Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 289, 2002 г.

М. А. Антипов, А. И. Генералов

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБР ПОЛУДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА, II

1. Формулировка основных результатов

Алгебры полудиэдрального типа, введенные К. Эрдманн в работах [1, 2], являются естественным обобщением групповых блоков с полудиэдральной дефектной группой. Они, наряду с алгебрами диэдрального и кватернионного типов, возникли при классификации блоков, имеющих ручной тип представления (см. [3]). Настоящая работа примыкает к работе [4] одного из авторов, в которой были вычислены алгебры Йонеды для двух серий алгебр полудиэдрального типа (а именно для серий $SD(3\mathcal{A})_1$ и $SD(3\mathcal{D})$ в обозначениях из [3]). Как и в [4], мы для следующих двух серий алгебр, – $SD(2\mathcal{B})_3$ и $SD(2\mathcal{B})_1$, – предъявляем (отталкиваясь от эмпирических наблюдений) минимальные резольвенты простых модулей над рассматриваемыми алгебрами, а затем с использованием техники, развитой в работах [4–7], получаем описание соответствующих алгебр Йонеды в терминах колчанов с соотношениями. Напомним, что в качестве приложения в [4] были вычислены кольца когомологий для групп $\mathrm{PSL}(3,q)$, $q \equiv 3 \pmod 4$, и $\mathrm{PSU}(3,q)$, $q \equiv 1 \pmod 4$, над алгебраически замкнутым полем характеристики два, и это вычисление представляется более простым по сравнению с вычислениями в [8][1]. Результаты настоящей работы также могут быть применены к групповым блокам, которые Морита-эквивалентны алгебрам из рассматриваемых здесь серий (см., в частности, таблицы в книге [3]). Отметим следующее интересное обстоятельство: для алгебр серии $SD(2\mathcal{B})_3$ минимальные проективные резольвенты получаются из бикомплексов, которые устроены иначе, чем для всех рассмотренных ранее серий (ср. [4–7]), – а именно, в вершинах соответствующих бикомплексов располагаются модули, которые необязательно неразло-

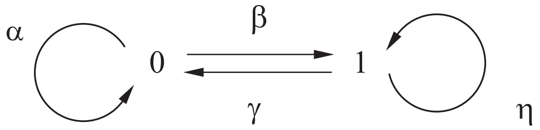
[1]Второй из авторов приносит благодарность Г. А. Гаркуше, обратившему его внимание на статью [8].

жимы.

Мы будем использовать основные понятия и обозначения, введенные в [4].

1.1. Серия $SD(2\mathcal{B})_3$.

Пусть K – произвольное поле. Алгебры $R^{(\mathcal{B}_3)} = R_s^{(\mathcal{B}_3)}$, $s \in \mathbb{N}$, $s \neq 1$, составляющие серию $SD(2\mathcal{B})_3$, определяются следующим колчаном $Q^{(\mathcal{B})}$ с соотношениями (ср. предложение 4.2 в [9]):



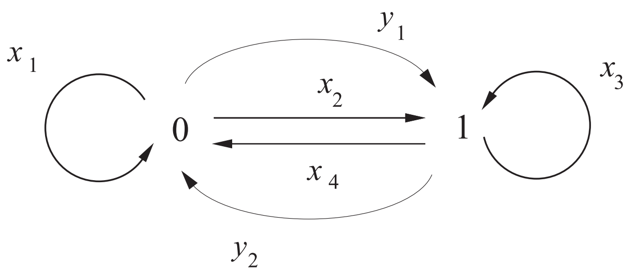
$$0 = \beta\alpha^s = \alpha^s\gamma = \alpha^{s+2} = \eta^{s+2} = \gamma\eta^s = \eta^s\beta,$$

$$\gamma\beta = \alpha^2, \beta\alpha = \eta\beta, \gamma\eta = \alpha\gamma, \beta\gamma = \eta^2(1 + c \cdot \eta^{s-1}), \quad \text{где} \quad c \in K$$

(композиция путей записывается справа налево).

С каждой вершиной i $(i = 0, 1)$ данного колчана связан левый проективный модуль P_i, идемпотент e_i – образующий этого модуля, и простой модуль $S_i \simeq P_i/\operatorname{rad} P_i$. Всякий элемент $x \in e_i R e_j$ определяет морфизм P_i в P_j (а именно, умножение справа на x), который мы будем обозначать так же, как и соответствующий элемент.

Для описания алгебры Йонеды $\mathcal{Y}(R^{(\mathcal{B}_3)})$ алгебры $R^{(\mathcal{B}_3)}$ рассмотрим колчан $\Re^{(\mathcal{B}_3)}$:



На алгебре путей $K[\Re^{(\mathcal{B}_3)}]$ этого колчана введем градуировку такую, что (для всех подходящих значений индексов i, j) имеем:

$$\deg(x_i) = 1, \deg(y_j) = 2.$$

Рассмотрим на колчане $\Re^{(\mathcal{B}_3)}$ следующие соотношения:

$$\begin{cases} x_2x_1 = -x_3x_2, \quad x_1x_4 = -x_4x_3, \quad x_4x_2 = -x_1^2, \quad x_2y_4 = -x_3^2, \\ x_3y_1 = y_1x_1 + c\cdot x_2x_4x_2, \quad x_1y_2 = y_2x_3 + c\cdot x_4x_2x_4, \\ y_2x_2 = -x_4y_1, \quad x_2y_2 = -y_1x_4. \end{cases} \tag{1.1}$$

Определим алгебры $\mathcal{E}^{(\mathcal{B}_3)}$ с помощью колчана $\Re^{(\mathcal{B}_3)}$ и соотношений (1.1).

Теорема 1.1. *Пусть $R = R_s^{(\mathcal{B}_3)}$, $s \geqslant 2$. Тогда алгебра Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ как градуированная алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{E}^{(\mathcal{B}_3)}$.*

Следствие 1.2. *Пусть $R = R_s^{(\mathcal{B}_3)}$, $s \geqslant 2$, $S = S_i$ $(i = 0, 1)$. Тогда:*

$$\mathcal{E}(S) \simeq K\langle x, z, t\rangle/(xz + zx - c\cdot x^4, xt - tx, tz - zt, z^2 - tx^2),$$

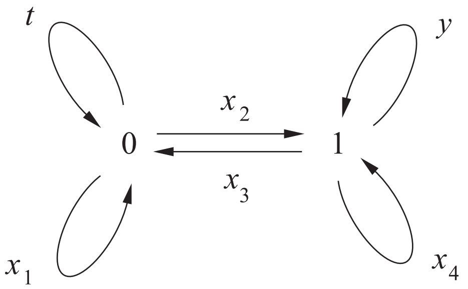
где $\deg x = 1$, $\deg z = 3$, $\deg t = 4$.

1.2. Серия $SD(2\mathcal{B})_1$.

Напомним, что алгебры серии $SD(2\mathcal{B})_1^{k,s}(c)$, k, $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$, $c \in K$ (K – основное поле) определяются как алгебры путей колчана $Q^{(\mathcal{B})}$ (см. раздел 1.1) с соотношениями

$$\beta\gamma = \gamma\eta = \eta\beta = 0, \quad \alpha^2 = \gamma\beta(\alpha\gamma\beta)^{k-1} + c(\alpha\gamma\beta)^k,$$
$$(\gamma\beta\alpha)^k = (\alpha\gamma\beta)^k, \quad \eta^s = (\beta\alpha\gamma)^k.$$

Эти алгебры мы обозначаем через $R^{(\mathcal{B}_1)} = R_{k,s}^{(\mathcal{B}_1)}$. Для описания алгебры Йонеды $\mathcal{Y}(R^{(\mathcal{B}_1)})$ алгебры $R^{(\mathcal{B}_1)}$ рассмотрим колчан $\Re^{(\mathcal{B}_1)}$:



На алгебре путей $K[\Re^{(\mathcal{B}_1)}]$ этого колчана введем градуировку такую, что имеем:

$$\deg(x_i) = 1\,(i = 1, 2, 3, 4), \quad \deg(y) = 2, \quad \deg(t) = 4.$$

Рассмотрим на колчане $\Re^{(\mathcal{B}_1)}$ следующие соотношения:

$$\begin{cases} x_2x_1 = x_3x_2 = x_1x_3 = x_1^3 = 0, \quad yx_4 = x_4y, \\ x_3yx_2 = 0, \quad x_2x_3y = -yx_2x_3, \quad x_1t = tx_1, \\ y^2x_2 = x_2t, \quad tx_3 = x_3y^2, \\ x_4^2 = \begin{cases} 0, & s > 2 \\ -y, & s = 2 \end{cases} \end{cases} \tag{1.2}$$

Определим алгебры $\mathcal{E}^{(\mathcal{B}_1)} = \mathcal{E}_s^{(\mathcal{B}_1)}$ с помощью колчана $\Re^{(\mathcal{B}_1)}$ и соотношений (1.2).

Теорема 1.3. *Пусть* $R = R_{k,s}^{(\mathcal{B}_1)}$, $k \geq 1$, $s \geqslant 2$. *Тогда алгебра Йонеды* $\mathcal{Y}(R)$ *как градуированная алгебра изоморфна алгебре* $\mathcal{E}_s^{(\mathcal{B}_1)}$.

Следствие 1.4. *Пусть* $R = R_{k,s}^{(\mathcal{B}_1)}$, $k \geq 1$, $s \geqslant 2$. *Тогда имеем:*

а)

$$\mathcal{E}(S_0) \simeq K\langle x, z, t, u\rangle/(x^3, xz, zx, xu, ux, xt-tx, zt-tz, ut-tu, zu+uz, u^2+z^2t),$$

где $\deg x = 1$, $\deg z = 3$, $\deg t = 4$, $\deg u = 5$;

б)

$$\mathcal{E}(S_1) \simeq K\langle x, y_1, y_2\rangle/(xy_2 - y_2x, y_1y_2 + y_2y_1, x^2, y_1^2),$$

где $\deg x = 1$, $\deg y_1 = \deg y_2 = 2$ – *при* $s > 2$;

$$\mathcal{E}(S_1) \simeq K\langle x, y\rangle/(yx^2 + x^2y, y^2),$$

где $\deg x = 1$, $\deg y = 2$ – *при* $s = 2$.

2. Резольвенты

2.1. Серия $SD(2\mathcal{B})_3$.

Положим $\alpha' = \alpha - c \cdot \alpha^s$, $\beta' = c \cdot \beta\alpha^{s-1}$ и построим следующий бикомплекс $B_{\bullet,\bullet}$, расположенный в первой четверти плоскости (т.е. строки и столбцы занумерованы числами $0, 1, 2, \dots$):

$$
\begin{tikzcd}
\dots \arrow[d, "\rho_1"'] & \dots \arrow[d, "\rho_1"] & \dots \arrow[d, "\rho_1"] & \dots \arrow[d, "\rho_1"] & \dots \arrow[d, "(\beta\ \alpha)"] \\
P_1 \oplus P_0 \arrow[d, "\rho_2"'] & P_1 \oplus P_0 \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[d, "\rho_2"] & P_1 \oplus P_0 \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[d, "\rho"] & P_1 \oplus P_0 \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[d, "(\eta\ \gamma)"] & P_0 \arrow[l, "\sigma_1"'] \\
P_1 \oplus P_0 \arrow[d, "\rho_1"'] & P_1 \oplus P_0 \arrow[l, "-\sigma"'] \arrow[d, "\rho_1"] & P_1 \oplus P_0 \arrow[l, "-\sigma"'] \arrow[d, "(\beta\ \alpha)"] & P_1 \arrow[l, "-\sigma_2"'] & \\
P_1 \oplus P_0 \arrow[d, "\rho"'] & P_1 \oplus P_0 \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[d, "(\eta\ \gamma)"] & P_0 \arrow[l, "\sigma_1"'] & & \\
P_1 \oplus P_0 \arrow[d, "(\beta\ \alpha)"'] & P_1 \arrow[l, "-\sigma_2"'] & & & \\
P_0, & & & &
\end{tikzcd}
\tag{2.1}
$$

где

$$
\rho = \begin{pmatrix} -\eta & -\gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \rho_1 = \begin{pmatrix} -\eta & -\gamma \\ \beta' & \alpha \end{pmatrix}, \rho_2 = \begin{pmatrix} -\eta & -\gamma \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix},
$$

$$
\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha^s \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha^s \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta\alpha^{s-1} \end{pmatrix}.
$$

Предложение 2.1. *Пусть $R = R_s^{(\mathcal{B}_3)}$. Тогда тотализация $\mathrm{Tot}\,(B_{\bullet,\bullet})$ бикомплекса (2.1) представляет собой минимальную проективную резольвенту простого R-модуля S_0.*

Доказательство. Мы воспользуемся спектральной последовательностью бикомплекса (см. [10, с. 142] или [11, III.7.10]):

$$
E^2_{pq} = \mathcal{H}^h_p \mathcal{H}^v_q (B_{\bullet,\bullet}) \Rightarrow \mathcal{H}_{p+q}(\mathrm{Tot}\,(B_{\bullet,\bullet})) \tag{2.2}
$$

и докажем, что она вырождается уже на втором листе (ср. [4]).

Рассмотрим гомологии нулевого столбца (т.е. самого левого в диаграмме (2.1)):

$$\mathcal{H}^v_q(B_{0,\bullet}) = \begin{cases} \mathrm{Coker}\,(\beta,\alpha) \simeq S_0, & \text{если} \quad q = 0, \\ \mathrm{Ker}\,(\beta,\alpha)/\mathrm{Im}\,\rho, & \text{если} \quad q = 1, \\ \mathrm{Ker}\,\rho/\mathrm{Im}\,\rho_1, & \text{если} \quad q = 2, \\ \mathrm{Ker}\,\rho_1/\mathrm{Im}\,\rho_2, & \text{если} \quad q = 2i+1, \quad i > 0, \\ \mathrm{Ker}\,\rho_2/\mathrm{Im}\,\rho_1, & \text{если} \quad q = 2i, \quad i > 1. \end{cases}$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\mathrm{Ker}\,(\beta,\alpha)/\mathrm{Im}\,\rho = {}_K\langle\,\overline{(0,\beta\alpha^{s-1})}\,\rangle \simeq S_1$$

(чертой мы обычно обозначаем элемент соответствующего фактор-модуля, представляемый указанным под чертой элементом), а также $\mathrm{Ker}\,\rho = \mathrm{Im}\,\rho_1$; при этом

$$\dim_K \mathrm{Ker}\,\rho = 2s + 2 = \dim_K \mathrm{Ker}\,\rho_1.$$

Поскольку

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - c\alpha^{s-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\eta & -\gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta & -\gamma \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}$$

и элемент $1 - c\alpha^{s-1}$ обратим, то $\mathrm{Ker}\,\rho_2 = \mathrm{Ker}\,\rho$, и, следовательно, $\dim_K \mathrm{Im}\,\rho_2 = 2s+2$. Так как $\rho_1 \cdot \rho_2 = 0$, то получаем, что $\mathrm{Ker}\,\rho_1 = \mathrm{Im}\,\rho_2$. Аналогично доказывается, что $\mathrm{Ker}\,\rho_2 = \mathrm{Im}\,\rho_1$. Таким образом,

$$\mathcal{H}^v_q(B_{0,\bullet}) = \begin{cases} S_0, & \text{если} \quad q = 0, \\ S_1, & \text{если} \quad q = 1, \\ 0, & \text{если} \quad q > 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Гомологии столбцов бикомплекса (2.1), имеющие четные (положительные) номера, получаются из гомологий (2.3) с помощью соответствующего сдвига. Аналогично доказывается, что

$$\mathcal{H}^v_q(B_{1,\bullet}) = \begin{cases} S_1, & \text{если} \quad q = 1, \\ S_0, & \text{если} \quad q = 2, \\ 0. & \text{если} \quad q > 2, \end{cases} \tag{2.4}$$

а гомологии остальных столбцов с нечетными номерами получаются из гомологий (2.4) с помощью сдвига. Таким образом, на первом листе рассматриваемой спектральной последовательности строки с нечетными (положительными) номерами имеют следующий вид:

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots 0 & \longleftarrow & E^1_{2i,2i+1} & \xleftarrow{\overline{\sigma}_1} & E^1_{2i+1,2i+1} & \longleftarrow & 0\ldots, \\ & & \| & & \| & & \\ & & S_1 & & S_1 & & \end{array}$$

и легко видеть, что $\overline{\sigma}_1$ – изоморфизм. Аналогично доказывается точность строк первого листа спектральной последовательности, имеющих четные положительные номера. Таким образом, спектральная последовательность (2.2) вырождается уже на втором листе, что доказывает точность тотализации $\mathrm{Tot}\,(B_{\bullet,\bullet})$ в положительных степенях. То, что полученная проективная резольвента модуля S_0 минимальна, следует непосредственно из вида дифференциалов в $B_{\bullet,\bullet}$. □

Из доказательства предложения 2.1 вытекает также следующее утверждение.

Следствие 2.2. *Пусть $B'_{\bullet,\bullet}$ – бикомплекс, полученный из бикомплекса $B_{\bullet,\bullet}$ отбрасыванием нулевого столбца (точнее, заменой членов этого столбца нулями). Тогда $\mathrm{Tot}\,(B'_{\bullet,\bullet})$ представляет собой минимальную проективную резольвенту модуля S_1.*

Замечание 2.3. Минимальная проективная резольвента модуля S_0 получается из минимальной проективной резольвенты модуля S_1 аналогичным образом.

Следствие 2.4. *Пусть $R = R^{(\mathcal{B}_3)}$. Тогда:*

а)
$$\dim_K \mathrm{Ext}\,^m_R(S_0,S_0) = \dim_K \mathrm{Ext}\,^m_R(S_1,S_1) = \begin{cases} \left[\dfrac{m}{2}\right], & \textit{если} \quad m \equiv 2 \pmod 4, \\ \left[\dfrac{m}{2}\right]+1, & \textit{в противном случае}; \end{cases}$$

б)
$$\dim_K \mathrm{Ext}\,^m_R(S_0,S_1) = \dim_K \mathrm{Ext}\,^m_R(S_1,S_0) = \begin{cases} \left[\dfrac{m}{2}\right], & \textit{если} \quad m \equiv 0 \pmod 4, \\ \left[\dfrac{m}{2}\right]+1, & \textit{в противном случае}. \end{cases}$$

2.2. Серия $SD(2\mathcal{B})_1$.

Пусть теперь $R = R^{(\mathcal{B}_1)}$. Положим $a = (\gamma\beta\alpha)^{k-1}$, $g = (\beta\alpha\gamma)^{k-1}$, $b = (\alpha\gamma\beta)^{k-1}$, $e = \eta^{s-1}$ – пути в колчане и их канонические образы в алгебре R.

Предложение 2.5. *Тотализация бикомплекса* $Q^{(0)}_{\bullet,\bullet}$

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \\
 & & P_0 \arrow[d, "\alpha"'] & P_0 \arrow[l, "-\alpha"'] \arrow[d, "\gamma g+c\alpha\gamma g"'] & P_1 \arrow[l, "\beta\alpha"'] \arrow[d, "e"'] & P_1 \arrow[l, "-\eta"'] \arrow[d, "\beta\alpha a"'] & \cdots \arrow[l, "\gamma"'] \\
 & & P_0 \arrow[d, "\alpha\gamma g"'] & P_1 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d, "e"'] & P_1 \arrow[l, "-\eta"'] \arrow[d, "\beta\alpha a"'] & P_0 \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha\gamma g"'] & \cdots \arrow[l, "-\beta"'] \\
P_0 \arrow[d, "\alpha"'] & P_0 \arrow[l, "-\alpha"'] \arrow[d, "\gamma g+c\alpha\gamma g"'] & P_1 \arrow[l, "\beta\alpha"'] \arrow[d, "e"'] & P_1 \arrow[l, "-\eta"'] \arrow[d, "\beta\alpha a"'] & P_0 \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha\gamma g"'] & P_1 \arrow[l, "-\beta"'] \arrow[d, "e"'] & \cdots \arrow[l, "\eta"'] \\
P_0 & P_1 \arrow[l, "\beta"'] & P_1 \arrow[l, "-\eta"'] & P_0 \arrow[l, "\gamma"'] & P_1 \arrow[l, "-\beta"'] & P_1 \arrow[l, "\eta"'] & \cdots \arrow[l, "-\gamma"']
\end{tikzcd}$$

левых R-модулей точна всюду, кроме нулевого члена, и является проективной резольвентой простого модуля S_0.

Доказательство. Обозначим через $d^v_{i,j}$ вертикальный дифференциал в $Q^{(0)}_{i,j}$ – модуль, стоящий на пересечении $i+1$-го слева столбца и $j+1$-ой снизу строки, через $d^h_{i,j}$ – горизонтальный дифференциал в $Q^{(0)}_{i,j}$. Докажем, что тотализация бикомплекса $Q^{(0)}_{\bullet,\bullet}$ точна во всех членах, кроме степени 0. Вновь рассмотрим стандартную спектральную последовательность, связанную с бикомплексом, сходящуюся к гомологиям его тотализации (ср. доказательство Предложения 2.1) и докажем, что второй лист спектральной последовательности равен нулю всюду, кроме позиции $(0,0)$. Мы используем ту из версий спектральной последовательности бикомплекса, у которой на втором листе в позиции i,j стоит $H^v_i(H^h_{i,j})$, где $H^h_{i,j}$ – i-е гомологии комплекса $(Q^{(0)}_{*,j}, d^h)$, H^i_v – i-ые гомологии комплекса, индуцированного d^v на $H^h_{*,j}$. Горизонтальные комплексы точны при $i > j$ для четных j и при $i > j+1$ для нечетных j; заметим, что комплексы $(Q^{(0)}_{*,j_1}, d^h)$ и $(Q^{(0)}_{*,j}, d^h)$, где j и j_1 – одной четности, отличаются лишь сдвигом. Далее, нетрудно видеть, что при четном j у комплекса $(Q^{(0)}_{*,j}, d^h)$ есть лишь одна ненулевая гомология $H_j = P_0/R\beta \simeq R\gamma$, а при четном j – две, а именно $H_{j-1} = P_0/R\alpha \simeq R\alpha\gamma$ и $H_{j+1} = \operatorname{Ker}(\beta\alpha)/R\eta \simeq S_0$. Они выстраиваются в вертикальные точные последовательности

$$R\alpha\gamma \to R\gamma \to S_0$$

везде, кроме нулевого столбца, в котором присутствуют лишь два первых члена такой последовательности и, следовательно, гомология во втором члене равна S_0. Следовательно, тотализация точна всюду, кроме нулевого члена, а в нуле гомология равна S_0. Минимальность этой резольвенты следует из того, что образы всех дифференциальных отображений содержатся в радикалах соответствующих членов комплекса. □

Предложение 2.6. *Тотализация бикомплекса $Q^{(1)}_{\bullet,\bullet}$*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[d, "\gamma"'] & \cdots \arrow[d, "\eta"'] & \cdots \arrow[d, "\beta"'] & \cdots \arrow[d, "\gamma"'] & \cdots \arrow[d, "e"'] & \\
P_1 \arrow[d, "\eta"'] & P_1 \arrow[l, "e"'] \arrow[d, "\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-\alpha\gamma g"'] \arrow[d, "\gamma"'] & P_1 \arrow[l, "\beta\alpha a"'] \arrow[d, "e"'] & P_1 \arrow[l, "-\eta"'] \arrow[d, "\beta\alpha a"'] & \cdots \arrow[l, "\gamma"'] \\
P_1 \arrow[d, "\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-\alpha\gamma g"'] \arrow[d, "\gamma"'] & P_1 \arrow[l, "\beta\alpha a"'] \arrow[d, "e"'] & P_1 \arrow[l, "-\eta"'] \arrow[d, "\beta\alpha a"'] & P_0 \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha\gamma g"'] & \cdots \arrow[l, "-\beta"'] \\
P_0 \arrow[d, "\gamma"'] & P_1 \arrow[l, "\beta\alpha a"'] \arrow[d, "e"'] & P_1 \arrow[l, "-\eta"'] \arrow[d, "\beta\alpha a"'] & P_0 \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha\gamma g"'] & P_1 \arrow[l, "-\beta"'] \arrow[d, "e"'] & \cdots \arrow[l, "\eta"'] \\
P_1 & P_1 \arrow[l, "-\eta"'] & P_0 \arrow[l, "\gamma"'] & P_1 \arrow[l, "-\beta"'] & P_1 \arrow[l, "\eta"'] & \cdots \arrow[l, "-\gamma"']
\end{tikzcd}$$

левых R-модулей точна всюду, кроме нулевого члена, и является проективной резольвентой простого модуля S_1.

Доказательство. Воспользуемся обозначениями из предыдущего доказательства и рассмотрим аналогичную спектральную последовательность. Гомологии j-го горизонтального комплекса равны нулю при $i > j$; при $i = j > 0$ гомологии равны

$$\operatorname{Ker}(\beta\alpha a)/R\eta \simeq R\alpha\gamma\beta,$$

а при $0 < i < j$ гомологии равны:

$$\operatorname{Ker}(\beta\alpha a)/Re \simeq R\alpha\gamma\beta \oplus R\eta^3, \quad \text{если} \quad j - i \equiv 0 \pmod 3,$$

$$\mathrm{Ker}\,(\alpha\gamma g)/R\beta\alpha a \simeq M, \quad \text{если} \quad j-i \equiv 1 \pmod 3,$$

где $M = \langle x_1, x_2\rangle$ – средний член короткой точной последовательности

$$0 \to \langle x_1\rangle \to M \to \langle x_2\rangle \to 0$$

с $\langle x_1\rangle = R\gamma\beta\alpha, \langle x_2\rangle = R\alpha\gamma\beta$ и действием $\alpha x_2 = bx_1$, и, наконец,

$$\mathrm{Ker}\,(e)/R\alpha\gamma g \simeq R\gamma\beta\alpha \oplus R\eta^3, \quad \text{если} \quad j-i \equiv 2 \pmod 3$$

(при $s = 2$ слагаемые $R\eta^3$ просто отсутствуют). Таким образом, вертикальные дифференциалы бикомплекса индуцируют на этих гомологиях бесконечные периодические точные последовательности вида

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots \xrightarrow{d_4} & R\alpha\gamma\beta \oplus R\eta^3 & \xrightarrow{d_3} & R\gamma\beta\alpha \oplus R\eta^3 & \xrightarrow{d_2} & M \\ \xrightarrow{d_1} & R\alpha\gamma\beta & \xrightarrow{d_0} & 0, & & \end{array}$$

поскольку $\mathrm{Ker}\,(d_{3i+1}) = \mathrm{Im}\,(d_{3i+2}) \simeq R\gamma\beta\alpha$, $\mathrm{Ker}\,(d_{3i+2}) = \mathrm{Im}\,(d_{3i+3}) \simeq R\eta^3$, $\mathrm{Ker}\,(d_{3i}) = \mathrm{Im}\,(d_{3i+1}) \simeq R\alpha\gamma\beta$ $(i \geq 0)$.

Таким образом, мы проверили, что при $i > 0$ (i, j)-ый член второго листа нашей спектральной последовательности равен 0.

При $i = 0$ гомология j-го горизонтального комплекса равна

$$\begin{aligned} &P_1/R\eta = R\beta, \quad \text{если} \quad j = 0,\\ &P_0/\langle\beta\alpha a\rangle = \langle x_1 |\, e_1x_1 = 0, \beta\alpha a x_1 = 0\rangle, \quad \text{если} \quad j = 3k+1,\\ &P_1/\langle\alpha\gamma g\rangle = \langle x_2 |\, e_0x_2 = 0, \alpha\gamma g x_2 = 0\rangle, \quad \text{если} \quad j = 3k+2,\\ &P_1/\langle e\rangle = \langle x_3 |\, e_0x_3 = 0, ex_3 = 0\rangle, \quad \text{если} \quad j = 3k+3; \end{aligned}$$

и мы получаем, что вертикальные дифференциалы индуцируют на этих гомологиях бесконечную периодическую последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots \xrightarrow{d_3} & \langle x_1\rangle & \xrightarrow{d_2} & \langle x_3\rangle & \xrightarrow{d_1} & \langle x_2\rangle \\ \xrightarrow{d_0} & \langle x_1\rangle & \longrightarrow & R\beta & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

где $\mathrm{Ker}\,(d_{3i-2}) = \mathrm{Im}\,(d_{3i-1}) \simeq R\gamma\beta$, $\mathrm{Ker}\,(d_{3i-3}) = \mathrm{Im}\,(d_{3i-2}) \simeq R\eta^2$, $\mathrm{Ker}\,(d_{3i-1}) = \mathrm{Im}\,(d_{3i}) \simeq R\beta\alpha$ при $i > 0$, так что всюду, кроме степени 0, эта последовательность точна. Нулевая гомология равна $R\beta/R\gamma\beta \simeq S_1$, что и требовалось. $\square$

Следствие 2.7. Ext*-группы простых модулей имеют следующие размерности:*

1. $\dim \operatorname{Ext}^k(S_1, S_1) = \left[\frac{2}{3}k\right] + 1;$

2. $\dim \operatorname{Ext}^k(S_1, S_0) = \dim \operatorname{Ext}^k(S_0, S_1) = \left[\frac{1}{3}(k+2)\right];$

3. $\dim \operatorname{Ext}^k(S_0, S_0) = \begin{cases} \left[\frac{1}{6}k\right], & k \equiv 7 \pmod{12}, \\ \left[\frac{1}{6}k\right] + 2, & k \equiv 5, 9 \pmod{12}, \\ \left[\frac{1}{6}k\right] + 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

3. Образующие

3.1. Серия $SD(2\mathcal{B})_3$.

Пусть $R = R^{(\mathcal{B}_3)}$, и пусть

$$\mathcal{Y}(R) = \mathcal{E}(R/J(R)) = \bigoplus_{m \geqslant 0} \bigoplus_{p,q=0}^{1} \operatorname{Ext}_R^m(S_p, S_q)$$

– алгебра Йонеды алгебры R. Мы сейчас определим некоторые однородные элементы алгебры $\mathcal{Y}(R)$:
степени 1 –

$$x_1 \in \operatorname{Ext}_R^1(S_0, S_0), x_2 \in \operatorname{Ext}_R^1(S_0, S_1),$$
$$x_3 \in \operatorname{Ext}_R^1(S_1, S_1), x_4 \in \operatorname{Ext}_R^1(S_1, S_0),$$

степени 2 –

$$y_1 \in \operatorname{Ext}_R^2(S_0, S_1), y_2 \in \operatorname{Ext}_R^2(S_1, S_0),$$

а именно, мы опишем их с помощью соответствующих элементов

$$\begin{aligned} &\widehat{x_i} \in \operatorname{Hom}_R(\Omega^1(S_p), S_q) \quad (i = 1, 2, 3, 4), \\ &\widehat{y_j} \in \operatorname{Hom}_R(\Omega^2(S_p), S_q) \quad (j = 1, 2), \end{aligned} \tag{3.1}$$

используя краткие обозначения, введенные в [4]:

$$\widehat{x}_1 = \mathrm{sq}\,(Q_1(S_0) \xrightarrow{(0,1)} P_0), \quad \widehat{x}_2 = \mathrm{sq}\,(Q_1(S_0) \xrightarrow{(1,0)} P_1),$$

$$\widehat{x}_3 = \mathrm{sq}\,(Q_1(S_1) \xrightarrow{(1,0)} P_1), \quad \widehat{x}_4 = \mathrm{sq}\,(Q_1(S_1) \xrightarrow{(0,1)} P_0),$$

$$\widehat{y}_1 = \mathrm{sq}\,(Q_2(S_0) \xrightarrow{(1,0,0)} P_1), \quad \widehat{y}_2 = \mathrm{sq}\,(Q_2(S_1) \xrightarrow{(1,0,0)} P_0).$$

Напомним, что, например, для $\widehat{x}_2$ такое описание означает наличие следующей коммутативной диаграммы, однозначно определяющей это отображение:

$$\begin{array}{ccccc} Q_1(S_0) & \xrightarrow{\pi_1^{(0)}} & \Omega^1(S_0) & \subset & Q_0(S_0) \\ {\scriptstyle (1,0)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \widehat{x}_2} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_0} \\ P_1 = Q_0(S_1) & \xrightarrow{\rho_1} & S_1 & \subset & P_1, \end{array} \qquad (3.2)$$

где $\pi_1^{(0)}$ и ρ_1 – соответствующие проективные накрытия.

Предложение 3.1. *Пусть $R = R^{(\mathcal{B}_3)}$. Как K-линейные пространства приведенные ниже* Ext *-группы имеют следующие базисы:*

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Ext}\,^2_R(S_0,S_0) = \langle x_1^2\rangle, & \mathrm{Ext}\,^2_R(S_1,S_1) = \langle x_3^2\rangle, \\ \mathrm{Ext}\,^2_R(S_0,S_1) = \langle y_1, x_2x_1\rangle, & \mathrm{Ext}\,^2_R(S_1,S_0) = \langle y_2, x_1x_4\rangle \\ \mathrm{Ext}\,^3_R(S_0,S_0) = \langle y_2x_2, x_1^3\rangle, & \mathrm{Ext}\,^3_R(S_1,S_1) = \langle x_2y_2, x_3^3\rangle \\ \mathrm{Ext}\,^3_R(S_0,S_1) = \langle x_3y_1, x_2x_4x_2\rangle, & \mathrm{Ext}\,^3_R(S_1,S_0) = \langle x_1y_2, x_4x_2x_4\rangle. \end{array}$$

Доказательство проводится аналогично [6, предложение 3.2] с использованием предварительно выполненных вычислений Ω-сдвигов отображений $\widehat{x}_i$, $\widehat{y}_j$ из (3.1) (ср. [6, предложение 3.1]). Поэтому для иллюстрации используемой техники мы ограничимся проверкой только одного соотношения, а именно, содержащего $\mathrm{Ext}\,^2_R(S_0,S_1)$. Заметим, что $(x_2x_1)\widehat{} = \widehat{x}_2\cdot\Omega^1(\widehat{x}_1)$. При этом композиция $\widehat{x}_2\cdot\Omega^1(\widehat{x}_1)$ описывается с помощью объемлющего квадрата следующей коммутативной диаграммы, в которой верхний квадрат описывает Ω-сдвиг отображения $\widehat{x}_1$, а нижний квадрат получается из диаграммы (3.2):

$$\begin{array}{ccc} Q_2(S_0) & \xrightarrow{d_1^{(0)}} & Q_1(S_0) \\ {\scriptstyle\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\beta\alpha^{s-2} & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle (0,1)} \\ Q_1(S_0) & \xrightarrow{d_0^{(0)}} & Q_0(S_0) \\ {\scriptstyle (1,0)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_0} \\ Q_0(S_1) & \xrightarrow{\rho_1} & P_1. \end{array} \tag{3.3}$$

Сравнивая композицию левых вертикальных отображений в (3.3) с аналогичным отображением в квадрате, который описывает отображение $\widehat{y}_1$, получаем, что x_2x_1 и y_1 линейно независимы, и остается заметить, что $\dim_K \operatorname{Ext}_R^2(S_0, S_1) = 2$. $\square$

Предложение 3.2. *Пусть $R = R^{(\mathcal{B}_3)}$. Множество*

$$\mathcal{X}_{\mathcal{B}_3} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2\} \tag{3.4}$$

порождает алгебру Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ как K-алгебру.

Доказательство. Пусть дан ненулевой гомоморфизм $f\colon \Omega^m(S_r) \to S$, где S – некоторый простой модуль. Мы будем доказывать требуемое утверждение индукцией по m, и ввиду предложения 3.1 можем предположить, что $m \geq 4$. По симметрии, отмеченной в следствии 2.2 и замечании 2.3, можно считать, что $r = 0$. Пусть $p = f\pi_m$, где $\pi_m\colon Q_m(S_0) \to \Omega^m(S_0)$ – проективное накрытие. Легко видеть, что достаточно рассмотреть случай, когда $p(B_{i,m-i}) \neq 0$ ровно для одного значения i.

Случай 1. Пусть $i > 0$. Построим следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc} Q_{m+1}(S_0) & \xrightarrow{d_m^{(0)}} & Q_m(S_0) & \xrightarrow{\pi_m^{(0)}} & \Omega^m(S_0) & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle\varphi_1}\Big\downarrow & & {\scriptstyle\varphi_0}\Big\downarrow & & {\scriptstyle\varphi}\Big\downarrow & & \\ Q_{m-1}(S_1) & \xrightarrow{d_{m-2}^{(1)}} & Q_{m-2}(S_1) & \xrightarrow{\pi_{m-2}^{(1)}} & \Omega^{m-2}(S_1) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

где φ_0 и φ_1 – проекции на соответствующие прямые слагаемые, получаемые отбрасыванием членов из нулевого столбца бикомплекса $B_{\bullet,\bullet}$, в частности, $\operatorname{Ker}\varphi_0 = B_{0,m}$, $\operatorname{Ker}\varphi_1 = B_{0,m+1}$. Так как

$\operatorname{Ker} p \supset \operatorname{Ker} \varphi_0$, то существует гомоморфизм $p'\colon Q_{m-2}(S_1) \to S$ такой, что $p'\varphi_0 = p$, при этом $p' \cdot d^{(1)}_{m-2} = 0$, и, следовательно, найдется гомоморфизм $p''\colon \Omega^{m-2}(S_1) \to S$, для которого $p''\pi^{(1)}_{m-2} = p'$. Тогда $p''\varphi = f$. Так как $\varphi = \Omega^{m-2}(\tilde{\varphi})$ для некоторого $\tilde{\varphi}\colon \Omega^2(S_0) \longrightarrow S_1$, то по индукции получаем требуемое утверждение.

Случай 2. Предположим теперь, что $i = 0$. Здесь мы отдельно рассмотрим четные и нечетные m.

(а) Для нечетных $m = 2t - 1$ ($t \in \mathbb{N}$) рассмотрим матрицы, представляющие дифференциалы $d^{(0)}_m$ относительно разложений

$$\left.\begin{aligned} Q_{2t}(S_0) &= \bigoplus_{i+j=2t} B_{i,j} = P_\lambda \oplus (P_1 \oplus P_0)^t \\ Q_{2t-1}(S_0) &= \bigoplus_{i+j=2t-1} B_{i,j} = (P_1 \oplus P_0)^t \end{aligned}\right\}, \tag{3.5}$$

где $\lambda = 0$, если t четно, и $\lambda = 1$, если t нечетно (см. бикомплекс $B_{\bullet,\bullet}$ из (2.1)). Непосредственно получаем, что матрица дифференциала $d^{(0)}_m$ имеет следующий блочный вид

$$d^{(0)}_m = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & d^{(0)}_3 \end{pmatrix},$$

где A, B – матрицы подходящих размеров. Тогда можно построить следующую коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} Q_{m+1}(S_0) & \xrightarrow{d^{(0)}_m} & Q_m(S_0) & \xrightarrow{\pi^{(0)}_m} & \Omega^m(S_0) & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle\psi_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle\psi_0}\big\downarrow & & {\scriptstyle\psi}\big\downarrow & & \\ Q_4(S_0) & \xrightarrow{d^{(0)}_3} & Q_3(S_0) & \xrightarrow{\pi^{(0)}_3} & \Omega^3(S_0) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

где ψ_0 (соответственно, ψ_1) – каноническая проекция на последние четыре (соответственно, пять) прямых слагаемых вида P_μ ($\mu \in \{0, 1\}$) из разложений (3.4). Теперь с помощью рассуждений, аналогичных использованным в случае 1, завершаем доказательство требуемого утверждения для всех нечетных m.

(б) В случае четного m заметим сначала, что матрица дифференциала $d^{(0)}_m$ (относительно разложений, аналогичных (3.5)) содержит подматрицу, которая располагается в последних четырех столбцах и строках, и имеющую вид

$$\begin{pmatrix} -\eta & -\gamma & 0 & 0 \\ \beta' & \alpha' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta & -\gamma \\ 0 & \alpha^s & \beta' & \alpha \end{pmatrix}.$$

Это позволяет построить следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} Q_{m+1}(S_0) \arrow[r, "d_m^{(0)}"] \arrow[d, "\psi_1"'] & Q_m(S_0) \arrow[r, "\pi_m^{(0)}"] \arrow[d, "\psi_0"'] & \Omega^m(S_0) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & 0 \\ Q_3(S_0) \arrow[r, "d_2^{(0)}"] & Q_3(S_0) \arrow[r, "\pi_2^{(0)}"] & \Omega^2(S_0) \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

где отображение ψ_1 является проекцией на соответствующее прямое слагаемое, а ψ_0 определяется следующей блочной $3 \times m$-матрицей

$$A = (\,0 \quad B\,), \quad \text{где} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и теперь доказательство завершается аналогично случаю 1.

3.2. Серия $SD(2\mathcal{B})_1$.

Пусть теперь $R = R^{(\mathcal{B}_1)}$ и $\mathcal{Y}(R) = \mathcal{E}(R/J(R))$ – ее алгебра Йонеды. Рассмотрим минимальную резольвенту $Q^{(0)}_{\cdot}$ модуля S_0 из предложения 2.5 – её i-ый член является прямой суммой неразложимых проективных модулей, лежащих на i-ой диагонали (счет ведется с нулевой “диагонали” – углового модуля P_0). Будем записывать слагаемые в этой прямой сумме в том же порядке (имеется ввиду порядок движения слева направо), что и на бикомплексе – так, например, $Q_5^{(0)}$ следует записать как $P_0 \oplus P_1 \oplus P_0 \oplus P_1$. Пусть $\pi^{(i)} : P_i \to S_i$, $i = 0, 1$ – канонические эпиморфизмы. Положим

$$f_1 = (0, \pi^{(0)}) : Q_1^{(0)} = P_1 \oplus P_0 \to S_0,$$
$$f_2 = (\pi^{(1)}, 0) : Q_1^{(0)} = P_1 \oplus P_0 \to S_1,$$
$$h = (0, 0, \pi^{(0)}) : Q_4^{(0)} = P_1 \oplus P_1 \oplus P_0 \to S_0$$

и обозначим через x_1, x_2, t представляемые морфизмами f_1,f_2 и h соответственно элементы алгебры $\mathcal{Y}(R)$ (степеней 1, 1 и 4 соответственно).

Аналогично, пусть $Q^{(1)}_{\cdot}$ – минимальная резольвента модуля S_1 из предложения 2.6. Придерживаясь тех же соглашений о порядке записи неразложимых слагаемых в $Q^{(1)}_i$, что и в случае резольвенты $Q^{(0)}_{\cdot}$, положим

$$f_3 = (0, \pi^{(0)}) : Q^{(1)}_1 = P_1 \oplus P_0 \to S_0,$$
$$f_4 = (\pi^{(1)}, 0) : Q^{(1)}_1 = P_1 \oplus P_0 \to S_1,$$
$$g = (0, \pi^{(1)}, 0) : Q^{(1)}_2 = P_0 \oplus P_1 \oplus P_1 \to S_1$$

и обозначим через x_3, x_4, y представляемые морфизмами f_3, f_4 и g соответственно элементы алгебры $\mathcal{Y}(R)$ (степеней 1,1 и 2 соответственно).

Предложение 3.3. *Всякий элемент* Ext*-алгебры алгебры R может быть записан как линейная комбинация произведений элементов x_1, x_2, x_3, x_4, y, t; иными словами, набор $\{x_1, x_2, x_3, x_4, y, t\}$ является множеством образующих алгебры $\mathcal{Y}(R)$.*

Доказательство. Сначала мы укажем K-базисы в группах $\mathrm{Ext}^m_R(S_i, S_j)$, для $m \le 4$ и i, $j \in \{0, 1\}$:

$\mathrm{Ext}^1(S_0, S_0) = \langle x_1\rangle$;	$\mathrm{Ext}^1(S_0, S_1) = \langle x_2\rangle$;
$\mathrm{Ext}^1(S_1, S_0) = \langle x_3\rangle$;	$\mathrm{Ext}^1(S_1, S_1) = \langle x_4\rangle$;
$\mathrm{Ext}^2(S_0, S_0) = \langle x_1^2\rangle$;	$\mathrm{Ext}^2(S_0, S_1) = \langle x_4x_2\rangle$;
$\mathrm{Ext}^2(S_1, S_0) = \langle x_3x_4\rangle$;	$\mathrm{Ext}^2(S_1, S_1) = \langle x_2x_3, y\rangle$;
$\mathrm{Ext}^3(S_0, S_0) = \langle x_3x_4x_2\rangle$;	$\mathrm{Ext}^3(S_0, S_1) = \langle yx_2\rangle$;
$\mathrm{Ext}^3(S_1, S_0) = \langle x_3y\rangle$;	$\mathrm{Ext}^3(S_1, S_1) = \langle x_4x_2x_3, x_4y, x_2x_3x_4\rangle$;
$\mathrm{Ext}^4(S_0, S_0) = \langle t\rangle$;	$\mathrm{Ext}^4(S_0, S_1) = \langle yx_4x_2, x_2x_3x_4x_2\rangle$;
$\mathrm{Ext}^4(S_1, S_0) = \langle x_3x_4y, x_3x_4x_2x_3\rangle$;	$\mathrm{Ext}^4(S_1, S_1) = \langle yx_2x_3, y^2, x_4x_2x_3x_4\rangle$.

Для проверки того, что все указанные семейства являются базисами соответствующих групп, достаточно (согласно следствию 2.7) проверить линейную независимость элементов в каждом из предполагаемых базисов. Это легко сделать, явно выписав все отображения, представляющие указанные элементы (ср. ниже вычисления в п.4).

Пусть теперь $m > 4$. Докажем, что тогда всякий элемент $\operatorname{Ext}^m(S_i, S_j)$, $i, j \in \{0,1\}$, представляется в виде суммы произведений элементов меньших степеней; тогда доказательство будет завершено.

Пусть соответствующий элемент представлен морфизмом $f : Q_m^{(i)} \to S_j$. Не умаляя общности, можно считать, что существует единственное число n такое, что $Q_{n,m-n}^{(i)}$ не содержится в ядре отображения f. Для доказательства того, что элемент алгебры Йонеды, представляемый таким морфизмом, представляется в виде произведения элементов меньших степеней, достаточно (ср. доказательство Предложения 3.2) построить коммутативную диаграмму вида

$$\begin{array}{ccccccc}
Q_{m+1}^{(i)} & \xrightarrow{d} & Q_m^{(i)} & \longrightarrow & \Omega^m(S_i) & \subset & Q_{m-1}^{(i)} \\
{\scriptstyle\varphi_1}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi_0}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \\
Q_{l+1}^{(r)} & \xrightarrow{d} & Q_l^{(r)} & \longrightarrow & \Omega^l(S_r) & \subset & Q_{l-1}^{(r)}
\end{array} \tag{3.6}$$

такую, что $l < m$, $r \in \{0,1\}$ и $\varphi_0(Q_{n,m-n}^{(i)})$ не содержится в радикале $Q_l^{(r)}$.

Случай I: $i = 0$. Заметим, что при всяком натуральном s имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
Q_{s+5}^{(0)} & \xrightarrow{d} & Q_{s+4}^{(0)} & \longrightarrow & \Omega^{s+4}(S_0) & \subset & Q_{s+3}^{(0)} \\
{\scriptstyle\psi_{1s}^{(0)}}\downarrow & & {\scriptstyle\psi_{0s}^{(0)}}\downarrow & & {\scriptstyle\psi_s^{(0)}}\downarrow & & \\
Q_{s+1}^{(0)} & \xrightarrow{d} & Q_s^{(0)} & \longrightarrow & \Omega^s(S_0) & \subset & Q_{s-1}^{(0)}
\end{array}$$

такая, что $\psi_{ts}^{(0)}, t \in \{0,1\}$ задает изоморфизм между $Q_{m,s+4+t-m}^{(0)}$ и $Q_{m-2,s+2+t-m}^{(0)}$, если оба эти модуля – ненулевые, и равен нулю на двух последних (в смысле движения слева направо) неразложимых слагаемых модуля $Q_{s+4+t}^{(0)}$. Поэтому нам остается разобрать случай $m - n \le 1$.

Разберем несколько подслучаев.

(a) $Q_{n,m-n}^{(0)} = P_0$ включается в следующую конфигурацию:

$$P_1 \xrightarrow{\beta\alpha a} P_0 \xleftarrow{\pm\beta} P_1$$

(на рисунке будут изображаться все стрелки бикомплекса $Q^{(0)}_{\bullet,\bullet}$, входящие в $Q^{(0)}_{n,m-n}$).

При $m \neq 5$ строится коммутативная диаграмма вида (3.6), где $l = 3$, $r = 0$, φ_1 – гомоморфизм, отображающий $Q^{(0)}_{n-1,m-n+2} \oplus Q^{(0)}_{n,m-n+1} \oplus Q^{(0)}_{n+1,m-n}$ в $Q^{(0)}_4 = Q^{(0)}_{2,2} \oplus Q^{(0)}_{3,1} \oplus Q^{(0)}_{4,0}$ с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} (-1)^{m+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{m+1} \end{pmatrix}$$

и равный нулю на остальных неразложимых слагаемых $Q^{(0)}_{m+1}$, а φ_0 аналогичным образом индуцирован гомоморфизмом из $Q^{(0)}_{n-1,m-n+1} \oplus Q^{(0)}_{n,m-n}$ в $Q^{(0)}_{2,1} \oplus Q^{(0)}_{3,0}$, задаваемым матрицей

$$\begin{pmatrix} (-1)^{m+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При $m = 5$ имеем диаграмму вида (3.6), где $l = 4$, $r = 1$, а φ_1 и φ_0 заданы матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a + (1 - \delta_{k,1})c\alpha a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{k,1}\gamma & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{k,1}c\gamma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно.

(б) $Q^{(0)}_{n,m-n} = P_1$ включается в конфигурацию

$$P_1 \xrightarrow{e} P_1 \xleftarrow{\pm\gamma} P_0.$$

В этом случае строится коммутативная диаграмма вида (3.6), где $l = 2, r = 0$, φ_1 – гомоморфизм, отображающий $Q^{(0)}_{n,m-n+1} \oplus Q^{(0)}_{n+1,m-n}$ на $Q^{(0)}_3 = Q^{(0)}_{2,1} \oplus Q^{(0)}_{3,0}$ с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix}$$

и равный нулю на остальных неразложимых слагаемых $Q^{(0)}_{m+1}$, а φ_0 аналогичным образом индуцирован гомоморфизмом из

$Q^{(0)}_{n-1,m-n+1} \oplus Q^{(0)}_{n,m-n}$ в $Q^{(0)}_{1,1} \oplus Q^{(0)}_{2,0}$, задаваемым матрицей

$$\begin{pmatrix} (-1)^m\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(в) $Q^{(0)}_{n,m-n} = P_1$ включается в следующую конфигурацию:

$$P_0 \xrightarrow{\alpha\gamma g} P_1 \xleftarrow{\pm\eta} P_1.$$

В случае $n = m$ строится коммутативная диаграмма вида (3.6), где $l = 3, r = 1$, φ_1 – гомоморфизм, отображающий $Q^{(0)}_{m-1,2} \oplus Q^{(0)}_{m,1} \oplus Q^{(0)}_{m+1,0}$ на $Q^{(1)}_{2,2} \oplus Q^{(1)}_{3,1} \oplus Q^{(1)}_{4,0}$ с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} (-1)^m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^m \end{pmatrix}$$

и равный нулю на остальных неразложимых слагаемых $Q^{(0)}_{m+1}$, а φ_0 аналогичным образом индуцирован гомоморфизмом из $Q^{(0)}_{m-2,2} \oplus Q^{(0)}_{m-1,1} \oplus Q^{(0)}_{m,0}$ в $Q^{(1)}_{1,2} \oplus Q^{(1)}_{2,1} \oplus Q^{(1)}_{3,0}$, задаваемым матрицей

$$\begin{pmatrix} \alpha a & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В случае $n = m - 1$ строится коммутативная диаграмма вида (3.6), где $l = 3$, $r = 0$, φ_1 – гомоморфизм, отображающий $Q^{(0)}_{m-1,2} \oplus Q^{(0)}_{m,1} \oplus Q^{(0)}_{m+1,0}$ на $Q^{(0)}_4 = Q^{(0)}_{2,2} \oplus Q^{(0)}_{3,1} \oplus Q^{(0)}_{4,0}$ с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} (-1)^{m+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{m+1} \end{pmatrix}$$

и равный нулю на остальных неразложимых слагаемых модуля $Q^{(0)}_{m+1}$, а φ_0 аналогичным образом индуцирован гомоморфизмом из $Q^{(0)}_{m-1,1} \oplus Q^{(0)}_{m,0}$ в $Q^{(0)}_{2,1} \oplus Q^{(0)}_{3,0}$, задаваемым матрицей

$$\begin{pmatrix} (-1)^{m+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Случай II: $i = 1$. Пусть морфизм $f : Q^{(1)}_m \to S_j$ представляет соответствующий элемент алгебры Йонеды. Вновь можем считать, что существует единственное число n такое, что $Q^{(0)}_{n,m-n} \neq 0$ не содержится в ядре f.

Заметим, что при любом натуральном s существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
Q^{(1)}_{s+3} & \xrightarrow{d} & Q^{(1)}_{s+2} & \longrightarrow & \Omega^{s+2}(S_1) & \subset & Q^{(1)}_{s+1} \\
{\scriptstyle \psi^{(1)}_{1s}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \psi^{(1)}_{0s}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \psi^{(1)}_{s}}\big\downarrow & & \\
Q^{(1)}_{s+1} & \xrightarrow{d} & Q^{(1)}_{s} & \longrightarrow & \Omega^{s}(S_1) & \subset & Q^{(1)}_{s-1},
\end{array}$$

такая, что гомоморфизмы $\psi^{(1)}_{ts}$, $t \in \{0,1\}$ изоморфно отображают модули $Q^{(1)}_{n,s+2+t-n}$ на $Q^{(1)}_{n-1,s+1+t-n}$ при $n(s+2+t-n) > 0$ и равны нулю на $Q^{(1)}_{0,s+2+t}$ и $Q^{(1)}_{s+2+t,0}$. Поэтому нам остается проверить существование диаграммы вида (3.6) лишь при $n = m$ и $n = 0$. Разберем первый из этих случаев (случай $n = 0$ полностью аналогичен).

Имеется несколько подслучаев.

(а) $Q^{(1)}_{m,0} = P_1$ включается в следующую конфигурацию:

$$P_1 \xrightarrow{\beta\alpha a} P_0 \xleftarrow{\pm\beta} P_1.$$

В этом случае строится коммутативная диаграмма вида (3.6), где $l = 3, r = 0$, φ_1 – гомоморфизм, отображающий $Q^{(1)}_{m-1,2} \oplus Q^{(1)}_{m,1} \oplus Q^{(1)}_{m+1,0}$ на $Q^{(0)}_4 = Q^{(0)}_{2,2} \oplus Q^{(0)}_{3,1} \oplus Q^{(0)}_{4,0}$ с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} (-1)^m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^m \end{pmatrix}$$

и равный нулю на остальных неразложимых слагаемых модуля $Q^{(1)}_{m+1}$, а φ_0 аналогичным образом индуцирован изоморфизмом между $Q^{(1)}_{m-1,1} \oplus Q^{(1)}_{m,0}$ и $Q^{(0)}_3 = Q^{(0)}_{2,1} \oplus Q^{(0)}_{3,0}$, задаваемым матрицей

$$\begin{pmatrix} (-1)^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(б) $Q^{(1)}_{m,0} = P_1$ включается в следующую конфигурацию:

$$P_1 \xrightarrow{e} P_1 \xleftarrow{\pm\gamma} P_0.$$

В этом случае строится коммутативная диаграмма вида (3.6), где $l=1, r=1$, φ_1 – гомоморфизм, отображающий $Q^{(1)}_{m,1}\oplus Q^{(1)}_{m+1,0}$ на $Q^{(1)}_{1,1}\oplus Q^{(1)}_{2,0}$ с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^{m+1} \end{pmatrix}$$

и равный нулю на остальных неразложимых слагаемых модуля $Q^{(1)}_{m+1}$, а φ_0 аналогичным образом индуцирован гомоморфизмом из $Q^{(1)}_{m-1,1}\oplus Q^{(1)}_{m,0}$ в $Q^{(1)}_{0,1}\oplus Q^{(1)}_{1,0}$, задаваемым матрицей

$$\begin{pmatrix} (-1)^{m+1}\alpha a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(в) $Q^{(1)}_{m,0}=P_1$ включается в следующую конфигурацию:

$$P_0 \xrightarrow{\alpha\gamma g} P_1 \xleftarrow{\pm\eta} P_1$$

В этом случае строится коммутативная диаграмма вида (3.6), где $l=3$, $r=1$, φ_1 – гомоморфизм, отображающий $Q^{(1)}_{m-1,2}\oplus Q^{(1)}_{m,1}\oplus Q^{(1)}_{m+1,0}$ на $Q^{(1)}_{2,2}\oplus Q^{(1)}_{3,1}\oplus Q^{(1)}_{4,0}$ с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} (-1)^{m+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{m+1} \end{pmatrix}$$

и равный нулю на остальных неразложимых слагаемых модуля $Q^{(1)}_{m+1}$, а φ_0 аналогичным образом индуцирован гомоморфизмом из $Q^{(1)}_{m-2,2}\oplus Q^{(1)}_{m-1,1}\oplus Q^{(1)}_{m,0}$ в $Q^{(1)}_{1,2}\oplus Q^{(1)}_{2,1}\oplus Q^{(1)}_{3,0}$, задаваемым матрицей

$$\begin{pmatrix} \alpha a & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{m+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, разобраны все случаи расположения неразложимого проективного модуля в каждом из двух бикомплексов. Доказательство предложения 3.3 завершено. □

4. Соотношения

4.1. Серия $SD(2\mathcal{B})_3$. Положим $R=R^{(\mathcal{B}_3)}$.

Предложение 4.1. *Для множества образующих* $\mathcal{X}_{\mathcal{B}_3}$ *алгебры* $\mathcal{Y}(R)$ *(см.* (3.4)*) выполняются соотношения* (1.1).

Доказательство проводится с помощью тех же технических приемов, что и доказательство предложения 3.1 (ср. также [4]), и детали рассуждений мы предоставляем провести читателю.

Пусть $\mathcal{E}^{(\mathcal{B}_3)} = K[\Re^{(\mathcal{B}_3)}]/I$ – градуированная K-алгебра, определенная в параграфе 1, где I – идеал алгебры путей колчана $\Re^{(\mathcal{B}_3)}$, соответствующий соотношениям (1.1). Ввиду предложений 3.2 и 4.1 существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\mathcal{E}^{(\mathcal{B}_3)} \longrightarrow \mathcal{Y}(R)$, переводящий канонические образующие алгебры $\mathcal{E}^{(\mathcal{B}_3)}$ (т.е. соответствующие стрелкам в $\Re^{(\mathcal{B}_3)}$) в соответствующие образующие алгебры $\mathcal{Y}(R)$, введенные в начале раздела 3.1.

Введем краткое обозначение $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(\mathcal{B}_3)}$. Рассмотрим прямое разложение алгебры $\mathcal{E}$ на однородные прямые слагаемые: $\mathcal{E} = \bigoplus_{m\geqslant 0}\mathcal{E}^m$. Через ε_i, $i = 0, 1$, обозначим идемпотенты алгебры $K[\Re^{(\mathcal{B}_3)}]$, соответствующие вершинам колчана $\Re^{(\mathcal{B}_3)}$, и так же обозначим образы этих идемпотентов в $\mathcal{E}$. Теперь теорема 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.2. *Для любых* i, $j \in \{0, 1\}$ *и* $m \geqslant 0$

$$\dim_K(\varepsilon_i\mathcal{E}^m\varepsilon_j) = \dim_K \operatorname{Ext}^m_R(S_j, S_i). \tag{4.1}$$

Доказательство. Поскольку для $m = 0$ соотношение (4.1) очевидно, то далее предполагаем, что $m > 0$.

а) Предположим сначала, что $i = j = 0$. Из соотношений (1.1) следует, что $\varepsilon_0\mathcal{E}\varepsilon_0$ – K-алгебра, порожденная элементами $x = x_1$, $z = x_4y_1$, $t = y_2y_1$, которые, кроме того, удовлетворяют соотношениям

$$xz + zx = c\cdot x^4, \quad xt = tx, \quad zt = tz, \quad z^2 = x^2t. \tag{4.2}$$

Введем обозначения $L_m = \varepsilon_0\mathcal{E}^m\varepsilon_0$, $d_m = \dim L_m$. Из соотношений (4.2) следует, что L_m имеет K-базис вида

$$\mathrm{B}_m = \{x^pz^qt^r \mid p,\ r \geqslant 0,\ q \in \{0, 1\}, p + 3q + 4r = m\}.$$

Элементы этого базиса, для которых $r > 0$, находятся в биективном соответствии со всеми элементами аналогичного базиса пространства L_{m-4}. Кроме того, в B_m имеется два элемента, у которых $r = 0$, а именно, x^m и $x^{m-3}z$. Следовательно,

$d_m = d_{m-4} + 2$ для $m \geqslant 4$. Из следствия 2.2 и замечания 2.3 вытекает, что $\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_0, S_0) = \dim_K \operatorname{Ext}_R^{m-4}(S_0, S_0) + 2$ $(m \geqslant 4)$. Соотношение (4.1) для $m < 4$ проверяется непосредственно, и потому из предыдущего следует, что это соотношение выполняется и для всех $m \geqslant 0$.

б) Случай, когда $i = j = 1$, рассматривается аналогично случаю а).

в) Пусть $i = 1$, $j = 0$. Любой одночлен $w \in \varepsilon_1 \mathcal{E}^m \varepsilon_0$ приводится с помощью соотношений (1.1) к виду $w = x_2 \tilde{w}$ или $w = y_1 \tilde{w}$, где $\tilde{w} \in \varepsilon_0 \mathcal{E} \varepsilon_0$, при этом он не может быть приведен ко второму виду, только если $\tilde{w} = x_1^{m-1}$. Отсюда следует, что $\dim_K(\varepsilon_1 \mathcal{E}^m \varepsilon_0) = \dim_K(\varepsilon_0 \mathcal{E}^{m-2} \varepsilon_0) + 1$. Так как ввиду следствия 2.4 имеем

$$\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_0, S_1) = \dim_K \operatorname{Ext}_R^{m-2}(S_0, S_0) + 1,$$

то с учетом части а) доказательства получаем соотношение (4.1) для рассматриваемого случая.

г) Наконец, случай, когда $i = 0$, $j = 1$, рассматривается аналогично случаю в). □

Доказательство следствия 1.2. Описание Ext-алгебр простых модулей над рассматриваемыми алгебрами, приведенное в формулировке следствия, вытекает из доказательства предложения 4.2.

4.2. Серия $SD(2\mathcal{B})_1$.

Предложение 4.3. *Пусть $R = R^{(\mathcal{B}_1)}$. В алгебре $\mathcal{Y}(R)$ выполнены следующие соотношения (обозначения элементов взяты из п.* 3.2*):*

$$\begin{cases} x_2 x_1 = x_3 x_2 = x_1 x_3 = x_1^3 = 0, \\ x_3 y x_2 = 0,\ x_2 x_3 y = -y x_2 x_3,\ x_1 t = t x_1, \\ y x_4 = x_4 y,\ y^2 x_2 = x_2 t,\ t x_3 = x_3 y^2, \end{cases} \tag{4.3}$$

а также соотношение

$$x_4^2 = \begin{cases} 0, & s > 2 \\ -y, & s = 2. \end{cases} \tag{4.4}$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что морфизмы, представляющие элементы x_1, x_2, x_3, x_4, y, t, задаются следующими коммутативными квадратами:

$$x_1:\ \begin{array}{ccc} Q_1^{(0)} & \xrightarrow{d} & Q_0^{(0)} \\ {\scriptstyle (0,1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma\beta b} \\ Q_0^{(0)} & \xrightarrow{(\gamma\beta\alpha)^k} & P_0 \end{array}, \quad x_2:\ \begin{array}{ccc} Q_1^{(0)} & \xrightarrow{d} & Q_0^{(0)} \\ {\scriptstyle (1,0)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha\gamma g} \\ Q^0 & \xrightarrow{\eta^s} & P_1 \end{array},$$

$$x_3:\ \begin{array}{ccc} Q_1^{(1)} & \xrightarrow{d} & Q_0^{(1)} \\ {\scriptstyle (0,1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta\alpha a} \\ Q_{(0)}^{(1)} & \xrightarrow{(\gamma\beta\alpha)^k} & P_0 \end{array}, \quad x_4:\ \begin{array}{ccc} Q_1^{(1)} & \xrightarrow{d} & Q_0^{(1)} \\ {\scriptstyle (1,0)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -e} \\ Q_0^{(1)} & \xrightarrow{\eta^s} & P_1 \end{array},$$

$$y:\ \begin{array}{ccc} Q_2^{(1)} & \xrightarrow{d} & Q_1^{(1)} \\ {\scriptstyle (0,1,0)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\eta,0)} \\ Q_0^{(1)} & \xrightarrow{\eta^s} & P_1 \end{array}, \quad t:\ \begin{array}{ccc} Q_4^{(0)} & \xrightarrow{d} & Q_3^{(0)} \\ {\scriptstyle (0,0,1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (0,\beta)} \\ Q_0^{(0)} & \xrightarrow{(\gamma\beta\alpha)^k} & P_0 \end{array}.$$

Опишем сдвиги этих морфизмов. Если, например, имеется морфизм $z:\Omega^m S_0\to S_1$, полностью определяемый некоторым его подъемом $\tilde z: Q_m^{(0)}\to Q_0^{(1)}$, то l-ый сдвиг $\Omega^l z:\Omega^{m+l}S_0\to\Omega^l S_1$ полностью определяется некоторым своим подъемом $\tilde z_l: Q_{m+l}^{(0)}\to Q_l^{(1)}$. Такое отображение мы будем описывать матрицей, используя каноническое разложение на неразложимые проективные слагаемые модулей $Q_{m+l}^{(0)}$ и $Q_l^{(1)}$ (с принятым ранее соглашением о порядке слагаемых).

Вот некоторые из этих матриц (а именно, те из них, которые необходимы для проверки указанных соотношений):

$$\Omega x_1:\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \Omega^2x_1:\begin{pmatrix}0&0\\0&\beta\end{pmatrix},\quad \Omega^3x_1:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\gamma g\end{pmatrix},$$

$$\Omega^4x_1:\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \Omega x_2:\begin{pmatrix}1&0\\0&a+cb\alpha\end{pmatrix},$$

$$\Omega^2x_2:\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \Omega^3x_2:\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\alpha a\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \Omega^4x_2:\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\Omega^2 x_3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\alpha + ca\gamma\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega x_3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \beta b & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega^4 x_3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega^3 x_3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega^2 x_4 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta_{s,2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega x_4 : \begin{pmatrix} 0 & -\eta^{s-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega^3 y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega^2 y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega t : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь, используя эти матрицы, легко проверить любое из указанных соотношений. Например, произведение элементов x_2x_3y соответствует композиции $x_2 \circ \Omega x_3 \circ \Omega^2 y$, а произведение yx_2x_3 – композиции $y \circ \Omega^2 x_3 \circ \Omega^3 y$. Перемножая приведеннные выше матрицы, соответствующие данным морфизмам, мы видим, что они отличаются лишь знаком, что доказывает соотношение $x_2x_3y = -yx_2x_3$. Аналогично проверяются остальные соотношения.

Проверим отдельно соотношения (4.4). Элемент x_4^2 задается отображением $x_4 \circ \Omega x_4$, которое, в свою очередь, соответствует отображению $f : Q_2^{(1)} \to Q_0^{(1)}$, задаваемому матрицей

$$(1,0) \begin{pmatrix} 0 & -\eta^{s-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, -\eta^{s-2}, 0).$$

При $s = 2$ эта матрица с точностью до знака совпадает с матрицей $(0,1,0)$, представляющей y; в противном случае $s - 2 > 0$ и мы видим, что образ отображения f содержится в радикале модуля $Q_0^{(1)}$, а потому f индуцирует нулевое отображение $0 : \Omega^2 S_1 \to S_1$. □

Предложение 4.4. *Пусть k, s – натуральные числа, $k > 1$*

$$\overline{\mathcal{E}} = \oplus_{n \geq 0} \overline{\mathcal{E}}_n$$

– градуированная алгебра путей колчана $\Re^{(\mathcal{B}_1)}$ (см. раздел 1.2) над полем K, с соотношениями, аналогичными соотношениям (4.3) и (4.4). Тогда размерности пространств $\overline{\mathcal{E}}_m$ и $\mathcal{Y}(R)_m$ совпадают при любом целом неотрицательном m.

Из предложений 4.3 и 4.4 немедленно вытекает доказательство теоремы 1.3.

Доказательство предложения 4.4. Будем называть одночленом всякий элемент алгебры $\overline{\mathcal{E}}$, представимый в виде произведения элементов X_1, X_2, X_3, X_4, Y, T. Выясним, к какому виду можно привести произвольный одночлен. Заметим, что (при $s > 2$) элементы X_2, X_3, X_4 могут перемножаться (с ненулевым результатом) только в одном (циклическом) порядке: $\dots X_4 X_2 X_3 X_4 \dots$ (в силу соотношений $X_4^2 = 0$, $X_3 X_2 = 0$). Обозначим множество таких произведений через $\mathcal{M}$. Заметим далее, что в записи ненулевого одночлена не могут встречаться одновременно элемент X_1 и какое-то произведение из $\mathcal{M}$ (в силу соотношений $X_2 X_1 = 0$, $X_1 X_3 = 0$ и $X_1 T = T X_1$). Кроме того, всякий одночлен, содержащий произведения из $\mathcal{M}$ (и не содержащий, таким образом, X_1) можно, в силу соотношений $Y^2 X_2 = X_2 T$ и $X_3 Y^2 = T X_3$, представить в виде произведения, содержащего только X_2, X_3, X_4, Y. Всякий же моном M такого вида, в силу соотношений $Y X_4 = X_4 Y$ и $X_2 X_3 Y = -Y X_2 X_3$, можно представить в виде

$$M = \pm X_{(1)} Y^p X_2^a, \tag{4.5}$$

где $X_{(1)}$ – элемент из $\mathcal{M}$, p – неотрицательное целое и $a = 0$ или 1. Таким образом, всякий моном можно представить (с точностью до знака) либо в виде (4.5), либо в виде

$$X_1^p T^q, \tag{4.6}$$

причем $p < 3$ в силу соотношения $X_1^3 = 0$.

Обозначим через ε_i, $i = 0, 1$ идемпотенты алгебры $K(\Re^{(\mathcal{B}_1)})$, соответствующие вершинам колчана $\Re^{(\mathcal{B}_1)}$, и так же обозначим образы этих идемпотентов в $\overline{\mathcal{E}}$. Докажем, что для при любых i, $j \in \{0, 1\}$ и любого натурального m размерность пространства

$\varepsilon_i\overline{\mathcal{E}}\varepsilon_j \cap \overline{\mathcal{E}}_m$ совпадает с $\dim_K \mathrm{Ext}_R^m(S_j, S_i)$. Разберем четыре возможных случая:

1) $i = 0$, $j = 0$. В этом случае имеется, очевидно, 0 одночленов вида (4.6) при $m = 4l + 3$ и 1 одночлен вида (4.6) в остальных случаях. Если же моном из $\varepsilon_i\overline{\mathcal{E}}\varepsilon_j$ имеет вид (4.5), то он имеет вид $(X_3X_4X_2)^lX_3X_4Y^tX_2$, где l, t – неотрицательные целые числа. Количество таких мономов степени m равно, как легко видеть, $[m/6]+1$ при $m \equiv 3, 5 \pmod 6$ и $[m/6]$ в остальных случаях. Складывая количество возможных мономов типа (4.5) и (4.6), мы получаем, пользуясь следствием 2.7, что

$$\dim_K \mathrm{Ext}\,_R^m(S_j, S_i) \geq \dim_K(\varepsilon_i\overline{\mathcal{E}}\varepsilon_j \cap \overline{\mathcal{E}}_m). \tag{4.7}$$

С другой стороны, поскольку в алгебре $\mathcal{Y}(R)$ выполнены все соотношения (4.3) и (4.4), то имеет место и неравенство с противоположным знаком. Отсюда мы получаем требуемое равенство.

2) $i = 1$, $j = 0$. В этом случае, очевидно, имеются только мономы вида (4.5), причем эти мономы имеют вид $(X_2X_3X_4)^lY^tX_2$ или $(X_4X_2X_3)^lX_4Y^tX_2$, где l, t – неотрицательные целые числа. Как легко видеть, число мономов первого типа равно $[m/6] + 1$ при $m \equiv 1, 3, 4, 5 \pmod 6$ и $[m/6]$ при $m \equiv 0, 2 \pmod 6$. Аналогично, число мономов второго типа равно $[m/6] + 1$ при $m \equiv 2, 4, 5 \pmod 6$ и $[m/6]$ при $m \equiv 0, 1, 3 \pmod 6$. Складывая эти величины, мы получаем что общее число возможных мономов указанного вида равно $[(m+2)/3]$ при любом m, т.е., совпадает с величиной $\dim_R \mathrm{Ext}\,_R^m(S_1, S_0)$ из следствия 2.3. Дальнейшие рассуждения те же, что и в предыдущем пункте.

3) $i = 0, j = 1$. В этом случае, очевидно, имеются только мономы вида (4.5) причем эти мономы имеют вид $(X_3X_4X_2)^lX_3Y^t$ или $(X_3X_4X_2)^lX_3X_4Y^t$, где l, t – неотрицательные целые числа. Дальше дословно повторяются рассуждения предыдущего абзаца.

4) $i = 1, j = 1$. Имеются мономы вида $(X_4X_2X_3)^lX_4Y^t$ и $(X_2X_3X_4)^lX_2X_3Y^t$ при неотрицательных l, t общим количеством $(m + 2)/3$ (аналогично предыдущим двум пунктам); мономы вида $(X_4X_2X_3)^lY^t$, $l \geq 0, t > 0$ – в количестве $[m/6] + 1$ при $m \equiv 3, 5 \pmod 6$ и $[m/6]$ при $m \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod 6$; мономы вида $(X_2X_3X_4)^lY^t$, $l \geq 0, t > 0$ – в таком же количестве, что и мономы предыдущего вида; наконец, 1 моном вида $y^{m/2}$ при четном m. Далее рассуждения проводятся аналогично предыдущим случаям. $\square$

Доказательство следствия 1.4. Описание Ext-алгебр простых модулей над рассматриваемыми алгебрами, приведенное в формулировке следствия, вытекает из доказательства предложения 4.4.

Литература

1. K. Erdmann, *Algebras and semidihedral defect groups,* I. — Proc. London Math. Soc. **57**, No. 1 (1988), 109–150.
2. K. Erdmann, *Algebras and semidihedral defect groups,* II. — Proc. London Math. Soc. **60**, No. 1 (1990) 123–165.
3. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.* — Lecture Notes in Math. **1428** Berlin, Heidelberg (1990).
4. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа,* I. — Алгебра и анализ **13**, вып. 4 (2001), 54–85.
5. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Алгебры Йонеды для одного класса диэдральных алгебр.* — Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, Вып. 3, No 15 (1999), 3–10.
6. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа,* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 139–162.
7. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа,* II. — Алгебра и анализ **13**, No. 1 (2001), 3–25.
8. H. Sasaki, *The* mod 2 *cohomology algebras of finite groups with semidihedral Sylow 2-subgroups.* — Commun. Algebra. **22** (1994), 4123–4156.
9. Th. Holm, *Derived equivalence classification of algebras of dihedral, semidihedral, and quaternion type.* — J. Algebra **211**, No. 1 (1999), 159–205.
10. C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra.* Cambridge Univ. Press, Cambridge (1994).
11. С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, *Методы гомологической алгебры.* Т. I. Введение в теорию когомологий и производные категории, Наука, М. (1988).

Antipov M. A., Generalov A. I. Cohomology of algebras of semidihedral type, II.

The minimal projective resolutions of simple modules over algebras belonging to two families of algebras of semidihedral type, – namely, to the families $SD(2\mathcal{B})_3$ and $SD(2\mathcal{B})_1$, – are constructed. Using these resolutions the description of Yoneda algebras of algebras under consideration are obtained in terms of quivers with relations.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 21 октября 2002 г.