Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 289, 2002 г.

А. Н. Зиновьев

ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ АРТИНА—ХАССЕ И ИВАСАВЫ ДЛЯ СИМВОЛА ГИЛЬБЕРТА В МНОГОМЕРНОМ ПОЛНОМ ПОЛЕ

Введение

Настоящая работа является непосредственным продолжением работы [1], в которой из явной формулы Востокова куммерова типа выведены обобщенные формулы Артина–Хассе и Ивасавы в полном дискретно нормированном поле характеристики 0 с совершенным полем вычетов характеристики $p > 2$. В данной работе рассматривается обобщенный символ Гильберта в круговом расширении абсолютно неразветвленного многомерного полного поля характеристики 0 с совершенным последним полем вычетов характеристики $p > 2$. Используя технику, развитую в [1, §2], мы переносим основные результаты работы [1] на многомерный случай.

В разделе 1 мы напоминаем определение обобщенного символа Гильберта в многомерном полном поле, а также задаем явное спаривание Востокова на топологических K-группах Милнора.

В разделе 2 рассматривается наиболее содержательный с арифметической точки зрения случай многомерного полного поля смешанной характеристики. В теореме 2.1 из явной формулы Востокова выводятся обобщенные формулы Артина–Хассе. Для формулировки обобщенной формулы Ивасавы в предложении 2.1 и следствии 2.2 логарифмическая производная обобщается на многомерный случай. В теореме 2.2 доказывается обобщенная формула Ивасавы.

Автор выражает глубокую благодарность профессору С. В. Востокову за постановку задачи и ценные замечания.

Терминология и обозначения

На протяжении всей работы будут использоваться следующие

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ No. 00-01-00140.

обозначения:

• p – фиксированное простое число, всюду предполагаем $p \neq 2$;

• v_p – нормализованное p-адическое нормирование на $\mathbb{Q}_p$;

• $\zeta := \zeta_{p^m}$ – фиксированный первообразный корень степени p^m из 1, $m \geqslant 1$;

• μ_{p^m} – циклическая группа, порожденная ζ;

• K – n-мерное полное поле характеристики 0, т.е. поле, для которого задана цепочка полей $K^{(n)} = K$, $K^{(n-1)}$, $\ldots$, $K^{(0)}$, таких, что $K^{(i+1)}$ – полное дискретно нормированное поле с полем вычетов $K^{(i)}$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, а $K^{(0)}$ – совершенное поле характеристики p.

Всюду предполагается, что K – поле смешанной характеристики, т.е. $\operatorname{char}(K) = 0$, *а* $\operatorname{char}(K^{(n-1)}) = p$, *а также что K содержит* μ_{p^m};

• $\overline{K} = K^{(n-1)}$ – первое поле вычетов K;

• $F = K^{(0)}$ – последнее поле вычетов K;

• $t_1, \ldots, t_n$ – фиксированная система локальных параметров поля K (подъемы простых элементов полей вычетов $K^{(i)}$ в K);

• $\bar{v}_K = (v_1, \ldots, v_n) : K^* \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ – нормирование ранга n на поле K, соответствующее системе локальных параметров t_1, $\ldots$, t_n, при этом группа $\mathbb{Z}^n$ упорядочена лексикографически в следующем смысле: $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \leqslant \bar{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, если $a_l \leqslant b_l$, $a_{l+1} = b_{l+1}$, $\ldots$, $a_n = b_n$ при некотором $l \leqslant n$;

• $\mathbb{Z}^n_+ = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}^n \mid \bar{a} > \bar{0}\}$;

• $\mathcal{O}_K = \{\alpha \in K \mid \bar{v}_K(\alpha) \geqslant \bar{0}\}$ – кольцо нормирования ранга n поля K;

• $\mathcal{M}_K = \{\alpha \in K \mid \bar{v}_K(\alpha) > \bar{0}\}$ – максимальный идеал $\mathcal{O}_K$;

• $V_K = 1 + \mathcal{M}_K$ – группа главных единиц поля K относительно нормирования ранга n;

• $K_r(K)$ – r-ая K-группа Милнора поля K, $r \geqslant 1$;

• $VK_r(K)$ – подгруппа $K_r(K)$, порожденная всеми символами вида $\{u, a_2, \ldots, a_r\}$, где $u \in V_K$, а $a_2, \ldots, a_r \in K^*$;

• $K_r^{\mathrm{top}}(K)$ $(VK_r^{\mathrm{top}}(K))$ – r-ая топологическая K-группа Милнора поля K, определение см. в [7];

• $v_K = v_n$ – нормализованное дискретное нормирование на K;

• $\mathfrak{O}_K$ – кольцо целых поля K относительно дискретного нормирования v_K;

• $\mathfrak{M}_K$ – максимальный идеал $\mathfrak{O}_K$;

• $e_K = v_K(p)$ – абсолютный индекс ветвления K;

• $P_K(i) = \{\alpha \in K \mid v_K(\alpha) \geqslant i\}$, $i \in \mathbb{Z}$. В частности, $\mathfrak{O}_K = P_K(0)$, $\mathfrak{M}_K = P_K(1)$;

• $U_K(i) := 1 + P_K(i)$ – подгруппа V_K при $i > 0$;

• $k_0 \subset K$ – поле частных кольца векторов Витта $\mathrm{W}(F)$; как известно, k_0 – абсолютно неразветвленное полное дискретно нормированное поле характеристики 0 с совершенным полем вычетов F;

• $\mathfrak{o}_0$ – кольцо целых k_0, т.е. $\mathfrak{o}_0 = \mathrm{W}(F)$;

• $\mathfrak{R}$ – мультипликативно замкнутая система представителей Тейхмюллера элементов поля F в $\mathfrak{o}_0$;

• $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R} \setminus \{0\}$ – подгруппа в группе единиц $\mathfrak{o}_0^*$ поля k_0;

• φ – автоморфизм Фробениуса поля k_0;

• $\wp : \mathfrak{o}_0 \longrightarrow \mathfrak{o}_0$ – оператор Картье, заданный равенством $\wp(\alpha) = \varphi(\alpha) - \alpha$, $\alpha \in \mathfrak{o}_0$.

Для $\alpha, \beta \in \mathfrak{o}_0$ сравнение $\alpha \equiv \beta \mod (\wp, p^m)$ в кольце $\mathfrak{o}_0$ означает, что существует $\gamma \in \mathfrak{o}_0$ такой, что $\alpha \equiv \beta + \wp(\gamma) \mod p^m$.

На многомерном полном поле K и его мультипликативной группе K^* вводится топология Паршина, полное определение которой можно найти в [5] и [9]. Напомним лишь, что эта топология на K определяется индукцией по размерности поля и в качестве базы окрестностей 0 в K берутся множества вида

$$U_{\{U_i\}} = \Big\{ \sum_{i \gg -\infty} h(a_i) t_n^i \;\Big|\; a_i \in U_i \Big\}, \tag{1}$$

где $\{U_i\}$ – последовательность окрестностей 0 в $K^{(n-1)}$, такая, что $U_i = K^{(n-1)}$ при достаточно больших i, а $h = h_{t_1,\dots,t_{n-1}} : K^{(n-1)} \longrightarrow \mathfrak{O}_K$ – канонический подъем, соответствующий данной системе локальных параметров.

Подмножество $I \subset \mathbb{Z}^n$ называется допустимым, если для любого $1 \leqslant l \leqslant n$ и любого набора $j_{l+1}, \dots, j_n$ существует $i = i(j_{l+1}, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$(i_1, \dots, i_n) \in I,\ i_{l+1} = j_{l+1}, \dots, i_n = j_n \Longrightarrow i_l \geqslant i.$$

1. Обобщенный символ Гильберта и явное спаривание Востокова

Для того, чтобы определить обобщенный символ Гильберта в многомерном полном поле, нам понадобится понятие примарных элементов. Напомним, что $\omega \in K^*$ называется p^m-примарным или для краткости примарным, если расширение $K(\sqrt[p^m]{\omega})/K$ чисто неразветвлено (т.е. получается за счет расширения последних полей вычетов). Легко видеть, что примарные элементы поля K образуют подгруппу в K^*, которую мы обозначаем Ω. Она, очевидно, содержит $(K^*)^{p^m}$. Обозначим $\Omega_m = \Omega/(K^*)^{p^m}$. Для α, $\beta \in \Omega$ мы пишем $\alpha \approx \beta$, если $\alpha/\beta \in (K^*)^{p^m}$.

Ниже мы дадим явную конструкцию примарных элементов и явно опишем группу Ω_m. Для этого нам потребуется ввести ряд важных отображений, в терминах которых также будет получена явная формула Востокова.

Обозначим

$$X\mathfrak{o}_0[[X]] = \left\{ \sum_{\bar r \in I, \bar r > \bar 0} a_{\bar r} X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n} \;\middle|\; a_{\bar r} \right\} \subset \mathfrak{o}_0((X_1))\dots((X_n)),$$

где $\bar r = (r_1, \dots, r_n)$ пробегает допустимое подмножество I в $\mathbb{Z}_+^n$. Положим

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}_{(p)} &:= \mathfrak{o}_0\{\{X_1\}\}\dots\{\{X_{n-1}\}\}((X_n)),\\ \mathfrak{U} &:= 1 + X\mathfrak{o}_0[[X]],\\ \mathcal{H} &:= \langle X_1\rangle \times \dots \times \langle X_n\rangle \times \mathfrak{R}^* \times \mathfrak{U} \subset \mathfrak{o}_{(p)}^*. \end{aligned}$$

Группа $\mathcal{H}$ называется *модулем кривых Картье* поля K.

Любой элемент $\alpha \in K$ может быть представлен в виде сходящегося в топологии Паршина ряда

$$\alpha = \sum_{\bar r \in I} a_{\bar r} t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n},$$

где $a_{\bar r} \in \mathfrak{o}_0$, а $\bar r = (r_1, \dots, r_n)$ пробегает допустимое подмножество I в $\mathbb{Z}^n$, причем если потребовать $a_{\bar r} = \theta_{\bar r} \in \mathfrak{R}$, то разложение попрежнему существует и единственно (с точностью до включения нулевых слагаемых). Отсюда следует, что для любого $\alpha \in K^*$ существует $\underline{\alpha}(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{H}$, такой, что $\underline{\alpha}(t_1, \dots, t_n) = \alpha$. Ряд $\underline{\alpha} \in \mathcal{H}$ называется разложением α в ряд Лорана по локальным параметрам $t_1, \dots, t_n$. Естественно, такое разложение не единственно.

Определим оператор Фробениуса на $\mathfrak{o}_0\{\{X_1\}\}\dots\{\{X_n\}\}$

$$\left(\sum_{\bar r \in \mathbb{Z}^n} a_{\bar r} X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n}\right)^{\triangle} = \sum_{\bar r \in \mathbb{Z}^n} \varphi(a_{\bar r}) X_1^{p\,r_1} \dots X_n^{p\,r_n}, \qquad \text{где} \quad a_{\bar r} \in \mathfrak{o}_0.$$

Для любого $f \in \mathfrak{o}^*_{(p)}$, так как $f^p \equiv f^{\triangle} \mod p$, корректно определена функция

$$l(f) = \frac{1}{p}\log(f^p/f^{\triangle}).$$

Для любого $g \in X\mathfrak{o}_0[[X]]$ корректно определена *функция Артина–Хассе*

$$E(g) = \exp\left(g + \frac{g^{\triangle}}{p} + \frac{g^{\triangle^2}}{p^2} + \dots\right).$$

Если мы обозначим через

$$\mathcal{E}(X) = \exp\left(X + \frac{X^p}{p} + \frac{X^{p^2}}{p^2} + \dots\right) \in \mathbb{Z}_p[[X]]$$

экспоненту Артина–Хассе, то нетрудно убедиться, что для $\theta \in \mathfrak{R}^*$ справедливо $E(\theta X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n}) = \mathcal{E}(\theta X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n})$ при $\bar{r} = (r_1, \dots, r_n) > \bar{0}$.

Функции E и l задают взаимно обратные изоморфизмы между аддитивной группой $X\mathfrak{o}_0[[X]]$ и мультипликативной группой $\mathfrak{U}$. В частности, $l(E(g)) = g$ для $g \in X\mathfrak{o}_0[[X]]$.

Пусть ζ – фиксированный первообразный корень степени p^m из 1, который лежит в K. Выберем $\underline{\zeta}(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{H}$ такой, что $\underline{\zeta}(t_1, \dots, t_n) = \zeta$. Положим

$$\begin{aligned} s_i(X_1, \dots, X_n) &:= \underline{\zeta}(X_1, \dots, X_n)^{p^i} - 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \\ s(X_1, \dots, X_n) &:= s_m(X_1, \dots, X_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Предложение 1.1. *Рассмотрим элемент*

$$\omega(a) := E(a\, s(X_1, \dots, X_n))|_{X_1 = t_1, \dots, X_n = t_n}, \qquad a \in \mathfrak{o}_0.$$

Тогда

1) *$\omega(a)$ является примарным элементом поля K и не зависит (с точностью до p^m-ых степеней) от выбора системы локальных параметров $t_1, \dots, t_n$ и ряда $\underline{\zeta}(X_1, \dots, X_n)$.*
2) *Любой примарный элемент α поля K может быть представлен в виде $\alpha \approx \omega(a)$, где $a \in \mathfrak{o}_0$.*
3) *$\omega(a) \approx \omega(b) \iff a \equiv b \mod (\wp, p^m)$, где a, $b \in \mathfrak{o}_0$.*

Доказательство. См. [2, теорема 3.1] и [4, предложение 1.1]. $\bullet$

Следствие 1.1. *Имеет место изоморфизм*

$$\psi : \mathfrak{o}_0/(p^m\mathfrak{o}_0 + \wp(\mathfrak{o}_0)) \xrightarrow{\sim} \Omega_m,$$
$$\bar{a} \longmapsto \omega(a), \tag{3}$$

где $\bar{a}$ – это вычет элемента $a \in \mathfrak{o}_0$.

Следствие 1.2. *Предположим, что последнее поле вычетов K конечно. Тогда характер $\chi : \Omega_m \longrightarrow \mu_{p^m}$, заданный по формуле*

$$\chi(\omega(a)) = \zeta^{\mathrm{Tr}_{k_0/\mathbb{Q}_p}(a)}, \qquad a \in \mathfrak{o}_0, \tag{4}$$

является изоморфизмом.

Доказательство. См. [2, теорема 3.1 и следствие]. •

Сперва мы определим обобщенный символ Гильберта в частном случае, когда последнее поле вычетов поля K конечно. Локальная теория полей классов К. Като дает непрерывное инъективное отображение взаимности

$$\Psi_K : K_n^{\mathrm{top}}(K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K),$$

где K^{ab} – максимальное абелево расширение K. *Обобщенный символ Гильберта* определяется как спаривание

$$(\ ,\ )_m : K_n^{\mathrm{top}}(K) \times K^* \longrightarrow \mu_{p^m},$$
$$(\alpha, \beta)_m = \sqrt[p^m]{\beta}^{\,\Psi_K(\alpha)-1}, \tag{5}$$

где $\alpha \in K_n^{\mathrm{top}}(K)$, $\beta \in K^*$. Отметим, что для $n = 1$ данное спаривание совпадает с классическим символом Гильберта.

Теперь перейдем к общему случаю совершенного последнего поля вычетов. Предположив дополнительно, что последнее поле вычетов F не является алгебраически p-замкнутым, т.е. F имеет нетривиальные p-расширения, И. Б. Фесенко построил локальную теорию полей p-классов, которая описывает абелевы вполне разветвленные p-расширения поля K. Детальное изложение можно найти в [8]. Обозначим через $\tilde{K}$ максимальное абелево чисто неразветвленное p-расширение поля K. Используя построенное в этой теории отображение взаимности

$$\Psi_K : VK_n^{\mathrm{top}}(K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K), \mathrm{Gal}(K_p^{\mathrm{ab}}/\tilde{K})),$$

где K_p^{ab} – максимальное абелево p-расширение поля K, а элементы группы справа – это непрерывные $\mathbb{Z}_p$-гомоморфизмы относительно дискретной топологии на $\mathrm{Gal}(K_p^{\mathrm{ab}}/\tilde{K})$, И. Б. Фесенко определил спаривание

$$(\, , \,)_m : VK_n^{\mathrm{top}}(K) \times K^* \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K), \mu_{p^m}),$$
$$(\alpha, \beta)_m(\gamma) = \sqrt[p^m]{\beta}^{\,\Psi_K(\alpha)(\gamma)-1}, \tag{6}$$

где $\alpha \in VK_n^{\mathrm{top}}(K)$, $\beta \in K^*$, а $\gamma \in \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$.

Теперь заметим, что, по теории Витта, имеет место изоморфизм

$$\Omega_m \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K), \mu_{p^m}),$$
$$\omega \longmapsto \big(\gamma \mapsto \sqrt[p^m]{\omega}^{\,\gamma-1}\big). \tag{7}$$

Обобщенный символ Гильберта определяется как композиция спаривания (6), и изоморфизма, обратного к (7),

$$(\, , \,)_m : VK_n^{\mathrm{top}}(K) \times K^* \longrightarrow \Omega_m.$$

Отметим, что хотя мы и обозначаем данное спаривание так же, как и обобщенный символ Гильберта (5), определенный в случае конечного последнего поля вычетов, из контекста всегда будет ясно, о каком спаривании идет речь. Эти спаривания связаны естественным образом, а именно сужение спаривания (5) на $VK_n^{\mathrm{top}}(K) \times K^*$ совпадает со сквозным отображением

$$VK_n^{\mathrm{top}}(K) \times K^* \xrightarrow{(\, , \,)_m} \Omega_m \xrightarrow[\sim]{\chi} \mu_{p^m}, \tag{8}$$

где изоморфизм χ определен равенством (4) в следствии 1.2.

Теперь мы перейдем к построению явного спаривания Востокова на топологических K-группах Милнора. Для $\alpha \in \mathfrak{o}_{(p)}^*$ через $\delta_i(\alpha)$ обозначим i-ую логарифмическую производную, т.е.

$$\delta_i(\alpha) = \frac{\partial_i \alpha}{\alpha}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

где $\partial_i \alpha = \frac{\partial}{\partial X_i}\alpha$ – частная производная по X_i. Заметим, что для α, $\beta \in \mathfrak{o}_{(p)}^*$ справедливо равенство

$$\delta_i(\alpha\beta) = \delta_i(\alpha) + \delta_i(\beta). \tag{9}$$

Определим отображение

$$[\,,\dots,\,]_m : (K^*)^{n+1} \longrightarrow \mathfrak{o}_0/(p^m\mathfrak{o}_0 + \wp(\mathfrak{o}_0)),$$
$$[\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}]_m = \operatorname{res}\Phi(\underline{\alpha}_1,\dots,\underline{\alpha}_{n+1})/s, \tag{10}$$

где $\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1} \in K^*$, $\operatorname{res} = \operatorname{res}_{X_1,\dots,X_n}$ – коэффициент ряда Лорана при одночлене $X_1^{-1}\dots X_n^{-1}$, $\underline{\alpha}_1$, $\dots$, $\underline{\alpha}_{n+1} \in \mathcal{H}$ такие, что $\underline{\alpha}_i(t_1,\dots,t_n) = \alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, ряд s определен в (2), а ряд Лорана $\Phi(\underline{\alpha}_1,\dots,\underline{\alpha}_{n+1})$ задан по формуле

$$\Phi(\underline{\alpha}_1,\dots,\underline{\alpha}_{n+1}) = l(\underline{\alpha}_{n+1})D_{n+1} - l(\underline{\alpha}_n)D_n + \dots + (-1)^n l(\underline{\alpha}_1)D_1, \tag{11}$$

где

$$D_i = \frac{1}{p^{n-i+1}}\begin{vmatrix} \delta_1(\underline{\alpha}_1) & \dots & \delta_n(\underline{\alpha}_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_1(\underline{\alpha}_{i-1}) & \dots & \delta_n(\underline{\alpha}_{i-1}) \\ \delta_1(\underline{\alpha}_{i+1}^{\vartriangle}) & \dots & \delta_n(\underline{\alpha}_{i+1}^{\vartriangle}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_1(\underline{\alpha}_{n+1}^{\vartriangle}) & \dots & \delta_n(\underline{\alpha}_{n+1}^{\vartriangle}) \end{vmatrix}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n+1. \tag{12}$$

В [2, предложение 4.3] доказано, что данное спаривание корректно определено, т.е. оно не зависит от выбора системы локальных параметров t_1, $\dots$, t_n, а также от выбора разложений α_1, $\dots$, α_{n+1} и ζ в ряды Лорана по локальным параметрам, что оно мультипликативно по всем аргументам и удовлетворяет соотношению Стейнберга. Нетрудно также убедиться, что оно секвенциально непрерывно по всем аргументам, если на K^* введена топология Паршина, а на $\mathfrak{o}_0/(p^m\mathfrak{o}_0 + \wp(\mathfrak{o}_0))$ – дискретная топология.

Для $1 \leqslant l \leqslant n$ из сформулированных выше свойств $[\,,\dots,\,]_m$ следует, что данное спаривание индуцирует спаривание $\langle\,,\,\rangle_m^{(l)}$ на топологических K-группах Милнора

$$\langle\,,\,\rangle_m^{(l)} : K_l^{\mathrm{top}}(K)/p^m K_l^{\mathrm{top}}(K) \times K_{n+1-l}^{\mathrm{top}}(K)/p^m K_{n+1-l}^{\mathrm{top}}(K) \longrightarrow \Omega_m$$

такое, что для символов $\alpha = \{\alpha_1,\dots,\alpha_l\}$, $\beta = \{\beta_1,\dots,\beta_{n+1-l}\}$ справедливо $\langle\alpha,\beta\rangle_m^{(l)} = \psi([\alpha_1,\dots,\alpha_l,\beta_1,\dots,\beta_{n+1-l}]_m)$, где изоморфизм ψ определен по формуле (3) в следствии 1.1. Обозначим

$$\langle\,,\,\rangle_m := \langle\,,\,\rangle_m^{(n)} : K_n^{\mathrm{top}}(K)/p^m K_n^{\mathrm{top}}(K) \times K^*/(K^*)^{p^m} \longrightarrow \Omega_m.$$

Данное спаривание называется *явным спариванием Востокова*. В случае конечного последнего поля вычетов K явное спаривание

Востокова $\langle\,,\,\rangle_m$ определяется как композиция построенного выше спаривания и изоморфизма χ, заданного по формуле (4) в следствии 1.2.

Теорема 1.1. *Предположим, последнее поле вычетов K не алгебраически p-замкнуто. Тогда для обобщенного символа Гильберта имеет место явная формула*

$$(\alpha,\beta)_m \approx \langle\alpha,\beta\rangle_m, \tag{13}$$

где $\alpha \in VK_n^{\mathrm{top}}(K)$, $\beta \in K^*$.

Более того, если последнее поле вычетов K конечно, то справедлива явная формула

$$(\alpha,\beta)_m = \langle\alpha,\beta\rangle_m, \tag{14}$$

где $\alpha \in K_n^{\mathrm{top}}(K)$, $\beta \in K^*$.

Доказательство. См. [2, теорема 6.1] в случае многомерного локального поля с конечным последним полем вычетов и [3, теорема 4.4] в общем случае. •

2. Обобщенные формулы Артина–Хассе и Ивасавы

Пусть $k = k_0\{\{t_1\}\}\ldots\{\{t_{n-1}\}\}$ – стандартное абсолютно неразветвленное n-мерное полное поле смешанной характеристики с последним полем вычетов F, которое предполагается совершенным характеристики p и не алгебраически p-замкнутым. Обозначим $K = k(\zeta)$ круговое расширение k. Нетрудно проверить, что K/k – вполне разветвленное расширение степени $p^m - p^{m-1}$. Поле K естественным образом наделяется структурой n-мерного полного поля и будет служить многомерным аналогом $\mathbb{Q}_p(\zeta)$ в случае смешанной характеристики. Обозначим $K_0 = k_0(\zeta)$, тогда, очевидно, $K = K_0\{\{t_1\}\}\ldots\{\{t_{n-1}\}\}$. Обозначим $\lambda := 1-\zeta$ простой элемент K как дискретно нормированного поля. В качестве системы локальных параметров поля K зафиксируем t_1, $\ldots$, t_{n-1}, $t_n = \lambda$. Фиксируем разложение ζ в ряд Лорана по локальным параметрам $\underline{\zeta}(X_1,\ldots,X_n) = 1 - X_n \in \mathfrak{U}$. Тогда по (2) $s_i(X_1,\ldots,X_n) = (1-X_n)^{p^i} - 1$, $1 \leqslant i \leqslant m$; а $s(X_1,\ldots,X_n) := s_m(X_1,\ldots,X_n) = (1-X_n)^{p^m} - 1$.

Следуя М. Курихаре в [13, раздел 4.2], введем отображение R_{K/k_0} из n-мерного полного поля K в одномерное поле k_0. Пусть

L – полное дискретно нормированное поле. Определим отображение

$$c_{L\{\{X\}\}/L} : L\{\{X\}\} \longrightarrow L$$

по формуле $c_{L\{\{X\}\}/L}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X^i\right) := a_0$. Определим c_{K/K_0} как композицию

$$c_{K/K_0} = c_{K_0\{\{t_1\}\}/K_0} \circ \dots \circ c_{K/K_0\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{n-2}\}\}}.$$

Лемма 2.1. 1) $c_{K/K_0}(\alpha a+\beta b) = \alpha c_{K/K_0}(a)+\beta c_{K/K_0}(b)$ *для* $\alpha,\beta \in K_0$ *и* $a, b \in K$.

2) $c_{K/K_0}(\alpha) = \alpha$ *для всех* $\alpha \in K_0$.

3) $v_{K_0}(c_{K/K_0}(a)) \geqslant v_K(a)$ *для* $a \in K$, *где* v_{K_0} *– дискретное нормирование на* K_0.

4) c_{K/K_0} *непрерывно относительно топологии Паршина на* K *и топологии дискретного нормирования на* K_0.

Доказательство. Пусть $c_i = c_{K_0\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_i\}\}/K_0\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{i-1}\}\}}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Доказательство свойств 1)–4) для c_{K/K_0} легко сводится к проверке соответствующих свойств отображений c_i, для которых свойства 1)–3) мгновенно следуют из определения. При проверке свойства 4) для c_i достаточно заметить, что $K_0\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_i\}\}$ и $K_0\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{i-1}\}\}$ – стандартные поля смешанной характеристики, и применить альтернативную конструкцию топологии Паршина в [9, 1.3.1, замечание 3]. $\bullet$

Определим *обобщенный след* как композицию

$$R_{K/k_0} = \mathrm{Tr}_{K_0/k_0} \circ c_{K/K_0}.$$

Из свойств следа Tr_{K_0/k_0} и отображения c_{K/K_0} легко следует, что R_{K/k_0} – k_0-линеен и непрерывен.

Так как K – полное дискретно нормированное поле характеристики 0 с полем вычетов характеристики p, формальный степенной ряд $\log(1+X) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{X^i}{i}$ индуцирует гомоморфизм $\log : U_K(1) \longrightarrow K$. При доказательстве обобщенных формул Артина–Хассе и Ивасавы нам потребуется следующий технический результат, который, как будет видно из доказательства, справедлив для произвольного n-мерного полного поля K смешанной характеристики.

Лемма 2.2. *Отображение* $\log : U_K(1) \longrightarrow K$ *секвенциально непрерывно относительно топологии Паршина на* $U_K(1)$ *и* K.

Доказательство. Так как $\log(xy) = \log x + \log y$ для $x,\ y \in U_K(1)$ и умножение секвенциально непрерывно в K^*, достаточно показать, что если $x_n \to 1$ в $U_K(1)$, то $\log x_n \to 0$ в K. Пусть U – окрестность нуля в K. Согласно [5, теорема 1.1, (i)], не умаляя общности, можно считать, что $U = U_{\{U_i\}}$ и является открытой подгруппой в K. По определению множества $U_{\{U_i\}}$ (см. (1)) существует $c \in \mathbb{Z}$, такое, что $P_K(c) \subset U$. Обозначим $x_n = 1 + y_n$, $y_n \in P_K(1)$. Очевидно, $y_n \to 0$ в K. Имеем

$$\log x_n = \log(1 + y_n) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{y_n^i}{i}.$$

Так как $v_K\big((-1)^{i-1}\frac{y_n^i}{i}\big) = i\, v_K(y_n) - e_K v_p(i) \geqslant i - e_K v_p(i) \to +\infty$ при $i \to \infty$, существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $(-1)^{i-1}\frac{y_n^i}{i} \in P_K(c) \subset U$ для любого $i > N$. Значит, $\sum_{i=N+1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{y_n^i}{i} \in U$, поскольку U замкнута как открытая подгруппа топологической группы K. С другой стороны, так как умножение секвенциально непрерывно в K, $\sum_{i=1}^{N}(-1)^{i-1}\frac{y_n^i}{i} \to 0$ при $n \to \infty$ (так как $y_n \to 0$). Поэтому $\sum_{i=1}^{N}(-1)^{i-1}\frac{y_n^i}{i} \in U$ при достаточно больших n. Следовательно, $\log x_n \in U$ при достаточно больших n. •

Теорема 2.1. *Пусть* $\alpha \in U_K(p^{m-1}+1)$. *Тогда справедливы обобщенные формулы Артина–Хассе:*

$$(\{\alpha, t_1, \ldots, t_{n-1}\}, \zeta)_m \approx \omega\left((-1)^n \frac{1}{p^m} R_{K/k_0}(\log \alpha)\right), \tag{15}$$

$$(\{\alpha, t_1, \ldots, t_{n-1}\}, \lambda)_m \approx \omega\left((-1)^{n+1} \frac{1}{p^m} R_{K/k_0}\left(\frac{\zeta}{\lambda} \log \alpha\right)\right). \tag{16}$$

Замечание 2.1. Аналогично [1, замечание 3.1] с использованием леммы 2.1, 3) проверяется, что правые части формул (15) и (16) корректно определены.

Доказательство теоремы 2.1. Проверим (16). По теореме 1.1 достаточно показать, что для $\alpha \in U_K(p^{m-1}+1)$

$$\langle\{\alpha, t_1, \ldots, t_{n-1}\}, \lambda\rangle_m \approx \omega\left((-1)^{n+1} \frac{1}{p^m} R_{K/k_0}\left(\frac{\zeta}{\lambda} \log \alpha\right)\right). \tag{17}$$

I. В силу свойств явного спаривания Востокова левая часть (17) мультипликативна и секвенциально непрерывна по α. Правая часть (17), очевидно, мультипликативна по α. По лемме 2.2 $\log : U_K(1) \longrightarrow K$ секвенциально непрерывен. Как было отмечено выше, отображение R_{K/k_0} непрерывно. Отсюда мгновенно следует, что правая часть (17) секвенциально непрерывна по α. Поэтому достаточно доказать (17) для топологических образующих $U_K(p^{m-1}+1)$. В качестве системы топологических образующих возьмем $\{\mathcal{E}(\theta t_1^{a_1}\dots t_{n-1}^{a_{n-1}}\lambda^{a_n})\}_{\theta\in\mathfrak{R},\, a_n\geqslant p^{m-1}+1}$ (относительно мультипликативных разложений в топологии Паршина см. [6, теорема 2]).

II. Пусть $\alpha = \mathcal{E}(\theta t_1^{a_1}\dots t_{n-1}^{a_{n-1}}\lambda^{a_n})$, где $\theta\in\mathfrak{R}$ и $a_n \geqslant p^{m-1}+1$. Вычислим $\langle\{\alpha, t_1,\dots,t_{n-1}\},\lambda\rangle_m$. В качестве разложений α, t_1, $\dots$, t_{n-1}, λ в ряды Лорана по локальным параметрам выберем $\underline{\alpha}(X_1,\dots,X_n) = \mathcal{E}(\theta X_1^{a_1}\dots X_n^{a_n}) = E(\theta X_1^{a_1}\dots X_n^{a_n})$, так как $\theta\in\mathfrak{R}$, $\underline{t}_i(X_1,\dots,X_n) = X_i$, $1\leqslant i\leqslant n-1$, и $\underline{\lambda}(X_1,\dots,X_n) = X_n$. Тогда по определению явного спаривания Востокова

$$\langle\{\alpha, t_1,\dots,t_{n-1}\},\lambda\rangle_m = \omega\Big(\operatorname{res}\Phi\big(E(\theta X_1^{a_1}\dots X_n^{a_n}), X_1,\dots,X_n\big)/s(X_1,\dots,X_n)\Big). \tag{18}$$

Так как, очевидно, $l(X_i)=0$, $1\leqslant i\leqslant n$, имеем по (11) и (12)

$$\begin{aligned}\Phi(E(\theta X_1^{a_1}\dots X_n^{a_n}), X_1,\dots,X_n) &= (-1)^n l(E(\theta X_1^{a_1}\dots X_n^{a_n}))D_1\\ &= (-1)^n\theta X_1^{a_1}\dots X_n^{a_n}\frac{1}{p^n}\begin{vmatrix} pX_1^{-1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & pX_2^{-1} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & pX_n^{-1}\end{vmatrix}\\ &= (-1)^n\theta X_1^{a_1-1}\dots X_n^{a_n-1}.\end{aligned} \tag{19}$$

Положим $1/s(X_1,\dots,X_n) =: \sum\limits_{\bar\nu\in\mathbb{Z}^n} d_{\bar\nu}X_1^{-\nu_1}\dots X_n^{-\nu_n}$, где $\bar\nu = (\nu_1,\dots,\nu_n)$. Из (18) и (19) получаем, что

$$\begin{aligned}\langle\{\alpha, t_1,\dots,t_{n-1}\},\lambda\rangle_m &= \omega\Big(\operatorname{res}\Big((-1)^n\theta X_1^{a_1-1}\dots X_n^{a_n-1}\sum_{\bar\nu\in\mathbb{Z}^n} d_{\bar\nu}X_1^{-\nu_1}\dots X_n^{-\nu_n}\Big)\Big)\\ &= \omega\big((-1)^n\theta d_{\bar a}\big),\end{aligned}$$

где $\bar a=(a_1,\dots,a_n)$. Так как выбор ряда $s(X_1,\dots,X_n)=(1-X_n)^{p^m}-1$ фиксирован выше, имеем

$$d_{\bar\nu}=\begin{cases}0, & \text{если не все}\quad \nu_1,\dots,\nu_{n-1}\quad \text{равны}\quad 0\quad \text{при}\quad n\geqslant 2,\\ d_{\nu_n}, & \text{если}\quad \nu_1=\dots=\nu_{n-1}=0\quad \text{или}\quad n=1,\end{cases}\tag{20}$$

где $\sum_{\nu\in\mathbb Z}d_\nu X_n^{-\nu}:=1/\bigl((1-X_n)^{p^m}-1\bigr)$ (относительно поведения коэффициентов этого ряда Лорана см. [1, §2]).

$$\begin{aligned}&\langle\{\alpha,t_1,\dots,t_{n-1}\},\lambda\rangle_m\\ &=\begin{cases}1, \text{ если не все } a_1,\dots,a_{n-1} \text{ равны } 0 \text{ при } n\geqslant 2,\\ \omega\bigl((-1)^n\theta d_{a_n}\bigr), \text{ если } a_1=\dots=a_{n-1}=0 \text{ или } n=1.\end{cases}\end{aligned}\tag{21}$$

III. Вычислим значение правой части (17) при $\alpha=\mathcal E(\theta t_1^{a_1}\dots t_{n-1}^{a_{n-1}}\lambda^{a_n})$, где $\theta\in\mathfrak R$ и $a_n\geqslant p^{m-1}+1$. Используя соотношение $\log(\mathcal E(\gamma))=\sum_{\nu=0}^\infty\frac{\gamma^{p^\nu}}{p^\nu}$ для $\gamma\in P_K(1)$ (см. [1, (3.6)]) и лемму 2.1, 1) и 4), получаем

$$\begin{aligned}&(-1)^{n+1}\frac{1}{p^m}R_{K/k_0}\left(\frac{\zeta}{\lambda}\log\bigl(\mathcal E(\theta t_1^{a_1}\dots t_{n-1}^{a_{n-1}}\lambda^{a_n})\bigr)\right)\\ &=(-1)^{n+1}\frac{1}{p^m}\mathrm{Tr}_{K_0/k_0}\underbrace{\left(\frac{\zeta}{\lambda}\sum_{\nu=0}^\infty\frac{\theta^{p^\nu}}{p^\nu}\lambda^{a_np^\nu}c_{K/K_0}(t_1^{a_1p^\nu}\dots t_{n-1}^{a_{n-1}p^\nu})\right)}_{=:A}.\end{aligned}$$

Если не все $a_1,\dots,a_{n-1}$ равны 0 при $n\geqslant 2$, то $c_{K/K_0}(t_1^{a_1p^\nu}\dots t_{n-1}^{a_{n-1}p^\nu})=0$ для всех $\nu\geqslant 0$, значит, в этом случае

$$\omega\left((-1)^{n+1}\frac{1}{p^m}R_{K/k_0}\left(\frac{\zeta}{\lambda}\log\alpha\right)\right)=1.\tag{22}$$

Пусть теперь $a_1=\dots=a_{n-1}=0$ или $n=1$. Тогда, очевидно, (при $n\geqslant 2$ применяем п. 2) леммы 2.1) $A=\frac{\zeta}{\lambda}\sum_{\nu=0}^\infty\frac{\theta^{p^\nu}}{p^\nu}\lambda^{a_np^\nu}$. Аналогично формулам (3.7)–(3.9) в [1] получаем, что

$$(-1)^{n+1}\frac{1}{p^m}\mathrm{Tr}_{K_0/k_0}\left(\frac{\zeta}{\lambda}\sum_{\nu=0}^\infty\frac{\theta^{p^\nu}}{p^\nu}\lambda^{a_np^\nu}\right)\equiv(-1)^n\theta d_{a_n}\mod(\wp,p^m).$$

Следовательно, по предложению 1.1, 3) имеем

$$\omega\left((-1)^{n+1}\frac{1}{p^m}R_{K_0/k}\left(\frac{\zeta}{\lambda}\log\alpha\right)\right)\approx\omega\bigl((-1)^n\theta d_{a_n}\bigr).\tag{23}$$

Требуемое сравнение (17) следует из формул (21), (22) и (23).

Формула (15) выводится из (16) аналогично тому, как (I) выводится из (II) в доказательстве теоремы 1 в [1]. •

В частном случае, когда последнее поле вычетов K конечно, рассуждая аналогично [1, замечание 3.2] и используя (8), нетрудно усилить результаты теоремы 2.1.

Следствие 2.1. *Предположим, что последнее поле вычетов K конечно. Пусть $\alpha \in U_K(1)$. Справедливы обобщенные формулы Артина-Хассе:*

$$(\{t_1, \dots, t_{n-1}, \zeta\}, \alpha)_m = \zeta^{\frac{1}{p^m} R_{K/\mathbb{Q}_p}(\log \alpha)}, \tag{24}$$

$$(\{t_1, \dots, t_{n-1}, \lambda\}, \alpha)_m = \zeta^{-\frac{1}{p^m} R_{K/\mathbb{Q}_p}\left(\frac{\zeta}{\lambda} \log \alpha\right)}, \tag{25}$$

где $R_{K/\mathbb{Q}_p} := \mathrm{Tr}_{k_0/\mathbb{Q}_p} \circ R_{K/k_0} = \mathrm{Tr}_{K_0/\mathbb{Q}_p} \circ c_{K/K_0}$.

Замечание 2.2. В случае $n = 1$ (24) и (25) – это классические формулы Артина-Хассе.

Для того, чтобы сформулировать обобщенную формулу Ивасавы, нам потребуется определить многомерную логарифмическую производную на топологической K-группе Милнора. Обозначим через $\mathfrak{D}_{K/k}$ дифференту расширения полных дискретно нормированных полей K/k. В дальнейшем $P_K(-1)$ и $\mathfrak{D}_{K/k}$ рассматриваются как модули над кольцом $\mathfrak{O}_K$. Зададим отображение

$$\mathrm{Dlog} : (K^*)^n \longrightarrow P_K(-1)/\mathfrak{D}_{K/k}$$

по формуле

$$\mathrm{Dlog}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \left| \begin{matrix} \partial_1 \underline{\alpha}_1 & \dots & \partial_n \underline{\alpha}_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 \underline{\alpha}_n & \dots & \partial_n \underline{\alpha}_n \end{matrix} \right| \Bigg|_{X_1 = t_1, \dots, X_n = t_n}, \tag{26}$$

где $\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_n \in \mathcal{H}$ – разложения элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K^*$ в ряды Лорана по локальным параметрам соответственно. Отображение Dlog будем называть *многомерной логарифмической производной*.

Предложение 2.1. *Многомерная логарифмическая производная* Dlog *корректно определена, т.е.* $\mathrm{Dlog}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in P_K(-1)$ *для любых* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K^*$, *и* $\mathrm{Dlog}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *не зависит по модулю* $\mathfrak{D}_{K/k}$ *от выбора* $\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_n \in \mathcal{H}$. *Более того,* Dlog *удовлетворяет следующим свойствам:*

1) *мультипликативность по всем аргументам, т.е.*

$$\mathrm{Dlog}(\ldots,\alpha_i\alpha_i',\ldots)\equiv\mathrm{Dlog}(\ldots,\alpha_i,\ldots)+\mathrm{Dlog}(\ldots,\alpha_i',\ldots)\mod \mathfrak{D}_{K/k};$$

2) Dlog *удовлетворяет соотношению Стейнберга, т.е.*

$$\mathrm{Dlog}(\ldots,\alpha_i,\ldots,1-\alpha_i,\ldots)\equiv 0\mod \mathfrak{D}_{K/k};$$

3) Dlog *секвенциально непрерывна по всем аргументам, если на K^* задана топология Паршина, а на $P_K(-1)/\mathfrak{D}_{K/k}$ – фактор-топология топологии Паршина на $P_K(-1)$.*

Доказательство. Из (26), очевидно, следует, что

$$\mathrm{Dlog}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\begin{vmatrix}\delta_1\underline{\alpha}_1(t_1,\ldots,t_n) & \ldots & \delta_n\underline{\alpha}_1(t_1,\ldots,t_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \delta_1\underline{\alpha}_n(t_1,\ldots,t_n) & \ldots & \delta_n\underline{\alpha}_n(t_1,\ldots,t_n)\end{vmatrix}. \quad (27)$$

Пусть $\alpha\in K^*$. Предположим, $\underline{\alpha}\in\mathcal{H}$ – разложение α в ряд Лорана по локальным параметрам. По определению модуля кривых Картье $\mathcal{H}$

$$\underline{\alpha}(X_1,\ldots,X_n)=\theta X_1^{j_1}\ldots X_n^{j_n}f(X_1,\ldots,X_n), \quad (28)$$

где $\theta\in\mathfrak{R}^*$; $j_1,\ldots,j_n\in\mathbb{Z}$; $f(X_1,\ldots,X_n)\in\mathfrak{U}$. В силу свойства (9) i-ой логарифмической производной получаем

$$\begin{aligned}\delta_i\underline{\alpha}(t_1,\ldots,t_n)&=\delta_i(\theta X_1^{j_1}\ldots X_n^{j_n})\Big|_{X_1=t_1,\ldots,X_n=t_n}+\delta_i f(t_1,\ldots,t_n)\\ &=j_it_i^{-1}+\frac{\partial_i f(t_1,\ldots,t_n)}{f(t_1,\ldots,t_n)},\qquad 1\leqslant i\leqslant n.\end{aligned}$$

Так как $t_i^{-1}\in\mathfrak{O}_K^*$ при $1\leqslant i\leqslant n-1$, $\partial_i f(t_1,\ldots,t_n)\in\mathfrak{O}_K$ при $1\leqslant i\leqslant n$, а $f(t_1,\ldots,t_n)\in V_K\subset\mathfrak{O}_K^*$, данное соотношение означает, что $\delta_i\underline{\alpha}(t_1,\ldots,t_n)\in\mathfrak{O}_K$ при $1\leqslant i\leqslant n-1$, а $\delta_n\underline{\alpha}(t_1,\ldots,t_n)\in P_K(-1)$. Отсюда и из (27) следует $\mathrm{Dlog}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in P_K(-1)$.

Теперь проверим, что $\mathrm{Dlog}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ не зависит по модулю $\mathfrak{D}_{K/k}$ от выбора $\underline{\alpha}_1$, …, $\underline{\alpha}_n\in\mathcal{H}$. Предположим, что для каждого $\alpha_i\in K^*$ выбрано два различных разложения $\underline{\alpha}_i,\underline{\alpha}_i'\in\mathcal{H}$ в ряд Лорана по локальным параметрам. Заметим, что в представлении (28) $\theta\in\mathfrak{R}^*$ и j_1, …, $j_n\in\mathbb{Z}$ определены однозначно. Поэтому можно считать, что для $1\leqslant i\leqslant n$

$$\underline{\alpha}_i(X_1,\ldots,X_n)=\theta_iX_1^{j_1^{(i)}}\ldots X_n^{j_n^{(i)}}f_i(X_1,\ldots,X_n), \quad (29)$$

$$\underline{\alpha}_i'(X_1,\ldots,X_n)=\theta_iX_1^{j_1^{(i)}}\ldots X_n^{j_n^{(i)}}g_i(X_1,\ldots,X_n), \quad (30)$$

где $\theta_i \in \mathfrak{R}^*$; $j_1^{(i)}, \dots, j_n^{(i)} \in \mathbb{Z}$; $f_i, g_i \in \mathfrak{U}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Очевидно, $f_i(t_1, \dots, t_n) = g_i(t_1, \dots, t_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Обозначим $\mathfrak{o} := \mathfrak{o}_0\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{n-1}\}\}$. Тогда $\mathfrak{o}$ – кольцо целых поля k относительно дискретного нормирования. Обозначим $F_i(X) := f_i(t_1, \dots, t_{n-1}, X)$, $G_i(X) := g_i(t_1, \dots, t_{n-1}, X) \in \mathfrak{o}[[X]]$. Очевидно, $F_i(\lambda) = G_i(\lambda)$ (напомним, что $t_n = \lambda$). Не умаляя общности, можно считать, что Н.О.Д. коэффициентов ряда $F_i - G_i \in \mathfrak{o}[[X]]$ равен 1 (в противном случае разделим на него все коэффициенты). Поэтому, применяя подготовительную лемму Вейерштрасса к $F_i - G_i$, получаем для $1 \leqslant i \leqslant n$

$$F_i(X) - G_i(X) = u(X)\xi_i(X),$$

где $u(X) := \big((1-X)^{p^m} - 1\big)/\big((1-X)^{p^{m-1}} - 1\big)$ – минимальный многочлен λ над k, а $\xi_i(X) \in \mathfrak{o}[[X]]$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Так как коэффициенты $F_i(X)$, $G_i(X)$ и $\xi_i(X)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, являются элементами $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_0\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{n-1}\}\}$, т.е. являются рядами Лорана от $t_1, \dots, t_{n-1}$, подставляя $X_1, \dots, X_{n-1}, X_n$ вместо $t_1, \dots, t_{n-1}, X$ соответственно, можно переписать данное равенство в виде

$$f_i(X_1, \dots, X_n) - g_i(X_1, \dots, X_n) = u(X_n)\psi_i(X_1, \dots, X_n),$$

где $\psi_i(X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{o}_0\{\{X_1\}\} \dots \{\{X_{n-1}\}\}[[X_n]]$ такие, что выполнено $\psi_i(t_1, \dots, t_{n-1}, X) = \xi_i(X)$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. Продифференцируем последнее равенство по X_j и подставим $t_1, \dots, t_n = \lambda$ вместо $X_1, \dots, X_n$ соответственно:

$$\begin{aligned} &\partial_j f_i(t_1, \dots, t_n) - \partial_j g_i(t_1, \dots, t_n) \\ &= \partial_j u(\lambda)\psi_i(t_1, \dots, t_n) + u(\lambda)\partial_j \psi_i(t_1, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Учитывая, что $u(\lambda) = 0$ и $\partial_j u = 0$ при $1 \leqslant j \leqslant n-1$, заключаем, что при $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\partial_j f_i(t_1, \dots, t_n) = \partial_j g_i(t_1, \dots, t_n), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1. \tag{31}$$

С другой стороны, учитывая, что $u(\lambda) = 0$, получаем при $j = n$

$$\partial_n f_i(t_1, \dots, t_n) = \partial_n g_i(t_1, \dots, t_n) + u'(\lambda)\beta_i, \tag{32}$$

где $\beta_i := \psi_i(t_1, \dots, t_n) \in \mathfrak{O}_K = P_K(0)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Чтобы проверить независимость $\mathrm{Dlog}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ от выбора разложений (29) и (30), надо показать, что

$$D^{(1)} := \begin{vmatrix} \delta_1\underline{\alpha}_1(t_1,\dots,t_n) & \dots & \delta_n\underline{\alpha}_1(t_1,\dots,t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_1\underline{\alpha}_n(t_1,\dots,t_n) & \dots & \delta_n\underline{\alpha}_n(t_1,\dots,t_n) \end{vmatrix}$$
$$\equiv \begin{vmatrix} \delta_1\underline{\alpha}'_1(t_1,\dots,t_n) & \dots & \delta_n\underline{\alpha}'_1(t_1,\dots,t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_1\underline{\alpha}'_n(t_1,\dots,t_n) & \dots & \delta_n\underline{\alpha}'_n(t_1,\dots,t_n) \end{vmatrix} =: D^{(2)} \mod \mathfrak{D}_{K/k}. \tag{33}$$

Ввиду свойства (9) j-ой логарифмической производной, равенств (29), (30) и (31), получаем $\delta_j\underline{\alpha}_i(t_1,\dots,t_n) = \delta_j\underline{\alpha}'_i(t_1,\dots,t_n)$ при $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Поэтому по (9) без потери общности можно считать, что $\underline{\alpha}_i = f_i$, $\underline{\alpha}'_i = g_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, отсюда $\alpha_i = f_i(t_1,\dots,t_n) = g_i(t_1,\dots,t_n) \in V_K \subset \mathfrak{O}_K^*$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда, используя (31) и (32), получаем

$$\begin{aligned} D^{(1)} &= \begin{vmatrix} \delta_1 f_1(t_1,\dots,t_n) & \dots & \frac{\partial_n f_1(t_1,\dots,t_n)}{\alpha_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_1 f_n(t_1,\dots,t_n) & \dots & \frac{\partial_n f_n(t_1,\dots,t_n)}{\alpha_n} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \delta_1 g_1(t_1,\dots,t_n) & \dots & \frac{\partial_n g_1(t_1,\dots,t_n)}{\alpha_1} + u'(\lambda)\frac{\beta_1}{\alpha_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_1 g_n(t_1,\dots,t_n) & \dots & \frac{\partial_n g_n(t_1,\dots,t_n)}{\alpha_n} + u'(\lambda)\frac{\beta_n}{\alpha_n} \end{vmatrix} \\ &= D^{(2)} + u'(\lambda) \underbrace{\begin{vmatrix} \delta_1 g_1(t_1,\dots,t_n) & \dots & \beta_1/\alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_1 g_n(t_1,\dots,t_n) & \dots & \beta_n/\alpha_n \end{vmatrix}}_{=:\Delta}. \end{aligned}$$

Требуемое сравнение (33) следует из данного тождества, так как по критерию дифференты $\mathfrak{D}_{K/k} = u'(\lambda)\mathfrak{O}_K$ и, очевидно, $\Delta \in \mathfrak{O}_K$.

Мультипликативность Dlog по всем аргументам легко следует из линейности определителя в представлении (27) относительно строк и того, что модуль кривых Картье $\mathcal{H}$ мультипликативно замкнут. Соотношение Стейнберга для Dlog проверяется аналогично тому, как это сделано в [2, предложение 4.1] для явного спаривания Востокова.

Проверим, что Dlog секвенциально непрерывна по всем аргументам в следующем смысле. Пусть $\alpha_i^{(l)} \to \alpha_i$ при $l \to \infty$ в K^*,

$1 \leqslant i \leqslant n$. Покажем, что

$$\mathrm{Dlog}(\alpha_1^{(l)}, \dots, \alpha_n^{(l)}) \to \mathrm{Dlog}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \qquad \text{при} \quad l \to \infty \tag{34}$$

в $P_K(-1)/\mathfrak{D}_{K/k}$.

Представим $\mathrm{Dlog}(\alpha_1^{(l)}, \dots, \alpha_n^{(l)})$ в виде (27). Из доказанного выше следует, что элементы первых $n-1$ столбца в определителе, стоящем в правой части (27), однозначно определены и лежат в $\mathfrak{O}_K$, в то время как элементы n-ого столбца лежат в $P_K(-1)/\mathfrak{D}_{K/k}$. Поэтому, так как скалярное умножение на элементы $\mathfrak{O}_K$ секвенциально непрерывно в $P_K(-1)/\mathfrak{D}_{K/k}$, что следует из определения топологии на данном $\mathfrak{O}_K$-модуле и секвенциальной непрерывности умножения в топологии Паршина, для доказательства требуемого предела (34) достаточно проверить следующую лемму. $\bullet$

Лемма 2.3. *Пусть $\alpha_l \to \alpha$ в K^*. Тогда*

1) $\delta_j \underline{\alpha_l}(t_1, \dots, t_n) \to \delta_j \underline{\alpha}(t_1, \dots, t_n)$ *в* $\mathfrak{O}_K$ *для* $1 \leqslant j \leqslant n-1$.

2) $\delta_n \underline{\alpha_l}(t_1, \dots, t_n) \to \delta_n \underline{\alpha}(t_1, \dots, t_n)$ *в* $P_K(-1)/\mathfrak{D}_{K/k}$.

Доказательство. Проверим 2). Нетрудно убедиться, что проверка утверждения в общем случае сводится к случаю $\alpha = 1$. Пусть $\alpha_l \to 1$ в K^*. Из определения топологии Паршина на K^* легко следует, что без потери общности можно считать, что $\alpha_l \in V_K \subset \mathfrak{O}_K^*$ для всех l. Очевидно, $\alpha_l^{-1} \to 1$ в топологии на $\mathfrak{O}_K$, индуцированной топологией Паршина на K. Для каждого α_l выберем в качестве разложения в ряд Лорана по локальным параметрам

$$\underline{\alpha_l} = 1 + \sum_{\bar r \in I_l} \theta_{\bar r,\, l} X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n} \in \mathfrak{U},$$

где $\theta_{\bar r,\, l} \in \mathfrak{R}^*$, а $\bar r = (r_1, \dots, r_n)$ пробегает допустимое подмножество I_l в $\mathbb{Z}_+^n$. Отметим, что такое разложение единственно. Так как умножение на элементы $\mathfrak{O}_K$ секвенциально непрерывно, достаточно показать, что

$$\partial_n \underline{\alpha_l}(t_1, \dots, t_n) \to 0 \qquad \text{в} \quad K. \tag{35}$$

Обозначим $a_{\bar r,\, l} := \theta_{\bar r,\, l} t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n}$. Тогда $\alpha_l = 1 + \sum_{\bar r \in I_l} a_{\bar r,\, l}$. Очевидно, $\beta_l := \alpha_l - 1 = \sum_{\bar r \in I_l} a_{\bar r,\, l} \to 0$. Имеем

$$\partial_n \underline{\alpha_l}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{\bar r \in I_l} r_n \theta_{\bar r,\, l} t_1^{r_1} \dots t_{n-1}^{r_{n-1}} t_n^{r_n - 1} = \sum_{\bar r \in I_l} r_n t_n^{-1} a_{\bar r,\, l}.$$

Пусть U – окрестность 0 в K. Не умаляя общности, можно считать, что U – открытая подгруппа в K, значит, U – замкнутая подгруппа в K. Обозначим $U' := t_nU$. Тогда U' – окрестность 0 в K, так как умножение на t_n является гомеоморфизмом. Предположим, мы уже проверили, что $a_{\bar{r},l} \in U'$ для всех $\bar{r} \in I_l$ при достаточно больших l. Тогда при достаточно больших l, очевидно, $\partial_n \underline{\alpha}_l(t_1,\ldots,t_n) = \sum_{\bar{r}\in I_l} r_n t_n^{-1} a_{\bar{r},l} \in U$, так как U – замкнутая подгруппа в K, что и дает нам (35).

Остается лишь проверить, что если $\beta_l = \sum_{\bar{r}\in I_l} a_{\bar{r},l} \to 0$ в K, то для любой окрестности нуля U справедливо $a_{\bar{r},l} \in U$ для всех $\bar{r} \in I_l$ при достаточно больших l.

Мы докажем это утверждение индукцией по размерности поля K. Для $n = 1$ очевидно. Пусть $h = h_{t_1,\ldots,t_{n-1}} : \overline{K} \longrightarrow \mathfrak{O}_K$ – канонический подъем первого поля вычетов $\overline{K}$ в $\mathfrak{O}_K$, соответствующий локальным параметрам $t_1, \ldots, t_{n-1}$. Используя свойство канонического подъема [9, 1.3.1, замечание 1], представим в виде

$$\beta_l = \sum_{r_n \geqslant 0} h\underbrace{\Bigg(\sum_{\bar{r}' \in I_{l,\,r_n}} \bar{\theta}_{\bar{r},l} \bar{t}_1^{r_1} \ldots \bar{t}_{n-1}^{r_{n-1}}\Bigg)}_{=:\gamma_{l,\,r_n} \in \overline{K}} t_n^{r_n} = \sum_{r_n \geqslant 0} h(\gamma_{l,\,r_n}) t_n^{r_n},$$

где $I_{l,r_n} := \bigl\{\bar{r}' = (r_1,\ldots,r_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1} \bigm| \bar{r} = (r_1,\ldots,r_n) \in I_l\bigr\}$. Очевидно, I_{l,r_n} – допустимые подмножества в $\mathbb{Z}^{n-1}$. Из определения топологии Паршина на K легко следует, что $\gamma_{l,r_n} \to 0$ при $l \to \infty$ в $\overline{K}$ для всех $r_n \geqslant 0$. Пусть U – окрестность 0 в K. Можно считать, что $U = U_{\{V_i\}} = \bigl\{\sum_{i\gg-\infty}^{+\infty} h(a_i)t_n^i \bigm| a_i \in V_i\bigr\}$, где $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ – последовательность окрестностей 0 в $\overline{K}$, такая, что $V_i = \overline{K}$ для $i \gg 0$. Допустим, $V_i = \overline{K}$ при $i > M$, $M \in \mathbb{N}$. Как мы уже заметили, $\gamma_{l,i} \to 0$ в $\overline{K}$ для $0 \leqslant i \leqslant M$. Значит, по индукционному предположению для каждого $0 \leqslant i \leqslant M$ существует N_i такое, что для всех $l \geqslant N_i$ имеем $\bar{\theta}_{\bar{r},l}\bar{t}_1^{r_1}\ldots\bar{t}_{n-1}^{r_{n-1}} \in V_i$ для всех $\bar{r}' \in I_{l,i}$. Если положить $N := \max\{N_i \,|\, 0 \leqslant i \leqslant M\}$, то по определению U для всех $l \geqslant N$ выполнено $a_{\bar{r},l} = \theta_{\bar{r},l} t_1^{r_1} \ldots t_n^{r_n} \in U$ для всех $\bar{r} \in I_l$.

Утверждение 1) доказывается аналогично. •

Следствие 2.2. *Отображение* Dlog *индуцирует гомоморфизм*

$$\mathrm{Dlog} : VK_n^{\mathrm{top}}(K) \longrightarrow P_K(-1)/\mathfrak{D}_{K/k}.$$

Более того, если последнее поле вычетов K конечно, то Dlog *индуцирует гомоморфизм*

$$\mathrm{Dlog} : K_n^{\mathrm{top}}(K) \longrightarrow P_K(-1)/\mathfrak{D}_{K/k}.$$

Доказательство. Так как по предложению 2.1 отображение Dlog мультипликативно по всем аргументам и удовлетворяет соотношению Стейнберга, оно индуцирует гомоморфизм

$$\mathrm{Dlog} : K_n(K) \longrightarrow P_K(-1)/\mathfrak{D}_{K/k}.$$

По определению топологической K-группы Милнора имеем $VK_n^{\mathrm{top}}(K) = VK_n(K)/\Lambda_n(K) \cap VK_n(K)$, где $\Lambda_n(K)$ – пересечение окрестностей 0 в $K_n(K)$. Согласно [7, теорема 4.7], $\Lambda_n(K) \cap VK_n(K) = \bigcap_{l\geqslant 1} l\, VK_n(K)$. Так как, очевидно, $p^N VK_n(K) \subset \ker \mathrm{Dlog}$ при достаточно больших N, полученный выше гомоморфизм факторизуется через $VK_n^{\mathrm{top}}(K)$.

Второе утверждение следствия проверяется аналогично. •

Теорема 2.2. *Пусть $\alpha \in U_K(2p^{m-1})$, $\beta \in VK_n^{\mathrm{top}}(K)$. Тогда справедлива обобщенная формула Ивасавы:*

$$(\beta, \alpha)_m \approx \omega\left(-\frac{1}{p^m} R_{K/k_0}(\zeta t_1 \ldots t_{n-1} \log\alpha \,\mathrm{Dlog}\,\beta)\right). \tag{36}$$

Доказательство теоремы 2.2. Аналогично [1, замечание 3.1] с помощью леммы 2.1, 3) проверяется, что правая часть формулы (36) корректно определена. По теореме 1.1 достаточно показать, что

$$\langle\beta, \alpha\rangle_m \approx \omega\left(-\frac{1}{p^m} R_{K/k_0}(\zeta t_1 \ldots t_{n-1} \log\alpha \,\mathrm{Dlog}\,\beta)\right) \tag{37}$$

для всех $\alpha \in U_K(2p^{m-1})$, $\beta \in VK_n^{\mathrm{top}}(K)$.

I. Рассуждая аналогично п. I доказательства теоремы 2.1 и применяя утверждения о топологических образующих топологической K-группы Милнора $VK_n^{\mathrm{top}}(K)$ в [7, 4.2], а также используя секвенциальную непрерывность логарифма и логарифмической производной Dlog по всем аргументам, нетрудно убедиться, что достаточно проверить (37) для

$$\beta = \{\varepsilon, t_1, \ldots, \hat{t}_l, \ldots, t_n\}, \quad 1 \leqslant l \leqslant n,$$
$$\varepsilon = \mathcal{E}(\eta t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n}), \quad \eta \in \mathfrak{R}^*,\ \bar{b} = (b_1, \ldots, b_n) > \bar{0},$$
$$\alpha = \mathcal{E}(\theta t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}), \quad \theta \in \mathfrak{R}^*,\ a_n \geqslant 2p^{m-1}.$$

II. Вычислим $\langle\beta,\alpha\rangle_m$. Выберем $\underline{\alpha}(X_1,\ldots,X_n)=\mathcal{E}(\theta X_1^{a_1}\ldots X_n^{a_n}) = E(\theta X_1^{a_1}\ldots X_n^{a_n})$, $\underline{\varepsilon}(X_1,\ldots,X_n)=\mathcal{E}(\eta X_1^{b_1}\ldots X_n^{b_n})=E(\eta X_1^{b_1}\ldots X_n^{b_n})$ в качестве разложений α и ε в ряды Лорана по локальным параметрам. Заметим, что для $f(X_1,\ldots,X_n)\in\mathfrak{U}$ выполнено

$$\delta_j(f)=\partial_j(\log(f)),\qquad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{38}$$

С помощью (38), а также того, что Δ коммутирует с E, получаем

$$\begin{aligned}\delta_l\big(E(\theta X_1^{a_1}\ldots X_n^{a_n})^{\Delta}\big) &= \delta_l\big(E(\theta^p X_1^{a_1p}\ldots X_n^{a_np})\big)\\ &=\partial_l\big(\log(E(\theta^p X_1^{a_1p}\ldots X_n^{a_np}))\big)=\partial_l\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\theta^{p^{i+1}}}{p^i}X_1^{a_1p^{i+1}}\ldots X_n^{a_np^{i+1}}\right)\\ &=p\,a_lX_l^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}\theta^{p^i}X_1^{a_1p^i}\ldots X_n^{a_np^i}.\end{aligned}\tag{39}$$

Аналогично

$$\delta_l\big(E(\eta X_1^{b_1}\ldots X_n^{b_n})\big)=b_lX_l^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\eta^{p^i}X_1^{b_1p^i}\ldots X_n^{b_np^i}. \tag{40}$$

Выберем $\underline{t}_i=X_i\in\mathcal{H}$, $1\leqslant i\leqslant n$. Используя (38)–(40) и очевидное равенство $l(X_i)=0$, $1\leqslant i\leqslant n$, вычисляем по формуле (11)

$$\begin{aligned}\Phi(\underline{\varepsilon},\underline{t}_1,\ldots,\hat{\underline{t}}_l,\ldots,\underline{t}_n,\underline{\alpha}) &= l(\underline{\alpha})D_{n+1}+(-1)^n l(\varepsilon)D_1\\ &=\theta X_1^{a_1}\ldots X_n^{a_n}D_{n+1}+(-1)^n\eta X_1^{b_1}\ldots X_n^{b_n}D_1,\end{aligned}\tag{41}$$

где D_1 и D_{n+1} определены в (12). Вычислим эти определители с помощью очевидных равенств $\delta_j(X_i)=\delta_{ij}X_i^{-1}$, $\delta_j(X_i^{\Delta})=p\delta_{ij}X_i^{-1}$, где δ_{ij} – индекс Кронекера ($\delta_{ij}=0$ при $i\neq j$, $\delta_{ii}=1$):

$$\begin{aligned}D_{n+1}&=\begin{vmatrix}\delta_1(\underline{\varepsilon}) & \ldots & \delta_{l-1}(\underline{\varepsilon}) & \delta_l(\underline{\varepsilon}) & \delta_{l+1}(\underline{\varepsilon}) & \ldots & \delta_n(\underline{\varepsilon})\\ X_1^{-1} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots & X_{l-1}^{-1} & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & X_{l+1}^{-1} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & X_n^{-1}\end{vmatrix}\\ &=(-1)^{l-1}\delta_l(\underline{\varepsilon})X_1^{-1}\ldots X_{l-1}^{-1}X_{l+1}^{-1}\ldots X_n^{-1}.\end{aligned}\tag{42}$$

Аналогично

$$D_1 = (-1)^{n-l}\frac{1}{p}\delta_l(\underline{\alpha}^{\triangle})X_1^{-1}\dots X_{l-1}^{-1}X_{l+1}^{-1}\dots X_n^{-1}.$$

Подставляя данные соотношения в (41) и применяя (39) и (40), получаем

$$\Phi(\underline{\varepsilon},\underline{t}_1,\dots,\hat{\underline{t}}_l,\dots,\underline{t}_n,\underline{\alpha}) = (-1)^{l-1}X_1^{-1}\dots X_n^{-1}$$
$$\times\left(b_l\sum_{i=0}^{\infty}\theta\eta^{p^i}X_1^{b_1p^i+a_1}\dots X_n^{b_np^i+a_n} - a_l\sum_{i=1}^{\infty}\theta^{p^i}\eta X_1^{a_1p^i+b_1}\dots X_n^{a_np^i+b_n}\right).$$

Следовательно,

$$A := \operatorname{res}\Phi(\underline{\varepsilon},\underline{t}_1,\dots,\hat{\underline{t}}_l,\dots,\underline{t}_n,\underline{\alpha})/s(X_1,\dots,X_n)$$
$$= (-1)^{l-1}\Big(b_l\sum_{i=0}^{\infty}\theta\eta^{p^i}d_{b_1p^i+a_1,\dots,b_np^i+a_n} - a_l\sum_{i=1}^{\infty}\theta^{p^i}\eta d_{a_1p^i+b_1,\dots,a_np^i+b_n}\Big). \tag{43}$$

Чтобы завершить вычисление вычета в (43), рассмотрим два случая.

Случай 1. Допустим, $n = 1$ (отсюда $l = n$) или $a_1 = \dots = a_{n-1} = b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$ при $n \geqslant 2$. Используя (20) и данное предположение, мгновенно получаем

$$A = \begin{cases} 0 \text{ при } l \neq n, \\ (-1)^{n-1}\left(b_n\sum\limits_{i=0}^{\infty}\theta\eta^{p^i}d_{b_np^i+a_n} - a_n\sum\limits_{i=1}^{\infty}\theta^{p^i}\eta d_{a_np^i+b_n}\right) \text{ при } l = n. \end{cases} \tag{44}$$

Случай 2. Допустим, $n \geqslant 2$ и не все $a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$ равны 0. По (20) $d_{b_1p^i+a_1,\dots,b_np^i+a_n} = d_{b_np^i+a_n}$ (в частности, этот коэффициент может быть не равным 0) тогда и только тогда, когда $b_1p^i + a_1 = \dots = b_{n-1}p^i + a_{n-1} = 0$, что равносильно соотношению $\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = -p^i$ при $i \geqslant 0$. В этом случае, очевидно, для всех $j \geqslant 0$, таких, что $j \neq i$, $b_1p^j + a_1 \neq 0$, а для всех $j \geqslant 1$, очевидно, $a_1p^j + b_1 \neq 0$. Таким образом, в данном случае с помощью (20) получаем из (43)

$$A = (-1)^{l-1}b_l\theta\eta^{p^i}d_{b_np^i+a_n}, \qquad \text{если} \quad \frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = -p^i,\ i \geqslant 0.$$

Аналогично из (43) получаем

$$A = (-1)^{l}a_l\theta^{p^i}\eta d_{a_np^i+b_n}, \qquad \text{если} \quad \frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = -p^{-i},\ i \geqslant 1.$$

Окончательно в случае 2 имеем

$$A = \begin{cases} (-1)^{l-1} b_l \theta \eta^{p^\kappa} d_{b_n p^\kappa + a_n} & \text{при } \frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = -p^\kappa, \ \kappa \geqslant 0, \\ (-1)^l a_l \theta^{p^{-\kappa}} \eta d_{a_n p^{-\kappa} + b_n} & \text{при } \frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = -p^\kappa, \ \kappa \leqslant -1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{45}$$

Таким образом, значение левой части (37) равно $\omega(A)$, где A вычисляется по формулам (44) и (45) в случаях 1 и 2 соответственно.

III. Вычислим значение правой части (37) для элементов α, β. Как и в доказательстве теоремы 2.1, имеем

$$\log \alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^{p^i}}{p^i} t_1^{a_1 p^i} \dots t_{n-1}^{a_{n-1} p^i} \lambda^{a_n p^i}. \tag{46}$$

Выберем те же разложения элементов ε, $t_i \in K^*$ в ряды Лорана по локальным параметрам, что и в п. II этого доказательства. Заметим, что $\mathrm{Dlog}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = D_{n+1}\big|_{X_1 = t_1, \dots, X_n = t_n}$ для любых α_1, $\dots$, $\alpha_n \in K^*$, где определитель D_{n+1} определен по (12). Поэтому из (42) с помощью (40) получаем

$$\mathrm{Dlog}\,\beta = (-1)^{l-1} t_1^{-1} \dots t_{n-1}^{-1} \lambda^{-1} b_l \sum_{i=0}^{\infty} \eta^{p^i} t_1^{b_1 p^i} \dots t_{n-1}^{b_{n-1} p^i} \lambda^{b_n p^i}. \tag{47}$$

Подставляя (46) и (47) в правую часть (37), имеем

$$\begin{aligned} B :&= -\frac{1}{p^m} R_{K/k_0} \big(\zeta t_1 \dots t_{n-1} \log \alpha \, \mathrm{Dlog}\,\beta \big) \\ &= -\frac{1}{p^m} R_{K/k_0}(\sigma), \end{aligned} \tag{48}$$

где

$$\sigma := (-1)^{l-1} b_l \zeta \sum_{0 \leqslant i, j < \infty} \frac{\theta^{p^i} \eta^{p^j}}{p^i} t_1^{a_1 p^i + b_1 p^j} \dots t_{n-1}^{a_{n-1} p^i + b_{n-1} p^j} \lambda^{a_n p^i + b_n p^j - 1}.$$

Чтобы завершить вычисление, как и в п. II данного доказательства, рассмотрим два случая.

Случай 1. Допустим, $n = 1$ (отсюда $l = n$) или $a_1 = \dots = a_{n-1} = b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$ при $n \geqslant 2$. Если $l \neq n$, то $b_l = 0$. Значит, по (48) $B = 0$. Пусть теперь $l = n$. Отметим, что $b_n > 0$, так как $\bar{b} = (0, \ldots, 0, b_n) > \bar{0}$. Учитывая сделанное предположение и применяя лемму 2.1, 2), аналогично формулам (3.18)–(3.21) в [1] получаем

$$B \equiv \begin{cases} 0 & \text{при} \quad l \neq n \\ B' & \text{при} \quad l = n \end{cases} \mod (\wp, p^m), \tag{49}$$

где

$$B' := (-1)^{n-1} b_n \left(\sum_{i=0}^{\infty} \theta\, \eta^{p^i} d_{b_n p^i + a_n} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta^{p^i} \eta}{p^i} d_{a_n p^i + b_n} \right).$$

Значит, по предложению 1.1, 3) правая часть (37) $\omega(B) \approx 1$ при $l \neq n$ и $\omega(B) \approx \omega(B')$ при $l = n$.

Случай 2. Допустим, $n \geqslant 2$ и не все $a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots, b_{n-1}$ равны 0. Для σ, определенного по (48), используя непрерывность и K_0-линейность отображения c_{K/K_0}, получаем

$$c_{K/K_0}(\sigma) = (-1)^{l-1} b_l \zeta$$
$$\times \sum_{0 \leqslant i,j < \infty} \frac{\theta^{p^i} \eta^{p^j}}{p^i} \lambda^{a_n p^i + b_n p^j - 1} c_{K/K_0}\big(t_1^{a_1 p^i + b_1 p^j} \ldots t_{n-1}^{a_{n-1} p^i + b_{n-1} p^j}\big). \tag{50}$$

По определению отображения c_{K/K_0} имеем

$$c_{K/K_0}\big(t_1^{a_1 p^i + b_1 p^j} \ldots t_{n-1}^{a_{n-1} p^i + b_{n-1} p^j}\big)$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 p^i + b_1 p^j = \cdots = a_{n-1} p^i + b_{n-1} p^j = 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{51}$$

Условие $a_1 p^i + b_1 p^j = \cdots = a_{n-1} p^i + b_{n-1} p^j = 0$ равносильно соотношению $\frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = -p^{j-i}$. Обозначим $\kappa := j - i$. Пусть

$$\frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = -p^{\kappa}, \qquad \kappa \in \mathbb{Z}. \tag{52}$$

Рассмотрим два подслучая.

Пусть $\kappa \geqslant 0$. Очевидно, условие $a_1 p^i + b_1 p^j = \cdots = a_{n-1} p^i + b_{n-1} p^j = 0$ выполнено для пары (i, j), где i, $j \geqslant 0$, тогда и только тогда, когда $j = i + \kappa$, $i \geqslant 0$. Аналогично формулам (3.7)–(3.9) в [1] продолжим вычисление по формуле (48) с помощью (50) и (51).

$$B = -\frac{1}{p^m} \mathrm{Tr}_{K_0/k_0} \left((-1)^{l-1} b_l \zeta \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^{p^i} \eta^{p^{i+\kappa}}}{p^i} \lambda^{a_n p^i + b_n p^{i+\kappa} - 1} \right)$$
$$\equiv (-1)^{l-1} b_l \theta \eta^{p^{\kappa}} d_{b_n p^{\kappa} + a_n} \mod (\wp, p^m). \tag{53}$$

Отметим, что при этом мы используем предположение $a_n \geqslant 2p^{m-1}$.

Аналогично рассмотрев подслучай $\kappa \leqslant -1$, получаем в случае 2 по $\mod (\wp, p^m)$

$$B \equiv \begin{cases} (-1)^{l-1} b_l \theta \eta^{p^\kappa} d_{b_n p^\kappa + a_n} \text{ при } \frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = -p^\kappa, \kappa \geqslant 0, \\ (-1)^{l-1} b_l p^\kappa \theta^{p^{-\kappa}} \eta d_{a_n p^{-\kappa} + b_n} \text{ при } \frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = -p^\kappa, \kappa \leqslant -1, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{54}$$

IV. Для завершения проверки (37) остается лишь показать, что в случаях 1 и 2 $\omega(A) \approx \omega(B)$.

Случай 1. Сравнивая (44) и (49), видим, что $\omega(A) \approx \omega(B) \approx 1$ при $l \neq n$. При $l = n$ надо проверить, что

$$A \equiv B' \mod (\wp, p^m), \tag{55}$$

где A вычисляется по (44) для $l = n$, а B' определено в (49). Доказательство (55) аналогично проверке (3.23) в [1].

Случай 2. Сравнивая (45) и (54), мы видим, что, если условие (52) выполнено и $\kappa \geqslant 0$, то $\omega(A) \approx \omega(B)$ по предложению 1.1, 3). Пусть теперь выполнено (52) и $\kappa \leqslant -1$. Если $l \neq n$, то по (52) $a_l = -b_l p^\kappa$, и из (45) и (54) следует $A \equiv B \mod (\wp, p^m)$. Рассмотрим случай $l = n$. В силу (45) и (54) надо показать, что

$$(-1)^n a_n \theta^{p^{-\kappa}} \eta d_{a_n p^{-\kappa} + b_n} \equiv (-1)^{n-1} b_n p^\kappa \theta^{p^{-\kappa}} \eta d_{a_n p^{-\kappa} + b_n} \mod (\wp, p^m).$$

Для этого достаточно проверить, что

$$p^\kappa d_{a_n p^{-\kappa} + b_n} (a_n p^{-\kappa} + b_n) \equiv 0 \mod p^m. \tag{56}$$

Данное сравнение следует из [1, леммы 2.2 и 2.3], если мы учтем, что $a_n \geqslant 2p^{m-1}$.

Если условие (52) не выполнено, то по (45) и (54) $\omega(A) \approx \omega(B) \approx 1$. Теорема полностью доказана. •

Из теоремы 2.2 и следствия 2.1 нетрудно вывести

Следствие 2.3. *Предположим, что последнее поле вычетов K конечно. Пусть $\alpha \in U_K(2p^{m-1})$, $\beta \in K_n^{\mathrm{top}}(K)$. Тогда справедлива обобщенная формула Ивасавы:*

$$(\beta, \alpha)_m = \zeta^{-\frac{1}{p^m} R_{K/\mathbb{Q}_p}(\zeta t_1 \ldots t_{n-1} \log \alpha \, \mathrm{Dlog}\, \beta)}, \tag{57}$$

где $R_{K/\mathbb{Q}_p} := \mathrm{Tr}_{k_0/\mathbb{Q}_p} \circ R_{K/k_0} = \mathrm{Tr}_{K_0/\mathbb{Q}_p} \circ c_{K/K_0}$.

Замечание 2.3. При $n = 1$ (57) – это классическая формула Ивасавы.

Замечание 2.4. В работе [13] М. Курихара, используя экспоненциальный гомоморфизм для K-групп Милнора, вывел из классической формулы Артина-Хассе явную формулу, аналогичную (57), для обобщенного символа Гильберта в произвольном n-мерном локальном поле смешанной характеристики, содержащем μ_{p^m}, последнее поле вычетов которого конечно.

Замечание 2.5. В общем случае n-мерного полного поля K характеристики 0, содержащего μ_{p^m}, первое поле вычетов которого не обязательно имеет характеристику p, также определяется обобщенный символ Гильберта. В этой ситуации поле K содержит подполе смешанной характеристики. В работе [3] с помощью спуска в данное подполе построено явное спаривание Востокова и доказано, что оно совпадает с обобщенным символом Гильберта. Используя эту идею, из явных формул Артина-Хассе и Ивасавы, полученных в разделе 2, нетрудно вывести соответствующие явные законы взаимности в общем случае.

Литература

1. А. Н. Зиновьев, *Обобщенные формулы Артина-Хассе и Ивасавы.* — Алгебра и анализ **13** (2001), вып. 4, 86–109.
2. С. В. Востоков, *Спаривание на K-группах многомерных полных полей.* — Труды С.-Петерб. мат. общ. **3** (1995), 140-184.
3. С. В. Востоков, *Спаривание Гильберта в полном многомерном поле.* — Труды МИАН им. В. А. Стеклова **208** (1995), 80-92.
4. Т. Б. Беляева, С. В. Востоков, *Символ Гильберта в полном многомерном поле.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 5-34.
5. И. Б. Жуков, А. И. Мадунц, *Многомерные полные поля: топология и другие основные понятия.* — Труды С.-Петерб. мат. общ. **3** (1995), 4-46.
6. И. Б. Жуков, А. И. Мадунц, *Аддитивные и мультипликативные разложения в многомерных локальных полях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **272** (2000), 186-195.
7. И. Б. Фесенко, *Секвенциальные топологии и факторы милноровских K-групп многомерных локальных полей.* — Алгебра и анализ **13** (2001), вып. 3, 198-221.
8. I. B. Fesenko, *Abelian local p-class field theory.* — Math. Ann. **301** (1995), 561-586.
9. I. B. Zhukov, *Higher dimensional local fields.* — Geometry & Topology Monogr. **3** (2000): Invitation to higher local fields, 5-18.

10. E. Artin, H. Hasse, *Die beiden Ergänzungssätze zum Reziprozitätsgesetz der l^n-ten Potenzreste im Körper der l^n-ten Einheitswurzeln.* — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **6** (1928), 146-162.
11. K. Iwasawa, *On explicit formulas for the norm residue symbol.* — J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 151-165.
12. P. Kölcze, *Explizite Formeln für das klassische Hilbertsymbol.* — Dissertation, Regensburg, 1994.
13. M. Kurihara, *The exponential homomorphisms for the Milnor K-groups and an explicit reciprocity law*, J. Reine Angew. Math. **498** (1998), 201-221.

Zinoviev A. N. Generalized Artin–Hasse and Iwasawa formulas for the Hilbert symbol in a higher local field.

In the paper we consider the generalized Hilbert symbol in the cyclotomic extension of an absolutely unramified higher local field of characteristic 0 with perfect last residue field of characteristic $p > 2$. We deduce the generalized Artin–Hasse and Iwasawa formulas from the explicit Kummer type Vostokov formula.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 20 октября 2002