Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 289, 2002 г.

А. И. Генералов

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБР ДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА, IV: СЕРИЯ $D(2\mathcal{B})$

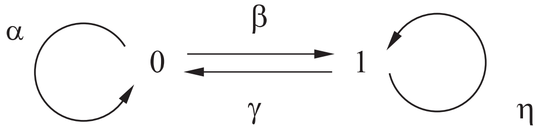
Введение

Настоящая работа продолжает цикл работ [1–3], где были вычислены алгебры Йонеды для некоторых серий алгебр диэдрального типа из классификации К. Эрдман [4]. Но в отличие от работ [1, 2], где применялся диаграммный метод Бенсона–Карлсона [5], мы будем использовать подход, развитый в [6]. Его особенность состоит в том, что на основе эмпирических наблюдений выдвигается гипотеза о строении минимальных проективных резольвент простых модулей, которая затем проверяется с помощью спектральных последовательностей. Далее с использованием некоторых усовершенствований диаграммного метода, предложенных в [1, 7], "когомологическая информация" считывается с этих резольвент, что приводит к окончательному описанию алгебры Йонеды рассматриваемых алгебр на языке колчанов с соотношениями. Отметим, что именно этот подход уже применен в работах [3, 8].

В связи с необходимостью большого объема вычислений на предварительном "эмпирическом" этапе уже предпринята попытка использования компьютерных вычислений для отыскания резольвент простых модулей (см. [9]). Одним из стимулов написания настоящей работы и послужило то обстоятельство, что программу, разработанную в [9], пока не удается применить к некоторым алгебрам рассматриваемой серии.

1. Формулировка основных результатов

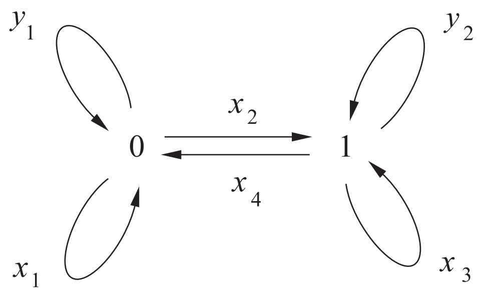
Пусть K – произвольное поле. Алгебры $R^{(\mathcal{B})} = R^{(\mathcal{B})}_{k,s,c}$, k, $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$, $c \in \{0,1\}$, составляющие серию $D(2\mathcal{B})$, определяются следующим колчаном с соотношениями (композиция путей записывается справа налево) $Q^{(\mathcal{B})}$:



$$\beta\gamma = \gamma\eta = \eta\beta = 0, (\gamma\beta\alpha)^k = (\alpha\gamma\beta)^k, \alpha^2 = c(\gamma\beta\alpha)^k, \eta^s = (\beta\alpha\gamma)^k.$$

Для конечномерного модуля M над произвольной конечномерной K-алгеброй Λ прямая сумма $\mathcal{E}(M) = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathrm{Ext}_\Lambda^m(M, M)$ превращается с помощью обычного произведения Йонеды в (ассоциативную) K-алгебру, которую называют Ext-алгеброй модуля M. Если Λ – базисная K-алгебра с радикалом Джекобсона $J(\Lambda)$, то Ext-алгебра $\mathcal{E}(\Lambda/J(\Lambda))$ называется алгеброй Йонеды алгебры Λ и обозначается через $\mathcal{Y}(\Lambda)$.

Для описания алгебры Йонеды $\mathcal{Y}(R^{(\mathcal{B})})$ алгебры $R^{(\mathcal{B})}$ рассмотрим колчан $\Re^{(\mathcal{B})}$:



На алгебре путей $K[\Re^{(\mathcal{B})}]$ этого колчана введем градуировку такую, что (для всех подходящих значений индексов i, j) имеем:

$$\deg(x_i) = 1, \quad \deg(y_j) = 2.$$

Рассмотрим на колчане $\Re^{(\mathcal{B})}$ следующие соотношения:

$$\begin{cases} 0 = x_2x_1 = x_1x_4 = x_4x_2, \\ x_3y_2 = y_2x_3, \quad y_2x_2 = -x_2y_1, \quad x_4y_2 = y_1x_4, \\ y_1x_1 + x_1y_1 = cx_1^3, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$x_3^2 = \begin{cases} 0, & \text{если } s > 2, \\ -y_2, & \text{если } s = 2; \end{cases} \tag{1.2}$$

Определим алгебры $\mathcal{E} = \mathcal{E}_s^{(\mathcal{B})}$ с помощью колчана $\Re^{(\mathcal{B})}$ и соотношений (1.1) и (1.2). Ясно, что алгебра $\mathcal{E}^{(\mathcal{B})}$ наследует с алгебры $K[\Re^{(\mathcal{B})}]$ естественную градуировку.

Теорема 1.1. *Пусть $R = R_{k,s,c}^{(\mathcal{B})}$, k, $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$, $c \in \{0,1\}$. Алгебра Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ как градуированная алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{E}_s^{(\mathcal{B})}$.*

Замечание 1.2. Из вида соотношения (1.2) следует, что если $s = 2$, то описание алгебры $\mathcal{E}_s^{(\mathcal{B})}$ можно упростить, опуская в колчане $\Re^{(\mathcal{B})}$ петлю y_2 и видоизменяя соответствующим образом соотношения (1.1).

В процессе доказательства теоремы 1.1 мы получаем также описание Ext-алгебр простых модулей над рассматриваемыми алгебрами (см. следствие 3.5), что позволяет, в частности, применить результаты работы для описания кольца когомологий тех конечных групп, у которых главный блок Морита-эквивалентен какой-либо из алгебр серии $D(2\mathcal{B})$ (см., например, таблицы в книге [4]).

Мы будем использовать основные понятия и обозначения, введенные в работах [2, 3]. В частности, для любой алгебры R серии $D(2\mathcal{B})$ через e_i, $i = 0,1$, обозначим идемпотенты, соответствующие вершинам колчана $Q^{(\mathcal{B})}$, а через $P_i = Re_i$ и $S_i = P_i/J(R)P_i$, $i = 0,1$, обозначим соответствующие этим вершинам неразложимые проективные R-модули и простые R-модули соответственно. Умножение справа на элемент $x \in e_iRe_j$ индуцирует гомоморфизм, действующий из P_i в P_j, и мы будем обозначать его также через x. Все рассматриваемые модули – левые.

2. Резольвенты

Пусть $R = R_{k,s,c}^{(\mathcal{B})}$, k, $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$, $c \in \{0,1\}$, – алгебры, определенные в параграфе 1. Введем сокращенные обозначения для следующих элементов алгебры $K[Q^{(\mathcal{B})}]$ (а также для их канонических образов в алгебре R):

$$a = (\gamma\beta\alpha)^{k-1},\ b = (\alpha\gamma\beta)^{k-1},\ g = (\beta\alpha\gamma)^{k-1},\ e = \eta^{s-1},\ \widetilde{\alpha} = \alpha - c\cdot\gamma\beta\cdot b$$

(для $k = 1$ в качестве a, b, g берутся подходящие идемпотенты e_i).

Как легко видеть, модули P_i, $i = 0,1$, имеют указанные ниже K-базисы:

$$P_0 = {}_K\langle e_0, \alpha, \beta\alpha, \gamma\beta\alpha, \alpha(\gamma\beta\alpha), \ldots, \beta\alpha \cdot a, (\gamma\beta\alpha)^k = (\alpha\gamma\beta)^k,$$

$$\beta, \gamma\beta, \alpha\gamma\beta, \beta(\alpha\gamma\beta), \ldots, \gamma\beta \cdot b\rangle,$$

$$P_1 = {}_K\langle e_1, \gamma, \alpha\gamma, \beta\alpha\gamma, \gamma(\beta\alpha\gamma), \ldots, \alpha\gamma \cdot g, (\beta\gamma\alpha)^k = \eta^s, \eta, \eta^2, \ldots, \eta^{s-1}\rangle.$$

В частности, $\dim_K P_0 = 6k, \dim_K P_1 = 3k + s$.

Рассмотрим следующий бикомплекс $B^{(0)}_{\bullet\bullet}$, расположенный в первой четверти плоскости (т.е. строки и столбцы занумерованы числами $0, 1, 2, \ldots$):

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[d, "\beta"'] & \ldots \arrow[d, "\gamma"] & \ldots \arrow[d, "\eta"] & \ldots \arrow[d, "\beta"] & \ldots \arrow[d, "\gamma\beta\cdot b"] & \\
P_0 & P_1 \arrow[l, "-\beta\alpha\cdot a"'] \arrow[d, "\eta"'] & P_1 \arrow[l, "-e"'] \arrow[d, "\beta"] & P_0 \arrow[l, "-\alpha\gamma\cdot g"'] \arrow[d, "\gamma\beta\cdot b"] & P_0 \arrow[l, "-\alpha"'] \arrow[d, "\gamma\beta\cdot b"] & \ldots \arrow[l, "-\widetilde{\alpha}"'] \\
P_1 & P_1 \arrow[l, "e"'] \arrow[d, "\beta"] & P_0 \arrow[l, "\alpha\gamma\cdot g"'] \arrow[d, "\gamma\beta\cdot b"] & P_0 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "\gamma\beta\cdot b"] & P_0 \arrow[l, "\widetilde{\alpha}"'] \arrow[d, "\gamma\beta\cdot b"] & \ldots \arrow[l, "\alpha"'] \\
P_1 & P_0 \arrow[l, "-\alpha\gamma\cdot g"'] \arrow[d, "\gamma\beta\cdot b"] & P_0 \arrow[l, "-\alpha"'] \arrow[d, "\gamma\beta\cdot b"] & P_0 \arrow[l, "-\widetilde{\alpha}"'] \arrow[d, "\gamma\beta\cdot b"] & P_0 \arrow[l, "-\alpha"'] \arrow[d, "\gamma\beta\cdot b"] & \ldots \arrow[l, "-\widetilde{\alpha}"'] \\
P_0 & P_0 \arrow[l, "\alpha"'] & P_0 \arrow[l, "\widetilde{\alpha}"'] & P_0 \arrow[l, "\alpha"'] & P_0 \arrow[l, "\widetilde{\alpha}"'] & \ldots \arrow[l, "\alpha"']
\end{tikzcd} \qquad (2.1)$$

(Left column vertical maps, top to bottom: β, γ, η, β.)

Предложение 2.1. *Тотализация* $\mathrm{Tot}\,(B^{(0)}_{\bullet\bullet})$ *бикомплекса* $B^{(0)}_{\bullet\bullet}$ *вида* (2.1) *представляет собой минимальную проективную резольвенту простого* R*-модуля* S_0.

Доказательство. Аналогично [6] воспользуемся спектральной последовательностью бикомплекса:

$$E^2_{pq} = H^h_p H^v_q(B_{\bullet\bullet}) \Rightarrow H_{p+q}(\mathrm{Tot}\,(B_{\bullet\bullet})), \qquad (2.2)$$

и докажем, что уже второй лист этой спектральной последовательности вырождается.

Прямые вычисления показывают, что

$$\mathrm{Ker}\,\beta = \mathrm{Im}\,h,\ \ \mathrm{Ker}\,\eta = \mathrm{Im}\,\gamma,\ \ \mathrm{Ker}\,\gamma = \mathrm{Im}\,\beta.$$

Следовательно, для $i > 0$ в спектральной последовательности (2.2) бикомплекса $B^{(0)}_{\bullet\bullet}$ члены i-ой строки первого листа имеют вид:

$$E^1_{p,i} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad p < i, \\ \operatorname{Ker}(\gamma\beta \cdot b)/\operatorname{Im}\beta, & \text{если} \quad p = i, \\ \operatorname{Ker}(\gamma\beta \cdot b)/\operatorname{Im}(\gamma\beta \cdot b), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При этом

$$\operatorname{Ker}(\gamma\beta \cdot b)/\operatorname{Im}\beta = \langle \overline{\beta\alpha}, \overline{\gamma\beta\alpha}, \dots, \overline{\beta\alpha \cdot a} \rangle,$$

$$\operatorname{Ker}(\gamma\beta \cdot b)/\operatorname{Im}(\gamma\beta \cdot b) = \langle \overline{\beta\alpha}, , \dots, \overline{\beta\alpha \cdot a}, \overline{\beta}, \overline{\gamma\beta}, \dots, \overline{\gamma\beta \cdot b} \rangle$$

(мы чертой отмечаем канонические образы элементов в соответствующих фактор-модулях). Теперь легко видеть, что вычисленные выше члены $E^1_{p,i}$ вместе с дифференциалами первого листа рассматриваемой спектральной последовательности (они индуцируются горизонтальными дифференциалами бикомплекса $B^{(0)}_{\bullet\bullet}$) составляют точные последовательности. Наконец, аналогичные вычисления показывают, что строка с номером 0 первого листа спектральной последовательности (2.2) точна во всех членах, за исключением места $(0,0)$, при этом

$$\operatorname{Coker}\Big(E^1_{00} = \operatorname{Coker}\beta \xleftarrow{\overline{\alpha}} E^1_{10} = \operatorname{Coker}(\gamma\beta \cdot b)\Big) \simeq S_0.$$

Таким образом, доказано, что $Q_\bullet = \operatorname{Tot}(B^{(0)}_{\bullet\bullet})$ является проективной резольвентой модуля S_0. Минимальность этой резольвенты следует из того, что $\operatorname{Im}(d^Q_m : Q_{m+1} \to Q_m) \subset \operatorname{Rad} Q_m$ для любого $m \geqslant 0$. $\square$

Для построения минимальной проективной резольвенты модуля S_1 рассмотрим следующий бикомплекс $B^{(1)}_{\bullet\bullet}$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[d, "\eta"'] & \cdots \arrow[d, "\beta"] & \cdots \arrow[d, "\gamma"] & \cdots \arrow[d, "\eta"] & \cdots \arrow[d, "\beta\alpha\cdot a"] & \\
P_1 \arrow[d, "\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-\alpha\gamma\cdot g"'] \arrow[d, "\gamma"'] & P_2 \arrow[l, "-\beta\alpha\cdot a"'] \arrow[d, "\eta"] & P_1 \arrow[l, "-e"'] \arrow[d, "\beta\alpha\cdot a"] & P_0 \arrow[l, "-\gamma"'] \arrow[d, "\alpha\gamma\cdot g"] & \cdots \arrow[l, "-\beta"'] \\
P_0 \arrow[d, "\gamma"'] & P_1 \arrow[l, "\beta\alpha\cdot a"'] \arrow[d, "\eta"] & P_1 \arrow[l, "e"'] \arrow[d, "\beta\alpha\cdot a"] & P_0 \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha\gamma\cdot g"] & P_1 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d, "e"] & \cdots \arrow[l, "\eta"'] \\
P_1 \arrow[d, "\eta"'] & P_1 \arrow[l, "-e"'] \arrow[d, "\beta\alpha\cdot a"] & P_0 \arrow[l, "-\gamma"'] \arrow[d, "\alpha\gamma\cdot g"] & P_1 \arrow[l, "-\beta"'] \arrow[d, "e"] & P_1 \arrow[l, "-\eta"'] \arrow[d, "\beta\alpha\cdot a"] & \cdots \arrow[l, "-\gamma"'] \\
P_1 & P_0 \arrow[l, "\gamma"'] & P_1 \arrow[l, "\beta"'] & P_1 \arrow[l, "\eta"'] & P_0 \arrow[l, "\gamma"'] & \cdots . \arrow[l, "\beta"']
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Предложение 2.2. *Тотализация* $\mathrm{Tot}\,(B^{(1)}_{\bullet\bullet})$ *бикомплекса* $B^{(1)}_{\bullet\bullet}$ *вида* (2.3) *представляет собой минимальную проективную резольвенту простого* R*-модуля* S_1.

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству предложения 2.1 и предоставляется читателю.

Замечание 2.3. Утверждение предложения 2.2 можно также вывести из [8, предложение 2.6], поскольку бикомплекс $B^{(1)}_{\bullet\bullet}$ с точностью до переобозначений (и "транспонирования") совпадает с бикомплексом, рассмотренным в [8].

Следствие 2.4. *Группы расширений простых* R*-модулей имеют следующие размерности:*

а)

$$\dim_K \mathrm{Ext}\,^m_R(S_0, S_1) = \dim_K \mathrm{Ext}\,^m_R(S_1, S_0) = \left[\frac{m+2}{3}\right];$$

б)

$$\dim_K \mathrm{Ext}\,^m_R(S_0, S_0) = \dim_K \mathrm{Ext}\,^m_R(S_1, S_1) =$$

$$= \begin{cases} 2k+1, & \text{если} \quad m = 3k \quad \text{или} \quad m = 3k+1, \\ 2k+2, & \text{если} \quad m = 3k+2. \end{cases}$$

Замечание 2.5. Пусть $B_{\bullet\bullet}$ – бикомплекс вида (2.1) (или аналогичный ему бикомплекс). В дальнейшем мы всегда будем использовать упорядочение прямых слагаемых в разложении m-го члена минимальной проективной резольвенты $Q_m(S_k) = \bigoplus_{i+j=m} B_{ij}$ простого модуля S_k по возрастанию второго индекса (ср. [1]).

3. Доказательство теоремы 1.1

В этом параграфе для алгебр из рассматриваемой серии мы сначала укажем (конечные) множества образующих соответствующих алгебр Йонеды

$$\mathcal{Y}(R) = \mathcal{E}(R/J(R)) = \bigoplus_{m\geqslant 0} \bigoplus_{i,j=0}^{1} \operatorname{Ext}_R^m(S_i, S_j),$$

затем приведем ряд соотношений, которым удовлетворяют эти образующие и, наконец, убедимся, что идеал соотношений, которым удовлетворяют образующие алгебры $\mathcal{Y}(R)$, порождается соотношениями из приведенного списка.

Элементы групп расширений $\psi \in \operatorname{Ext}_R^m(S_i, S_j) \simeq \operatorname{Hom}_R(\Omega^m(S_i), S_j)$ мы будем задавать (аналогично [7, 1, 6]) с помощью некоторых коммутативных квадратов.

Введем в рассмотрение однородные элементы:
степени 1 –

$$x_1 \in \operatorname{Ext}_R^1(S_0, S_0), x_2 \in \operatorname{Ext}_R^1(S_0, S_1),$$

$$x_3 \in \operatorname{Ext}_R^1(S_1, S_1), x_4 \in \operatorname{Ext}_R^1(S_1, S_0);$$

степени 2 —

$$y_1 \in \operatorname{Ext}_R^2(S_0, S_0), y_2 \in \operatorname{Ext}_R^2(S_1, S_1),$$

которые кратко (ср. [6]) описываются следующими квадратами:

$$\widehat{x}_1 = \operatorname{sq}(Q_1(S_0) \xrightarrow{(1,0)} P_0), \quad \widehat{x}_2 = \operatorname{sq}(Q_1(S_0) \xrightarrow{(0,1)} P_1),$$

$$\widehat{x}_3 = \operatorname{sq}(Q_1(S_1) \xrightarrow{(0,1)} P_1), \quad \widehat{x}_4 = \operatorname{sq}(Q_1(S_1) \xrightarrow{(1,0)} P_0),$$

$$\widehat{y}_1 = \operatorname{sq}(Q_2(S_0) \xrightarrow{(0,1,0)} P_0), \quad \widehat{y}_2 = \operatorname{sq}(Q_2(S_1) \xrightarrow{(0,1,0)} P_1).$$

Предложение 3.1. *Как K-линейные пространства приведенные ниже* Ext *-группы имеют следующие базисы:*

$$\operatorname{Ext}^2_R(S_0,S_0)=\langle x_1^2,y_1\rangle,\quad \operatorname{Ext}^2_R(S_0,S_1)=\langle x_3x_2\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}^2_R(S_1,S_0)=\langle x_4x_3\rangle,\quad \operatorname{Ext}^2_R(S_1,S_1)=\langle x_2x_4,y_2\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}^3_R(S_0,S_1)=\langle x_2y_1\rangle,\quad \operatorname{Ext}^3_R(S_1,S_0)=\langle y_1x_4\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}^3_R(S_0,S_0)=\langle x_1^3,x_1y_1,x_4x_3x_2\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}^3_R(S_1,S_1)=\langle x_3x_2x_4,x_3y_2,x_2x_4x_3\rangle.$$

Доказательство использует предварительно выполненные вычисления Ω-сдвигов отображений $\widehat{x}_i,\widehat{y}_j$ и проводится аналогично [6, предложение 3.5]. Эти детали доказательства предлагается осуществить читателю.

Аналогично доказывается следующее утверждение (ср. [1, предложение 4.1]).

Предложение 3.2. *Для множества элементов алгебры $\mathcal{Y}(R)$*

$$\mathcal{X}=\{x_i\}_{i=1}^4\cup\{y_1,y_2\}$$

выполняются соотношения (1.1) *и* (1.2).

Ключевым для доказательства теоремы 1.1 является следующее утверждение.

Предложение 3.3. *Множество*

$$\mathcal{X}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2\} \tag{3.1}$$

порождает алгебру Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ как K-алгебру.

Доказательство. Мы будем доказывать индукцией по m, что всякий элемент группы $\operatorname{Ext}^m_R(S_i,S_j)$, $i,\ j\in\{0,1\}$, представляется в виде суммы произведений элементов меньших степеней. Ввиду предложения 3.1 можно считать, что $m>3$. Пусть дан ненулевой гомоморфизм $f\colon\Omega^m(S_i)\to S_j$, и пусть $p=f\pi_m$, где $\pi_m\colon Q_m(S_i)\to\Omega^m(S_i)$ — проективное накрытие. Достаточно рассмотреть случай, когда $p(B_{n,m-n})\neq 0$ ровно для одного значения n.

В зависимости от "локальной" конфигурации бикомплекса, в которую включается модуль $B_{n,m-n}$, мы будем строить коммутативные диаграммы вида

$$\begin{tikzcd}
Q_{m+1}(S_i) \arrow[r, "d_m^{(i)}"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & Q_m(S_i) \arrow[r, "\pi_m^{(i)}"] \arrow[d, "\varphi_0"'] & \Omega^m(S_i) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & 0 \\
Q_{l+1}(S_r) \arrow[r, "d_l^{(r)}"] & Q_l(S_r) \arrow[r, "\pi_l^{(r)}"] & \Omega^l(S_r) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

такие, что $l < m$, $r \in \{0,1\}$ и $\operatorname{Ker}\varphi_0 \subset \operatorname{Ker} p$. Тогда найдется гомоморфизм $p' \colon \Omega^l(S_r) \longrightarrow S_j$, для которого $p'\varphi = f$, и так как $\varphi = \Omega^l(\tilde{\varphi})$ для некоторого $\widetilde{\varphi} \colon \Omega^{m-l}(S_i) \longrightarrow S_r$, то по индукции получаем требуемое утверждение (ср. доказательство предложения 3.2 в [6]).

Случай 1: $i = 0$. Заметим, что для любого натурального s существует коммутативная диаграмма вида

$$\begin{tikzcd}
Q_{s+3}(S_0) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\psi_{1s}"'] & Q_{s+2}(S_0) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{0s}"'] & \Omega^{s+2}(S_0) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_s"'] & 0 \\
Q_{s+1}(S_0) \arrow[r, "d"] & Q_s(S_0) \arrow[r] & \Omega^s(S_0) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

такая, что гомоморфизмы ψ_{ts}, $t \in \{0,1\}$, отображают тождественно (с точностью до подходящего множителя ± 1) модули $B^{(0)}_{n,s+2+t-n}$ на $B^{(0)}_{n-1,s+1+t-n}$ при $n(s+2+t-n) > 0$ и равны нулю на $B^{(0)}_{0,s+2+t}$ и $B^{(0)}_{s+2+t,0}$. Поэтому нам остается проверить существование диаграммы вида (3.2) лишь при $n = m$ и $n = 0$.

а) Рассмотрим сначала случай следующей конфигурации в $B^{(0)}_{\bullet\bullet}$:

$$\begin{tikzcd}
 & P_0 \arrow[d, "\gamma\beta\cdot b"'] & \\
 & B^{(0)}_{m,0} = P_0 & P_0. \arrow[l, "\tilde{\alpha}"']
\end{tikzcd}$$

Построим диаграмму вида (3.2), в которой $r = 0$, $l = 1$, а в качестве φ_0 (соответственно φ_1) берем композицию проекции на первые два (соответственно три) прямых слагаемых из "канонического" разложения модуля $Q_m(S_0)$ (соответственно модуля

$Q_{m+1}(S_0)$) и отображения из $B^{(0)}_{m,0}\oplus B^{(0)}_{m-1,1}\simeq P_0^2$ в $Q_1(S_0)\simeq P_0\oplus P_1$, определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \gamma\cdot g\end{pmatrix}$$

(соответственно отображения из $B^{(0)}_{m+1,0}\oplus B^{(0)}_{m,1}\oplus B^{(0)}_{m-1,2}\simeq P_0^3$ в $Q_2(S_0)\simeq P_0^2\oplus P_1$, тождественного на первых двух слагаемых и равного нулю на третьем).

б) Рассмотрим теперь конфигурацию

$$P_0\xrightarrow{\gamma\beta\cdot b}P_0\xleftarrow{\alpha}P_0$$

(как и выше, на рисунке будут изображаться все стрелки бикомплекса, входящие в соответствующий модуль $B^{(0)}_{n,m-n}$; сейчас $n=m$). В этом случае строим диаграмму вида (3.2), где $r=0$, $l=2$, а φ_0 – композиция проекции на первые три прямых слагаемых модуля $Q_m(S_0)$ и отображения из $B^{(0)}_{m,0}\oplus B^{(0)}_{m-1,1}\oplus B^{(0)}_{m-2,2}\simeq P_0^3$ в $Q_2(S_0)\simeq P_0^2\oplus P_1$, тождественного на первых двух слагаемых и равного нулю на третьем, а φ_1 – композиция проекции на первые три прямых слагаемых модуля $Q_{m+1}(S_0)$ и отображения из $B^{(0)}_{m+1,0}\oplus B^{(0)}_{m,1}\oplus B^{(0)}_{m-1,2}\simeq P_0^3$ в $Q_3(S_0)\simeq P_0^2\oplus P_1\oplus P_0$, определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \gamma g\end{pmatrix}.$$

в) Рассмотрим конфигурацию

$$P_1\xrightarrow{\eta}P_1\xleftarrow{\pm\alpha\gamma\cdot g}P_0;$$

заметим, что сейчас $m=3q+1$, где $q\in\mathbb{N}$, и $n=0$. В этом случае строим диаграмму вида (3.2), в которой $r=0$, $l=1$, а φ_0 – композиция проекции на последние два прямых слагаемых (из “канонического” разложения) модуля $Q_m(S_0)$ и отображения из $B^{(0)}_{1,m-1}\oplus B^{(0)}_{0,m}\simeq P_1^2$ в $Q_1(S_0)\simeq P_0\oplus P_1$, определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix}(-1)^q\beta b & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

а φ_1 – композиция проекции на последние два прямых слагаемых модуля $Q_{m+1}(S_0)$ и отображения из $B^{(0)}_{1,m} \oplus B^{(0)}_{0,m+1} \simeq P_0 \oplus P_1$ в $Q_2(S_0) \simeq P_0^2 \oplus P_1$, определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (-1)^q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

г) В случае конфигурации

$$P_0 \xrightarrow{\gamma} P_1 \xleftarrow{\pm e} P_1$$

(сейчас $m = 3q-1$, $q \in \mathbb{N}$, $n = 0$) строим диаграмму вида (3.2), в которой $r = 1$, $l = 1$, а φ_0 – композиция проекции на последние два прямых слагаемых модуля $Q_m(S_0)$ и отображения из $B^{(0)}_{1,m-1} \oplus B^{(0)}_{0,m} \simeq P_0 \oplus P_1$ в $Q_1(S_1) \simeq P_0 \oplus P_1$, определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix} (-1)^q \alpha a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а φ_1 – композиция проекции на последние два прямых слагаемых модуля $Q_{m+1}(S_0)$ и отображения из $B^{(0)}_{1,m} \oplus B^{(0)}_{0,m+1} \simeq P_1 \oplus P_0$ в $Q_2(S_1) \simeq P_1^2 \oplus P_0$, определяемого матрицей вида (3.3).

д) Наконец, рассмотрим конфигурацию

$$P_1 \xrightarrow{\beta} P_0 \xleftarrow{\pm\beta\alpha\cdot a} P_1$$

(сейчас $m = 3q$, $q \in \mathbb{N}$, $n = 0$). В этом случае строим диаграмму вида (3.2), в которой $r = 1$, $l = 2$, а φ_0 – композиция проекции на последние два прямых слагаемых модуля $Q_m(S_0)$ и отображения из $B^{(0)}_{1,m-1} \oplus B^{(0)}_{0,m} \simeq P_1 \oplus P_0$ в $Q_2(S_1) \simeq P_1^2 \oplus P_0$, определяемого матрицей вида (3.3), а φ_1 – композиция проекции на последние три прямых слагаемых модуля $Q_{m+1}(S_0)$ и отображения из $B^{(0)}_{2,m-1} \oplus B^{(0)}_{1,m} \oplus B^{(0)}_{0,m+1} \simeq P_1 \oplus P_0 \oplus P_1$ в $Q_3(S_1) \simeq P_1 \oplus P_0 \oplus P_1^2$, определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha a & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Случай 2: $i = 1$. Ввиду замечания 2.3 мы можем применить рассуждения из доказательства [8, предложение 3.3] (случай II) ко всем возможным конфигурациям в бикомплексе $B^{(1)}_{\bullet\bullet}$, за исключением одной, а именно:

$$P_1 \xrightarrow{\pm\beta\alpha\cdot a} P_0 \xleftarrow{\beta} P_1;$$

такая конфигурация возможна и для $n = 0$, и для $n = m$. В этих случаях рассуждаем аналогично вышеприведенному случаю 1 д). $\square$

Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{E}_s^{(\mathcal{B})}$ – градуированная K-алгебра, определенная в параграфе 1, где I – идеал алгебры путей колчана $\Re^{(\mathcal{B})}$, соответствующий соотношениям (1.1) и (1.2). Ввиду предложений 3.2 и 3.3 существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Y}(R)$, переводящий канонические образующие алгебры $\mathcal{E}$ (т.е. соответствующие стрелкам в $\Re^{(\mathcal{B})}$) в соответствующие образующие алгебры $\mathcal{Y}(R)$, введенные в начале параграфа 3. Пусть $\mathcal{E} = \bigoplus_{m\geqslant 0}\mathcal{E}^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{E}$ на однородные прямые слагаемые. Через ε_i, $i = 0, 1$ обозначим идемпотенты алгебры $K[\Re^{(\mathcal{B})}]$, соответствующие вершинам колчана $\Re^{(\mathcal{B})}$, и так же обозначим образы этих идемпотентов в $\mathcal{E}$. Теперь следующее утверждение завершает доказательство теоремы 1.1.

Предложение 3.4. *Для любых i, $j \in \{0, 1\}$ и $m \geqslant 0$*

$$\dim_K(\varepsilon_i\mathcal{E}^m\varepsilon_j) = \dim_K \operatorname{Ext}^m_R(S_j, S_i). \tag{3.4}$$

Доказательство. Мы рассмотрим только алгебры $R^{(\mathcal{B})}_{k,s,c}$ для $s > 2$. При $s = 2$ в нижеследующих рассуждениях необходимо сделать лишь незначительные изменения, что предоставляется читателю. Поскольку для $m = 0$ соотношение (3.4) очевидно, то далее предполагаем, что $m > 0$.

(а) Предположим, что $i = j = 0$. Из вида соотношений (1.1) и (1.2) легко получаем, что $\varepsilon_0\mathcal{E}\varepsilon_0$ – K-алгебра, порожденная элементами

$$x = x_1, \quad y = y_1, \; z = x_4x_3x_2,$$

при этом они удовлетворяют соотношениям:

$$xy + yx = cx^3, \; xz = 0 = zx, \; yz = -zy.$$

Отсюда легко получаем, что элементы

$$x^l y^r \; (l + 2r = m), \quad y^r z^t \; (2r + 3t = m) \tag{3.5}$$

составляют K-базис пространства $\Lambda_m = \varepsilon_0\mathcal{E}^m\varepsilon_0$. Пусть $d_m = \dim_K \Lambda_m$. Докажем, что при $m > 2$ имеем:

$$d_m - d_{m-2} = \begin{cases} 2, & \text{если} \;\; m \equiv 0 \pmod 3), \\ 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3.6}$$

Действительно, одночлены из (3.5), у которых $r > 0$, находятся в биективном соответствии с аналогичным K-базисом пространства Λ_{m-2} (достаточно опустить один множитель y). Кроме того, для любого m имеется одночлен вида x^m, а для $m = 3q$ имеется дополнительный одночлен вида z^q. Ввиду следствия 2.4 последовательность $\{\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_0, S_0)\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению, аналогичному (3.6). Следовательно, соотношение (3.4) получается с помощью индукции по m, поскольку для $m = 0, 1$ оно очевидно.

(б) Пусть теперь $i = j = 1$. Элементы

$$x = x_3, \;\; y' = x_2x_4, y'' = y_2$$

порождают K-алгебру $\varepsilon_1\mathcal{E}\varepsilon_1$, при этом они удовлетворяют соотношениям:

$$x^2 = 0, \;\; xy'' = y''x, \;\; {y'}^2 = 0, \;\; y'y'' = -y''y'.$$

Тогда K-пространство $\Lambda_m = \varepsilon_1\mathcal{E}^m\varepsilon_1$ имеет базис, состоящий из элементов

$$\begin{gathered} {y'}^{\sigma}{y''}^{t}, \quad \text{где} \;\; \sigma \in \{0,1\}, \;\; 2\sigma + 2t = m, \\ (xy')^r{y''}^t, (y'x)^r{y''}^t, \quad \text{где} \;\; 3r + 2t = m, \\ x(y'x)^r{y''}^t, \quad \text{где} \;\; 3r + 2t + 1 = m, \\ (y'x)^r y'{y''}^t, \quad \text{где} \;\; 3r + 2t + 2 = m. \end{gathered}$$

Теперь рассуждая аналогично случаю а), доказываем, что для размерностей $\dim_K \Lambda_m$ выполняется соотношение (3.6), и далее аналогичным образом завершаем доказательство соотношения (3.4).

в) Если $i = 0$, $j = 1$ или $i = 1$, $j = 0$, то соотношение (3.4) выводится с помощью предыдущих двух случаев аналогично доказательству [1, предложение 4.5]. Детали соответствующего рассуждения мы оставляем читателю. $\square$

Следствие 3.5. а) $\mathcal{E}(S_0) \simeq K\langle x, y, z\rangle/(xz, zx, xy+yx-cx^3, yz+zy)$, *где* $\deg x = 1$, $\deg y = 2$, $\deg z = 3$;

$$\text{б)} \quad \mathcal{E}(S_1) \simeq \begin{cases} K\langle x, y, y'\rangle/(x^2, xy-yx, {y'}^2, yy'+y'y), & \text{если } s > 2, \\ K\langle x, y\rangle/(y^2, x^2y+yx^2), & \text{если } s = 2, \end{cases}$$

где $\deg x = 1$, $\deg y = \deg y' = 2$.

Доказательство. Для $s > 2$ эти утверждения следуют непосредственно из доказательства предложения 3.4. Если же $s = 2$, то надо провести аналогичные этому доказательству рассуждения. □

Литература

1. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа,* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 139–162.
2. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа,* II. — Алгебра и анализ **13**, No. 1 (2001), С. 3–25.
3. А. И. Генералов, Е. А. Осиюк, *Когомологии алгебр диэдрального типа,* III*: серия* $D(2\mathcal{A})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 113–133.
4. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.* — Lecture Notes in Math. **1428**, Berlin; Heidelberg (1990).
5. D. J. Benson, J. F. Carlson, *Diagrammatic methods for modular representations and cohomology.* — Commun. Algebra **15**, No. 1/2 (1987), 53–121.
6. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа,* I. — Алгебра и анализ **13**, No. 4 (2001), 54–85.
7. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Алгебры Йонеды для одного класса диэдральных алгебр.* — Вестник С.-Петерб. ун-та, Сер. 1, Вып. 3, No. 15 (1999), 3–10.
8. М. А. Антипов, А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа,* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 9–36.
9. N. V. Kosmatov, *Cohomology of algebras of dihedral type: automatic calculation.* — Международн. алг. конф., посв. памяти З. И. Боревича. С.-Пб., 17–23 сент. (2002), 115–116.

Generalov A. I. Cohomology of algebras of dihedral type, IV: the family $D(2\mathcal{B})$.

For algebras of dihedral type that form the family $D(2\mathcal{B})$ (from K. Erdmann's list), the Yoneda algebras are described in terms of quivers with relations.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 21 октября 2002 г.