Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 290, 2002 г.

О. Л. Виноградов, В. В. Жук

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ И НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ И СПЛАЙНАМИ

§1. Введение

В дальнейшем $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ – множества вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел соответственно; если из контекста не следует противное, все функции могут быть как вещественно-, так и комплекснозначными; C – пространство 2π-периодических непрерывных функций с равномерной нормой, если $r \in \mathbb{Z}_+$, то $C^{(r)}$ – множество r раз непрерывно дифференцируемых функций из C; если $1 \leqslant p < \infty$, то L_p – пространство измеримых 2π-периодических функций f, для которых

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^p\right)^{1/p} < +\infty,$$

L_∞ – пространство измеримых 2π-периодических существенно ограниченных функций f с нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|,$$

равномерная норма функции $f \in C$ также обозначается символом $\|f\|_\infty$; если $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r \in \mathbb{N}$, то $W_p^{(r)}$ – пространство 2π-периодических функций, у которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна на любом отрезке, а r-я производная принадлежит L_p. Будем говорить, что полунорма P, заданная на C, принадлежит классу A°, если она мажорируется равномерной нормой, т.е. существует такая постоянная M, что $P(f) \leqslant M\|f\|_\infty$ для

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 02-01-01112, ФЦП “Интеграция” № 326.53 и гранта “Ведущие научные школы” № 00-15-96-022.

всех $f \in C$. Будем также говорить, что полунорма P из A° принадлежит классу A, если она инвариантна относительно сдвига, т.е. для любых $f \in C$ и $h \in \mathbb{R}$ будет $P(f(\cdot + h)) = P(f)$.

Далее, $A_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f$ – среднее значение функции f; если $r \in \mathbb{N}$, $A_0(f) = 0$, то $f^{(-r)}$ – r-я периодическая первообразная функции f также с нулевым средним; центральные разности, модули непрерывности и функции Стеклова порядка $r \in \mathbb{Z}_+$ функции f определяются равенствами

$$\delta_t^r(f, x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k f\left(x + \frac{rt}{2} - kt\right),$$
$$\omega_r(f, h)_P = \sup_{0 \leqslant t \leqslant h} P\big(\delta_t^r(f)\big),$$
$$S_{h,r}(f) = A_0(f) + \frac{1}{h^r}\delta_h^r((f - A_0(f))^{(-r)}).$$

Пусть еще $B_0(x) = 1$,

$$B_r(x) = -\frac{r!}{2^{r-1}\pi^r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k\pi x - r\pi/2)}{k^r}, \quad r \in \mathbb{N},$$

– периодические сплайны Бернулли, $\gamma_k = \frac{B_k\left(\frac{1}{2}\right)}{k!}$ – коэффициенты в формуле Эйлера–Маклорена, $\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l(r+1)}}{(2l+1)^{r+1}}$. Напомним, что $\mathcal{K}_1 = \frac{\pi}{2}$, $\mathcal{K}_2 = \frac{\pi^2}{8}$. Символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0.

Через $\mathcal{T}_{2n-1}$ обозначается множество тригонометрических многочленов порядка не выше $n-1$, а через $S_{N,m}$ – множество 2π-периодических сплайнов порядка $m \in \mathbb{Z}_+$ дефекта 1 по равномерному разбиению $\frac{2k\pi}{N}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Другими словами, при $m \in \mathbb{N}$ это множество функций из $C^{(m-1)}$, являющихся на каждом интервале $\left(\frac{2k\pi}{N}, \frac{2(k+1)\pi}{N}\right)$ алгебраическим многочленом степени не выше m, а при $m = 0$ – множество функций, постоянных на каждом таком интервале. Известно [1, с.77], что $S_{N,m}$ – множество функций вида

$$s(t) = \beta + \sum_{j=0}^{N-1}\beta_j B_{m+1}\left(\frac{t}{2\pi} - \frac{j}{N}\right), \qquad \sum_{j=0}^{N-1}\beta_j = 0.$$

Множество сплайнов из $S_{2n,m}$, для которых $\sum\limits_{j=0}^{2n-1}(-1)^j\beta_j=0$, обозначим через $S^{\times}_{2n,m}$.

Далее,

$$E(f,\mathfrak{N})_P=\inf_{T\in\mathfrak{N}}P(f-T)$$

– наилучшее приближение функции f элементами множества $\mathfrak{N}$ по полунорме P. Индекс p у наилучшего приближения, модуля непрерывности и т.п. означает, что $P(f)=\|f\|_p$. Вместо $E(f,\mathcal{T}_{2n-1})_P$, $E(f,S_{2n,\mu})_P$, $E(f,S^{\times}_{2n,\mu})_P$ пишем, соответственно, $E_n(f)_P$, $E_{n,\mu}(f)_P$, $E^{\times}_{n,\mu}(f)_P$; по определению полагаем

$$E_{n,-1}(f)_P=E^{\times}_{n,-1}(f)_P=P(f).$$

Ясно, что если полунорма P принадлежит A (A°), то модуль непрерывности и наилучшее приближение тригонометрическими многочленами по полунорме P являются полунормами класса A (A°). Наилучшие приближения сплайнами $E_{n,\mu}(\cdot)_P$ и $E^{\times}_{n,\mu}(\cdot)_P$ принадлежат классу A°, но не обязательно A, даже если исходная полунорма P принадлежит A. Чтобы обеспечить инвариантность относительно сдвига, введем полунормы

$$\Xi_{n,\mu}(f)_P=\sup_{t\in\mathbb{R}}E_{n,\mu}(f(\cdot+t))_P,\quad \Xi^{\times}_{n,\mu}(f)_P=\sup_{t\in\mathbb{R}}E^{\times}_{n,\mu}(f(\cdot+t))_P.$$

Для наилучших приближений тригонометрическими многочленами также положим

$$\Xi_n(f)_P=\sup_{t\in\mathbb{R}}E_n(f(\cdot+t))_P.$$

Как уже было отмечено, в случае $P\in A$ эта конструкция не приводит к новой величине, т.е. $\Xi_n(\cdot)_P=E_n(\cdot)_P$. Для полунорм, не инвариантных относительно сдвига, E_n и Ξ_n не совпадают. Полунормы $\Xi_n(\cdot)_P$, $\Xi_{n,\mu}(\cdot)_P$ и $\Xi^{\times}_{n,\mu}(\cdot)_P$ принадлежат классу A для любой полунормы P из A°.

В кратных суммах будут использоваться следующие обозначения:

$$(k)_0=0,\qquad (k)_\nu=k_1+\dots+k_\nu,\qquad K_{r,0}=\{0\},$$
$$K_{r,m}=\left\{k\in\mathbb{Z}^m_+:\,0\leqslant k_\nu\leqslant r+\nu-2-(k)_{\nu-1}\right\},\quad m\in\mathbb{N}.$$

При фиксированном m для $k \in \mathbb{Z}_+^m$, вместо $(k)_m$ пишем просто (k), если это не приводит к двусмысленности. Числа $A_{r,m}$ определяются равенствами

$$A_{r,0} = \frac{2}{r!} \int\limits_0^{1/2} \left| B_r(t) - B_r\left(\frac{1}{2}\right) \right| dt,$$

$$A_{r,m} = \sum_{k \in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^{m} |\gamma_{k_j}| \right) A_{r+m-(k),0};$$

$$D_{r,m}(\lambda) = \lambda^r \left\{ \sum_{\nu=0}^{m-1} 2^\nu A_{r,\nu} + 2^m \sum_{k \in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^{m} |\gamma_{k_j}| \right) \frac{\mathcal{K}_{r+m-(k)}}{\lambda^{r+m-(k)}} \right\}.$$

Полагаем (см. [2, глава 4])

$$M_{r,m}(f,h)_P = \begin{cases} \dfrac{\sum_{\nu=0}^{m-1} A_{r,\nu}\omega_\nu(f,h)_P}{\sum_{\nu=0}^{m-1} 2^\nu A_{r,\nu}}, & r \text{ четно}, \\[2ex] \dfrac{\frac{A_{r,0}}{2}\omega_1(f,h)_P + \sum_{\nu=1}^{m-1} A_{r,\nu}\omega_\nu(f,h)_P}{\sum_{\nu=0}^{m-1} 2^\nu A_{r,\nu}}, & r \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Ясно, что для $P \in A$ последовательность $M_{r,m}(f,h)_P$ убывает по m.

В. В. Жуком [2, с.194] была установлена следующая теорема.

Теорема A. *Пусть* $P \in A$, $r, m \in \mathbb{N}$, $f \in C^{(r+m)}$,

$$T_{r+m,P} = \pi \left(\mathcal{K}_{r+m}^{-1} \sup_{g \in C^{(r+m)}} \frac{P(g)}{P(g^{(r+m)})} \right)^{\frac{1}{r+m}}.$$

Тогда

$$P(f^{(m)}) \leqslant \mathcal{K}_r \left(\frac{\omega_m(f, T_{r+m,P})_P}{\mathcal{K}_{r+m} 2^m} \right)^{\frac{r}{r+m}} M_{r,m}^{\frac{m}{r+m}}(f^{(r+m)}, T_{r+m,P})_P.$$

Для наилучшего приближения тригонометрическими многочленами (см. далее лемму 6) $T_{r+m,E_n(\cdot)_P} \leqslant \frac{\pi}{n}$, поэтому заключение теоремы можно записать в виде

$$E_n(f^{(m)})_P \leqslant \mathcal{K}_r \left(\frac{\omega_m\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{E_n(\cdot)_P}}{\mathcal{K}_{r+m} 2^m} \right)^{\frac{r}{r+m}} M_{r,m}^{\frac{m}{r+m}} \left(f^{(r+m)}, \frac{\pi}{n} \right)_{E_n(\cdot)_P}.$$

Последнее неравенство значительно усиливает и неравенство типа Колмогорова для наилучших приближений, и неравенство Джексона для производной нечетного порядка r, и неравенство Ахиезера–Крейна–Фавара. Константы в случае $P(f) = \|f\|_p$, $p = 1, \infty$, точные. Подробнее историю неравенств, предшествующих теореме A, см. в [2].

В работе [3] О. Л. Виноградов и В. В. Жук выяснили, что в случае равномерной нормы метод, примененный В. В. Жуком и А. А. Лигуном для доказательства теоремы Джексона (основанный на формуле Эйлера–Маклорена), приводит к точной постоянной, если шаг модуля непрерывности равен $\frac{\pi}{\alpha n}$, α – нечетное натуральное число. Там же авторы получили точные соотношения типа теоремы A ($m = 1$, r нечетно). Это обстоятельство побуждает распространить теорему A на произвольный шаг модуля непрерывности.

Для наилучших приближений сплайнами справедливы (см. далее лемму 7) неравенства типа Ахиезера–Крейна–Фавара и Джексона с теми же точными постоянными, что и в полиномиальном случае. Усиление этих неравенств (оценка ведется через величину $M_{r,m}(f^{(r)}, h)_p$) получено в [4], причем оценки получены с помощью приближения линейными методами. Попытка распространить теорему A на приближения сплайнами (с сохранением точности постоянных во всех известных случаях) потребовала изменения вида правой части; подробнее это объясняется в замечании 4.

§2. Предварительные сведения

Лемма 1. *Пусть* $P \in A^\circ$, *функция* K *непрерывна на* $\mathbb{R} \times [a, b]$, $K(x, t) = K(x + 2\pi, t)$ *для всех* $(x, t) \in \mathbb{R} \times [a, b]$. *Тогда*

$$P\left(\int_a^b K(\cdot, t)\, dt\right) \leqslant \int_a^b P(K(\cdot, t))\, dt.$$

Доказательство. Взяв $N \in \mathbb{N}$ и положив $h = \frac{b-a}{N}$, $t_k = a + kh$, рассмотрим функцию $g_N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} K(x, t_k)h$. Покажем, что $g_N(x)$ равномерно стремится к $g(x) = \int_a^b K(x, t)\, dt$ на $\mathbb{R}$. По равномерной непрерывности K для $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что при $|t'-t''|<\delta$ будет $|K(x,t')-K(x,t'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Пусть N столь велико, что $h<\delta$. Тогда

$$|g_N(x)-g(x)|=\left|\sum_{k=1}^N\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}K(x,t_k)\,dt-\sum_{k=1}^N\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}K(x,t)\,dt\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^N\int\limits_a^b|K(x,t_k)-K(x,t)|\,dt<\sum_{k=1}^N\int\limits_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}=\varepsilon,$$

что и означает равномерную сходимость функций g_N к g. Далее,

$$P(g_N)\leqslant\sum_{k=1}^N P(K(\cdot,t_k))h. \tag{1}$$

Из свойств полунормы класса A° получаем

$$|P(g_N)-P(g)|\leqslant P(g_N-g)\leqslant M\|g_N-g\|_\infty.$$

Значит, $\lim\limits_{N\to\infty}P(g_N)=P(g)$. Выражение $\sum\limits_{k=1}^N P(K(\cdot,t_k))h$ есть интегральная сумма Римана для интеграла $\int_a^b P(K(\cdot,t))\,dt$ с непрерывной подынтегральной функцией $l(t)=P(K(\cdot,t))$ (непрерывность функции l вытекает из неравенства

$$|l(t')-l(t'')|\leqslant P(K(\cdot,t')-K(\cdot,t''))\leqslant M\|K(\cdot,t')-K(\cdot,t'')\|$$

и равномерной непрерывности функции K). Поэтому

$$\sum_{k=1}^N P(K(\cdot,t_k))h\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\int\limits_a^b P(K(\cdot,t))\,dt.$$

Следовательно, предельный переход при $N\to\infty$ в неравенстве (1) дает требуемое.

Лемма 1 по сути хорошо известна. В [2, с. 58] она сформулирована для полунормы класса A, но инвариантность полунормы относительно сдвига в доказательстве нигде не используется.

Лемма 2 (итерированная формула Эйлера–Маклорена). *Пусть* $r, m \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $f \in W_1^{(r)}$. *Тогда*

$$f = L_{h,r,m}(f) + \sum_{\nu=0}^{m-1} R_{h,r,\nu}(f),$$

где

$$L_{h,r,m}(f) = \sum_{k \in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^{m} \gamma_{k_j} \right) h^{(k)} S_{h,m}^{((k))}(f),$$

$$R_{h,r,\nu}(f) = h^r \int_{-1/2}^{1/2} \delta_h^\nu(f^{(r)}, \cdot - th) \sum_{k \in K_{r,\nu}} \left(\prod_{j=1}^{\nu} \gamma_{k_j} \right) \frac{1}{(r + \nu - (k))!} \times \left(B_{r+\nu-(k)} \left(\frac{1}{2} \right) - B_{r+\nu-(k)}(t) \right) dt.$$

Лемма 3. *Пусть* $P \in A$, $r, m \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $f \in C^{(r)}$. *Тогда*

$$P(f - L_{h,r,m}(f)) \leqslant h^r \sum_{\nu=0}^{m-1} A_{r,\nu} P \left(\delta_h^\nu (f^{(r)}) \right).$$

Если, кроме того, r нечетно, то

$$P(f - L_{h,r,m}(f)) \leqslant h^r \left\{ \frac{A_{r,0}}{2} \omega_1(f^{(r)}, h)_P + \sum_{\nu=1}^{m-1} A_{r,\nu} P \left(\delta_h^\nu (f^{(r)}) \right) \right\}.$$

Леммы 2 и 3 см. в [2, глава 4] и [4].

Лемма 4. *Если* $r, m \in \mathbb{N}$, *то (см.* [2, с. 190; 4]*)* $D_{r,m}(\pi) = \mathcal{K}_r$. *Если* $r, \alpha \in \mathbb{N}$, *нечетны, то (см.* [3]*)*

$$D_{r,1} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)^{r+1} \sin \frac{(2l+1)\pi}{2\alpha}}.$$

В частности, $D_{r,1} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \left(2 - \frac{1}{3^r} \right) \mathcal{K}_r$.

Лемма 5 (неравенства типа Колмогорова). *Пусть* $P \in A$, $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, $f \in C^{(r)}$. *Тогда* $P(f^{(k)}) \leqslant \mathcal{K}_{r-k} \mathcal{K}_r^{\frac{k}{r}-1} P^{1-\frac{k}{r}}(f) P^{\frac{k}{r}}(f^{(r)})$.

Лемма 6 (неравенства типа Ахиезера–Крейна–Фавара между наилучшими приближениями тригонометрическими многочленами). *Пусть* $P \in A$, $n, r \in \mathbb{N}$, $f \in C^{(r)}$. *Тогда* $E_n(f)_P \leqslant \mathcal{K}_r n^{-r} E_n(f^{(r)})_P$.

Леммы 5 и 6 в таких формулировках содержатся в [2, с. 185, 148]; там же см. историю вопроса.

Лемма 7 (неравенства типа Ахиезера–Крейна–Фавара между наилучшими приближениями сплайнами). *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$, $\mu \geqslant r-1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in C^{(r)}$. *Тогда* $E_{n,\mu}(f)_p \leqslant \mathcal{K}_r n^{-r} E_{n,\mu-r}(f^{(r)})_p$. *Если* $\mu \geqslant r$, *то* E *может быть заменено на* $E^{\times}$.

Доказательство. Неравенства для $E_{n,\mu}(f)_p$ при $p = 1, \infty$ (при этих p неравенства точные) приведены в [1, с. 246] (там же см. историю вопроса), где выводятся с помощью соотношений двойственности. При $\mu = r-1$ (в этом случае оценка ведется через норму r-й производной) они также доказаны в [1, с. 221–225] с помощью непосредственного рассмотрения погрешности интерполирования сплайнами. Последний способ позволяет распространить неравенства на промежуточные значения p или с помощью оценок, похожих на следующие ниже, или с помощью интерполяционной теоремы Рисса–Торина, что отмечено в [4].

Пусть $\mu \geqslant r$. При $p = 1, \infty$ неравенства для $E_{n,\mu}(f)_p$ другим способом получены в [5]; одновременно получены неравенства для $E^{\times}_{n,\mu}(f)_p$. Распространим это доказательство на промежуточные значения p. Именно, в [5] построены линейные операторы $X_{n,r,\mu} : L_1 \to S^{\times}_{2n,\mu}$, такие что для любой функции f из $W_1^{(r)}$ их отклонение допускает представление

$$f(t) - X_{n,r,\mu}(f,t) = \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(u) F(t,u)\, du,$$

причем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(t,u)|\, du = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \quad \text{при всех } t, \tag{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(t,u)|\, dt = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \quad \text{при всех } u \tag{3}$$

(зависимость функции F от n, r и μ отражать в обозначениях не будем). Кроме того, если $g \in S_{2n,\mu-r}$ ($S^{\times}_{2n,\mu-r}$), то

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(u)F(\cdot,u)\,du \in S_{2n,\mu}\ (S^{\times}_{2n,\mu}).$$

Возьмем в качестве g сплайн наилучшего приближения функции $f^{(r)}$ в L_p. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big(f^{(r)} - g(u)\Big)\,F(t,u)\,du = f(t) - G(t),$$

где $g \in S_{2n,\mu}$ ($S^{\times}_{2n,\mu}$). Применяя неравенство Гёльдера ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) и пользуясь равенствами (2) и (3), находим

$$E^p_{n,\mu}(f)_p \leqslant \|f-G\|^p_p$$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(r)}(u)-g(u)||F(t,u)|^{1/p}|F(t,u)|^{1/q}\,du\right)^p dt$$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(r)}(u)-g(u)|^p|F(t,u)|\,du\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|F(t,u)|\,du\right)^{p/q} dt$$

$$= \left(\frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\right)^{p/q}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(r)}(u)-g(u)|^p|F(t,u)|\,du\,dt$$

$$\leqslant \left(\frac{\mathcal{K}_r}{n^r}E_{n,\mu-r}(f^{(r)})_p\right)^p,$$

и аналогично для пространств с крестиками.

§3. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $P \in A$, $r,m \in \mathbb{N}$, $n,\lambda > 0$, $f \in C^{(r+m)}$. Тогда*

$$P(f^{(m)}) \leqslant D_{r,m}(\lambda)\max\left\{\left(\frac{\omega_m\left(f,\frac{\lambda}{n}\right)_P}{\mathcal{K}_{r+m}2^m}\right)^{\frac{r}{r+m}} \times M^{\frac{m}{r+m}}_{r,m}\left(f^{(r+m)},\frac{\lambda}{n}\right)_P, \frac{n^m\omega_m\left(f,\frac{\lambda}{n}\right)_P}{\mathcal{K}_{r+m}2^m}\right\}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим для краткости $h = \lambda/n$. Пусть $0 < u \leqslant h$. По лемме 3 верна оценка

$$P(f^{(m)}) \leqslant P(f - L_{u,r,m}(f^{(m)})) + P(L_{u,r,m}(f^{(m)})) \leqslant$$
$$\leqslant u^r \sum_{\nu=0}^{m-1} A_{r,\nu} P\left(\delta_u^\nu(f^{(r+m)})\right) +$$
$$+ \sum_{k\in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^{m} |\gamma_{k_j}|\right) u^{(k)} P\left(S_{u,m}^{((k))}(f^{(m)})\right).$$

Применяя неравенство типа Колмогорова (лемму 5)

$$P(g^{((k))}) \leqslant \mathcal{K}_{r+m-(k)} \mathcal{K}_{r+m}^{\frac{(k)}{r+m}-1} P^{1-\frac{(k)}{r+m}}(g) P^{\frac{(k)}{r+m}}(g^{(r+m)})$$

к функции $g = S_{u,m}(f^{(m)}) = u^{-m}\delta_u^m(f)$ и пользуясь определением модуля непрерывности, находим

$$P(f^{(m)}) \leqslant u^r \sum_{\nu=0}^{m-1} A_{r,\nu}\omega_\nu(f^{(r+m)}, h)_P$$
$$+ \sum_{k\in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^{m} |\gamma_{k_j}|\right) u^{(k)-m} \mathcal{K}_{r+m-(k)}$$
$$\times \left(\frac{\omega_m(f,h)_P}{\mathcal{K}_{r+m}}\right)^{1-\frac{(k)}{r+m}} \omega_m^{\frac{(k)}{r+m}}(f^{(r+m)}, h)_P.$$

В силу неравенства

$$\omega_m(f^{(r+m)}, h)_P \leqslant 2^m M_{r,m}(f^{(r+m)}, h)_P \tag{5}$$

имеем

$$P(f^{(m)}) \leqslant u^r \sum_{\nu=0}^{m-1} 2^\nu A_{r,\nu} M_{r,m}(f^{(r+m)}, h)_P$$
$$+ \sum_{k\in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^{m} |\gamma_{k_j}|\right) u^{(k)-m} \mathcal{K}_{r+m-(k)}$$
$$\times \left(\frac{\omega_m(f,h)_P}{\mathcal{K}_{r+m}}\right)^{1-\frac{(k)}{r+m}} (2^m M_{r,m}(f^{(r+m)}, h)_P)^{\frac{(k)}{r+m}}.$$

Далее рассмотрим два случая. Если $M_{r,m}(f^{(r+m)},h)_P\neq 0$ и

$$n\left(\frac{\omega_m(f,h)_P}{\mathcal{K}_{r+m}2^m M_{r,m}(f^{(r+m)},h)_P}\right)^{\frac{1}{r+m}}\leqslant 1,$$

то положим

$$u=\lambda\left(\frac{\omega_m(f,h)_P}{\mathcal{K}_{r+m}2^m M_{r,m}(f^{(r+m)},h)_P}\right)^{\frac{1}{r+m}}.$$

Упрощая, получаем

$$P(f^{(m)})\leqslant D_{r,m}(\lambda)\left(\frac{\omega_m(f,h)_P}{\mathcal{K}_{r+m}2^m}\right)^{\frac{r}{r+m}} M_{r,m}^{\frac{m}{r+m}}(f^{(r+m)},h)_P. \qquad (6)$$

Если же $M_{r,m}(f^{(r+m)},h)_P=0$ или $M_{r,m}(f^{(r+m)},h)_P\neq 0$ и

$$n\left(\frac{\omega_m(f,h)_P}{\mathcal{K}_{r+m}2^m M_{r,m}(f^{(r+m)},h)_P}\right)^{\frac{1}{r+m}}\geqslant 1,$$

то выполняется неравенство

$$M_{r,m}(f^{(r+m)},h)_P\leqslant n^{r+m}\frac{\omega_m(f,h)_P}{\mathcal{K}_{r+m}2^m}. \qquad (7)$$

В этом случае положим $u=h$. Применяя (7), получим

$$P(f^{(m)})\leqslant D_{r,m}(\lambda)\frac{n^m}{\mathcal{K}_{r+m}2^m}\omega_m(f,h)_P. \qquad (8)$$

Объединяя оценки (6) и (8), приходим к (4).

Замечание 1. Соотношение $M_{r,m}(f^{(r+m)},h)_P=0$ влечет $P(f^{(m)})=$ $=0$. Действительно, в этом случае по неравенству (5) окажется, что и $\omega_m(f^{(r+m)},h)_P=0$, а тогда по неравенству типа Ахиезера–Крейна–Фавара будет и $\omega_m(f,h)_P=0$. Из доказанной теоремы теперь следует, что $P(f^{(m)})=0$.

Замечание 2. Пусть $r,m\in\mathbb{N}$, $n,\lambda>0$, полунорма $P\in A$ и линейное, инвариантное относительно сдвига множество функций $Y\subset C^{(r+m)}$ таковы, что

$$\sup_{g\in Y}\frac{P(g)}{P(g^{(r+m)})}\leqslant\frac{\mathcal{K}_{r+m}}{n^{r+m}}. \qquad (9)$$

Тогда для любой функции $f \in Y$

$$P(f^{(m)}) \leqslant D_{r,m}(\lambda) \left(\frac{\omega_m \left(f, \frac{\lambda}{n}\right)_P}{\mathcal{K}_{r+m} 2^m} \right)^{\frac{r}{r+m}} M_{r,m}^{\frac{m}{r+m}} \left(f^{(r+m)}, \frac{\lambda}{n} \right)_P .$$

Для доказательства надо заметить, что в силу неравенства (9), возведенного в степень $\frac{m}{r+m}$, и неравенства (5) вторая величина под знаком максимума в (4) не превосходит первой.

Отметим два случая [2, с. 148], когда выполняется неравенство (9) (здесь $n \in \mathbb{N}$):

1) $Y = C^{(r+m)}$, а $P = E_n(\cdot)_Q$, где $Q \in A$;

2) $Y \subset C^{(r+m)}$ – класс функций, ортогональных $\mathcal{T}_{2n-1}$, а P – произвольная полунорма класса A.

Следствие 1. *Пусть $P \in A^\circ$, $n, r, m \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, $f \in C^{(r+m)}$. Тогда*

$$\Xi_n(f^{(m)})_P \leqslant D_{r,m}(\lambda) \max \left\{ \left(\frac{\omega_m \left(f, \frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_n(\cdot)_P}}{\mathcal{K}_{r+m} 2^m} \right)^{\frac{r}{r+m}} \right.$$
$$\left. \times\, M_{r,m}^{\frac{m}{r+m}} \left(f^{(r+m)}, \frac{\lambda}{n} \right)_{\Xi_n(\cdot)_P}, \frac{n^m \omega_m \left(f, \frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_n(\cdot)_P}}{\mathcal{K}_{r+m} 2^m} \right\} .$$

Для доказательства следствия 1 надо применить теорему 1 к полунорме $\Xi_n(\cdot)_P$.

Следствие 2. *Пусть $P \in A$, $n, r, m \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, $f \in C^{(r+m)}$. Тогда*

$$E_n(f^{(m)})_P \leqslant D_{r,m}(\lambda) \left(\frac{\omega_m \left(f, \frac{\lambda}{n}\right)_{E_n(\cdot)_P}}{\mathcal{K}_{r+m} 2^m} \right)^{\frac{r}{r+m}}$$
$$\times M_{r,m}^{\frac{m}{r+m}} \left(f^{(r+m)}, \frac{\lambda}{n} \right)_{E_n(\cdot)_P} .$$

Следствие 2 вытекает из следствия 1 и замечания 2.

Следствие 3. *Пусть* $P \in A$, $n, r, m \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, $f \in C^{(r)}$. *Тогда*

$$E_n(f)_P \leqslant \frac{D_{r,m}(\lambda)}{n^r} \left(\frac{\omega_m \left(f^{(r)}, \frac{\lambda}{n}\right)_{E_n(\cdot)_P}}{2^m} \right)^{\frac{r}{r+m}} \times M_{r,m}^{\frac{m}{r+m}} \left(f^{(r)}, \frac{\lambda}{n}\right)_{E_n(\cdot)_P}. \tag{10}$$

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $A_0(f) = 0$. Применим следствие 2 к функции $g = f^{(-m)}$. Теперь остается воспользоваться неравенствами

$$\omega(g, h)_{E_n(\cdot)_P} \leqslant \frac{\mathcal{K}_{r+m}}{n^{r+m}} \omega(g^{(r+m)}, h)_{E_n(\cdot)_P},$$

вытекающими из леммы 6.

Следствие 4. *Пусть* $P \in A$, $n, r, m \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, $f \in C^{(r)}$. *Тогда*

$$E_n(f)_P \leqslant \frac{D_{r,m}(\lambda)}{n^r} M_{r,m} \left(f^{(r)}, \frac{\lambda}{n}\right)_{E_n(\cdot)_P}. \tag{11}$$

При $\lambda = \pi$ правая часть неравенства (11) убывает по m, поэтому наилучшую оценку дает предел правой части при $m \to \infty$.

Следствие 5. *Пусть* $P \in A$, $n, r \in \mathbb{N}$, $f \in C^{(r)}$. *Тогда*

$$E_n(f)_P \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} M_{r,\infty} \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_{E_n(\cdot)_P}.$$

Замечание 3. Можно увеличить, вообще говоря, правые части неравенств следствий 1–5, взяв модули непрерывности относительно полунормы P.

Теорема 1 при специальном выборе λ (в зависимости от P) и следствия 2–5 при $\lambda = \pi$ и произвольном m содержатся в [2, глава 4, §4, 5]; следствия 2–4 при $m = 1$, нечетном r и произвольном λ – в [3].

Следствие 6. *Пусть $P \in A^{\circ}$, $n, r, \mu+1, m \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, $f \in C^{(r+m)}$. Тогда*

$$\Xi_{n,\mu}(f^{(m)})_P \leqslant D_{r,m}(\lambda) \max\left\{ \left(\frac{\omega_m\left(f, \frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_{n,\mu}(\cdot)_P}}{\mathcal{K}_{r+m} 2^m} \right)^{\frac{r}{r+m}} \right.$$
$$\left. \times\, M_{r,m}^{\frac{m}{r+m}} \left(f^{(r+m)}, \frac{\lambda}{n} \right)_{\Xi_{n,\mu}(\cdot)_P}, \frac{n^m \omega_m\left(f, \frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_{n,\mu}(\cdot)_P}}{\mathcal{K}_{r+m} 2^m} \right\}.$$

При этом Ξ может быть заменено на $\Xi^{\times}$.

Для доказательства следствия 6 надо применить теорему 1 к полунорме $\Xi_{n,\mu}(\cdot)_P$ $(\Xi^{\times}_{n,\mu}(\cdot)_P)$.

Следствие 7. *Пусть $n, r, \mu, m \in \mathbb{N}$, $\mu \geqslant r+m-1$, $\lambda > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in C^{(r)}$. Тогда*

$$\Xi_{n,\mu}(f)_p \leqslant \frac{D_{r,m}(\lambda)}{n^r} \max\left\{ \left(\frac{\omega_m\left(f^{(r)}, \frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_{n,\mu-r-m}(\cdot)_p}}{2^m} \right)^{\frac{r}{r+m}} \right.$$
$$\left. \times\, M_{r,m}^{\frac{m}{r+m}} \left(f^{(r)}, \frac{\lambda}{n} \right)_{\Xi_{n,\mu}(\cdot)_p}, \frac{\omega_m\left(f^{(r)}, \frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_{n,\mu-r-m}(\cdot)_p}}{2^m} \right\}. \tag{12}$$

Если $\mu \geqslant r+m$, то Ξ может быть заменено на $\Xi^{\times}$.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $A_0(f) = 0$. Применим следствие 6 к норме в L_p и функции $g = f^{(-m)}$. Для получения неравенства (12) теперь остается воспользоваться неравенствами

$$\omega(g, h)_{\Xi_{n,\mu}(\cdot)_p} \leqslant \frac{\mathcal{K}_{r+m}}{n^{r+m}} \omega(g^{(r+m)}, h)_{\Xi_{n,\mu-r-m}(\cdot)_p}, \tag{13}$$

вытекающими из леммы 7.

Неравенство для пространств с крестиками доказывается аналогично.

Замечание 4. В связи с тем, что для наилучших приближений тригонометрическими многочленами вторая величина под знаком максимума не превосходит первой, и правая часть неравенств теоремы 1 и ее следствий упрощается, возникает вопрос, нельзя ли получить подобную оценку и для приближений сплайнами. Для определенности ограничимся случаем $p = \infty$. Покажем, что ответ на этот вопрос отрицателен: неравенства

$$E_{n,\mu}(f)_\infty \leqslant \frac{D}{n^r}\omega_m^{\frac{r}{r+m}}\left(f^{(r)}, \frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_{n,\mu-r-m}(\cdot)_\infty} M_{r,m}^{\frac{m}{r+m}}\left(f^{(r)}, \frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_{n,\mu}(\cdot)_\infty} \tag{14}$$

не могут выполняться ни с какой константой D, не зависящей от n и f.

Пусть $f \in C^{(\infty)}$ и выполнено неравенство (14). По лемме 7 тем более выполняется неравенство

$$\begin{aligned} E_{n,\mu}(f)_\infty &\leqslant \frac{D}{n^r}\left(\frac{\mathcal{K}_{\mu+1-r-m}}{n^{\mu+1-r-m}}\omega_m\left(f^{(\mu+1-m)}, \frac{\lambda}{n}\right)_\infty\right)^{\frac{r}{r+m}} \\ &\qquad\times\left(\frac{\mathcal{K}_{\mu+1}}{n^{\mu+1}}\|f^{(r+\mu+1)}\|_\infty\right)^{\frac{m}{r+m}} \\ &= \frac{D_1}{n^{\mu+1}}\omega_m^{\frac{r}{r+m}}\left(f^{(\mu+1-m)}, \frac{\lambda}{n}\right)_\infty \|f^{(r+\mu+1)}\|_\infty^{\frac{m}{r+m}}. \end{aligned}$$

Из обратных теорем для приближения сплайнами следует, что если $f \in C^{(\infty)}$ и $E_{n,\mu}(f)_\infty = o\left(\frac{1}{n^{\mu+1}}\right)$, то функция f постоянна. Следовательно, неравенства (14) не могут выполняться ни для какой функции из $C^{(\infty)}$, отличной от постоянной.

Аналогично (и даже с еще большим запасом) доказывается, что не может выполняться неравенство, полученное из (14) заменой $\Xi_{n,\mu-r-m}$ на $\Xi_{n,\mu}$.

Таким образом, вторую величину под знаком максимума в следствии 7 отбросить нельзя; в частности, она не обязана мажорироваться первой. Тем более, этого нельзя сделать в теореме 1 и следствии 6; аналогичное замечание справедливо и по отношению к следующим далее теореме 2 и следствиям 13 и 14.

Следствие 8. *Пусть $n, r, \mu, m \in \mathbb{N}$, $\mu \geqslant r+m-1$, $\lambda > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in C^{(r)}$. Тогда*

$$\Xi_{n,\mu}(f)_p \leqslant \frac{D_{r,m}(\lambda)}{n^r}\left(\frac{\omega_m\left(f^{(r)}, \frac{\lambda}{n}\right)_p}{2^m}\right)^{\frac{r}{r+m}} M_{r,m}^{\frac{m}{r+m}}\left(f^{(r)}, \frac{\lambda}{n}\right)_p. \tag{15}$$

Если $\mu \geqslant r+m$, то Ξ может быть заменено на $\Xi^\times$.

Доказательство. Неравенство (15) следует из (12), если сначала увеличить правую часть, заменив модули непрерывности относительно Ξ_n на модули непрерывности в L_p, а затем учесть, что в силу неравенства (5) для модулей непрерывности в L_p вторая величина под знаком максимума не превосходит первой.

Следствие 9. *Пусть $n, r, \mu, m \in \mathbb{N}$, $\mu \geqslant r+m-1$, $\lambda > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in C^{(r)}$. Тогда*

$$\Xi_{n,\mu}(f)_p \leqslant \frac{D_{r,m}(\lambda)}{n^r} M_{r,m}\left(f^{(r)}, \frac{\lambda}{n}\right)_p. \tag{16}$$

Если $\mu \geqslant r+m$, то Ξ может быть заменено на $\Xi^{\times}$.

При $\lambda = \pi$ правая часть неравенства (16) убывает по m, поэтому наилучшую оценку дает выбор наибольшего m, т.е. $m = \mu+1-r$ для Ξ и $m = \mu - r$ для $\Xi^{\times}$.

Следствие 10. *Пусть $n, r, \mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geqslant r$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in C^{(r)}$. Тогда*

$$\Xi_{n,\mu}(f)_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} M_{r,\mu+1-r}\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_p \qquad (\mu \geqslant r),$$

$$\Xi^{\times}_{n,\mu}(f)_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} M_{r,\mu-r}\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_p \qquad (\mu \geqslant r+1).$$

§4. Дальнейшие результаты для первого модуля непрерывности

Рассмотрим подробнее случай $m = 1$ в теореме 1. Напомним, что

$$M_{r,1}(g,h)_P = \begin{cases} \frac{\omega_1(g,h)_P}{2}, & r \text{ нечетно}, \\ P(g), & r \text{ четно}. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть $P \in A$, $r, s \in \mathbb{N}$, $r \geqslant s$, $n, \lambda > 0$, $f \in C^{(r+1)}$. Тогда*

$$P(f^{(s)}) \leqslant D_{r+1-s,1}(\lambda) \max \left\{ \left(\frac{\omega_1\left(f, \frac{\lambda}{n}\right)_P}{2\mathcal{K}_{r+1}} \right)^{1-\frac{s}{r+1}} \right.$$

$$\times \left(\frac{\omega_1\left(f^{(r+1)}, \frac{\lambda}{n}\right)_P}{2} \right)^{\frac{r+1-s}{r+1}\frac{s-1}{r+2-s}} M_{r+1-s,1}^{\frac{1}{r+2-s}} \left(f^{(r+1)}, \frac{\lambda}{n} \right)_P,$$

$$\left. n \left(\frac{\omega_1\left(f, \frac{\lambda}{n}\right)_P}{2\mathcal{K}_{r+1}} \right)^{1-\frac{s-1}{r+1}} \left(\frac{\omega_1\left(f^{(r+1)}, \frac{\lambda}{n}\right)_P}{2} \right)^{\frac{s-1}{r+1}} \right\}.$$

Доказательство. При $s = 1$ теорема 2 совпадает с теоремой 1 при $m = 1$. Пусть $s > 1$. Применим теорему 1 при $m = 1$ к функции $f^{(s-1)}$ и числу $r + 1 - s$ вместо r. Получим

$$P(f^{(s)}) \leqslant D_{r+s-1,1}(\lambda) \max \left\{ \left(\frac{\omega_1\left(f^{(s-1)}, \frac{\lambda}{n}\right)_P}{2\mathcal{K}_{r+2-s}} \right)^{\frac{r+1-s}{r+2-s}} \right.$$

$$\left. \times M_{r+1-s,1}^{\frac{1}{r+2-s}} \left(f^{(r+1)}, \frac{\lambda}{n} \right)_P, \frac{n\omega_1\left(f^{(s-1)}, \frac{\lambda}{n}\right)_P}{2\mathcal{K}_{r+2-s}} \right\}.$$

Осталось применить к каждой величине под знаком максимума неравенство типа Колмогорова

$$\frac{\omega_1(f^{(s-1)}, h)_P}{\mathcal{K}_{r+2-s}} \leqslant \left(\frac{\omega_1(f, h)_P}{\mathcal{K}_{r+1}} \right)^{1-\frac{s-1}{r+1}} \omega_1^{\frac{s-1}{r+1}}(f^{(r+1)}, h)_P$$

и произвести упрощения.

Следствие 11. *Пусть $P \in A^{\circ}$, $n, r, s \in \mathbb{N}$, $r \geqslant s$, $\lambda > 0$, $f \in C^{(r+1)}$.*

Тогда

$$\Xi_n(f^{(s)})_P \leqslant D_{r+1-s,1}(\lambda)\max\left\{\left(\frac{\omega_1\left(f,\frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_n(\cdot)_P}}{2\mathcal{K}_{r+1}}\right)^{1-\frac{s}{r+1}}\right.$$

$$\times\left(\frac{\omega_1\left(f^{(r+1)},\frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_n(\cdot)_P}}{2}\right)^{\frac{r+1-s}{r+1}\frac{s-1}{r+2-s}} M_{r+1-s,1}^{\frac{1}{r+2-s}}\left(f^{(r+1)},\frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_n(\cdot)_P},$$

$$\left. n\left(\frac{\omega_1\left(f,\frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_n(\cdot)_P}}{2\mathcal{K}_{r+1}}\right)^{1-\frac{s-1}{r+1}}\left(\frac{\omega_1\left(f^{(r+1)},\frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_n(\cdot)_P}}{2}\right)^{\frac{s-1}{r+1}}\right\}.$$

Для доказательства следствия 11 надо применить теорему 2 к полунорме $\Xi_n(\cdot)_P$.

При $s=1$ следствие 11 совпадает со следствием 1 при $m=1$.

Следствие 12. *Пусть $P\in A$, $n,r,s\in\mathbb{N}$, $r\geqslant s$, $\lambda>0$, $f\in C^{(r+1)}$. Тогда*

$$E_n(f^{(s)})_P \leqslant D_{r+1-s,1}(\lambda)\left(\frac{\omega_1\left(f,\frac{\lambda}{n}\right)_{E_n(\cdot)_P}}{2\mathcal{K}_{r+1}}\right)^{1-\frac{s}{r+1}}$$

$$\times\left(\frac{\omega_1\left(f^{(r+1)},\frac{\lambda}{n}\right)_{E_n(\cdot)_P}}{2}\right)^{\frac{r+1-s}{r+1}\frac{s-1}{r+2-s}} M_{r+1-s,1}^{\frac{1}{r+2-s}}\left(f^{(r+1)},\frac{\lambda}{n}\right)_{E_n(\cdot)_P}.$$

Следствие 12 вытекает из следствия 11 и замечания 2.

При $s=1$ следствие 12 совпадает со следствием 2 при $m=1$.

При нечетном $r-s+1$ и произвольном λ следствие 12 содержится в [3].

Следствие 13. *Пусть $P\in A^\circ$, $n,r,s,\mu+1\in\mathbb{N}$, $r\geqslant s$, $\lambda>0$,*

$f \in C^{(r+1)}$. *Тогда*

$$\Xi_{n,\mu}(f^{(s)})_P \leqslant D_{r+1-s,1}(\lambda) \max\left\{ \left(\frac{\omega_1\left(f, \frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_{n,\mu}(\cdot)_P}}{2\mathcal{K}_{r+1}} \right)^{1-\frac{s}{r+1}} \right.$$
$$\times \left(\frac{\omega_1\left(f^{(r+1)}, \frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_{n,\mu}(\cdot)_P}}{2} \right)^{\frac{r+1-s}{r+1}\frac{s-1}{r+2-s}} M_{r+1-s,1}^{\frac{1}{r+2-s}}\left(f^{(r+1)}, \frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_{n,\mu}(\cdot)_P},$$
$$\left. n\left(\frac{\omega_1\left(f, \frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_{n,\mu}(\cdot)_P}}{2\mathcal{K}_{r+1}} \right)^{1-\frac{s-1}{r+1}} \left(\frac{\omega_1\left(f^{(r+1)}, \frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_{n,\mu}(\cdot)_P}}{2} \right)^{\frac{s-1}{r+1}} \right\}.$$

При этом Ξ *может быть заменено на* $\Xi^{\times}$.

Для доказательства следствия 6 надо применить теорему 1 к полунорме $\Xi_{n,\mu}(\cdot)_P$ $(\Xi^{\times}_{n,\mu}(\cdot)_P)$.

При $s = 1$ следствие 13 совпадает со следствием 6 при $m = 1$.

Следствие 14. *Пусть* $n, r, s, \mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geqslant r + s - 1$, $\lambda > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in C^{(r)}$. *Тогда*

$$\Xi_{n,\mu}(f)_p \leqslant \frac{D_{r,1}(\lambda)}{n^r} \max\left\{ \left(\frac{\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_{n,\mu-r-s}(\cdot)_p}}{2} \right)^{\frac{r}{r+s}} \right.$$
$$\times \left(\frac{\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_{n,\mu}(\cdot)_p}}{2} \right)^{\frac{r}{r+s}\frac{s-1}{r+1}} M_{r,1}^{\frac{1}{r+1}}\left(f^{(r)}, \frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_{n,\mu}(\cdot)_p}, \tag{17}$$
$$\left. \left(\frac{\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_{n,\mu-r-s}(\cdot)_p}}{2} \right)^{\frac{r+1}{r+s}} \left(\frac{\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\lambda}{n}\right)_{\Xi_{n,\mu}(\cdot)_p}}{2} \right)^{\frac{s-1}{r+s}} \right\}.$$

Если $\mu \geqslant r + s$, *то* Ξ *может быть заменено на* $\Xi^{\times}$.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $A_0(f) = 0$. Применим следствие 13 к норме в L_p, функции $g = f^{(-s)}$ и числу $r + s - 1$ вместо r. Для завершения доказательства остается воспользоваться неравенствами (13) с s вместо m.

При $s = 1$ следствие 14 совпадает со следствием 7 при $m = 1$.

Замечание 5. Неравенства (17) при различных s не сводятся друг к другу, так как в них фигурируют различные пространства сплайнов. Это различие пропадает, как только мы переходим к модулям непрерывности в L_p или к приближению тригонометрическими полиномами.

Замечание 6. Как следует из результатов работы В. Л. Великина [6], в случае пространств L_p результаты для приближений тригонометрическими многочленами могут быть получены из результатов для приближений сплайнами предельным переходом при $\mu \to \infty$.

Замечание 7. Мы формулируем утверждения для полунорм, заданных на C, и функций класса $C^{(r)}$. С помощью метода распространения [2, с. 152–153] оценки переносятся на более широкие классы функций; в частности, на пространства $W_p^{(r)}$.

Замечание 8. Отметим случаи, когда нам известна точность полученных неравенств. (Точность неравенства вида $\Lambda(f) \leqslant \Pi(f)$ $(f \in X)$ означает, что $\sup\limits_{f \in X} \frac{\Lambda(f)}{\Pi(f)} = 1$.)

1. При $p = 1, \infty$, $P(f) = \|f\|_p$ и шаге модуля непрерывности, равном $\frac{\pi}{n}$, точными являются все неравенства следствий 1–14, так как точными являются вытекающие из них неравенства

$$E_n(f)_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\|f^{(r)}\|_p, \quad E_{n,\mu}(f)_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\|f^{(r)}\|_p. \tag{18}$$

2. При $P(f) = \|f\|_\infty$ и шаге модуля непрерывности, равном $\frac{\pi}{\alpha n}$, α – нечетное натуральное число, точными являются все неравенства следствий 1–4, 6–9 при r нечетном, $m = 1$; все неравенства следствий 11–13 при $r - s + 1$ нечетном; все неравенства следствия 14 при r нечетном (некоторые утверждения после такой спецификации параметров совпадут). Это следует из точности вытекающих из них неравенств (здесь $r, \alpha \in \mathbb{N}$, нечетны, $\mu \geqslant r$)

$$E_n(f)_\infty \leqslant \frac{D_{r,1}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}{n^r}\,\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\alpha n}\right)_\infty,$$

$$E_{n,\mu}(f)_\infty \leqslant \frac{D_{r,1}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}{n^r}\,\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\alpha n}\right)_\infty,$$

установленных, соответственно, в [3] и [4].

Замечание 9. Из точности константы в неравенстве (18) следует, что $\min\limits_{\lambda>0} D_{r,m}(\lambda) = D_{r,m}(\pi) = \mathcal{K}_r$. При $\lambda > \pi$ в неравенствах работы, содержащих в правой части константу $D_{r,m}(\lambda)$, в силу возрастания модулей непрерывности можно заменить $D_{r,m}(\lambda)$ на $D_{r,m}(\pi)$.

Литература

1. Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения.* М., 1987.
2. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций.* Л., 1982.
3. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *Точные неравенства, связанные с оценками приближений периодических функций посредством модулей непрерывности их нечетных производных с различным шагом.* — Проблемы математического анализа. Вып. 19 (1999), 69–88.
4. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *Точные оценки отклонений линейных методов приближения периодических функций посредством линейных комбинаций модулей непрерывности различных порядков.* — Проблемы математического анализа. Вып. 25 (2002).
5. О. Л. Виноградов, *Аналог сумм Ахиезера–Крейна–Фавара для периодических сплайнов минимального дефекта.* — Проблемы математического анализа. Вып. 25 (2002).
6. В. Л. Великин, *О предельной связи между приближениями периодических функций сплайнами и тригонометрическими полиномами.* — Доклады АН СССР. Т. 258. № 3 (1981), 525–529.

Vinogradov O. L., Zhuk V. V. Sharp Kolmogorov-type inequalities for moduli of continuity and best approximations by trigonometric polynomials and splines.

In what follows C is the space of 2π-periodic continuous functions; P is a seminorm defined on C, shift-invariant, and majorized by the uniform norm; $\omega_m(f,h)_P$ is the mth modulus of continuity of a function f with step h and calculated with respect to P; $\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l(r+1)}}{(2l+1)^{r+1}}$, $B_r(x) = -\frac{r!}{2^{r-1}\pi^r}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k\pi x - r\pi/2)}{k^r}$ $(r\in\mathbb{N})$, $B_0(x)=1$, $\gamma_r = \frac{B_r(\frac{1}{2})}{r!}$; $(k) = k_1 + \dots + k_m$,

$$K_{r,m} = \left\{k\in\mathbb{Z}_+^m : 0\leqslant k_\nu \leqslant r+\nu-2-k_1-\dots-k_{\nu-1}\right\},$$

$$A_{r,0} = \tfrac{2}{r!}\int_0^{1/2}\left|B_r(t) - B_r\left(\tfrac{1}{2}\right)\right|dt,$$

$$A_{r,m} = \sum_{k\in K_{r,m}}\left(\prod_{j=1}^{m}|\gamma_{k_j}|\right)A_{r+m-(k),0},\quad \Sigma_{r,m} = \sum_{\nu=0}^{m-1}2^\nu A_{r,\nu},$$

$$M_{r,m}(f,h)_P = \begin{cases} \Sigma_{r,m}^{-1} \sum\limits_{\nu=0}^{m-1} A_{r,\nu}\omega_\nu(f,h)_P, & r \text{ is even}, \\ \Sigma_{r,m}^{-1} \left(\frac{A_{r,0}}{2}\omega_1(f,h)_P + \sum\limits_{\nu=1}^{m-1} A_{r,\nu}\omega_\nu(f,h)_P \right), & \\ & r \text{ is odd}. \end{cases}$$

Theorem 1. *Let $r, m \in \mathbb{N}$, $n, \lambda > 0$, $f \in C^{(r+m)}$. Then*

$$P(f^{(m)}) \leqslant \lambda^r \left\{ \Sigma_{r,m} + 2^m \sum_{k \in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^{m} |\gamma_{k_j}| \right) \frac{\mathcal{K}_{r+m-(k)}}{\lambda^{r+m-(k)}} \right\}$$

$$\times \max \left\{ \left(\frac{\omega_m\left(f, \frac{\lambda}{n}\right)_P}{\mathcal{K}_{r+m} 2^m} \right)^{\frac{r}{r+m}} M_{r,m}^{\frac{m}{r+m}} \left(f^{(r+m)}, \frac{\lambda}{n} \right)_P, \frac{n^m \omega_m\left(f, \frac{\lambda}{n}\right)_P}{\mathcal{K}_{r+m} 2^m} \right\}.$$

For some values of λ and seminorms related to best approximations by trigonometric polynomials and splines in the uniform and integral metrics, the inequalities are sharp.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: olvin@math.spbu.ru,
zhuk@math.spbu.ru

Поступило 22 октября 2002 г.