leq \dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)}$. Из (4.5) следует, что

$$\lim_{t\to\infty,\ 2t\in Q} \frac{\widetilde{\psi}(2t)}{\widetilde{\psi}(t)} = 1. \tag{4.8}$$

Теперь предположим, что $2t \in (\alpha_i, \beta_i)$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Пусть L – линейная функция, удовлетворяющая условиям $L\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) = \widetilde{\psi}\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)$ и $L\left(\frac{\beta_i}{2}\right) = \widetilde{\psi}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)$. Ясно, что

$$\frac{\widetilde{\psi}(2t)}{\widetilde{\psi}(t)} \leq \max_{\frac{\alpha_i}{2} \leq s \leq \frac{\beta_i}{2}} \left\{\frac{\widetilde{\psi}(2s)}{\widetilde{\psi}(s)}\right\} \leq \max_{\frac{\alpha_i}{2} \leq s \leq \frac{\beta_i}{2}} \frac{\widetilde{\psi}(2s)}{L(s)}. \tag{4.9}$$

Так как $\psi(s) < \widetilde{\psi}(s)$ для всех $s \in (\alpha_i, \beta_i)$, то простые рассуждения показывают, что $\widetilde{\psi}$ есть линейная функция на этом интервале. Отсюда функция $s \longmapsto \widetilde{\psi}(2s)$ линейна на $\left(\frac{\alpha_i}{2}, \frac{\beta_i}{2}\right)$ и, следовательно, максимум в правой части (4.9) достигается в концевых точках этого интервала. Отсюда

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\psi}(2t)}{\widetilde{\psi}(t)} &\leq \max\left\{\frac{\widetilde{\psi}(\alpha_i)}{L\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)}, \frac{\widetilde{\psi}(\beta_i)}{L\left(\frac{\beta_i}{2}\right)}\right\} = \max\left\{\frac{\psi(\alpha_i)}{\widetilde{\psi}\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)}, \frac{\psi(\beta_i)}{\widetilde{\psi}\left(\frac{\beta_i}{2}\right)}\right\} \\ &\leq \max\left\{\frac{\psi(\alpha_i)}{\psi\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)}, \frac{\psi(\beta_i)}{\psi\left(\frac{\beta_i}{2}\right)}\right\}.\end{aligned}$$

Так как $\alpha_i, \beta_i \in Q$ для всех i, то, согласно (4.8), справедливо равенство (4.1), что завершает доказательство леммы. •

Теперь мы готовы охарактеризовать те функции $\psi \in \Omega_\infty$, для которых две полунормы F_∞ и ρ_1 эквивалентны на пространстве $M(\psi)$.

Теорема 4.3. *Для $\psi \in \Omega_\infty$ следующие утверждения равносильны:*
(i) *полунормы F_∞ и ρ_1 эквивалентны на $M(\psi)$, то есть существует константа $c > 0$ такая, что $c\rho_1(x) \leq F_\infty(x) \leq \rho_1(x)$ для всех $x \in M(\psi)$;*
(ii) *для функции ψ выполнено условие $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{\psi(\lambda t)}{\psi(t)} < \infty$.*

Доказательство. (ii)$\Longrightarrow$(i) Если ψ удовлетворяет условию (ii), то из предыдущей леммы вытекает существование функции $\widetilde{\psi} \in \Omega_\infty$, которая эквивалентна функции ψ и удовлетворяет условию (4.1). Так как нормы пространств $M(\psi)$ и $M\left(\widetilde{\psi}\right)$ эквивалентны, то отсюда и из теоремы 4.1 следует, что утверждение (i) справедливо.
(i)$\Longrightarrow$(ii) Предположим теперь, что $c\rho_1(x) \leq F_\infty(x)$ для всех $x \in M(\psi)$ и некоторой константы $c > 0$. Тогда

$$c\rho_1\left(D_{\frac{1}{\lambda}}x\right) \leq F_\infty\left(D_{\frac{1}{\lambda}}x\right) = \frac{1}{\lambda}F_\infty(x) \leq \frac{1}{\lambda}\rho_1(x)$$

для всех $x \in M(\psi)$ и всех $0 < \lambda \in \mathbb{R}$. Из предложения 2.1 вытекает, что

$$c \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\psi(t)} \int\limits_0^t x^*(\lambda s)\,ds \leq \frac{1}{\lambda} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\psi(t)} \int\limits_0^t x^*(s)\,ds$$

или что

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\psi(t)} \int\limits_0^{\lambda t} x^*(s)\,ds \leq \frac{1}{c} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\psi(t)} \int\limits_0^t x^*(s)\,ds$$

для всех $x \in M(\psi)$ и всех $0 < \lambda \in \mathbb{R}$. Полагая $x = \psi'$, получаем, что

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\psi(\lambda t) - \psi(0+)}{\psi(t)} \leq \frac{1}{c}$$

для всех $\lambda > 0$. Так как $\psi(\infty) = \infty$, то это означает, что (ii) выполнено. •

Лемма 4.4. *Пусть функция $\psi \in \Omega_\infty$ удовлетворяет условию*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 2, \tag{4.10}$$

функция ψ_1 определена формулой $\psi_1(t) = t\psi\left(\frac{1}{t}\right)$, $t > 0$, $\psi_1(0) = 0$, а ψ_2 есть наименьшая вогнутая мажоранта для ψ_1. Тогда

$$\liminf_{t\downarrow 0} \frac{\psi_2(2t)}{\psi_2(t)} = 1.$$

Доказательство. Так как функция $s \mapsto \dfrac{\psi(s)}{s}$ убывающая, то функция $t \mapsto \dfrac{\psi_1(t)}{t}$ убывающая, а функция ψ_1 возрастающая на $(0,\infty)$. Следовательно, функция ψ_1 квазивогнута. Так как $1 \le \dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)} \le 2$ для всех $t > 0$, то равенство (4.10) эквивалентно равенству $\sup\limits_{t\ge T} \dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 2$ для всех $T > 0$. Тогда рассуждения, аналогичные доказательству леммы 1.3 из [6, гл. II], показывают, что $\limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{\psi(\lambda t)}{\psi(t)} = \lambda$ для всех $\lambda \ge 1$. Так как

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to\infty} \frac{\psi(\lambda t)}{\psi(t)} &= \lambda \limsup_{t\to\infty} \frac{\psi_1\left(\frac{1}{\lambda t}\right)}{\psi_1\left(\frac{1}{t}\right)} \\ &= \lambda \limsup_{t\downarrow 0} \frac{\psi_1\left(\lambda^{-1} t\right)}{\psi_1(t)} = \lambda \limsup_{t\downarrow 0} \frac{\psi_1(t)}{\psi_1(\lambda t)},\end{aligned}$$

то мы находим, что $\limsup\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{\psi_1(t)}{\psi_1(\lambda t)} = 1$ и, значит,

$$\liminf_{t\downarrow 0} \frac{\psi_1(\lambda t)}{\psi_1(t)} = 1 \tag{4.11}$$

для всех $\lambda \ge 1$. Как известно (см., например, [6, гл. II, 1.1]), наименьшая вогнутая мажоранта ψ_2 функции ψ_1 удовлетворяет условию $\psi_1(t) \le \psi_2(t) \le 2\psi_1(t)$ для всех $t \ge 0$. Вместе с (4.11) это влечет неравенство

$$\liminf_{t\downarrow 0} \frac{\psi_2(\lambda t)}{\psi_2(t)} \le 2 \tag{4.12}$$

для всех $\lambda \geq 1$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Из (4.12) при $\lambda = 2^n$ следует, что существует последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ из $(0, \infty)$ такая, что $t_k \downarrow 0$ и $\frac{\psi_2(2^n t_k)}{\psi_2(t_k)} \leq 3$ для всех $k \geq 1$. Так как

$$\frac{\psi_2(2^n t_k)}{\psi_2(t_k)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\psi_2\left(2^i t_k\right)}{\psi_2\left(2^{i-1} t_k\right)},$$

то для каждого k существует $1 \leq i_k \leq n$ такое, что

$$\frac{\psi_2\left(2^{i_k} t_k\right)}{\psi_2\left(2^{i_k-1} t_k\right)} \leq 3^{\frac{1}{n}}.$$

Так как $2^{i_k-1} t_k \to 0$ при $k \to \infty$, то $\liminf\limits_{t \downarrow 0} \frac{\psi_2(2t)}{\psi_2(t)} \leq 3^{\frac{1}{n}}$. В силу произвольности $n \in \mathbb{N}$ доказательство леммы завершено. •

Напомним, что для заданного симметричного функционального пространства E функция $\phi_E(t) := \|\chi_{[0,t)}\|_E, \quad t > 0$, где $\chi_{[0,t)}$ характеристическая функция отрезка $[0,t)$, называется фундаментальной функцией пространства E.

В дальнейшем мы предполагаем, что $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ есть функция Юнга, то есть Φ непрерывна слева и выпукла, $\Phi(0) = 0$ и $0 < \Phi(u) < \infty$ для любого $u > 0$. Соответствующий модуляр M_Φ на множестве измеримых по Лебегу функций задается формулой

$$M_\Phi(x) = \int_0^\infty \Phi(|x|)\, dt.$$

Определим пространство Орлича $L_\Phi = L_\Phi(0,\infty)$:

$$L_\Phi = \left\{x \in L_0(0,\infty) : M_\Phi\left(k^{-1}x\right) < \infty \text{ для некоторого } k > 0\right\},$$

с нормой Люксембурга $\|x\|_\Phi = \inf\left\{k > 0 : M_\Phi\left(k^{-1}x\right) \leq 1\right\}$. Напомним, что фундаментальная функция ϕ_{L_Φ} пространства L_Φ задается формулой

$$\phi_{L_\Phi}(t) = \left\|\chi_{(0,t)}\right\|_\Phi = \frac{1}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}$$

для всех $t > 0$. Здесь Φ^{-1} на $[0,\infty)$ – обратная функция: $\Phi^{-1}(s) = \inf\{u > 0 : \Phi(u) \geq s\}$. Напомним, что фундаментальная функция ассоциированного пространства L'_Φ равна

$$\phi_{L'_\Phi}(t) = \frac{t}{\phi_{L_\Phi}(t)} = t\Phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \tag{4.13}$$

(последняя есть фундаментальная функция пространства L_Ψ с нормой Орлича, где Ψ есть функция, сопряженная к функции Юнга Φ). Мы будем говорить, что Φ удовлетворяет Δ_2-условию в 0 (соответственно, в ∞) если существуют константы $M > 0$ и $u_0 > 0$ такие, что $\Phi(2u) \le M\Phi(u)$ для всех $0 \le u \le u_0$ (соответственно, для всех $u \ge u_0$). Следующее утверждение доказано в [9]. Хотя приведенное ниже доказательство аналогично рассуждению из [9], мы включаем его для удобства читателя.

Предложение 4.5. *Пусть Φ есть функция Юнга такая, что*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t\Phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)} \int_0^t x^*(s)\,ds = 0 \tag{4.14}$$

для всех $x \in L_\Phi$. Тогда Φ удовлетворяет Δ_2-условию в 0.

Доказательство. Предположим, что Φ не удовлетворяет Δ_2-условию в 0. Тогда существует последовательность $u_n \downarrow 0$ такая, что

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\Phi(u_n)}{\Phi(2u_n)} < \infty.$$

Определим $t_n = \Phi(2u_n)^{-1}$. Тогда $0 < t_n \nearrow \infty$ при $n \to \infty$ и $\Phi^{-1}\left(\frac{1}{t_n}\right) = 2u_n$ для всех n. Положим $x_0 = \sum_{n=1}^\infty 2u_n \chi_{[t_{n-1},t_n)}$ и заметим, что $x_0^* = x_0$. Так как

$$\int_0^\infty \Phi\left(\frac{1}{2}x_0\right) dt = \sum_{n=1}^\infty \int_{t_{n-1}}^{t_n} \Phi(u_n)\,dt \le \sum_{n=1}^\infty \Phi(u_n)\,t_n = \sum_{n=1}^\infty \frac{\Phi(u_n)}{\Phi(2u_n)} < \infty,$$

то $x_0 \in L_\Phi$. Для всех $n \ge 1$ мы имеем

$$\frac{1}{t_n\Phi^{-1}\left(\frac{1}{t_n}\right)} \int_0^{t_n} x_0(s)\,ds \ge \frac{1}{t_n\Phi^{-1}\left(\frac{1}{t_n}\right)}(2u_n)\,t_n = 1,$$

отсюда (4.14) не выполнено. ●

Теорема 4.6. *Предположим, что функция ψ из Ω_∞ такова, что*

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}=1,\quad \limsup_{t\to\infty}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}=2.$$

Тогда полунорма F_∞ нетривиальна на $M(\psi)$ и существует функция $0<x_0\in M(\psi)\setminus M_1(\psi)$ такая, что $F_\infty(x_0)=0$.

Доказательство. В силу теоремы 2.2 (i) полунорма F_∞ нетривиальна на $M(\psi)$. Пусть функция ψ_1 на $(0,\infty)$ задана формулой $\psi_1(t)=t\psi(1/t)$, и пусть ψ_2 есть наименьшая вогнутая мажоранта для ψ_1. Определим функцию Юнга $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ по формуле $\Phi=\psi_2^{-1}$, то есть, $\Phi(u)=\inf\{t>0:\psi_2(t)\geq u\}$ для всех $u\geq 0$. Тогда $\Phi^{-1}=\psi_2$. Покажем, что фундаментальная функция $\phi_{L'_\Phi}$ пространства L'_Φ эквивалентна ψ. Действительно, так как $\psi_1\leq\psi_2\leq 2\psi_1$, то из определения функции ψ_1 следует, что $\psi(t)\leq t\psi_2(1/t)\leq 2\psi(t)$, а из (4.13) и определения функции Φ вытекает, что для всех $t>0$ справедлива формула $\phi_{L'_\Phi}(t)=t\psi_2\left(t^{-1}\right)$. Следовательно, в силу [6, гл. II, теорема 5.7], мы получаем вложение

$$L_\Phi\subseteq M(\psi)\tag{4.15}$$

и неравенство $\|x\|_{M(\psi)}\leq 2\|x\|_\Phi$, верное для всех $x\in L_\Phi$.

Далее мы покажем, что Φ не удовлетворяет Δ_2-условию в 0. Действительно, из леммы 4.4 следует существование последовательности $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ из $(0,\infty)$ такой, что $t_n\downarrow 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\psi_2(2t_n)}{\psi_2(t_n)}=1$. Положим $v_n=\psi_2(t_n)$ и $u_n=\psi_2(2t_n)$. Тогда $0<v_n<u_n$, $\Phi(u_n)=2\Phi(v_n)$ для всех $n\geq 1$ и $u_n\downarrow 0$, $u_n/v_n\to 1$ при $n\to\infty$. Предположим, что существует $\delta>0$ и $M\in\mathbb{N}$ такие, что $\Phi(2u)\leq M\Phi(u)$ для всех $0\leq u\leq\delta$. Возьмем $0<v_n<\delta$ так, что $u_n/v_n<1+(2M)^{-1}$. Так как Φ возрастает, то $\Phi(v_n+2M(u_n-v_n))\leq\Phi(2v_n)$. Положим

$$L(t)=\Phi(v_n)+(t-v_n)\frac{\Phi(u_n)-\Phi(v_n)}{u_n-v_n},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Тогда $L(v_n)=\Phi(v_n)$, $L(u_n)=\Phi(u_n)$, и из выпуклости функции Φ следует, что $L(t)\leq\Phi(t)$ для всех $t>u_n$. В частности, полагая $t=v_n+2M(u_n-v_n)$, получаем $\Phi(v_n)+2M(\Phi(u_n)-\Phi(v_n))\leq\Phi(v_n+2M(u_n-v_n))$.

Объединяя эти неравенства и используя то, что $\Phi \geqslant 0$, находим

$$2M\Phi(v_n) = 2M(\Phi(u_n) - \Phi(v_n)) \leq \Phi(v_n + 2M(u_n - v_n)) \leq \Phi(2v_n),$$

что противоречит сделанному выше предположению. Следовательно, наше утверждение доказано.

Из предложения 4.5 и эквивалентеости функций ψ и $\phi_{L'_\Phi}$ следует существование $0 < x_0 \in L_\Phi$ такого, что

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t x_0^*(s)\, ds > 0.$$

То есть, в силу предложения 2.1, $x_0 \notin M_1(\psi)$. Предположим, что $0 < f \in M(\psi)^*_{\mathrm{sym},\infty}$. Тогда из (4.15) вытекает, что $f_{|L_\Phi}$ есть симметричный функционал на пространстве L_Φ. Однако, из [3, теорема 3.1] следует, что $f_{|L_\Phi} = 0$ и, в частности, $f(x_0) = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.●

Теперь мы представим примеры функций $\psi \in \Omega_\infty$, которые иллюстрируют теоремы 4.1, 4.3 и 4.6.

Пример 4.7. (i) Как и в примере 3.11, мы положим

$$\psi_1(t) := \begin{cases} t/2, & 0 \leq t \leq 4, \\ \log_2(t), & t \geqslant 4. \end{cases}$$

Легко видеть, что ψ_1 удовлетворяет условию (ii) теоремы 4.1.
(ii) Положим

$$\psi_2(t) := \begin{cases} t/2, \quad 0 \leq t \leq 4, \\ 2^n + \dfrac{2^n}{2^{2^{n+1}} - 2^{2^n}}(t - 2^{2^n}), \quad 2^{2^n} \leq t \leq 2^{2^{n+1}}, \quad n \geqslant 1. \end{cases}$$

Функция ψ_2 не удовлетворяет условию (ii) теоремы 4.1. Действительно, пусть $t_n = 2^{2^n}$, $n \geqslant 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\psi_2(t_n)}{\psi_2(t_n/2)} &= \frac{2^n}{2^{n-1} + \frac{2^{n-1}}{2^{2^n} - 2^{2^{n-1}}}(2^{2^n-1} - 2^{2^{n-1}})} \\ &= \frac{2}{1 + \frac{1}{2^{2^{n-1}}-1}(2^{2^{n-1}-1} - 1)} \geq \frac{2}{1 + \frac{2^{2^{n-1}-1}}{2^{2^{n-1}}-1}} \geq \frac{6}{5} \end{aligned}$$

для всех $n \geq 2$. Однако вогнутая функция ψ_2 и вогнутая функция ψ_1 из примера 4.7 (i) эквивалентны. Поэтому, в силу леммы 4.2, функция ψ_2 удовлетворяет условию (ii) теоремы 4.3.

(iii) Теперь мы приведем пример функции $\psi \in \Omega_\infty$, которая удовлетворяет условиям теоремы 4.6. С этой целью мы зафиксируем функцию $\phi \in \Omega_\infty$ такую, что $t/\phi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Рассмотрим последовательность $\{t_n\}_{n=0}^{\infty} \uparrow \infty$ такую, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} t_n/t_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \phi(t_n)/\phi(t_{n+1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} t_n\phi(t_{n+1})/(t_{n+1}\phi(t_n)) = 0.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Например, мы можем взять $\phi(t) = \sqrt{t},\ t \geqslant 0$ и $t_n = 2^{2^n},\ n \geqslant 1$. При этом без ограничения общности мы можем предполагать, что $2t_n \leq t_{n+1},\ n \geqslant 1$. Положим

$$\psi(t) = \frac{\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n)}{t_{n+1} - t_n}(t - t_n) + \phi(t_n), \quad t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1},\ n \geqslant 1.$$

Ясно, что $\psi(t_n) = \phi(t_n)$, $n \geqslant 1$. Имеем (см. (4.16))

$$\begin{aligned}\liminf_{t\to\infty} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} &\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(2t_n)}{\psi(t_n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\phi(t_{n+1})-\phi(t_n)}{t_{n+1}-t_n}(2t_n - t_n) + \phi(t_n)}{\psi(t_n)} \\ &= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{t_n\phi(t_{n+1})(1 - \frac{\phi(t_n)}{\phi(t_{n+1})})}{t_{n+1}\phi(t_n)(1 - \frac{t_n}{t_{n+1}})} = 1.\end{aligned}$$

С другой стороны (снова в силу (4.16))

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to\infty} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} &\geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(t_{n+1})}{\psi(t_{n+1}/2)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\phi(t_{n+1})}{\frac{\phi(t_{n+1})-\phi(t_n)}{t_{n+1}-t_n}(t_{n+1}/2 - t_n) + \phi(t_n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\phi(t_{n+1})}{2\phi(t_n) + \frac{t_{n+1}-2t_n}{t_{n+1}-t_n}(\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n))} = 2. \quad \bullet\end{aligned}$$

В заключение отметим, что соответствующим образом модифицированные результаты настоящего параграфа справедливы и для симметричных функционалов, сосредоточенных в 0.

Литература

1. J. Dixmier, *Existence de traces non normales.* — C. R. Acad. Sci. Paris **262** (1966), A1107–A1108.
2. A. Connes, *Noncommutative Geometry.* Academic Press (1994).
3. P. G. Dodds, B. de Pagter, E. M. Semenov, and F. A. Sukochev, *Symmetric Functionals and Singular Traces.* — Positivity **2** (1998), 47–75.
4. Ф. А. Сукочев, В. И. Чилин, *Симметричные пространства на полуконечных алгебрах фон Неймана.* — ДАН СССР **313** (1990), No. 4, 811–815.
5. G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent sequences.* — Acta Math. **80** (1948), 167–190.
6. С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов.* Наука, М. (1978).
7. C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators.* Academic Press, London, (1988).
8. L. Sucheston, *Banach limits.* — Amer. Math. Monthly, **74** (1967), 308–311.
9. Д. В. Салехов, Е. М. Семенов, *О сходимости некоторого семейства функционалов в пространстве Орлича.* — Studia Math. **32** (1969), 285–293.

Dodds P. G., de Pagter B., Sedaev A. A., Semenov E. M., Sukochev F. A. Singular symmetric functionals.

This is a continuation of the study started in [3]. A linear functional f on a rearrangement invariant space E on $(0,\infty)$ is said to be symmetric if for x, $y \in E$ the condition

$$\int_0^t x^*(s)ds \leqslant \int_0^t y^*(s)ds, \quad t>0,$$

implies that $f(x) \leqslant f(y)$. A new construction of singular symmetric functionals on the Marcinkiewicz space $M(\psi)$ is presented and studied in detail. A necessary and sufficient condition in terms of ψ is obtained for the seminorms equal to distance to $M(\psi)\cap L_1$ and to $M(\psi)\cap L_\infty$ to be recoverable in terms of the symmetric singular functionals on $M(\psi)$.

Поступило 13 июня 2002 г.

School of Informatics and Engineering,
The Flinders University of South Australia,
peter@ist.flinders.edu.au
Department of Mathematics,
Delft University of Technology, The Netherlands,
depagter@twi.tudelft.nl
Воронеж, государственный
архитектурно-строительный университет,
sed@vmail.ru
Воронеж, государственный университет,
root@func.vsu.ru
School of Informatics and Engineering,
The Flinders University of South Australia,
sukochev@ist.flinders.edu.au