Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 289, 2002 г.

И. М. Зильберборд

ЧИСТОТЫ И ЧИСТО–ИНЪЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ НАД ПОЛУЦЕПНЫМИ НЕТЕРОВЫМИ СПРАВА КОЛЬЦАМИ

Напомним, что модуль называется цепным, если структура его подмодулей линейно упорядочена относительно включения, и полуцепным, если он является прямой суммой некоторого семейства цепных модулей. Кольцо R – полуцепное, если R_R и ${}_RR$ – полуцепные модули.

В данной работе исследуются индуктивные чистоты в категории правых модулей над произвольным полуцепным нётеровым справа кольцом R и неразложимые чисто-инъективные (относительно чистоты по Кону) правые R-модули. В §1 (см. теорему 1.7) доказано, что произвольный подмодуль прямой суммы семейства конечно порождённых правых R-модулей также является прямой суммой конечно порождённых модулей. Заметим, что первым результатом подобного рода была теорема Куликова (см. [1] или [2, теорема 18.1]) о подгруппах прямых сумм циклических групп, а для случая полуцепного двусторонне нётерова кольца R аналогичный результат вытекает из работы [3] (см. также [4, лемма 4]). В силу результатов статьи [4] теорема 1.7 позволяет классифицировать все индуктивные чистоты в категории правых модулей над любым полуцепным нётеровым справа кольцом.

Основной результат §2 – описание неразложимых чисто-инъективных неинъективных модулей над полуцепными нётеровыми справа кольцами. Это описание получено при помощи редукции к случаю полуцепных наследственных справа колец. Отметим, что чисто-инъективные модули над полуцепными двусторонне нётеровыми кольцами были полностью исследованы в статье [5]. Чисто-инъективные модули над полуцепными нётеровыми только справа кольцами изучались с точки зрения теории моделей для модулей в работах [6], [7]. В статье [8] доказано, что класс всех редуцированных чисто-инъективных правых модулей над полуцепным нётеровым справа кольцом R совпадает с классом всех правых модулей, полных в некоторой специальной R-топологии.

Далее везде R обозначает двусторонне неразложимое полуцепное нётерово справа, но не слева кольцо, J – радикал Джекобсона кольца R, N – ниль-радикал кольца R. Если не оговорено противное, все модули являются правыми унитарными R-модулями. Пусть M – некоторый R-модуль, тогда $\mathrm{E}_R(M)$ обозначает инъективную оболочку модуля M, а $\mathrm{PE}_R(M)$ – его чисто-инъективную оболочку.

В дальнейшем, рассматривая модуль M над фактор-кольцом S_1 некоторого кольца S как S-модуль, мы будем предполагать, что S действует на M с помощью канонического эпиморфизма $\pi : S \to S_1$. Обратно, любой S-модуль, аннулируемый $\mathrm{Ker}\,(\pi)$, можно естественным образом рассматривать как S_1-модуль.

§1. Индуктивные чистоты в категории R-модулей

Мы напомним некоторые свойства конечно порождённых R-модулей. В силу теоремы Дрозда – Уорфилда ([9], [10, теорема 3.3]) любой конечно порождённый модуль над R – полуцепной. Следовательно, любой неразложимый конечно порождённый R-модуль B – цепной циклический, причём B является фактор-модулем некоторого главного неразложимого модуля eR, где e – примитивный идемпотент кольца R. Заметим, что тогда eR – проективное накрытие модуля B.

Определение. Пусть M – ненулевой циклический цепной R-модуль.

(1) M называется *модулем первого типа*, если M артинов и имеет неартиново проективное накрытие;

(2) M называется *модулем второго типа*, если M неартинов (и потому имеет неартиново проективное накрытие);

(3) M называется *модулем третьего типа*, если M имеет артиново проективное накрытие.

Замечание. Это определение было дано в работе [11] и соответствует тому, как в работе [12] нумеруются компоненты колчана Ауслендера–Райтен кольца R.

Пусть $\mathbb{S}$ – некоторое фиксированное далее полное множество ортогональных примитивных идемпотентов в R, $\mathbb{S}_1 = \{g \in \mathbb{S} \mid$

gR – неартинов модуль$\}$, $\mathbb{S}_2 = \mathbb{S} \setminus \mathbb{S}_1$. Введём обозначения: $e = \sum\limits_{g \in \mathbb{S}_1} g$, $f = 1 - e$, $T = fRf$, $n_0 = \min\{l \in \mathbb{N} \mid eN^l = 0\}$. Отметим, что $fRe = 0$, $eRe \simeq R/Rf$ – полуцепное hnp-кольцо, $T = fRf$ – полуцепное артиново кольцо ([13, теорема 2.11], [14, §6]).

Так как любой главный неразложимый R-модуль изоморфен одному из модулей gR ($g \in \mathbb{S}$), то с точностью до изоморфизма все модули первого типа – это модули gR/gJ^t ($g \in \mathbb{S}_1$, $t \in \mathbb{N}$), модули второго типа – это модули gR/gN^k ($g \in \mathbb{S}_1$, $k \in \{1, 2, \ldots, n_0\}$), а модули третьего типа – это модули gR/gJ^l ($g \in \mathbb{S}_2$, $l \in \mathbb{N}$) (см., например, [11, §1]). Кроме того, модули третьего типа – это все цепные циклические T-модули, и с точностью до изоморфизма их существует лишь конечное число.

Пусть $k \leqslant n_0$, тогда модули вида eR/eN^k называются модулями с k-той окружности.

Предложение 1.1 (см. [4], [12]). *Если B и C – модули с k-той окружности, где $k \in \{1, 2, \ldots, n_0\}$, то:*

(1) *существует мономорфизм $\varphi : C \to B$, более того, все неартиновы подмодули модуля B также являются модулями с k-той окружности;*

(2) *наибольшие артиновы подмодули модулей B и C изоморфны друг другу, имеют длину $k - 1$ и при $k > 1$ являются модулями третьего типа.*

Следствие 1.1.1. *Пусть B – модуль с k-той окружности, D – цепной циклический модуль. Если существует мономорфизм $\varphi : B \to D$, то модуль D является модулем с k-той окружности.*

Следствие 1.1.2. *Если B – модуль с k-той окружности, C – модуль с l-той окружности, $\psi : B \to C$ – ненулевой гомоморфизм, то $k \geqslant l$. Если, кроме того, $k = l$, то гомоморфизм ψ является мономорфизмом.*

Доказательство. Ясно, что модуль $C' = \mathrm{Im}(\psi)$ имеет неартиново проективное накрытие, и по предложению 1.1 C' является модулем с l-той окружности, где $k \geqslant l$. $\bullet$

Определение. Пусть M – R-модуль. Определим $\mathrm{A}(M)$ как сумму всех подмодулей третьего типа в M, т.е. $\mathrm{A}(M) = Mf$.

Лемма 1.2. *Любой R-модуль M такой, что $Me = 0$, является прямой суммой некоторого семейства модулей третьего типа. В* *частности, для произвольного R-модуля M модуль $\mathrm{A}(M)$ – прямая сумма семейства модулей третьего типа.*

Доказательство. Поскольку M – модуль над полуцепным артиновым кольцом $T \simeq R/eR$, то по [15, теорема 25.4.2] модуль M – прямая сумма цепных циклических T-модулей, т.е. модулей третьего типа. $\bullet$

Лемма 1.3. *Пусть $\{C_k\}_{k\in K}$ – семейство R-модулей, $B = \bigoplus\limits_{k\in K} C_k$, Q – цепной подмодуль модуля B, π_k – ограничение на Q канонической проекции $pr_k : B \to C_k$. Если Q – циклический модуль, или множество K конечно, то для некоторого $k \in K$ π_k – мономорфизм.*

Доказательство. Если модуль Q конечно порождён, то для почти всех $k \in K$ имеем $\pi_k = 0$. Итак,

$$0 = \bigcap_{k\in K} \mathrm{Ker}\,(\pi_k) = \bigcap_{\{k:\pi_k\neq 0\}} \mathrm{Ker}\,(\pi_k)$$

– пересечение конечного числа подмодулей цепного модуля Q. Следовательно, для некоторого $k \in K$ $\mathrm{Ker}\,(\pi_k) = 0$. $\bullet$

Определение. Пусть M – R-модуль, A – подмодуль третьего типа в M. Будем говорить, что A удовлетворяет условию $(*)$ относительно M, если существует мономорфизм $\alpha : A \to B$, где B – некоторый подмодуль второго типа в M.

Теорема 1.4. *Любой R-модуль M допускает разложение $M = Q \oplus M_1$, где M_1 – такой модуль, что все подмодули третьего типа в M_1 удовлетворяют условию $(*)$ относительно M_1, а модуль Q – прямая сумма семейства модулей третьего типа, каждый из которых не удовлетворяет условию $(*)$ относительно M.*

Доказательство. По лемме 1.2 $\mathrm{A}(M) = \bigoplus\limits_{i\in I} D_i$ – прямая сумма некоторого семейства модулей третьего типа. Рассмотрим множество $L = \{i \in I \mid D_i$ не удовлетворяет условию $(*)$ относительно $M\}$ и модуль $Q = \bigoplus\limits_{i\in L} D_i$. Пусть C – некоторый цепной циклический подмодуль модуля M. Докажем, что Q – прямое слагаемое модуля $M' = Q+C$. Предположим, что подмодуль $C' = Q\cap C \neq 0$. Так как C' – циклический цепной подмодуль модуля Q, то C' –

модуль третьего типа, и потому C – модуль второго или третьего типа.

Пусть C – модуль второго типа. По лемме 1.3 для некоторого $i \in L$ существует мономорфизм $\tau : C' \hookrightarrow D_i$, поэтому в силу цепности инъективной оболочки модуля C' (см. [13, теорема 1.1]) существует мономорфизм $\rho : D_i \hookrightarrow C$. Но тогда модуль D_i удовлетворяет условию $(*)$ относительно M, что противоречит предположению. Следовательно, C – модуль третьего типа, и $M' \subset \mathrm{A}(M)$. По построению Q – прямое слагаемое модуля $\mathrm{A}(M)$, поэтому Q – прямое слагаемое модуля M'.

Таким образом, в силу теоремы Дрозда–Уорфилда ([9], [10, теорема 3.3]) Q – прямое слагаемое любого такого подмодуля M_1 модуля M, что $Q \subset M_1$ и модуль M_1/Q конечно порождён. Следовательно, Q – чистый по Кону подмодуль модуля M, и согласно [11, следствие 2.1.1] Q – прямое слагаемое модуля M. Пусть $M = Q \oplus M_1$, где M_1 – некоторый подмодуль в M. Поскольку модуль Q не содержит подмодулей второго типа, то в силу леммы 1.3 любой подмодуль второго типа в M изоморфен некоторому подмодулю второго типа в M_1. Поэтому для подмодулей третьего типа в M_1 условие $(*)$ относительно M равносильно условию $(*)$ относительно M_1. Так как $\mathrm{A}(M) = Q \oplus \mathrm{A}(M_1)$, то $\mathrm{A}(M_1) \simeq \mathrm{A}(M)/Q \simeq \bigoplus\limits_{i \in I \setminus L} D_i$ – прямая сумма модулей, каждый из которых удовлетворяет условию $(*)$ относительно M_1. Пусть X – подмодуль третьего типа в M_1, тогда $X \subset \mathrm{A}(M_1)$, и по лемме 1.3 для некоторого $i \in I \setminus L$ существует мономорфизм $\varphi : X \to D_i$. Следовательно, X также удовлетворяет условию $(*)$ относительно M_1. •

Следствие 1.4.1. *Если все прямые слагаемые R-модуля M, являющиеся модулями третьего типа, удовлетворяют условию $(*)$ относительно M, то любой подмодуль третьего типа в M удовлетворяет условию $(*)$ относительно M.*

Замечание 1.4.2. Можно дать непосредственное доказательство следствия 1.4.1. Действительно, пусть M содержит подмодули третьего типа, не удовлетворяющие условию $(*)$ относительно M, а подмодуль C имеет максимальную длину среди всех таких подмодулей модуля M. Легко видеть, что тогда любой мономорфизм $\alpha : C \to D$, где D – циклический цепной подмодуль модуля M, является изоморфизмом. Согласно [11, лемма 2.2 и замечание 2.2.1] C – чистый по Кону подмодуль модуля M, и ввиду [11, следствие 2.1.1] подмодуль C выделяется прямым слагаемым в M.

Предложение 1.5. *Пусть* $\{C_k\}_{k\in K}$ *– семейство модулей второго типа с одной и той же s-той окружности,* $B = \bigoplus_{k\in K} C_k$, A *– подмодуль модуля* B. *Тогда модуль* A *– прямая сумма некоторого семейства циклических цепных модулей.*

Доказательство. (Ср. с доказательством свободы любой подгруппы свободной абелевой группы [2, теорема 14.5]).

Пусть множество индексов K вполне упорядочено, и K равно множеству порядковых чисел, меньших порядкового числа τ. Для $\sigma \leqslant \tau$ обозначим $B_\sigma = \bigoplus_{k<\sigma} C_k$, $A_\sigma = A \cap B_\sigma$, тогда $A_\sigma = A_{\sigma+1} \cap B_\sigma$, поэтому $A_{\sigma+1}/A_\sigma \simeq (A_{\sigma+1} + B_\sigma)/B_\sigma$. Последний модуль вкладывается в модуль $C_\sigma \simeq B_{\sigma+1}/B_\sigma$. Пусть $c_\sigma R$ – подмодуль модуля C_σ, являющийся образом этого вложения, где $c_\sigma \in C_\sigma h$ для некоторого примитивного идемпотента h в R. Тогда существует эпиморфизм $\beta : A_{\sigma+1} \to c_\sigma R$ такой, что $\mathrm{Ker}\,(\beta) = A_\sigma$. Пусть $a_\sigma \in \beta^{-1}(c_\sigma)h$. Заметим, что $A_{\sigma+1} = A_\sigma + a_\sigma R$, причём ограничение гомоморфизма β на цепной подмодуль $a_\sigma R$ даёт эпиморфизм $\beta_0 : a_\sigma R \to c_\sigma R$. Докажем, что $Y = \mathrm{Ker}\,(\beta_0)$ – нулевой модуль.

По лемме 1.3 для некоторого $k_0 \in K$ существует мономорфизм $\alpha : a_\sigma R \to C_{k_0}$. Тогда существует мономорфизм $\rho : c_\sigma R \hookrightarrow C_{k_0}/\alpha(Y)$. Поскольку $c_\sigma R \subset C_\sigma$, то ввиду предложения 1.1 одновременно существует и мономорфизм $\rho_1 : c_\sigma R \hookrightarrow C_{k_0}$. В силу цепности инъективной оболочки модуля $c_\sigma R$ (см. [13, теорема 1.1]) один из модулей C_{k_0}, $C_{k_0}/\alpha(Y)$ вкладывается в другой. Согласно предложению 1.1 и следствию 1.1.1 C_{k_0} и $C_{k_0}/\alpha(Y)$ – модули второго типа с одной и той же окружности. Следовательно, ввиду следствия 1.1.2 $Y = 0$, и β_0 – изоморфизм. Таким образом, короткая точная последовательность модулей

$$0 \to A_\sigma \to A_{\sigma+1} \to c_\sigma R \to 0$$

расщепляется, и $A_{\sigma+1} = A_\sigma \oplus a_\sigma R$, поэтому $A = \bigcup_{\sigma\leqslant\tau} A_\sigma = \bigoplus_{\sigma\leqslant\tau} a_\sigma R$. •

Предложение 1.6. *Пусть* $B_1 = \bigoplus_{k\in K_1} C_k$, *где все* C_k – *модули второго типа с одной и той же* s-*той окружности,* $B_2 = \bigoplus_{k\in K_2} C_k$, *где все модули* C_k – *циклические цепные, причём для любого* $n \geqslant s$ $(n \in \mathbb{N})$ *среди* C_k *нет модулей второго типа с* n-*той окружности. Если* A – *подмодуль модуля* $B = B_1 \oplus B_2$, *то* $A = X \oplus A_2$, *где* X – *прямая сумма циклических цепных модулей, а* A_2 – *подмодуль модуля* B_2.

Доказательство. Используя теорему 1.4, можем сразу предполагать, что для любого подмодуля третьего типа C модуля A существует мономорфизм $\alpha : C \to Q$, где Q – некоторый подмодуль второго типа в B. Согласно лемме 1.3 и следствию 1.1.1 Q – модуль с t-той окружности, где $t \leqslant s$. Пусть $\beta : A \to B_1$ – ограничение на A канонической проекции $B \to B_1$, тогда по предложению 1.5 $\mathrm{Im}(\beta) = \bigoplus_{l\in L} D_l$, где $\{D_l\}_{l\in L}$ – некоторое семейство циклических цепных подмодулей модуля B_1. По лемме 1.3 для любого $l \in L$ модуль D_l вкладывается в один из модулей C_k (где $k \in K_1$).

Пусть $l \in L$, $D_l = d_l R$, причём $d_l \in D_l h$ для некоторого примитивного идемпотента h в R, $a_l \in \beta^{-1}(d_l)h$. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \to A_2 \to A_2 + a_l R \to D_l \to 0,$$

где $A_2 = \mathrm{Ker}\,(\beta) \subset B_2$. Ограничение гомоморфизма β на подмодуль $a_l R$ даёт эпиморфизм $\beta_l : a_l R \to D_l$. Проверим, что β_l – изоморфизм.

Если D_l – модуль второго типа с s-той окружности, то $a_l R$ – тоже модуль второго типа, причём по лемме 1.3 $a_l R$ лежит на t-той окружности, где $t \leqslant s$. Так как модуль D_l – фактор-модуль модуля $a_l R$, то $t = s$, и эпиморфизм β_l является изоморфизмом.

Если для некоторого $k \in K_1$ модуль D_l вкладывается в $\mathrm{A}(C_k)$, то $a_l R$ – тоже модуль третьего типа, и ввиду сделанного дополнительного предположения существует мономорфизм $\alpha : a_l R \to Q$, где Q – модуль второго типа с t-той окружности $(t \leqslant s)$. Пусть $Y = \mathrm{Ker}\,(\beta_l)$, тогда модуль D_l вкладывается в $Q/\alpha(Y)$, и в силу цепности инъективной оболочки модуля D_l (см. [13, теорема 1.1]) один из модулей C_k, $Q/\alpha(Y)$ вкладывается в другой. По предложению 1.1 и следствию 1.1.1 $Q/\alpha(Y)$ – модуль с s-той окружности. Следовательно, Q – тоже модуль с s-той окружности, поэтому $Y = 0$.

Итак, для любого $l \in L$ β_l – изоморфизм, поэтому существует гомоморфизм $\lambda_l : D_l \to a_l R$ такой, что $\beta_l \circ \lambda_l = \mathrm{id}_{D_l}$, причём $\beta|_{a_l R} = \rho_l \circ \beta_l$, где ρ_l – вложение подмодуля D_l в модуль B_1. Легко видеть, что тогда короткая точная последовательность

$$0 \to A_2 \to A \to \bigoplus_{l \in L} D_l \to 0$$

расщепляется при помощи гомоморфизма $\lambda : \bigoplus\limits_{l \in L} D_l \to A$ такого, что $\lambda|_{D_l} = \delta_l \circ \lambda_l$, где δ_l – вложение подмодуля $a_l R$ в модуль A. Следовательно, $A = A_2 \oplus X$, где $X \simeq \bigoplus\limits_{l \in L} D_l$. •

Теперь мы можем доказать ключевой результат этого параграфа.

Теорема 1.7. *Пусть $\{C_k\}_{k \in K}$ – семейство конечно порождённых R-модулей, $B = \bigoplus\limits_{k \in K} C_k$, A – подмодуль модуля B. Тогда модуль A является прямой суммой некоторого семейства циклических цепных R-модулей.*

Доказательство. В силу теоремы Дрозда–Уорфилда можем считать, что все модули C_k – циклические цепные. Рассмотрим $B_1 = \bigoplus\limits_{k \in K_1} C_k$ – прямую сумму тех модулей C_k, которые являются модулями второго типа и лежат на окружности с наибольшим среди всех модулей C_k $(k \in K)$ номером. Тогда по предложению 1.6 модуль $A = A_2 \oplus X$, где X – прямая сумма циклических цепных модулей, а модуль $A_2 \subset \bigoplus\limits_{k \in K \setminus K_1} C_k$. Выбирая из $\{C_k \mid k \in K \setminus K_1\}$ модули второго типа с максимально возможным номером, снова применяем предложение 1.6. Повторяя этот процесс несколько раз, получаем, что осталось рассмотреть случай, когда для любого $k \in K$ C_k – модуль первого или третьего типа.

Пусть $B = B^{(1)} \oplus B^{(3)}$, где $B^{(1)}$ – прямая сумма семейства модулей первого типа, $B^{(3)}$ – прямая сумма семейства модулей третьего типа. Тогда $B^{(1)} f = 0$, $B^{(3)} e = 0$, поэтому $A = A^{(1)} \oplus A^{(3)}$, где $A^{(1)} = A \cap B^{(1)}$, $A^{(3)} = A \cap B^{(3)}$. По лемме 1.2 $A^{(3)}$ – прямая сумма модулей третьего типа. Так как $B^{(1)}$ – модуль над полуцепным hnp-кольцом $H = eRe$, то из [3, теорема 4] следует, что $A^{(1)}$ – прямая сумма циклических цепных H-модулей. •

Напомним, что модуль M над кольцом S чисто-проективен (т.е. проективен относительно любой чистой по Кону короткой точной последовательности модулей) тогда и только тогда, когда M – прямое слагаемое прямой суммы некоторого семейства конечно представимых модулей (см. [16, следствие 3]).

Следствие 1.7.1. *R-модуль B чисто-проективен тогда и только тогда, когда B – прямая сумма некоторого семейства конечно порождённых R-модулей. Любой подмодуль чисто-проективного R-модуля B чисто-проективен.*

Доказательство. Это утверждение непосредственно следует из теоремы 1.7. •

Теорема 1.8. *Пусть ω – индуктивная чистота в категории правых R-модулей. Тогда любая ω-чистая короткая точная последовательность представляется в виде прямого предела ω-чистых коротких точных последовательностей, состоящих из конечно порождённых R-модулей. Любая индуктивная чистота в категории правых R-модулей однозначно определяется своим ограничением на категорию конечно порождённых правых R-модулей.*

Доказательство. Ввиду следствия 1.7.1 и [17, замечание 3] утверждение теоремы следует из [17, следствие 3] (см. также [18]). •

Замечание 1.8.1. Как следует из теоремы 1.8, существует взаимно–однозначное соответствие между индуктивными чистотами в категории правых R-модулей и чистотами в категории конечно порождённых правых R-модулей. Чистоты в категории конечно порождённых правых R-модулей, где R – полуцепное нётерово справа кольцо, полностью описаны в [4, теоремы 3–5].

Замечание 1.8.2. В работах [17], [19] приведены некоторые другие результаты, справедливые для колец, над которыми любой подмодуль произвольного чисто-проективного правого модуля чисто-проективен. В частности, для категории правых R-модулей верна формула Кузьминова (ср. [17], [18]; см. также [20]): пусть ω – индуктивная чистота в категории правых R-модулей, A, B – правые R-модули, тогда

$$\omega \mathrm{Ext}^1_R(A,B) = \bigcap_f \bigcup_g (f^*)^{-1} g_*(\omega \mathrm{Ext}^1_R(F,G)),$$

где $f : F \to A$ и $g : G \to B$ – всевозможные гомоморфизмы такие, что F, G – конечно порождённые правые R-модули.

§2. Описание неразложимых чисто-инъективных модулей

Согласно [11, предложение 5.1] все ненулевые неразложимые неинъективные чисто-инъективные R-модули делятся на два вида: (1) все модули первого и третьего типов; (2) чисто-инъективные оболочки всех модулей второго типа.

Мы построим для данного полуцепного нётерова справа кольца R такое его наследственное фактор-кольцо R', что для любого R-модуля B второго типа модуль $\mathrm{PE}_R(B)$ будет R'-модулем относительно канонического эпиморфизма $\pi : R \to R'$.

Определение (см. [8]). Пусть M – правый R-модуль. Назовём *R-топологией* модуля M линейную топологию на M, имеющую следующую базу окрестностей нуля:

$$\mathbb{B} = \{MI \mid I \text{ – существенный левый идеал кольца } R\}.$$

Если M – R-модуль, $M^1 = \bigcap_{MI \in \mathbb{B}} MI$ – замыкание нуля в R-топологии на M, то согласно [8, следствие 1.2.1] M^1 является подмодулем модуля M. Кроме того,

$$R^1 = (R_R)^1 = \bigcap_{RI \in \mathbb{B}} RI = \bigcap_{I \in \mathbb{B}} I$$

– двусторонний идеал кольца R.

Предложение 2.1. *$R^1 = 0$ тогда и только тогда, когда R – наследственное справа кольцо. Кроме того, $R^1 = \mathrm{Soc}({}_R R)$.*

Доказательство. В силу [8, лемма 1.4, предложение 1.5] $R^1 = 0$ тогда и только тогда, когда модуль R_R редуцирован. Отметим, что последнее условие эквивалентно тому, что все главные неразложимые R-модули не инъективны. Согласно [11, предложение 3.2] наследственность справа кольца R равносильна тому, что не существует ненулевых инъективных цепных циклических R-модулей, поэтому для доказательства первого утверждения достаточно применить следующую лемму.

Лемма 2.1.1. *Пусть B – цепной циклический R-модуль. Если B не инъективен, то не инъективен и любой ненулевой фактор-модуль модуля B.*

Доказательство. Пусть Q – некоторый собственный подмодуль модуля B, D – такой цепной циклический модуль, что существует мономорфизм $\tau : B \to D$, не являющийся изоморфизмом. Тогда индуцированный мономорфизм $\tau' : B/Q \to D/\tau(Q)$ не сюръективен, и остаётся использовать [11, лемма 3.2.1]. •

Пусть $\mathbb{S}$ – полное множество ортогональных примитивных идемпотентов в R. В силу [8, следствие 1.1.1] имеем

$$R^1 = \bigoplus_{g \in \mathbb{S}} \bigcap_{x \in Rg \setminus 0} Rx = \bigoplus_{g \in \mathbb{S}} \mathrm{Soc}(Rg) = \mathrm{Soc}({}_R R). \qquad \bullet$$

Предложение 2.2.
(1) *Кольцо R как левый модуль над собой обладает наибольшим артиновым подмодулем A.*
(2) *A – двусторонний идеал кольца R, кольцо $R' = R/A$ – полуцепное нётерово справа наследственное справа.*
(3) *Если M – неразложимый чисто-инъективный неинъективный неартинов R-модуль, то $MA = 0$ и M – неразложимый чисто-инъективный неинъективный R'-модуль.*
(4) *Любой редуцированный чисто-инъективный R'-модуль L редуцирован и чисто-инъективен как R-модуль.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{S}$ – полное множество ортогональных примитивных идемпотентов в R, $X = eRf$, определим $\mathbb{S}_0 = \{g \in \mathbb{S}_2 \mid Xg = 0\}$. Согласно [8, лемма 1.6.1] для любого $g \in \mathbb{S}_0$ левый модуль Rg артинов, а для любого $g \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{S}_0$ левый модуль Rg не содержит ненулевых артиновых подмодулей. Если $A = \bigoplus_{g \in \mathbb{S}_0} Rg$, то A – артинов модуль, причём левый модуль R/A не содержит ненулевых артиновых подмодулей. Следовательно, A – наибольший артинов подмодуль в ${}_R R$. Ясно, что A – идеал кольца R; кроме того, $A \subset T$.

Поскольку кольцо R' имеет нулевой цоколь, то в силу предложения 2.1 кольцо R' наследственно справа. Покажем, что любой R'-модуль E инъективен как R'-модуль тогда и только тогда, когда E инъективен как R-модуль. Действительно, если E – ненулевой инъективный R'-модуль, то в силу нётеровости справа кольца R' можем считать модуль E неразложимым. Согласно [11, предложение 3.2] E не является конечно порождённым модулем, и ввиду [13, лемма 2.2] E – инъективный R-модуль. Обратная импликация очевидна. Следовательно, любой R'-модуль W редуцирован как R'-модуль тогда и только тогда, когда W редуцирован как R-модуль.

Пусть $M \simeq \mathrm{PE}_R(B)$, где B – R-модуль второго типа. Так как для любого $g \in S_0$ имеем $eRg = 0$, то любой проективный модуль второго типа аннулируется идемпотентом g, и потому $Bg = 0$. Следовательно, $BA = 0$, $M \simeq \mathrm{PE}_{R'}(B)$ и $MA = 0$. Наконец, отметим, что ввиду [16, теорема 2] M – чисто-инъективный R'-модуль, а L – чисто-инъективный R-модуль. $\bullet$

Замечание 2.2.1. В силу наследственности кольца R' ясно, что R-модуль C третьего типа аннулируется идеалом A тогда и только тогда, когда C вкладывается в некоторый R-модуль второго типа. Кроме того, любой R-модуль первого типа аннулируется идеалом A.

Предложение 2.2 позволяет при изучении неразложимых чисто–инъективных неинъективных R-модулей сразу предположить, что само кольцо R наследственно справа. Согласно [21, теорема 2.9] в этом случае R Морита-эквивалентно кольцу вида

$$H(V,m,n) = \begin{pmatrix} H_m(V) & M_{m,n}(D) \\ 0 & T_n(D) \end{pmatrix},$$

где V – цепное нётерово неартиново кольцо с радикалом $P = \mathrm{Rad}(V)$, D – тело частных кольца V,

$$H_m(V) = \begin{pmatrix} V & V & \dots & V \\ P & V & \dots & V \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P & P & \dots & V \end{pmatrix} \subset M_m(V),$$

$M_{m,n}(D)$ – множество всех $(m \times n)$-матриц над D, $T_n(D)$ – кольцо всех верхнетреугольных матриц порядка n над D (где $m, n \in \mathbb{N}$). Поэтому мы будем рассматривать в качестве R только кольца вида $H(V,m,n)$.

Пусть $R = H(V,m,n)$, $i \in \{1,2,\dots,m\}$, $j \in \{1,2,\dots,n\}$, e_i – матричная единица $e_{ii} \in H_m(V)$, f_j – матричная единица $e_{jj} \in T_n(D)$, $h_{i,j}$ – матричная единица $e_{ij} \in M_{m,n}(D)$. Тогда

$\mathbb{S} = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \cup \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ – полный набор ортогональных примитивных идемпотентов кольца R.

Опишем все (с точностью до изоморфизма) цепные циклические R-модули. Определим для $k \in \mathbb{N}$, $l \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$, $t \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ правые R-модули

$$C_{k,l} = \Big(\underbrace{P^k \quad \ldots \quad P^k}_{l} \quad \underbrace{P^{k-1} \quad \ldots \quad P^{k-1}}_{m-l} \quad \underbrace{D \quad \ldots \quad D}_{n} \Big),$$

$$A_t = \Big(\underbrace{0 \quad \ldots \quad 0}_{m+n-t} \quad \underbrace{D \quad \ldots \quad D}_{t} \Big),$$

состоящие из матриц–строк длины $m + n$, соответствующие элементы которых принадлежат указанным множествам; при этом структура R-модуля на $C_{k,l}$ и A_t вводится с помощью матричного умножения.

Отождествим для любого фиксированного $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ изоморфные друг другу модули $e_i R$, $C_{1,i-1}$. Так как $C_{k,l}$ – подмодуль модуля $e_1 R$, то все модули $C_{k,l}$ цепные. Ясно, что для любого $l < m-1$ $\mathrm{Rad}(C_{k,l}) = C_{k,l+1}$, а $\mathrm{Rad}(C_{k,m-1}) = C_{k+1,0}$. Следовательно, если $s \in \mathbb{N}$ и $i \in \{2, \ldots, m\}$, то $\mathrm{Rad}^s(e_i R) = \mathrm{Rad}^{s+i-1}(e_1 R) = C_{q+1,r}$, где r – остаток от деления $s + i - 1$ на m, а $q = (s + i - r - 1)/m$. Поэтому соответствующий модуль первого типа $e_i R / e_i J^s$ равен модулю $C_{1,i-1}/C_{q+1,r}$.

Отметим, что артинов подмодуль длины t, где $t \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, содержащийся в модуле $e_i R$, совпадает с модулем A_t, и потому модуль второго типа $e_i R / e_i N^k$ равен $C_{1,i-1}/A_{n-k+1}$. Кроме того, модуль третьего типа $f_l R / f_l J^k$, где $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $k \in \mathbb{N}$, имеет вид

$$\Big(\underbrace{0 \quad \ldots \quad 0}_{m+l-1} \quad \underbrace{D \quad \ldots \quad D}_{k} \quad \underbrace{0 \quad \ldots \quad 0}_{n-l-k+1} \Big),$$

где последний модуль по определению аннулируется идемпотентами f_j при $j \geqslant k + l$.

Мы переходим теперь к описанию чисто-инъективных оболочек R-модулей второго типа. Напомним сначала некоторые свойства кольца V и его пополнения в $\mathrm{Rad}(V)$-адической топологии. Ясно, что кольцо V – область главных идеалов, причём любой односторонний собственный идеал в V имеет вид P^k, где $P = \mathrm{Rad}(V)$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть p – фиксированный далее элемент множества $P \setminus P^2$, тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $P^n = Vp^n = p^n V$.

Так как $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P^n = 0$, то для любого $v \in V\setminus 0$ существует единственное $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такое, что $v = p^k\epsilon$, где ϵ – обратимый элемент в V (и тогда $v = \epsilon_1 p^k$, где ϵ_1 также обратим).

Ввиду [22, следствие 15] пополнение $\widehat{V}$ кольца V в его P-адической топологии является полуцепным двусторонне нётеровым кольцом. Так как согласно [8, замечание 1.2.3] V-топология на кольце V совпадает с P-адической топологией, мы можем отождествить $\widehat{V}$ и пополнение $\mathrm{C}(V)$ кольца V в его V-топологии. Ясно, что $\widehat{V}$ – локальное кольцо. Таким образом, $\widehat{V}$ – цепное нётерово неартиново кольцо.

Лемма 2.3. *Пусть D' – тело частных кольца $\widehat{V}$. Тогда D' – полное топологическое пространство в линейной топологии с базой окрестностей нуля $\{\widehat{V}p^k \mid k \in \mathbb{N}\}$, а его подмножество D всюду плотно в D' в этой топологии. Кроме того, для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеем $D \cap (\widehat{V}p^k) = Vp^k$.*

Доказательство. Заметим, что если $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность Коши в рассматриваемой топологии, то для некоторого $k \in \mathbb{Z}$ все a_n принадлежат $\widehat{V}p^k$. Поскольку $\widehat{V}p^k$ в индуцированной топологии является топологическим пространством, гомеоморфным пространству $\widehat{V}$, снабжённому $\widehat{V}p$-адической топологией, то последовательность $\{a_n\}$ сходится к некоторому пределу в индуцированной на $\widehat{V}p^k$ топологии, а потому и в исходной топологии. Кроме того, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \widehat{V}p^k = 0$.

Так как V всюду плотно в $\widehat{V}$ в $\widehat{V}p$-адической топологии, то для любого $k \in \mathbb{Z}$ Vp^k всюду плотно в $\widehat{V}p^k$ в индуцированной топологии, поэтому $D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} Vp^k$ – всюду плотное подмножество в $D' = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{V}p^k$. Если $v \in \widehat{V}$ и $vp^k \in D$, то $v = \epsilon p^l$, где $l \in \mathbb{Z}$, а ϵ – обратимый в V, а потому и в $\widehat{V}$ элемент. Следовательно, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, поэтому $v \in V$ и $D \cap (\widehat{V}p^k) = Vp^k$. $\bullet$

Лемма 2.4. *Пусть $\mathbb{G}$ – полный набор ортогональных примитивных идемпотентов кольца R, M – R-модуль, B – подмодуль в M.*
(1) Модуль M полон (в R-топологии) тогда и только тогда, когда для любого $g \in \mathbb{G}$ абелева группа Mg полна в линейной топологии с базой окрестностей нуля $\{Mx \mid x \in Rg \setminus 0\}$.

(2) *Подмодуль B всюду плотен в M в R-топологии тогда и только тогда, когда для любого $g \in \mathbb{G}$ подгруппа Bg всюду плотна в Mg в линейной топологии с базой окрестностей нуля $\{Mx \mid x \in Rg \setminus 0\}$.*

Доказательство. Согласно [8, предложение 1.2] множества вида MI, где $I = \sum_{g \in \mathbb{G}} Rx_g$ $(x_g \in Rg \setminus 0)$, составляют базу окрестностей нуля R-топологии модуля M. Так как $MI = \{m \in M \mid \forall g \in \mathbb{G}\ mg \in Mx_g\}$, то R-топология на M совпадает с произведением конечного числа описанных выше топологий на подгруппах Mg $(g \in \mathbb{G})$. $\bullet$

Мы готовы теперь доказать основной результат этого параграфа.

Теорема 2.5. *Пусть $R = H(V, m, n)$, где V – цепное нётерово неартиново кольцо, m, $n \in \mathbb{N}$, пусть $\widehat{V}$ – пополнение кольца V в P-адической топологии. Определим кольцо $\widehat{R} = H(\widehat{V}, m, n)$. Тогда для любых $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ и $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеем $\mathrm{PE}_R(e_iR) \simeq e_i\widehat{R}$, $\mathrm{PE}_R(e_iR/e_iN^k) \simeq e_i\widehat{R}/e_i\mathrm{Nil}^k(\widehat{R})$.*

Доказательство. Зафиксируем $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, определим модули $B = e_iR/e_iN^k$, $\widehat{B} = e_i\widehat{R}/e_i\mathrm{Nil}^k(\widehat{R})$ (при $k = n+1$ имеем $N^k = \mathrm{Nil}^k(\widehat{R}) = 0$, и тогда $B = e_iR$, $\widehat{B} = e_i\widehat{R}$). Отметим, что модуль e_iR/e_iN^k можно представить в виде:

$$\Bigl(\underbrace{P\ \ \ldots\ \ P}_{i-1}\quad \underbrace{V\ \ \ldots\ \ V}_{m-i+1}\quad \underbrace{D\ \ \ldots\ \ D}_{k-1}\quad \underbrace{0\ \ \ldots\ \ 0}_{n-k+1}\Bigr);$$

аналогичным образом описывается модуль $e_i\widehat{R}/e_i\mathrm{Nil}^k(\widehat{R})$. Поэтому, рассматривая в дальнейшем для фиксированного $g \in \mathbb{S}$ подгруппу $Bg \neq 0$ (соответственно, $\widehat{B}g \neq 0$), мы в зависимости от B и g можем отождествить её с одним из множеств P, V, D (соответственно, с одним из множеств $\widehat{P} = \mathrm{Rad}(\widehat{V})$, $\widehat{V}$, D').

Если $g \in \mathbb{S}$, $I = Rr$ – ненулевой конечно порождённый левый идеал кольца R, содержащийся в Rg, то I – цепной левый идеал, поэтому можно считать, что $r \in hRg \setminus 0$ для некоторого $h \in \mathbb{S}$. Пусть $h = e_l$, $g = e_j$ $(l,\ j \in \{1, 2, \ldots, m\})$, и в матрице, соответствующей r, единственная ненулевая компонента равна ϵp^t, где ϵ обратим в V, $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Если $Be_j = V$, то $Br = Vp^t$, $\widehat{B}r = \widehat{V}p^t$, и тогда $B \cap \widehat{B}r = Be_j \cap \widehat{B}r = V \cap \widehat{V}p^t = Vp^t = Br$ в силу чистоты по Кону V в $\widehat{V}$ (см., например, [8, лемма 2.1]). Если $Be_j = P$, то $Br = Pp^t$, $\widehat{B}r = \widehat{P}p^t$, и тогда ввиду чистоты по Кону $P = pV$ в $\widehat{P} = p\widehat{V}$ имеем $B \cap \widehat{B}r = P \cap \widehat{P}p^t = Pp^t = Br$. Кроме того, на $\widehat{B}g$ топология с базой окрестностей нуля $\{\widehat{B}r \mid r \in Rg \setminus 0\}$ совпадает с P-адической топологией на $\widehat{V}$ или на $\widehat{P} = p\widehat{V}$, поэтому $\widehat{B}g$ – топологическое пространство, полное в этой топологии, а подгруппа Bg, равная, соответственно, V или P, всюду плотна в $\widehat{B}g$.

Пусть $h = f_l$, $g = f_j$ $(l,\ j \in \{1, 2, \dots, n\})$, $Bg \neq 0$, и в матрице, соответствующей r, единственная ненулевая компонента равна $d \in D$. Тогда $\widehat{B}r = D'd$, $Br = Dd$, поэтому $B \cap \widehat{B}r = Bf_j \cap \widehat{B}r = D \cap D' = D = Br$. Кроме того, для данного g левых идеалов Rr, где элемент r имеет указанный вид, существует лишь конечное число, следовательно, при описании топологии на $\widehat{B}g \neq 0$ соответствующие подгруппы $\widehat{B}r$ можно исключить из базы окрестностей нуля.

Пусть $h = e_l$, $g = f_j$ $(l \in \{1, 2, \dots, m\},\ j \in \{1, 2, \dots, n\})$, $Bg \neq 0$, и в матрице, соответствующей r, единственная ненулевая компонента равна ϵp^t, где ϵ обратим в V, $t \in \mathbb{Z}$. Тогда подгруппа $\widehat{B}r$ равна $\widehat{V}p^t$ либо $\widehat{P}p^t$, а подгруппа Br равна Vp^t либо, соответственно, Pp^t. Согласно лемме 2.3 $D \cap \widehat{V}p^t = Vp^t$ и $D \cap \widehat{P}p^t = D \cap \widehat{V}p^{t+1} = Vp^{t+1} = Pp^t$, поэтому $B \cap \widehat{B}r = Bf_j \cap \widehat{B}r = D \cap \widehat{B}r = Br$. Ввиду леммы 2.3 абелева группа $\widehat{B}g = D'$ полна в топологии с базой окрестностей нуля $\{\widehat{B}r \mid r \in Rg \setminus 0\}$, а подгруппа $Bg = D$ всюду плотна в D' в этой топологии.

Благодаря лемме 2.4 мы получаем в итоге, что $\widehat{B}$ – полный (в R-топологии) модуль, а подмодуль B всюду плотен в $\widehat{B}$. Так как ввиду [8, лемма 2.1.1] B чист по Кону в $\widehat{B}$, то R-топология модуля $\widehat{B}$ индуцирует на подмодуле B R-топологию модуля B. Кроме того, в силу [8, предложение 1.2] умножение на любой элемент $r \in R$ непрерывно на $\widehat{B}$, а умножение элементов пополнения на элементы кольца (см. [8, лемма 2.1]) определено по непрерывности в R-топологии. Поэтому R-модули $\widehat{B}$ и $\mathrm{C}(B)$ изоморфны, и согласно [8, теорема 2.4] $\widehat{B} \simeq \mathrm{PE}_R(B)$. $\bullet$

Замечание 2.5.1. Из теоремы 2.5 следует, что любой неразложимый чисто-инъективный неинъективный неартинов $H(V, m, n)$-модуль является конечно порождённым $H(\widehat{V}, m, n)$-модулем.

Замечание 2.5.2. Пусть $\mathrm{C}(R)$ – пополнение модуля R_R в R-

топологии. Пользуясь всюду плотностью R в $\mathrm{C}(R)$ в R-топологии, построим кольцо $\mathrm{C}(R)$, определив умножение элементов $\mathrm{C}(R)$ по непрерывности в R-топологии. Заметим, что если $R = H(V, m, n)$, причём $V \neq \widehat{V}$, то кольцо $\mathrm{C}(R) = \begin{pmatrix} H_m(\widehat{V}) & M_{m,n}(D') \\ 0 & T_n(D) \end{pmatrix}$ не является ни полуцепным справа, ни нётеровым справа (см. [13, теорема 2.11]).

Пусть $R = H(V, m, n)$, рассмотрим $Y = \begin{pmatrix} \underbrace{D \quad \ldots \quad D}_{m+n} \end{pmatrix}$ как правый R-модуль (относительно матричного умножения).

Лемма 2.6 (ср.[21, лемма 2.5]). *Если B – R-модуль второго типа с k-той окружности, где $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, то $\mathrm{E}(B) \simeq Y/A_{n-k+1}$. Если B – R-модуль первого типа, то для некоторого $i \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ имеем $\mathrm{E}_R(B) \simeq Y/C_{1,i}$.*

Доказательство. Так как модуль Y – объединение семейства своих собственных цепных подмодулей

$$U_k = \begin{pmatrix} \underbrace{p^{-k}V \quad \ldots \quad p^{-k}V}_{m} & \underbrace{D \quad \ldots \quad D}_{n} \end{pmatrix} = p^{-k}e_1R \simeq e_1R$$

(при $k \in \mathbb{N}$), то Y – цепной модуль, причём Y не является конечно порождённым модулем. Из [13, лемма 2.2] следует, что любой фактор-модуль Y' модуля Y – цепной инъективный модуль, и потому Y' – инъективная оболочка любого своего ненулевого подмодуля.

Заметим, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ модуль $e_iR = C_{1,i-1}$ вкладывается в Y. Пусть $B \simeq e_iR/e_iN^k$ – модуль с k-той окружности, тогда $B \simeq C_{1,i-1}/A_{n-k+1}$, и потому существует мономорфизм $i : B \to Y/A_{n-k+1}$.

Если B – модуль первого типа, то в силу артиновости B мы можем предположить, что модуль B прост, и тогда для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ модуль $B \simeq e_iR/\mathrm{Rad}(e_iR)$. Пусть $i < m$, тогда $e_iR/\mathrm{Rad}(e_iR) = C_{1,i-1}/C_{1,i}$ – ненулевой подмодуль модуля $Y/C_{1,i}$. Кроме того, модуль $e_mR/\mathrm{Rad}(e_mR) = C_{1,m-1}/C_{2,0}$ вкладывается в модуль $Y/C_{2,0} \simeq Y/C_{1,0}$. •

Теорема 2.7 (ср. [7, §3]). *Если $R = H(V, m, n)$, $\widehat{R} = H(\widehat{V}, m, n)$, то все ненулевые неразложимые чисто-инъективные правые R-модули содержатся в следующем списке:*

(1) *модули первого типа;*

(2) *модули третьего типа;*
(3) *модули* $Y/C_{1,i}$, $i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$*;*
(4) *модули* Y/A_l, $l \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ *;*
(5) *модули* $e_i\widehat{R}/e_i\mathrm{Nil}^k(\widehat{R})$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$.

Доказательство. Пусть M – ненулевой неразложимый чисто-инъективный R-модуль. Если модуль M инъективен, то $M \simeq \mathrm{E}_R(C)$, где C – ненулевой цепной циклический модуль. Поскольку любой проективный модуль третьего типа вкладывается в произвольный проективный модуль второго типа, мы можем считать, что C – модуль первого или второго типа, и тогда ввиду леммы 2.6 модуль $\mathrm{E}_R(C)$ содержится в нашем списке.

Если же модуль M не инъективен, то в силу [11, предложение 5.1] либо M – модуль первого или третьего типа, либо $M \simeq \mathrm{PE}_R(B)$, где B – некоторый модуль второго типа, и остаётся применить теорему 2.5. •

Автор благодарит профессора А. И. Генералова за постановку задачи и искреннее внимание.

Литература

1. Л. Я. Куликов, *К теории абелевых групп произвольной мощности.* — Мат. сб. **16** (1945), 129–162.
2. Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, т. 1 — Мир, М. (1974).
3. S. Singh, *Modules over hereditary noetherian prime rings.* — Canadian J. Math. **27**, No. 4 (1975), 867–883.
4. А. И. Генералов, *Собственные классы коротких точных последовательностей над нетеровыми полуцепными кольцами.* — В кн.: Кольца и модули. Предел.теоремы теор. вер., вып. 1, Ленинград (1986), 87–102.
5. А. И. Генералов, *Индуктивно замкнутые собственные классы над ограниченными hnp-кольцами.* — Алгебра и логика **25**, No. 4 (1986), 384–404.
6. Г. Е. Пунинский, *Теоретико-модельные методы в теории колец и модулей.* Докт. Дисс., Москва (1995).
7. G. E. Puninski, *Pure-injective modules over right noetherian serial rings.* — Commun. Algebra **23**, No. 4, (1995), 1579–1592.
8. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, *Пополнение модулей над полуцепными нетеровыми справа кольцами.* — Записки научн.семин. ПОМИ **281** (2001), 170–185.
9. Ю. А. Дрозд, *Об обобщенно однорядных кольцах.* — Мат.заметки, **18**, No. 5 (1975), 705–710.
10. R. B. Warfield, *Serial rings and finitely presented modules.* — J. Algebra **37**, No. 2 (1975), 187–222.

11. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, *Базисные подмодули модулей над полуцепными нетеровыми справа кольцами.* I. — Зап научн.семин. ПОМИ **272** (2000), 129–143.
12. А. И. Генералов, *Размерность Крулля категории модулей над нетеровыми справа полуцепными кольцами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **236** (1997), 73–86.
13. S. Singh, *Serial right noetherian rings.* — Canad. J. Math. **36**, No. 1 (1984), 22–37.
14. В. В. Кириченко, *Обобщенно однорядные кольца.* — Препринт ИМ-75-1, Ин-т мат. АН УССР, Киев (1975).
15. К. Фейс, *Алгебра: кольца, модули и категории*, т. 2. — Мир, М. (1979).
16. R. B. Warfield, *Purity and algebraic compactness for modules.* — Pacific J. Math. **28**, No. 3 (1969), 699–719.
17. А. И. Генералов, *О формуле Кузьминова.* — Сиб. мат. журн. **29**, No 4 (1988), 202–204.
18. В. И. Кузьминов, *О группах чистых расширений абелевых групп.* — Сиб. мат. журн. **17**, No. 6 (1976), 1308–1320.
19. H. Brune, *On the global dimension of the functor category* $((\bmod -R)^{op}, Ab)$ *and a theorem of Kulikov.* — J. Pure Appl. Algebra **28**, No. 1 (1983), 31–39.
20. А. И. Генералов, *Относительная гомологическая алгебра и относительные группы Гротендика колец.* Докт. дисс., Ленинград (1990).
21. В. В. Кириченко, *О полуцепных наследственных и полунаследственных кольцах.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **114** (1982), 137–147.
22. V. K. Deshpande, *Completions of noetherian hereditary rings.* — Pacific J. Math. **90**, No. 2 (1980), 285–297.

Zilberbord I. M. Purities and pure injective modules over serial right noetherian rings.

It is proved that any submodule of direct sum of some family of finitely generated right modules over serial right noetherian ring R is also a direct sum of finitely generated modules. With use of reduction to serial right hereditary rings we obtained a new description of all indecomposable pure injective noninjective right modules over serial right noetherian rings.

С. -Петербургский
государственный университет

Поступило 9 ноября 2002 г.