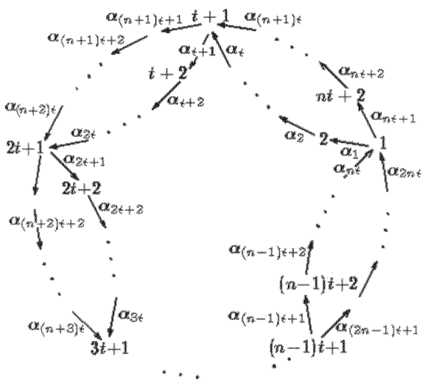
Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 289, 2002 г.

А. И. Генералов, М. А. Качалова

АЛГЕБРА ЙОНЕДЫ АЛГЕБРЫ МЁБИУСА

Введение

Пусть R – самоинъективная базисная алгебра над алгебраически замкнутым полем, имеющая конечный тип представления. Стабильный AR-колчан такой алгебры можно описать с помощью некоторого ассоциированного дерева, которое должно совпадать с одной из схем Дынкина A_n, D_n, E_6, E_7 или E_8 (см. [1]). В [2] доказано, что если для алгебры R это ассоциированное дерево имеет тип A_n, то R стабильно эквивалентна либо некоторой полуцепной самоинъективной алгебре, либо так называемой "алгебре Мёбиуса" вида $R = k\,[Q]\,/I$, где Q – следующий колчан:



где n, $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 2$, а I – идеал в алгебре путей $k\,[Q]$ колчана Q, порождённый

а) всеми путями длины $t+1$;

б) путями вида

$$\alpha_{rt+1}\alpha_{(r+n)t} \text{ и } \alpha_{(r+n)t+1}\alpha_{rt}$$

(здесь и далее коэффициенты рассматриваются по модулю $2nt$, кроме того, для краткости мы иногда опускаем индексы в обозначениях стрелок, – более подробные обозначения обычно легко восстанавливаются из контекста);

в) выражениями вида

$$\alpha_{(n+r)t}\alpha_{(n+r)t-1}\dots\alpha_{(n+r-1)t+1}-\alpha_{rt}\alpha_{rt-1}\dots\alpha_{(r-1)t+1}, \quad 1\le r\le n.$$

В этом случае используем также обозначение $R=R_{n,t}$.

В работе [3] для полуцепных самоинъективных алгебр была вычислена алгебра Йонеды. В настоящей работе мы вычисляем алгебры Йонеды для алгебры Мёбиуса R указанного выше вида. Для этого сначала строятся минимальные проективные резольвенты простых R-модулей, а затем с использованием техники работ [4, 5] мы находим образующие и соотношения для алгебры Йонеды алгебры R.

Отметим, что в [6] предложен некоторый метод вычисления алгебр Йонеды бирядных алгебр конечного типа представления, в котором существенно используется информация об AR-колчане таких алгебр. Хотя этот метод может быть применен и к рассматриваемым здесь алгебрам Мёбиуса, наш подход представляется более прямым по сравнению с [6].

Остается открытым вопрос, является ли алгебра Йонеды инвариантной относительно стабильной эквивалентности в классе алгебр с ассоциированным деревом типа A_n. Вообще говоря, подобная инвариантность алгебр Йонеды относительно стабильной эквивалентности не имеет места. Например, из результатов [7] следует, что блоки с диэдральной дефектной группой и с тремя простыми модулями производно эквивалентны (и, следовательно, стабильно эквивалентны ввиду [8]), если соответствующие диэдральные группы имеют один и тот же порядок. С другой стороны, легко видеть (см. например, вычисления в [4, 9]), что алгебры Йонеды таких блоков не изоморфны, если они принадлежат различным сериям алгебр из классификации К. Эрдман [10].

1. Формулировка основного результата

Пусть R – произвольная базисная конечномерная k-алгебра с радикалом Джекобсона $J(R)$, $\overline{R}=R/J(R)$ – соответствующая фактор-алгебра. На прямой сумме $\mathcal{E}(\overline{R})=\oplus_{m\geqslant 0}\mathrm{Ext}_R^m(\overline{R},\overline{R})$ с помощью обычного произведения Йонеды вводится структура (ассоциативной) k-алгебры, и эту алгебру называют алгеброй Йонеды алгебры R.

Пусть $R = R_{n,t}$. Для описания алгебры Йонеды $\mathcal{E}(\overline{R})$ рассмотрим колчан $\widetilde{Q}$, который получается из Q добавлением следующих стрелок:

$\beta_i : i \to i+t+1$ $(i \in \mathbb{Z}_{2nt},\ i \not\equiv 0, 1 \pmod t)$,

$\beta_{rt} : rt \to (r+n+1)t+2 \quad (1 \leqslant r \leqslant 2n)$,

$\beta_{rt+1} : rt+1 \to (r+t)t+1$ и $\gamma_{rt+1} : rt+1 \to (r+1)t+1 \quad (1 \leqslant r \leqslant n)$.

Заметим, что нам удобно использовать следующую систему представителей классов вычетов по модулю $2nt$:

$$1, 2, \dots, 2nt.$$

Кроме того, мы используем классы вычетов по модулю $2n$, для них рассматриваем аналогичную систему представителей, но для отличия от предыдущих используем следующее обозначение: если $m \in \mathbb{Z}$, то $\overline{m} \in \mathbb{Z}_{2n}$.

Алгебру путей колчана $\widetilde{Q}$ превратим в градуированную k-алгебру, полагая

$$\deg \alpha_i = 1 \ (i \in \mathbb{Z}_{2nt}), \quad \deg \beta_i = 2 \ (i \in \mathbb{Z}_{2nt},\ i \not\equiv 0, 1 \pmod t),$$

$$\deg \beta_{rt} = 3, \quad \deg \beta_{rt+1} = 2t-1, \quad \deg \gamma_{rt+1} = 2.$$

Пусть J – идеал в $k[\widetilde{Q}]$, порождённый элементами

(1) если $t \neq 2$, то $\alpha_{i+1}\alpha_i$ для всех $i \in \mathbb{Z}_{2nt}$;
если $t = 2$, то $\alpha_{2r+1}\alpha_{2r}$ для всех r;

(2) если $i \not\equiv -1, 0, 1 \pmod t$, то $\alpha_{i+t+1}\beta_i - \beta_{i+1}\alpha_i$;
если $t \neq 2$, то $\alpha_{(r+n+1)t+2}\beta_{rt} - \beta_{(r+n)t+2}\alpha_{(r+n)t+1}\alpha_{rt}$,
$\beta_{rt}\alpha_{rt-1} - \alpha_{(r+n+1)t+1}\alpha_{(r+1)t}\beta_{rt-1}$;

(3) $\alpha\gamma$, $\gamma\alpha$, $\gamma_{(r+t)t+1}\beta_{rt+1} - a_r\beta_{(r+1)t+1}\gamma_{rt+1}$,
где $a_r \in k$ – следующий элемент: $a_r = a'_r a''_r$, причём

$$a'_r = \begin{cases} -1, & \text{если } r = n \text{ и } t \text{ нечетно,} \\ \ \ 1, & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{1.1}$$

$$a''_r = \begin{cases} -1, & \text{если либо } r < n \text{ и } n+1 \leqslant \overline{r+t} \leqslant 2n, \\ & \text{либо } r = n \text{ и } n+1 \leqslant \overline{t} \leqslant 2n, \\ \ \ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1.2}$$

(4) $\alpha_{(r+t-1)t}\beta^{t-2}\alpha_{rt+1}-b_r\gamma^{t-1}$, где $b_r\in k$ – следующий элемент: $b_r=b'_rb''_r$, причем

$$b'_r=\begin{cases}-1, & \text{если } n+1\leqslant r\leqslant 2n \text{ и } t \text{ четно},\\ \ \ 1, & \text{в противном случае};\end{cases} \tag{1.3}$$

$$b''_r=(-1)^q, \tag{1.4}$$

где q – количество множителей γ_{nt+1} в γ^{t-1}, стоящих на четном месте (если читать соответствующее “слово” слева направо);

(5) $\alpha_{(r+t+n)t+1}\beta_{rt+1}-b'_r\beta_{(r+t-1)t}\beta^{t-2}\alpha_{rt+1}$,
где $b'_r\in k$ – элемент, описанный в предыдущем пункте;
$\beta_{rt+1}\alpha_{rt}-c_r\alpha_{(r+t+n)t}\beta^{t-2}\beta_{rt}$, где

$$c_r=\begin{cases}-1, & \text{если } 1\leqslant r\leqslant n \text{ и } t \text{ четно},\\ \ \ 1, & \text{в противном случае}.\end{cases} \tag{1.5}$$

Факторалгебра $\mathcal{A}=k[\widetilde{Q}]/J$ естественным образом наследует градуировку с алгебры $k[\widetilde{Q}]$, и тогда имеется прямое разложение на однородные слагаемые $\mathcal{A}=\oplus_{m\geqslant 0}\mathcal{A}^m$, соответствующее этой градуировке на $\mathcal{A}$.

Основной результат работы – это следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $R=R_{n,t}$. Тогда алгебра Йонеды $\mathcal{E}(\overline{R})$ алгебры R изоморфна как градуированная k-алгебра алгебре $\mathcal{A}$.*

Замечание.

В случае $t=2$ алгебра Йонеды допускает другое, более простое, описание. Из приведённых соотношений видно, что $\gamma_{rt+1}=\alpha_{2(r+1)}\alpha_{2r+1}$ при $1\leqslant r\leqslant n$, поэтому в колчане $\widetilde{Q}$ можно опустить стрелки γ. Тогда получаем следующее описание $\mathcal{E}(\overline{R}_{n,2})$.

Рассмотрим колчан $\widetilde{Q}_2$, который получается из Q добавлением стрелок $\beta_{2r}:2r\to 2(r+n+1)+2$, $\beta_{2r+1}:2r+1\to 2(r+2)+1$. Градуировка $k[\widetilde{Q}_2]$ вводится так: $\deg\alpha_i=1$, $\deg\beta_i=3$ $(i\in\mathbb{Z}_{4n})$. Далее, пусть J_2 – идеал в $k[\widetilde{Q}]$, порождённый элементами $\alpha_{2r+1}\alpha_{2r}$, α^3, $\alpha_{2(r+1)}\alpha_{2r+1}+\alpha_{2(r+n+1)}\alpha_{2(r+n)+1}$, $\alpha_{2(r+n+2)+1}\beta_{2r+1}-d_r\beta_{2(r+1)}\alpha_{2r+1}$, $\beta_{2r+1}\alpha_{2r}+d_r\alpha_{2(r+n+2)}\beta_{2r}$, где d_r – элемент поля k, равный 1, если $1\leqslant r\leqslant n$, и -1 иначе.

Следствие 2. $\mathcal{E}(\overline{R}_{n,2})\simeq k[\widetilde{Q}_2]/J_2$ *как градуированные k-алгебры.*

2. Построение минимальных проективных резольвент

Все рассматриваемые модули – левые. Для R-модуля M $Q.(M) \to M$ обозначает его минимальную проективную резольвенту, $\Omega^m(M)$ – его m-ую сизигию.

Через e_i, $i \in \mathbb{Z}_{2nt} = \{1, 2, \dots, 2nt\}$ обозначаем идемпотенты алгебры $k\,[Q]$, соответствующие вершинам колчана Q (при этом $e_{rt+1} = e_{(n+r)t+1}$ $\forall\ 0 \le r < n$ – одна и та же вершина), α_i – стрелка, идущая из i-ой вершины колчана в $(i+1)$-ю, то есть $\alpha_i = e_{i+1}\alpha_i e_i$. Образ пути $\omega \in k\,[Q]$ в R обозначаем также через ω.

Пусть S_i – простые R-модули, соответствующие вершинам колчана Q, $P_i = Re_i$ – проективное накрытие модуля S_i. Неразложимые проективные модули P_i имеют следующие диаграммы:

$$
P_{rt+1}\colon\quad
\begin{array}{ccccc}
 & & S_{rt+1} & & \\
 & {\scriptstyle \alpha_{rt+1}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \alpha_{(r+n)t+1}} & \\
S_{rt+2} & & & & S_{(r+n)t+2} \\
{\scriptstyle \alpha_{rt+2}}\big| & & & & \big|{\scriptstyle \alpha_{(r+n)t+2}} \\
S_{rt+3} & & & & S_{(r+n)t+3} \\
\big| & & & & \big| \\
\vdots & & & & \vdots \\
\big| & & & & \big| \\
S_{(r+1)t} & & & & S_{(r+n+1)t} \\
 & {\scriptstyle \alpha_{(r+1)t}}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle \alpha_{(r+n+1)t}} & \\
 & & S_{(r+1)t+1}, & &
\end{array}
\qquad\qquad
P_i(i \neq rt+1)\colon\quad
\begin{array}{l}
S_i \\
\big|\alpha_i \\
S_{i+1} \\
\big|\alpha_{i+1} \\
S_{i+2} \\
\big| \\
\vdots \\
\big| \\
S_{i+t-1} \\
\big|\alpha_{i+t-1} \\
S_{i+t}
\end{array}
\quad .
$$

Мы использовали также дополнительные обозначения: у каждого ребра указана соответствующая образующая алгебры путей $k\,[Q]$ колчана Q. Рассмотрим гомоморфизм умножения справа на элемент α_i, действующий между P_i и P_{i+1}:

$$\alpha_i^* : \ P_{i+1} \to P_i .$$

Тогда дополнительные обозначения на диаграммах P_i указывают, в частности, на то, что подмодуль в P_i $(i \neq rt+1)$ с диаграммой

$$S_{i+t} \xleftarrow{\alpha_{i+t-1}} S_{i+t-1} \xleftarrow{\alpha_{i+t-1}} \dots \longleftarrow S_{i+2} \xleftarrow{\alpha_{i+1}} S_{i+1}$$

совпадает с $\mathrm{Im}\,(\alpha_i^*)$.

В дальнейшем гомоморфизм умножения справа на элемент ω также обозначаем через ω.

Опишем минимальные проективные резольвенты для S_i. Рассмотрим сначала случай $i \neq rt+1$.

Предложение 3. 1) *Если* $i \not\equiv 0, 1 \pmod t$, *то начало минимальной проективной резольвенты* $Q.(S_i)$ *имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{i+t+1} \xrightarrow{\alpha^t} P_{i+1} \xrightarrow{\alpha} P_i \longrightarrow S_i \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^2(S_i) \simeq S_{i+t+1}$.

2) *Начало минимальной проективной резольвенты* $Q.(S_{rt})$ *модуля* S_{rt}, $1 \leqslant r \leqslant 2n$, *имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{(r+n+1)t+2} \xrightarrow{\alpha^t} P_{(r+n)t+2} \xrightarrow{\alpha} P_{rt+1} \xrightarrow{\alpha} P_{rt} \longrightarrow S_{rt} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^3(S_{rt}) \simeq S_{(r+n+1)t+2}$.

Доказательство. Непосредственно из диаграммы P_i ($i \not\equiv 1 \pmod t$) получаем, что диаграмма сизигии $\Omega^1(S_i)$ имеет вид:

$$\begin{array}{l} S_{i+1} \\ |\alpha^{t-1} \\ S_{i+t}. \end{array}$$

Следовательно, $Q_1(S_i) = P_{i+1}$.

1) Если $i \not\equiv 0 \pmod t$, то ясно, что $\Omega^2(S_i) \simeq S_{i+t+1}$, откуда получаем $Q_2(S_i) = P_{i+t+1}$.

2) Сизигия $\Omega^2(S_{rt})$ имеет вид

$$\begin{array}{l} S_{(r+n)t+2} \\ |\alpha^{t} \\ S_{(r+1)t+1}. \end{array}$$

Значит, $Q_2(S_{rt}) = P_{(r+n)t+2}$ и $\Omega^3(S_i) \simeq S_{(r+n+1)t+2}$.

Следствие 4. *Пусть* $R = R_{n,t}$, $k = 2n/\text{НОД}(t+n, 2n)$, $i = rt+p$ ($0 \leqslant p < t$, $p \neq 1$). *Тогда группы* $\operatorname{Ext}^l_R(S_i, S_j)$ *ненулевые, если и только если тройка* (i, j, l) *имеет вид*

либо $(i,\ i+mt+m+qt(t+n),\ 2m+q(2t-1)+sk(2t-1))$, $1 \leqslant m \leqslant t-p$;

либо $(i, i+mt+m+1+qt(t+n),\ 2m+1+q(2t-1)+sk(2t-1))$, $0 \leqslant m \leqslant t-p$;

либо $(i, t(r+t-p+1+n+m)+m+1+qt(t+n),\ 2(t-p+m)+1+q(2t-1)+sk(2t-1))$, $1 \leqslant m \leqslant p-1$;

либо $(i, t(r+t-p+1+n+m)+m+2+qt(t+n),\ 2(t-p+m+1)+q(2t-1)+sk(2t-1))$ $0 \leqslant m \leqslant p-2$,

где $0 \leqslant q < k$, $s \in \mathbb{N}_0$. *При этом все размерности таких ненулевых групп над полем* k *равны* 1.

Теперь рассмотрим случай $i = rt+1$, то есть когда соответствующий модуль P_i не цепной.

Предложение 5. *Начало минимальной проективной резольвенты* $Q(S_{rt+1})$, $1 \leqslant r \leqslant n$ *имеет вид:*

$$\cdots \longrightarrow P_{(r+t)t+1} \xrightarrow{\alpha^t} P_{(r+t-1)t+1} \xrightarrow{\binom{\alpha}{-\alpha}} P_{(r+t-1)t} \oplus P_{(r+n+t-1)t} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{(\alpha^{t-1}\,\alpha^{t-1})} P_{(r+t-2)t+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{(r+2)t+1} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\binom{\alpha^{t-2}}{-\alpha^{t-2}}} P_{(r+1)t+3} \oplus P_{(r+n+1)t+3} \xrightarrow{(\alpha^2\,\alpha^2)} P_{(r+1)t+1} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\binom{\alpha^{t-1}}{-\alpha^{t-1}}} P_{rt+2} \oplus P_{(n+r)t+2} \xrightarrow{(\alpha\,\alpha)} P_{rt+1} \longrightarrow S_{rt+1} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^{2t-1}(S_{rt+1}) \simeq S_{(r+t)t+1}$.

Доказательство. Из диаграммы модуля P_{rt+1} получаем диаграмму первой сизигии:

$$\begin{array}{ccc} S_{rt+2} & & S_{(r+n)t+2} \\ & {}_{\alpha^{t-1}}\searrow \quad \swarrow_{\alpha^{t-1}} & \\ & S_{(r+1)r+1}. & \end{array}$$

Следовательно, $Q_1(S_{rt+1}) = P_{rt+2} \oplus P_{(r+n)t+2}$, а диаграмма сизигии $\Omega^2(S_{rt+1})$ имеет вид

$$\begin{array}{ccc} & S_{(r+1)t+1} & \\ & \swarrow_{\alpha} \quad {}_{\alpha}\searrow & \\ S_{(r+1)t+2} & & S_{(r+n+1)t+2}. \end{array}$$

Таким образом, $Q_2(S_{rt+1}) = P_{(r+1)t+1}$, а диаграмма сизигии $\Omega^3(S_{rt+1})$ имеет вид

$$\begin{array}{ccc} S_{(r+1)t+3} & & S_{(r+n+1)t+3} \\ & {}_{\alpha^{t-2}}\searrow \quad \swarrow_{\alpha^{t-2}} & \\ & S_{(r+2)r+1}. & \end{array}$$

Действуя так далее, получаем искомую резольвенту.

Следствие 6. *Пусть* $R = R_{n,t}$, $k = 2n/\text{НОД}(t+n, 2n)$. *Тогда группы* $\operatorname{Ext}^l_R(S_{rt+1}, S_j)$ *ненулевые, если и только если пара* $(j,\ l)$ *имеет вид*

либо $((r+m-1)t+m+1+qt^2,\ 2m-1+q(2t-1)+sk(2t-1))$;

либо $((r+m-1+n)t+m+1+qt^2,\ 2m-1+q(2t-1)+sk(2t-1))$;

либо $((r+m)t+1+qt^2,\ 2m+q(2t-1)+sk(2t-1))$;

либо $(qt^2+rt+1,\ q(2t-1)+sk(2t-1))$,

где $1 \leqslant m \leqslant t-1$, $0 \leqslant q < k$, $s \in \mathbb{N}_0$. *При этом все размерности таких ненулевых групп над полем k равны* 1.

3. Описание алгебры Йонеды

3.1. Образующие.

Ввиду того, что $\operatorname{Ext}^m_R(S_i, S_j) \simeq \operatorname{Hom}_R(\Omega^m(S_i), S_j)$, любой элемент $x \in \operatorname{Ext}^m_R(S_i, S_j)$ можно представить некоторым гомоморфизмом $\widehat{x} : \Omega^m(S_i) \to S_j$. При этом $\widehat{x}$ включается в следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} Q_m(S_i) \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & \Omega^m(S_i) \arrow[d, "\widehat{x}"] \\ Q_0(S_j) \arrow[r] & S_j, \end{tikzcd}$$

которая для краткости может быть заменена на квадрат

$$\widehat{x}: \begin{tikzcd} Q_m(S_i) \arrow[r, "d^{(i)}_{m-1}"] \arrow[d, "f_1"'] & Q_{m-1}(S_i) \arrow[d, "f_0"] \\ Q_0(S_j) \arrow[r] & P_{j-t}. \end{tikzcd}$$

Аналогично Ω-сдвиги $\Omega^r(\widehat{x})$, $r \geq 1$ отображения $\widehat{x}$ можно определить с помощью коммутативных квадратов

$$\Omega^r(\widehat{x}): \begin{tikzcd} Q_{m+r}(S_i) \arrow[r, "d^{(i)}_{m+r-1}"] \arrow[d, "f_{r+1}"'] & Q_{m+r-1}(S_i) \arrow[d, "f_r"] \\ Q_r(S_j) \arrow[r, "d^{(j)}_{r-1}"] & Q_{r-1}(S_j) \end{tikzcd}$$

(здесь $\{f_l\}$ – цепное отображение резольвент, полученное подъёмом отображения $\widehat{x}$).

Теперь введем в рассмотрение, используя коммутативные квадраты, следующие элементы алгебры $\mathcal{E}(\overline{R})$.

а) Так как $\dim_k \operatorname{Ext}^1_R(S_i, S_{i+1}) = 1$ для любого $i \in \mathbb{Z}_{2nt}$, то имеются следующие базисные элементы:

1) если $i \not\equiv 1 \pmod t$, то

$$\widehat{\alpha}_i : \begin{tikzcd} Q_1(S_i) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & Q_0(S_i) \arrow[d, "\alpha^{t-1}"] \\ Q_0(S_{i+1}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{i+1-t}; \end{tikzcd}$$

2) если $i = rt+1,\ 1 \leqslant r \leqslant n$, то

$$\widehat{\alpha}_{rt+1} : \begin{tikzcd} Q_1(S_{rt+1}) \arrow[r, "(\alpha\ \alpha)"] \arrow[d, "(1\ 0)"'] & Q_0(S_{rt+1}) \arrow[d, "\alpha^{t-1}"] \\ Q_0(S_{rt+2}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{(r-1)t+2}; \end{tikzcd}$$

3) если $i = rt+1,\ n+1 \leqslant r \leqslant 2n$, то

$$\widehat{\alpha}_{rt+1} : \begin{tikzcd} Q_1(S_{rt+1}) \arrow[r, "(\alpha\ \alpha)"] \arrow[d, "(0\ 1)"'] & Q_0(S_{rt+1}) \arrow[d, "\alpha^{t-1}"] \\ Q_0(S_{rt+2}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{(r-1)t+2}. \end{tikzcd}$$

б) Так как для $i \not\equiv 0, 1 \pmod t$ имеем $\Omega^2(S_i) \simeq S_{i+t+1}$, то базисные элементы $\beta_i \in \operatorname{Ext}^2_R(S_i, S_{i+t+1})$ можно описать так:

$$\widehat{\beta}_i : \begin{tikzcd} Q_2(S_i) \arrow[r, "\alpha^t"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & Q_1(S_i) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ Q_0(S_{i+t+1}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{i+1}. \end{tikzcd}$$

Заметим, что для $t = 2$ такие β_i не вводятся.

в) Если $i = rt$, то $\Omega^3(S_{rt}) \simeq S_{(r+n+1)t+2}$, поэтому имеем $\beta_{rt} \in \operatorname{Ext}^3_R(S_{rt}, S_{(r+n+1)t+2})$:

$$\widehat{\beta}_{rt} : \begin{tikzcd} Q_3(S_{rt}) \arrow[r, "\alpha^t"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & Q_2(S_{rt}) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ Q_0(S_{(r+n+1)t+2}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{(r+n)t+2}. \end{tikzcd}$$

г) При $i = rt + 1$ имеем $\Omega^{2t-1}(S_{rt+1}) \simeq S_{(r+t)t+1}$, поэтому определим $\beta_{rt+1} \in \operatorname{Ext}_R^{2t-1}(S_{rt+1}, S_{(r+t)t+1})$ так:

$$\widehat{\beta}_{rt+1}: \quad \begin{array}{ccc} Q_{2t-1}(S_{rt+1}) & \xrightarrow{\alpha^t} & Q_{2t-2}(S_{rt+1}) \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ Q_0(S_{(r+t)t+1}) & \xrightarrow{\alpha^t} & P_{(r+t-1)t+1}. \end{array}$$

Заметим, что все Ω-сдвиги $\beta_i \quad (i \in \mathbb{Z}_{2nt})$ тождественны.

д) Так как $\dim_k \operatorname{Ext}_R^2(S_{rt+1}, S_{(r+1)t+1}) = 1$, определим $\gamma_{rt+1} \in \operatorname{Ext}_R^2(S_{rt+1}, S_{(r+1)t+1})$:

$$\widehat{\gamma}_{rt+1}: \quad \begin{array}{ccc} Q_2(S_{rt+1}) & \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \alpha^{t-1} \\ -\alpha^{t-1} \end{smallmatrix}\right)} & Q_1(S_{rt+1}) \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (\alpha\ 0)} \\ Q_0(S_{(r+1)t+1}) & \xrightarrow{\alpha^t} & P_{rt+1}. \end{array}$$

Предложение 7. *Описанные выше элементы*

$$\begin{gathered} \alpha_i \ (i \in \mathbb{Z}_{2nt}), \quad \beta_i \ (i \not\equiv 0, 1 \ (\operatorname{mod} t)), \quad \beta_{rt} \ (1 \leqslant r \leqslant 2n), \\ \beta_{rt+1} \ \text{и} \ \gamma_{rt+1} \ (1 \leqslant r \leqslant n) \end{gathered} \tag{3.1}$$

порождают алгебру Йонеды $\mathcal{E}(\overline{R})$.

Доказательство. С учетом следствий 4 и 6 достаточно проверить, что $\alpha_{rt+1}\alpha_{(r+n)t}$, $\alpha_{(r+n)t+1}\alpha_{rt}$ и γ^s $(s < t)$ не равны нулю, так как все β при умножении справа или слева на ненулевые пути снова дают ненулевой путь (если, конечно, композиция существует).

а) Имеем $(\alpha_{rt+1}\alpha_{(r+n)t})\widehat{\ } = \widehat{\alpha_{rt+1}} \circ \Omega^1(\widehat{\alpha_{(r+n)t}})$, при этом Ω-сдвиг отображения $\widehat{\alpha_{(r+n)t}}$ имеет вид при $1 \leqslant r \leqslant n$

$$\begin{array}{ccc} Q_2(S_{(r+n)t}) & \xrightarrow{\alpha} & Q_1(S_{(r+n)t}) \\ {\scriptstyle \binom{1}{0}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ Q_1(S_{(r+n)t+1}) & \xrightarrow{(\alpha\ \alpha)} & Q_0(S_{(r+n)t+1}), \end{array}$$

так что

$$(\alpha_{rt+1}\alpha_{(r+n)t})\widehat{}:\quad \begin{array}{ccc} Q_2(S_{(r+n)t}) & \xrightarrow{\alpha} & Q_1(S_{(r+n)t}) \\ \mathrm{id}\big\downarrow & & \big\downarrow\alpha^{t-1} \\ Q_0(S_{rt+2}) & \xrightarrow{\alpha^t} & P_{(r-1)t+2}, \end{array}$$

и потому $\alpha_{rt+1}\alpha_{(r+n)t} \neq 0$.

Аналогично для $\alpha_{(r+n)t+1}\alpha_{rt}$:

$$(\alpha_{(r+n)t+1}\alpha_{rt})\widehat{}:\quad \begin{array}{ccc} Q_2(S_{rt}) & \xrightarrow{\alpha} & Q_1(S_{rt}) \\ \mathrm{id}\big\downarrow & & \big\downarrow\alpha^{t-1} \\ Q_0(S_{(r+n)t+2}) & \xrightarrow{\alpha^t} & P_{(r+n-1)t+2}. \end{array}$$

И вновь $\alpha_{(r+n)t+1}\alpha_{rt} \neq 0$.

б) $\widehat{\gamma}^s = \widehat{\gamma}_{rt+1} \circ \Omega^2(\widehat{\gamma}_{(r+1)t+1}) \circ \Omega^4(\widehat{\gamma}_{(r+2)t+1}) \circ \dots \circ \Omega^{2(s-1)}(\widehat{\gamma}_{(r+s-1)t+1})$, и это произведение не равно нулю при $s < t$, так как у всех Ω^{2l}-сдвигов γ_{rt+1} левая стрелка при $l < t-1$ с точностью до умножения на -1 тождественна.

3.2. Соотношения.

Предложение 8. *В алгебре $\mathcal{E}(\overline{R})$ для элементов α_i, β_i и γ_{rt+1} из* (3.1) *выполняются соотношения:*

(1) *если $t \neq 2$, то $\alpha_{i+1}\alpha_i = 0$ для всех $i \in \mathbb{Z}_{2nt}$;*
если $t = 2$, то $\alpha_{2r+1}\alpha_{2r} = 0$ для всех r;

(2) *если $i \not\equiv -1, 0, 1 \pmod t$, то $\alpha_{i+t+1}\beta_i = \beta_{i+1}\alpha_i$;*
если $t \neq 2$, то $\alpha_{(r+n+1)t+2}\beta_{rt} = \beta_{(r+n)t+2}\alpha_{(r+n)t+1}\alpha_{rt}$,
$\beta_{rt}\alpha_{rt-1} = \alpha_{(r+n+1)t+1}\alpha_{(r+1)t}\beta_{rt-1}$;

(3) $\alpha\gamma = \gamma\alpha = 0$, $\gamma_{(r+t)t+1}\beta_{rt+1} = a_r\beta_{(r+1)t+1}\gamma_{rt+1}$, *где $a_r \in k$ – следующий элемент: $a_r = a'_r a''_r$, где a'_r и a''_r описаны в равенствах* (1.1) *и* (1.2)*;*

(4) $\alpha_{(r+t-1)t}\beta^{t-2}\alpha_{rt+1} = b_r\gamma^{t-1} = b_r\gamma_{(r+t-2)t+1}\cdots\gamma_{(r+1)t+1}\gamma_{rt+1}$, *где $b_r \in k$ – следующий элемент: $b_r = b'_r b''_r$, где b'_r и b''_r заданы в* (1.3) *и* (1.4)*;*

(5) $\alpha_{(r+t+n)t+1}\beta_{rt+1} = b'_r\beta_{(r+t-1)t}\beta^{t-2}\alpha_{rt+1}$, *где $b'_r \in k$ – элемент, описанный в* (1.3)*;*
$\beta_{rt+1}\alpha_{rt} = c_r\alpha_{(r+t+n)t}\beta^{t-2}\beta_{rt}$, *где c_r – элемент поля k из*

равенства (1.5).

Доказательство. (1) Имеем $(\alpha_{i+1}\alpha_i)\widehat{} = \widehat{\alpha}_{i+1} \circ \Omega^1(\widehat{\alpha}_i)$, при этом α_i и их Ω-сдвиги представляются следующими коммутативными квадратами:

для $i \not\equiv 0, 1 \pmod t$

$$\widehat{\alpha}_i : \quad \begin{tikzcd} Q_2(S_i) \arrow[r, "\alpha^t"] \arrow[d, "\alpha^{t-1}"] & Q_1(S_i) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Q_0(S_i) \arrow[d, "\alpha^{t-1}"'] \\ Q_1(S_{i+1}) \arrow[r, "\alpha"] & Q_0(S_{i+1}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{i+1-t}; \end{tikzcd}$$

для $i = rt$, $1 \leqslant r \leqslant n$

$$\widehat{\alpha}_{rt} : \quad \begin{tikzcd} Q_2(S_{rt}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\binom{0}{1}"] & Q_1(S_{rt}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Q_0(S_{rt}) \arrow[d, "\alpha^{t-1}"'] \\ Q_1(S_{rt+1}) \arrow[r, "(\alpha\ \alpha)"] & Q_0(S_{rt+1}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{(r-1)t+1}; \end{tikzcd}$$

для $i = rt$, $n+1 \leqslant r \leqslant 2n$

$$\widehat{\alpha}_{rt} : \quad \begin{tikzcd} Q_2(S_{rt}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\binom{1}{0}"] & Q_1(S_{rt}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Q_0(S_{rt}) \arrow[d, "\alpha^{t-1}"'] \\ Q_1(S_{rt+1}) \arrow[r, "(\alpha\ \alpha)"] & Q_0(S_{rt+1}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{(r-1)t+1}; \end{tikzcd}$$

для $i = rt+1$, $1 \leqslant r \leqslant n$

$$\widehat{\alpha}_{rt+1} : \quad \begin{tikzcd} Q_2(S_{rt+1}) \arrow[r, "\binom{\alpha^{t-1}}{-\alpha^{t-1}}"] \arrow[d, "\alpha^{t-2}"] & Q_1(S_{rt+1}) \arrow[r, "(\alpha\ \alpha)"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & Q_0(S_{rt+1}) \arrow[d, "\alpha^{t-1}"'] \\ Q_1(S_{rt+2}) \arrow[r, "\alpha"] & Q_0(S_{rt+2}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{(r-1)t+2}; \end{tikzcd}$$

для $i = rt+1$, $n+1 \leqslant r \leqslant 2n$

$$\widehat{\alpha}_{rt+1} : \quad \begin{tikzcd} Q_2(S_{rt+1}) \arrow[r, "\binom{\alpha^{t-1}}{-\alpha^{t-1}}"] \arrow[d, "-\alpha^{t-2}"] & Q_1(S_{rt+1}) \arrow[r, "(\alpha\ \alpha)"] \arrow[d, "(0\ 1)"] & Q_0(S_{rt+1}) \arrow[d, "\alpha^{t-1}"'] \\ Q_1(S_{rt+2}) \arrow[r, "\alpha"] & Q_0(S_{rt+2}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{(r-1)t+2}. \end{tikzcd}$$

Тогда получаем, что $\alpha_{i+1}\alpha_i$ представляется объемлющим квадратом следующих диаграмм:

для $i \neq rt+1$ и $i \neq rt$

$$\begin{tikzcd}
Q_2(S_i) \arrow[r, "\alpha^t"] \arrow[d, "\alpha^{t-1}"] & Q_1(S_i) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
Q_1(S_{i+1}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Q_0(S_{i+1}) \arrow[d, "\alpha^{t-1}"] \\
Q_0(S_{i+2}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{i+2-t};
\end{tikzcd}$$

для $i = rt,\ 1 \leqslant r \leqslant n$

$$\begin{tikzcd}
Q_2(S_{rt}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\binom{0}{1}"] & Q_1(S_{rt}) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
Q_1(S_{rt+1}) \arrow[r, "(\alpha\ \alpha)"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & Q_0(S_{rt+1}) \arrow[d, "\alpha^{t-1}"] \\
Q_0(S_{rt+2}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{(r-1)t+2};
\end{tikzcd}$$

для $i = rt,\ n+1 \leqslant r \leqslant 2n$

$$\begin{tikzcd}
Q_2(S_{rt}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\binom{1}{0}"] & Q_1(S_{rt}) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
Q_1(S_{rt+1}) \arrow[r, "(\alpha\ \alpha)"] \arrow[d, "(0\ 1)"] & Q_0(S_{rt+1}) \arrow[d, "\alpha^{t-1}"] \\
Q_0(S_{rt+2}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{(r-1)t+2};
\end{tikzcd}$$

для $i = rt+1,\ 1 \leqslant r \leqslant n$

$$\begin{tikzcd}
Q_2(S_{rt+1}) \arrow[r, "\binom{\alpha^{t-1}}{-\alpha^{t-1}}"] \arrow[d, "\alpha^{t-2}"] & Q_1(S_{rt+1}) \arrow[d, "(1\ 0)"] \\
Q_1(S_{rt+2}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Q_0(S_{rt+2}) \arrow[d, "\alpha^{t-1}"] \\
Q_0(S_{rt+3}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{(r-1)t+3}.
\end{tikzcd}$$

для $i = rt+1,\ n+1 \leqslant r \leqslant 2n$

$$\begin{tikzcd}
Q_2(S_{rt+1}) \arrow[r, "\binom{\alpha^{t-1}}{-\alpha^{t-1}}"] \arrow[d, "-\alpha^{t-2}"] & Q_1(S_{rt+1}) \arrow[d, "(0\ 1)"] \\
Q_1(S_{rt+2}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Q_0(S_{rt+2}) \arrow[d, "\alpha^{t-1}"] \\
Q_0(S_{rt+3}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{(r-1)t+3}.
\end{tikzcd}$$

Таким образом, при $t \neq 2$ получаем $\alpha_{i+1}\alpha_i = 0$ для любого i, а при $t = 2$ получаем $\alpha_{i+1}\alpha_i = 0$, если $i = 2r$.

(2) Покажем, что $\alpha_{i+t+1}\beta_i = \beta_{i+1}\alpha_i$ при $i \neq rt,\ i \neq rt-1,\ ,i \neq rt+1$.

Рассмотрим левую часть равенства: $(\alpha_{i+t+1}\beta_i)\widehat{\ } = \widehat{\alpha}_{i+t+1} \circ \Omega^1(\widehat{\beta}_i)$, а Ω-сдвиг β_i тождествен, так что

$$(\alpha_{i+t+1}\beta_i)\widehat{\ }:\quad \begin{tikzcd}
Q_3(S_i) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Q_2(S_i) \arrow[d, "\alpha^{t-1}"] \\
Q_0(S_{i+t+2}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{i+2}.
\end{tikzcd}$$

Для правой части имеем $(\beta_{i+1}\alpha_i)\widehat{\ } = \widehat{\beta}_{i+1} \circ \Omega^2(\widehat{\alpha}_i)$, а тогда из представления

$$\Omega^2(\widehat{\alpha}_i):\quad \begin{tikzcd}
Q_3(S_i) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Q_2(S_i) \arrow[d, "\alpha^{t-1}"] \\
Q_1(S_{i+1}) \arrow[r, "\alpha^t"] & Q_0(S_{i+1})
\end{tikzcd}$$

получаем такой же коммутативный квадрат для правой части равенства, что и для левой.

Далее, покажем, что при $t \neq 2$

$$\alpha_{(r+n+1)t+2}\beta_{rt} = \beta_{(r+n)t+2}\alpha_{(r+n)t+1}\alpha_{rt}.$$

В левой части равенства имеем $(\alpha_{(r+n+1)t+2}\beta_{rt})\widehat{\ } = \widehat{\alpha}_{(r+n+1)t+2} \circ \Omega^1(\widehat{\beta}_{rt})$, откуда

$$(\alpha_{(r+n+1)t+2}\beta_{rt})\widehat{\ }: \quad \begin{array}{ccc} Q_4(S_{rt}) & \xrightarrow{\alpha} & Q_3(S_{rt}) \\ \big\downarrow \mathrm{id} & & \big\downarrow \alpha^{t-1} \\ Q_0(S_{(r+n+1)t+3}) & \xrightarrow{\alpha^t} & P_{(r+n)t+3}. \end{array}$$

Далее, $(\beta_{(r+n)t+2}\alpha_{(r+n)t+1}\alpha_{rt})\widehat{\ } = \widehat{\beta}_{(r+n)t+2} \circ \Omega^2(\widehat{\alpha_{(r+n)t+1}\alpha_{rt}})$. Используя вычисление $\alpha_{(r+n)t+1}\alpha_{rt}$ в доказательстве предложения 7, получаем

$$(\alpha_{(r+n)t+1}\alpha_{rt})\widehat{\ }:$$

$$\begin{array}{ccccc} Q_4(S_{rt}) & \xrightarrow{\alpha} & Q_3(S_{rt}) & \xrightarrow{\alpha^t} & Q_2(S_{rt}) \\ \big\downarrow \mathrm{id} & & \big\downarrow \alpha^{t-1} & & \big\downarrow \mathrm{id} \\ Q_2(S_{(r+n)t+2}) & \xrightarrow{\alpha^t} & Q_1(S_{(r+n)t+2}) & \xrightarrow{\alpha} & Q_0(S_{(r+n)t+2}), \end{array}$$

что в композиции с β даёт левую часть.

Теперь докажем, что $\beta_{rt}\alpha_{rt-1} = \alpha_{(r+n+1)t+1}\alpha_{(r+1)t}\beta_{rt-1}$.

Слева имеем $(\beta_{rt}\alpha_{rt-1})\widehat{\ } = \widehat{\beta}_{rt} \circ \Omega^3(\widehat{\alpha}_{rt-1})$, при этом Ω-сдвиги α_{rt-1} находим последовательным подъёмом гомоморфизмов:

$$\begin{array}{ccccccc} Q_4(S_{rt-1}) & \xrightarrow{\alpha} & Q_3(S_{rt-1}) & \xrightarrow{\alpha} & Q_2(S_{rt-1}) & \xrightarrow{\alpha^t} & \\ \big\downarrow \mathrm{id} & & \big\downarrow \alpha^{t-1} & & \big\downarrow \alpha^{t-1} & & \\ Q_3(S_{rt}) & \xrightarrow{\alpha^t} & Q_2(S_{rt}) & \xrightarrow{\alpha} & Q_1(S_{rt}) & \xrightarrow{\alpha} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \longrightarrow Q_1(S_{rt-1}) & \xrightarrow{\alpha} & Q_0(S_{rt-1}) \\ \big\downarrow \mathrm{id} & & \big\downarrow \alpha^{t-1} \\ \longrightarrow Q_0(S_{rt}) & \xrightarrow{\alpha^t} & P_{(r-1)t}. \end{array}$$

Поэтому левая часть представляется так:

$$(\beta_{rt}\alpha_{rt-1})\widehat{}:\quad \begin{array}{ccc} Q_4(S_{rt-1}) & \xrightarrow{\alpha} & Q_3(S_{rt-1}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{t-1}} \\ Q_0(S_{(n+r+1)t+2}) & \xrightarrow{\alpha^t} & P_{(r+n)t+2}. \end{array} \tag{3.2}$$

Для правой части имеем

$$(\alpha_{(r+n+1)t+1}\alpha_{(r+1)t}\beta_{rt-1})\widehat{}= (\alpha_{(r+n+1)t+1}\alpha_{(r+1)t})\widehat{}\circ \Omega^2(\widehat{\beta}_{rt-1}).$$

Из доказательства предложения 7 получаем

$$(\alpha_{(r+n+1)t+1}\alpha_{(r+1)t})\widehat{}:\quad \begin{array}{ccc} Q_2(S_{(r+1)t}) & \xrightarrow{\alpha} & Q_1(S_{(r+1)t}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{t-1}} \\ Q_0(S_{(r+n+1)t+2} & \xrightarrow{\alpha^t} & P_{(r+n)t+2}, \end{array}$$

что в композиции с Ω-сдвигом β вновь дает квадрат (3.2).

(3) Докажем, что $\alpha_{(r+1)t+1}\gamma_{rt+1} = 0$.

Рассмотрим сначала случай $1 \leqslant r < n$. Так как $(\alpha_{(r+1)t+1}\gamma_{rt+1})\widehat{}= \widehat{\alpha}_{(r+1)t+1} \circ \Omega^1(\widehat{\gamma}_{rt+1})$, а γ_{rt+1} и его Ω-сдвиг представимы так:

$$\widehat{\gamma}_{rt+1}:\quad \begin{array}{ccccc} Q_3(S_{rt+1}) & \xrightarrow{(\alpha^2\ \alpha^2)} & Q_2(S_{rt+1}) & \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha^{t-1}\\ -\alpha^{t-1}\end{smallmatrix}\right)} & Q_1(S_{rt+1}) \\ \downarrow{\scriptstyle \left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle (\alpha\ 0)} \\ Q_1(S_{(r+1)t+1}) & \xrightarrow{(\alpha\ \alpha)} & Q_0(S_{(r+1)t+1}) & \xrightarrow{\alpha^t} & P_{rt+1}, \end{array}$$

поэтому

$$(\alpha_{(r+1)t+1}\gamma_{rt+1})\widehat{}:\quad \begin{array}{ccc} Q_3(S_{rt+1}) & \xrightarrow{(\alpha^2\ \alpha^2)} & Q_2(S_{rt+1}) \\ \downarrow{\scriptstyle (\alpha\ 0)} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{t-1}} \\ Q_0(S_{(r+1)t+2}) & \xrightarrow{\alpha^t} & P_{rt+2}. \end{array}$$

И, следовательно, $\alpha_{(r+1)t+1}\gamma_{rt+1} = 0$.

В случае $r = n$ получаем

$$\widehat{\gamma}_{nt+1}:\quad \begin{array}{ccccc} Q_3(S_{nt+1}) & \xrightarrow{(\alpha^2\ \alpha^2)} & Q_2(S_{nt+1}) & \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha^{t-1}\\ -\alpha^{t-1}\end{smallmatrix}\right)} & Q_1(S_{nt+1}) \\ \downarrow{\scriptstyle \left(\begin{smallmatrix}0 & \alpha\\ \alpha & 0\end{smallmatrix}\right)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle (\alpha\ 0)} \\ Q_1(S_{t+1}) & \xrightarrow{(\alpha\ \alpha)} & Q_0(S_{t+1}) & \xrightarrow{\alpha^t} & P_1, \end{array}$$

поэтому

$$(\alpha_{(n+1)t+1}\gamma_{nt+1})\widehat{}:\quad \begin{array}{ccc} Q_3(S_{nt+1}) & \xrightarrow{(\alpha^2\ \alpha^2)} & Q_2(S_{nt+1}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle(\alpha\ 0)} & & \big\downarrow{\scriptstyle\alpha^{t-1}} \\ Q_0(S_{(n+1)t+2}) & \xrightarrow{\alpha^t} & P_{nt+2}, \end{array}$$

что равно нулю. Аналогично доказывается, что $\alpha_{(r+n)t+1}\gamma_{rt+1} = 0$.

Далее покажем, что $\gamma_{rt+1}\alpha_{rt} = 0$. Имеем $(\gamma_{rt+1}\alpha_{rt})\widehat{} = \widehat{\gamma}_{rt+1} \circ \Omega^2(\widehat{\alpha}_{rt})$.

$$\Omega^2(\widehat{\alpha}_{rt}):\quad \begin{array}{ccc} Q_3(S_{rt}) & \xrightarrow{\alpha^t} & Q_2(S_{rt}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle -\alpha} & & \big\downarrow{\scriptstyle\binom{0}{1}} \\ Q_2(S_{rt+1}) & \xrightarrow{\binom{\alpha^{t-1}}{-\alpha^{t-1}}} & Q_1(S_{rt+1}), \end{array}$$

откуда получаем

$$(\gamma_{rt+1}\alpha_{rt})\widehat{}:\quad \begin{array}{ccc} Q_3(S_{rt}) & \xrightarrow{\alpha^t} & Q_2(S_{rt}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle -\alpha} & & \big\downarrow{\scriptstyle 0} \\ Q_0(S_{(r+1)t+1}) & \xrightarrow{\alpha^t} & P_{rt+1}, \end{array}$$

и, следовательно, $\gamma_{rt+1}\alpha_{rt} = 0$. Аналогично доказывается, что $\gamma_{rt+1}\alpha_{(r+n)t} = 0$.

Теперь докажем, что $\gamma_{(r+t)t+1}\beta_{rt+1} = a_r\beta_{(r+1)t+1}\gamma_{rt+1}$. Для левой части

$$(\gamma_{(r+t)t+1}\beta_{rt+1})\widehat{}:\quad \begin{array}{ccc} Q_{2t+1}(S_{rt+1}) & \xrightarrow{\binom{\alpha^{t-1}}{-\alpha^{t-1}}} & Q_{2t}(S_{rt+1}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \big\downarrow{\scriptstyle(\alpha\ 0)} \\ Q_0(S_{(r+t+1)t+1}) & \xrightarrow{\alpha^t} & P_{(r+t)t+1}, \end{array}$$

а справа $(\beta_{(r+1)t+1}\gamma_{rt+1})\widehat{} = \widehat{\beta}_{(r+1)t+1} \circ \Omega^{2t-1}(\widehat{\gamma}_{rt+1})$. Имеем следующие диаграммы для Ω-сдвигов γ_{rt+1}

при $1 \leqslant r < n$

$$\begin{tikzcd}
P_{(r+2)t+1} \arrow[r, "\binom{\alpha^{t-2}}{-\alpha^{t-2}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & P_{(r+1)t+3} \oplus P_{(r+n+1)t+3} \arrow[r, "(\alpha^2\ \alpha^2)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)"'] & {} \\
P_{(r+2)t+2} \arrow[r, "\binom{\alpha^{t-1}}{-\alpha^{t-1}}"] & P_{(r+1)t+2} \oplus P_{(r+n+1)t+2} \arrow[r, "(\alpha\ \alpha)"] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & P_{(r+1)t+1} \arrow[r, "\binom{\alpha^{t-1}}{-\alpha^{t-1}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & P_{rt+2} \oplus P_{(r+n)t+2} \arrow[d, "(\alpha\ 0)"] \\
{} \arrow[r] & P_{(r+1)t+1} \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{rt+1},
\end{tikzcd}$$

при $r = n$

$$\begin{tikzcd}
P_{2t+1} \arrow[r, "\binom{\alpha^{t-2}}{-\alpha^{t-2}}"] \arrow[d, "-\mathrm{id}"'] & P_{(n+1)t+3} \oplus P_{t+3} \arrow[r, "(\alpha^2\ \alpha^2)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}0 & \alpha\\ \alpha & 0\end{smallmatrix}\right)"] & P_{t+1} \arrow[r, "\binom{\alpha^{t-1}}{-\alpha^{t-1}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & P_{nt+2} \oplus P_2 \arrow[d, "(\alpha\ 0)"] \\
P_{2t+1} \arrow[r, "\binom{\alpha^{t-1}}{-\alpha^{t-1}}"] & P_{t+2} \oplus P_{(n+1)t+2} \arrow[r, "(\alpha\ \alpha)"] & P_{t+1} \arrow[r, "\alpha^t"] & P_1.
\end{tikzcd}$$

То есть у Ω^{2m}-сдвигов γ_{rt+1} (при $m < t-1$) левая стрелка при $r < n$ тождественна всегда, а при $r = n$ тождественна при четных m. Отсюда получаем представление

$$\Omega^{2t-3}(\widehat{\gamma}) : \quad \begin{tikzcd}
Q_{2t-1}(S_{rt+1}) \arrow[r, "\alpha^t"] \arrow[d, "\binom{a'_r\alpha}{0}"] & Q_{2t-2}(S_{rt+1}) \arrow[d, "a'_r\mathrm{id}"] \\
Q_{2t-3}(S_{(r+1)t+1}) \arrow[r, "(\alpha^{t-1}\ \alpha^{t-1})"] & Q_{2t-4}(S_{(r+1)t+1}).
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим случай $r < n$. Имеем следующее представление для $\Omega^{2t-1}(\widehat{\gamma}_{rt+1})$

при $1 \leqslant \overline{r+t} \leqslant n$

$$\begin{tikzcd}
P_{(r+t+1)t+1} \arrow[r, "\binom{\alpha^{t-1}}{-\alpha^{t-1}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & P_{(r+t)t+2} \oplus P_{(r+t+n)t+2} \arrow[r, "(\alpha\ \alpha)"] \arrow[d, "(\alpha\ 0)"] & P_{(r+t)t+1} \arrow[d, "\binom{\alpha}{0}"] \\
P_{(r+t+1)t+1} \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{(r+t)t+1} \arrow[r, "\binom{\alpha}{-\alpha}"] & P_{(r+t)t} \oplus P_{(r+n+t)t};
\end{tikzcd}$$

при $n+1 \leqslant \overline{r+t} \leqslant 2n$

$$\begin{tikzcd}
P_{(r+t+1)t+1} \arrow[r, "\binom{\alpha^{t-1}}{-\alpha^{t-1}}"] \arrow[d, "-\mathrm{id}"] & P_{(r+t+n)t+2} \oplus P_{(r+t)t+2} \arrow[r, "(\alpha\ \alpha)"] \arrow[d, "(0\ \alpha)"] & P_{(r+t)t+1} \arrow[d, "\binom{\alpha}{0}"] \\
P_{(r+t+1)t+1} \arrow[r, "\alpha^{t}"] & P_{(r+t)t+1} \arrow[r, "\binom{\alpha}{-\alpha}"] & P_{(r+t)t} \oplus P_{(r+n+t)t}.
\end{tikzcd}$$

Теперь рассмотрим случай $r = n$. Получаем представление для $\Omega^{2t-1}(\widehat{\gamma}_{nt+1})$
при $1 \leqslant \overline{n+t} \leqslant n$

$$\begin{tikzcd}
P_{(t+1)t+1} \arrow[r, "\binom{\alpha^{t-1}}{-\alpha^{t-1}}"] \arrow[d, "-a'_r\mathrm{id}"] & P_{(t+n)t+2} \oplus P_{t^2+2} \arrow[r, "(\alpha\ \alpha)"] \arrow[d, "(0\ a'_r\alpha)"] & P_{t^2+1} \arrow[d, "\binom{a'_r\alpha}{0}"] \\
P_{(t+1)t+1} \arrow[r, "\alpha^{t}"] & P_{t^2+1} \arrow[r, "\binom{\alpha}{-\alpha}"] & P_{t^2} \oplus P_{(t+n)t};
\end{tikzcd}$$

при $1 \leqslant \overline{t} \leqslant n$

$$\begin{tikzcd}
P_{(t+1)t+1} \arrow[r, "\binom{\alpha^{t-1}}{-\alpha^{t-1}}"] \arrow[d, "a'_r\mathrm{id}"] & P_{t^2+2} \oplus P_{(t+n)t+2} \arrow[r, "(\alpha\ \alpha)"] \arrow[d, "(a'_r\alpha\ 0)"] & P_{t^2+1} \arrow[d, "\binom{a'_r\alpha}{0}"] \\
P_{(t+1)t+1} \arrow[r, "\alpha^{t}"] & P_{t^2+1} \arrow[r, "\binom{\alpha}{-\alpha}"] & P_{t^2} \oplus P_{(n+t)t}.
\end{tikzcd}$$

Откуда и получаем искомое.

(4) Для левой части $(\alpha_{(r+t-1)t}\beta^{t-2}\alpha_{rt+1})\widehat{\ } = \widehat{\alpha}_{(r+t-1)t} \circ \Omega^1(\widehat{\beta}^{t-2}) \circ \Omega^{2t-3}(\widehat{\alpha}_{rt+1})$. Для $\alpha_{(r+t-1)t}$ имеем представление

$$\widehat{\alpha}_{(r+t-1)t} : \quad \begin{tikzcd}
Q_1(S_{(r+t-1)t}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Q_0(S_{(r+t-1)t}) \arrow[d, "\alpha^{t-1}"] \\
Q_0(S_{(r+t-1)t+1}) \arrow[r, "\alpha^{t}"] & P_{(r+t-2)t+1}.
\end{tikzcd}$$

В случае $1 \leqslant r \leqslant n$ из минимальной проективной резольвенты для S_{rt+1} находим $Q_{2t-2}(S_{rt+1}) = P_{(r+t-1)t+1}$ и $Q_{2t-3}(S_{rt+1}) =$

$P_{(r+t-1)t} \oplus P_{(r+n+t-1)t}$, поэтому

$$\Omega^{2t-3}(\widehat{\alpha}_{rt+1}):\quad \begin{tikzcd} Q_{2t-2}(S_{rt+1}) \arrow[r, "\binom{\alpha}{-\alpha}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Q_{2t-3}(S_{rt+1}) \arrow[d, "(1\ 0)"] \\ Q_{2t-3}(S_{rt+2}) \arrow[r, "\alpha"] & Q_{2t-4}(S_{rt+2}). \end{tikzcd}$$

А если $n+1 \leqslant r \leqslant 2n$, то при нечётных t

$$\Omega^{2t-3}(\widehat{\alpha}_{rt+1}):\quad \begin{tikzcd} Q_{2t-2}(S_{rt+1}) \arrow[r, "\binom{\alpha}{-\alpha}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Q_{2t-3}(S_{rt+1}) \arrow[d, "(0\ -1)"] \\ Q_{2t-3}(S_{rt+2}) \arrow[r, "\alpha"] & Q_{2t-4}(S_{rt+2}), \end{tikzcd}$$

а при чётных t

$$\Omega^{2t-3}(\widehat{\alpha}_{rt+1}):\quad \begin{tikzcd} Q_{2t-2}(S_{rt+1}) \arrow[r, "\binom{\alpha}{-\alpha}"] \arrow[d, "-\mathrm{id}"] & Q_{2t-3}(S_{rt+1}) \arrow[d, "(0\ 1)"] \\ Q_{2t-3}(S_{rt+2}) \arrow[r, "\alpha"] & Q_{2t-4}(S_{rt+2}). \end{tikzcd}$$

Откуда получаем следующее представление.
Если $1 \leqslant r \leqslant n$, то

$$(\alpha_{(r+t-1)t}\beta^{t-2}\alpha_{rt+1})\widehat{\ }:\quad \begin{tikzcd} Q_{2t-2}(S_{rt+1}) \arrow[r, "\binom{\alpha}{-\alpha}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Q_{2t-3}(S_{rt+1}) \arrow[d, "(\alpha^{t-1}\ 0)"] \\ Q_0(S_{(r+t-1)t+1}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{(r+t-2)t+1}. \end{tikzcd}$$

Если $n+1 \leqslant r \leqslant 2n$ и t нечётно, то

$$(\alpha_{(r+t-1)t}\beta^{t-2}\alpha_{rt+1})\widehat{\ }:\quad \begin{tikzcd} Q_{2t-2}(S_{rt+1}) \arrow[r, "\binom{\alpha}{-\alpha}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Q_{2t-3}(S_{rt+1}) \arrow[d, "(0\ -\alpha^{t-1})"] \\ Q_0(S_{(r+t-1)t+1}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{(r+t-2)t+1}. \end{tikzcd}$$

Если $n+1 \leqslant r \leqslant 2n$ и t чётно, то

$$(\alpha_{(r+t-1)t}\beta^{t-2}\alpha_{rt+1})\widehat{\ }\colon\quad \begin{tikzcd} Q_{2t-2}(S_{rt+1}) \arrow[r, "\binom{\alpha}{-\alpha}"] \arrow[d, "-\mathrm{id}"] & Q_{2t-3}(S_{rt+1}) \arrow[d, "(0\ \alpha^{t-1})"] \\ Q_0(S_{(r+t-1)t+1}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{(r+t-2)t+1}. \end{tikzcd}$$

А это совпадает с $b_r\gamma^{t-1}$, так как у всех Ω^{2m}-сдвигов γ_{rt+1} (при $m < t-1$) левая стрелка тождественна за исключением случая $r = n$ и нечётного m, когда левая стрелка – минус тождественное отображение.

(5) Слева в соответствующем равенстве имеем

$$(\alpha_{(r+t+n)t+1}\beta_{rt+1})\widehat{\ } = \widehat{\alpha}_{(r+t+n)t+1} \circ \Omega^1(\widehat{\beta}_{rt+1}),$$

а тогда

при $1 \leqslant \overline{r+t} \leqslant n$

$$(\alpha_{(r+t+n)t+1}\beta_{rt+1})\widehat{\ }\colon\quad \begin{tikzcd} Q_{2t}(S_{rt+1}) \arrow[r, "(\alpha\ \alpha)"] \arrow[d, "(0\ 1)"] & Q_{2t-1}(S_{rt+1}) \arrow[d, "\alpha^{t-1}"] \\ Q_0(S_{(r+t+n)t+2}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{(r+t+n-1)t+2}; \end{tikzcd}$$

а при $n+1 \leqslant \overline{r+t} \leqslant 2n$

$$(\alpha_{(r+t+n)t+1}\beta_{rt+1})\widehat{\ }\colon\quad \begin{tikzcd} Q_{2t}(S_{rt+1}) \arrow[r, "(\alpha\ \alpha)"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & Q_{2t-1}(S_{rt+1}) \arrow[d, "\alpha^{t-1}"] \\ Q_0(S_{(r+t+n)t+2}) \arrow[r, "\alpha^t"] & P_{(r+t+n-1)t+2}. \end{tikzcd}$$

Справа $(\beta_{(r+t-1)t}\beta^{t-2}\alpha_{rt+1})\widehat{\ } = (\beta_{(r+t-1)t}\beta^{t-2})\widehat{\ } \circ \Omega^{2t-1}(\widehat{\alpha}_{rt+1})$. Ω-сдвиги $\Omega^{2t-1}(\widehat{\alpha}_{rt+1})$ найдём из $\Omega^{2t-3}(\widehat{\alpha}_{rt+1})$, полученного в предыдущем пункте.

В случае $1 \leqslant r \leqslant n$ получаем, что, если $1 \leqslant \overline{r+t} \leqslant n$, то

$$\Omega^{2t-1}(\widehat{\alpha}_{rt+1})\colon\quad \begin{tikzcd} Q_{2t}(S_{rt+1}) \arrow[r, "(\alpha\ \alpha)"] \arrow[d, "(0\ 1)"] & Q_{2t-1}(S_{rt+1}) \arrow[d, "\alpha^{t-1}"] \\ Q_{2t-1}(S_{rt+2}) \arrow[r, "\alpha^t"] & Q_{2t-2}(S_{rt+2}); \end{tikzcd}$$

если $n+1 \leqslant \overline{r+t} \leqslant 2n$, то

$$\Omega^{2t-1}(\widehat{\alpha}_{rt+1}):\quad \begin{array}{ccc} Q_{2t}(S_{rt+1}) & \xrightarrow{(\alpha\ \alpha)} & Q_{2t-1}(S_{rt+1}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (1\ 0)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha^{t-1}} \\ Q_{2t-1}(S_{rt+2}) & \xrightarrow{\alpha^t} & Q_{2t-2}(S_{rt+2}). \end{array}$$

В случае $n+1 \leqslant r \leqslant 2n$ при нечётном t получаем то же, что в случае $1 \leqslant r \leqslant n$, а при чётных t – такое же выражение, но со знаком минус.

Из этого получаем требуемое утверждение. Второе равенство доказывается аналогично.

Осталось показать, что других соотношений нет. Для этого рассмотрим все ненулевые пути, ведущие из i-ой вершины.

(1) Если $i \not\equiv 1 \pmod t$, то покажем, что любой путь приводится к виду $c\alpha^{m_1}\beta^{m_2}$ $(0 \leqslant m_1 \leqslant 2,\ m_2 \geqslant 0)$, где $c \in k$ – некоторый коэффициент.

Рассмотрим ненулевой путь ω, ведущий из i-ой вершины. Заметим сначала, что он не может содержать γ ввиду соотношений (3). Значит, ω имеет вид: $c\alpha^{t_1}\beta^{t_2}\dots\beta^{t_{n-1}}\alpha^{t_n}$, $t_i \geqslant 0$ для всех i. Далее, применяя соотношения (2) и (5), будем по очереди "перемещать" все β вправо. То есть: возьмем первый справа элемент β в рассматриваемом "слове". Если правее его есть α, то переставим эти α с β при помощи соотношений. Единственный вариант, когда мы не можем переставить, – это комбинация вида $\beta_{rt+2}\alpha_{rt+1}$ $(t > 2)$, причем сразу после α_{rt+1} нет еще одного α. Тогда, если мы наткнемся на такую ситуацию, данный путь будет иметь вид $\omega = \omega'\beta_{rt+2}\alpha_{rt+1}\beta_j^s$ $(s \geqslant 0)$, где ω' – некоторый путь. Так как $\omega \neq 0$, все j должны быть сравнимы с 1 по модулю t. Но тогда ω выходит из вершины вида r_1t+1, что противоречит предположению этого пункта.

(2) При $i = rt+1$ покажем, что любой ненулевой путь ω имеет вид либо $c\beta^m\alpha$, либо $c\gamma^s\beta^m$ $(m \geqslant 0,\ s < t,\ c \in k)$.

Прежде всего, ω не может содержать α и γ одновременно, поэтому либо ω содержит α и, возможно, β, либо ω состоит из стрелок вида γ и β.

(a) Рассмотрим первый вариант. Получаем, что ω имеет вид $\omega = \omega'\alpha_{rt+1}\beta_j^s$, где $j \equiv 1 \pmod t$; ω' выходит из вершины $rt+2$, а значит (по (1)), имеет вид $\omega' = c\alpha^{m_1}\beta^{m_2}$, то есть $\omega = c\alpha^{m_1}\beta^{m_2}\alpha_{rt+1}\beta_j^s$. Будем последовательно перемещать α^{m_1}

вправо. Это можно сделать за исключением случая, когда имеется комбинация $\alpha_{(r_1+1)t}\beta_{r_1t-1}$ $(t > 2)$. Т. е., ω имеет вид $\omega = c\beta^{s_1}\alpha_{(r_1+1)t}\beta^{s_2(t-1)+t-2}\alpha_{rt+1}\beta_j^s$ $(s_2 \geqslant 0)$. Тогда при помощи (4) и (5) получим, что $\omega = c\beta^{s_1}\beta^{s_2}\alpha_{r_2t}\beta^{t-2}\alpha_{rt+1}\beta_j^s = c\beta^{s_1}\beta^{s_2}\gamma^{t-1}\beta_j^s$, и мы приходим к варианту (б), который рассматривается ниже. Если же исключительный случай не произошел, ω приведется к виду $c\beta^{s_3}\alpha_{rt+1}\beta_j^s$, а затем, с использованием (5), к искомому.

(б) Если ω содержит только стрелки вида β и γ, то при помощи (3) приводим ω к нужному виду.

Таким образом, получаем нужные размерности $\dim_k \operatorname{Ext}_R^n(S_i, S_j)$, описанные в следствиях 4 и 6.

Литература

1. C. Riedtmann, *Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück.* — Comment. Math. Helv. **55** (1980), 199–224.
2. C. Riedtmann, *Representation-finite self-injective algebras of class A_n.* — Lect. Notes Math. **832** (1980), 449–520.
3. А. И. Генералов, *Алгебры Йонеды полуцепных QF-алгебр.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 130–138.
4. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Алгебры Йонеды для одного класса диэдральных алгебр.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, вып. 3, No. 15 (1999), 3–10.
5. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа,* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999) 130–138.
6. P. Brown, *The* Ext*-algebra of a representation-finite biserial algebra.* — J. Algebra **221**, No. 2 (1999), 611–629.
7. M. Linckelmann, *A derived equivalence for blocks with dihedral defect groups.* — J. Algebra **164** (1994), 244–255.
8. J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence.* — J. Pure Appl. Algebra **61**, No. 1 (1989), 303–317.
9. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа,* II. — Алгебра и анализ **13**, вып. 1 (2001), 3–25.
10. K. Erdmann, *Algebras and dihedral defect groups.* — Proc. London Math. Soc. **54**, No. 1 (1987), 88–114.

Generalov A. I., Kachalova M. A. Yoneda algebra of Möbius algebra.

Yoneda algebra of Möbius algebra is described in terms of quivers with relations.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 21 ноября 2002 г.