Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 288, 2002 г.

Т. А. Суслина

АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ СПЕКТРА ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА МАКСВЕЛЛА В СЛОЕ

Посвящается Ольге Александровне Ладыженской

§0. Введение

1. Вопрос об абсолютной непрерывности спектра периодического оператора Максвелла в случае всего пространства $\mathbb{R}^3$ исследовался в работах [8, 9]. Пусть $\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ – вещественные функции в $\mathbb{R}^3$, *периодические* относительно некоторой решетки $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^3$, причем

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon_0 \le \varepsilon(\mathbf{x}) \le \varepsilon_1 < \infty, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ 0 < \mu_0 \le \mu(\mathbf{x}) \le \mu_1 < \infty, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Через $L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3; \varepsilon)$ (соотв., $L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3; \mu)$) обозначим пространство квадратично суммируемых вектор-функций с весом $\varepsilon(\mathbf{x})$ (соотв., $\mu(\mathbf{x})$). *Самосопряженный оператор Максвелла* M_0 *действует в пространстве*

$$\mathcal{H}_0 := \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3; \varepsilon) \oplus L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3; \mu) : \ \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div} \mu \mathbf{v} = 0\} \tag{0.2}$$

и задается формулой

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & i\varepsilon^{-1}\mathrm{rot} \\ -i\mu^{-1}\mathrm{rot} & 0 \end{pmatrix} \tag{0.3}$$

на области определения

$$\operatorname{Dom} M_0 = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{H}_0 : \ \mathrm{rot}\, \mathbf{u}, \ \mathrm{rot}\, \mathbf{v} \in L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)\} \tag{0.4}$$

(ср., например, [2]). Вектора $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ имеют смысл соответственно электрической и магнитной составляющей поля. Коэффициенты ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00798).

Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Максвелла M_0 при гладких коэффициентах $\varepsilon, \mu \in C^\infty$ впервые установлена в работе А. Морама [8]. В дальнейшем, в обзоре [9] результат из [8] был распространен на случай $\varepsilon, \mu \in C^2$; при этом схема доказательства была существенно упрощена.

Поясним план рассуждений из [9]. Как обычно, оператор M_0 расширяется до *эллиптического* оператора $\mathcal{M}_0$, действующего на восьмимерные вектор-функции. Отсутствие сингулярного непрерывного спектра у оператора $\mathcal{M}_0$ следует из достаточно общих соображений (см. [5], [6]). Остается проверить отсутствие собственных значений. Здесь ключевую роль играют тождества, найденные в работе [8]. Эти тождества по существу представляют собой удачно выделенные следствия классических формул векторного анализа. В [9] показано, что использование этих тождеств прямо сводит дело к вопросу об отсутствии собственных значений у некоторого *матричного* оператора Шредингера $-\Delta + \mathcal{W}(\mathbf{x})$, где $\mathcal{W}(\mathbf{x})$ – периодическая (не эрмитова!) матрица, выражающаяся через ε и μ. Для матричного периодического оператора Шредингера отсутствие собственных значений есть непосредственное следствие оценок Томаса (см. [6], где также воспроизведено рассуждение из [9] о сведении M_0-задачи к оператору Шредингера).

2. В настоящей работе устанавливается абсолютная непрерывность спектра оператора Максвелла M в плоско-параллельном слое $\Pi = \mathbb{R}^2 \times (0, T)$ при условии, что $\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ периодичны вдоль слоя относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Предполагается, что выполнено условие вида (0.1) и $\varepsilon, \mu \in W^2_{3/2} \cap W^1_p$, $p > 3$, в любой ограниченной части слоя. На границе слоя ставятся условия идеальной проводимости.

Метод доказательства для оператора в слое – по существу тот же, что и в случае всего пространства $\mathbb{R}^3$. Ключевую роль играют тождества, установленные в леммах 3.3, 3.4. Они являются аналогами тождеств из [8], но теперь включают граничные члены и выводятся с учетом граничных условий. При этом, в отличие от [8], [9], сами тождества записаны в терминах форм (а не операторов), что технически проще, а также позволяет снизить условия гладкости на ε и μ. Для слоя дело снова сводится к вопросу об отсутствии собственных значений у матричного периодического оператора Шредингера $-\Delta + \mathcal{W}(\mathbf{x})$ в области

П. При этом некоторые компоненты вектор-функций, на которые действует оператор, подчинены краевому условию Дирихле, а остальные компоненты – условиям третьего типа с периодическими коэффициентами, зависящими от ε и μ. Отсутствие собственных значений для матричного оператора Шредингера в слое при граничных условиях указанного типа установлено (в несколько более общем случае) в недавней работе [10]. Ссылка на этот результат завершает доказательство.

Отметим, что и в случае всего пространства можно использовать запись тождеств Морама в терминах форм. Это позволяет, воспроизводя рассуждения из [9], ослабить условия гладкости на ε и μ. Этот результат сформулирован в теореме 1.2. Доказательство последней опущено, поскольку не требует никаких новых соображений.

3. Подчеркнем, что в работах [8], [9] и в настоящей работе рассматривается “изотропный” случай, в котором $\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ – скалярные периодические функции. В “анизотропном” случае, когда $\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ – периодические матрицы, вопрос об абсолютной непрерывности спектра оператора Максвелла остается открытым.

4. В §1 приведена постановка задачи и сформулированы основные результаты. В §2 рассмотрен расширенный оператор Максвелла и вопрос сведен к опорной теореме 2.2 об отсутствии собственных значений. В §3 устанавливаются основные тождества (леммы 3.3, 3.4). На их основе в §4 доказана теорема 2.2. В Добавлении (§5) обсуждается существенный для нас вопрос о совпадении (при наших предположениях) “слабого” и “сильного” определений оператора Максвелла M.

5. Благодарности. Автор признателен М. Ш. Бирману и Н. Д. Филонову за полезные обсуждения и особенно за консультации при составлении Добавления.

§1. Определение оператора. Формулировка основного результата

1. Обозначения. Фиксируем ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в $\mathbb{R}^3$. Мы используем обозначение $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$. Для $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^3 u_j\mathbf{e}_j$, $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^3 v_j\mathbf{e}_j \in \mathbb{C}^3$ положим $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} := \sum_{j=1}^3 u_j v_j$, $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle := \sum_{j=1}^3 u_j\overline{v_j}$, $|\mathbf{u}| := \langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle^{1/2}$; через $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_3$ обозначается векторное произведение. Положим $B_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \ |\mathbf{x}| < R\}$. Через $\Pi = \Pi_T$ обозначается слой в $\mathbb{R}^3$:

$$\Pi := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3 < T\}, \quad T > 0. \tag{1.1}$$

Используются обозначения $\nabla = \mathrm{grad} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$. Для функции $f(\mathbf{x})$ в слое Π через $\partial_n f$ обозначается производная по внешней нормали к $\partial\Pi$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \partial_n f(\mathbf{x}) &= \partial_3 f(\mathbf{x}), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad x_3 = T, \\ \partial_n f(\mathbf{x}) &= -\partial_3 f(\mathbf{x}), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad x_3 = 0. \end{aligned}$$

Для вектор-функции $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ обозначения $\mathrm{div}\, \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$, $\mathrm{rot}\, \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$ имеют стандартный смысл.

Пространство $\mathbb{C}^k$-значных вектор-функций в Π суммируемых со степенью p обозначается через $L_p(\Pi, \mathbb{C}^k)$. Пространства Соболева порядка l с показателем суммируемости p обозначаются через $W_p^l(\Pi)$; при $p = 2$ – через $H^l(\Pi)$. Подпространство в $H^1(\Pi)$, состоящее из функций, равных нулю на границе $\partial\Pi$ (в смысле теоремы о следах), обозначается через $\overset{\circ}{H}{}^1(\Pi)$. Для пространств Соболева вектор-функций используются обозначения $W_p^l(\Pi, \mathbb{C}^k)$, $H^l(\Pi, \mathbb{C}^k)$.

2. Пусть ортогональные $\mathbf{e}_3$ векторы $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathbb{R}^3$ образуют базис двумерной решетки Γ. Пусть $\varepsilon(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$ – вещественные функции в Π, такие что

$$\varepsilon(\mathbf{x} + \mathbf{t}_j) = \varepsilon(\mathbf{x}), \quad \mu(\mathbf{x} + \mathbf{t}_j) = \mu(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Pi, \quad j = 1, 2, \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon_0 \le \varepsilon(\mathbf{x}) \le \varepsilon_1 < \infty, \quad \mathbf{x} \in \Pi, \\ 0 < \mu_0 \le \mu(\mathbf{x}) \le \mu_1 < \infty, \quad \mathbf{x} \in \Pi. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Предположим, что при некотором $p > 3$ выполнено условие

$$\varepsilon, \mu \in W_{3/2}^2(\Pi \cap B_R) \cap W_p^1(\Pi \cap B_R), \quad p > 3, \quad \forall R < \infty. \tag{1.4}$$

Через $L_2(\Pi, \mathbb{C}^3; \varepsilon)$ обозначим гильбертово пространство квадратично суммируемых вектор-функций в Π со значениями в $\mathbb{C}^3$; метрика в $L_2(\Pi, \mathbb{C}^3; \varepsilon)$ задается формой

$$\|\mathbf{f}\|_\varepsilon^2 := \int\limits_\Pi \varepsilon(\mathbf{x}) |\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Аналогично определяется пространство $L_2(\Pi, \mathbb{C}^3; \mu)$. Введем гильбертово пространство

$$\mathcal{H} := \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3; \varepsilon) \oplus L_2(\Pi, \mathbb{C}^3; \mu) : \ \operatorname{div} \varepsilon\mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div} \mu\mathbf{v} = 0\}. \tag{1.5}$$

Здесь условия $\operatorname{div} \varepsilon\mathbf{u} = 0$, $\operatorname{div} \mu\mathbf{v} = 0$ понимаются в смысле теории распределений. В пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим оператор Максвелла, заданный выражением

$$M = \begin{pmatrix} 0 & i\varepsilon^{-1}\mathrm{rot} \\ -i\mu^{-1}\mathrm{rot} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

на области определения

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} M = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{H} : \ \operatorname{rot} \mathbf{u}, \ \operatorname{rot} \mathbf{v} \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3), \\ u_1|_{\partial\Pi} = u_2|_{\partial\Pi} = v_3|_{\partial\Pi} = 0\}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Граничные условия в (1.7) понимаются в обобщенном смысле (см. [2]) и соответствуют идеально проводящей границе. Оператор M самосопряжен на области (1.7) (см. [2]).

При условиях (1.2)–(1.4) функции $\varepsilon(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$ *являются мультипликаторами в* $H^1(\Pi)$*, а область определения* (1.7) *совпадает с*

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} M =& \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Pi, \mathbb{C}^3), \\ & \operatorname{div} \varepsilon\mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div} \mu\mathbf{v} = 0, \quad u_1|_{\partial\Pi} = u_2|_{\partial\Pi} = v_3|_{\partial\Pi} = 0\}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Это существенное для всего дальнейшего обстоятельство обсуждается в Добавлении (§5). База для результатов такого типа содержится в работах [2], [4], но прямая ссылка затруднена, и мы приводим необходимые пояснения.

3. Основной результат работы представляет следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть* $\varepsilon(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$ *– вещественные функции в слое* Π*, удовлетворяющие условиям* (1.2)–(1.4)*. Пусть* M *– оператор в пространстве* (1.5)*, определенный соотношениями* (1.6), (1.7)*. Тогда спектр оператора* M *абсолютно непрерывен.*

Сформулируем также аналогичную теорему для всего пространства, отличающуюся от результатов из [8], [9] снижением условий гладкости на ε, μ.

Теорема 1.2. *Пусть* $\varepsilon(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$ – *вещественные функции в* $\mathbb{R}^3$, *периодические относительно некоторой решетки* $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^3$. *Пусть выполнено условие* (0.1) *и*

$$\varepsilon, \mu \in W^2_{3/2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \cap W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3), \quad p > 3. \tag{1.9}$$

Пусть M_0 – *оператор в пространстве* (0.2), *определенный соотношениями* (0.3), (0.4). *Тогда спектр оператора* M_0 *абсолютно непрерывен.*

§2. Расширение системы Максвелла

1. Как обычно (ср. [2], [8], [9]), мы используем расширение оператора Максвелла. Введем гильбертово пространство

$$\mathfrak{H} := L_2(\Pi, \mathbb{C}^3; \varepsilon) \oplus L_2(\Pi) \oplus L_2(\Pi, \mathbb{C}^3; \mu) \oplus L_2(\Pi). \tag{2.1}$$

Расширенный оператор $\mathcal{M}$ действует в пространстве $\mathfrak{H}$ и определяется соотношениями

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \alpha \\ \mathbf{v} \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\nabla\beta + i\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \\ -i\mathrm{div}\,\mu\mathbf{v} \\ -i\nabla\alpha - i\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{u} \\ -i\mathrm{div}\,\varepsilon\mathbf{u} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} \mathrm{Dom}\,\mathcal{M} = \{\mathrm{col}\,(\mathbf{u}, \alpha, \mathbf{v}, \beta) \in \mathfrak{H} : \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{u},\ \mathrm{rot}\,\mathbf{v} \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3), \quad \mathrm{div}\,\varepsilon\mathbf{u},\ \mathrm{div}\,\mu\mathbf{v} \in L_2(\Pi), \\ u_1|_{\partial\Pi} = u_2|_{\partial\Pi} = v_3|_{\partial\Pi} = 0, \quad \alpha, \beta \in H^1(\Pi), \quad \beta|_{\partial\Pi} = 0\}. \end{gathered} \tag{2.3}$$

При условиях (1.2)–(1.4) область определения (2.3) совпадает (см. §5) с

$$\begin{gathered} \mathrm{Dom}\,\mathcal{M} = \{\mathrm{col}\,(\mathbf{u}, \alpha, \mathbf{v}, \beta) \in \mathfrak{H} : \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Pi, \mathbb{C}^3), \\ u_1|_{\partial\Pi} = u_2|_{\partial\Pi} = v_3|_{\partial\Pi} = 0, \quad \alpha, \beta \in H^1(\Pi), \quad \beta|_{\partial\Pi} = 0\}. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Оператор $\mathcal{M}$ самосопряжен на области (2.3). Подпространство

$$\widehat{\mathcal{H}} = \{\mathrm{col}\,(\mathbf{u}, \alpha, \mathbf{v}, \beta) \in \mathfrak{H} : \quad \mathrm{div}\,\varepsilon\mathbf{u} = 0,\ \mathrm{div}\,\mu\mathbf{v} = 0,\ \alpha = 0,\ \beta = 0\}$$

является инвариантным для оператора $\mathcal{M}$. Часть $\mathcal{M}$, действующая в $\widehat{\mathcal{H}}$, совпадает с оператором M. Поэтому теорема 1.1 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть* $\varepsilon(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$ – *вещественные функции в слое* Π, *удовлетворяющие условиям* (1.2)–(1.4). *Пусть* $\mathcal{M}$ – *оператор в пространстве* (2.1), *определенный соотношениями* (2.2), (2.3). *Тогда спектр оператора* $\mathcal{M}$ *абсолютно непрерывен.*

2. Как уже упоминалось, отсутствие сингулярного непрерывного спектра можно считать следствием общих соображений (см. [5], [6]). Поэтому достаточно доказать следующее утверждение.

Теорема 2.2. *В условиях теоремы* 2.1 *у оператора* $\mathcal{M}$ *нет собственных значений.*

Доказательство теоремы 2.2 приведено в §4.

§3. Вспомогательные утверждения

1. Хорошо известны (и элементарно проверяются) следующие утверждения, которые нам, однако, нужны при точном указании функциональных классов.

Предложение 3.1. *Пусть* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H^1(\Pi, \mathbb{C}^3)$, *причем либо* $a_j|_{\partial\Pi} = b_j|_{\partial\Pi} = 0$, $j = 1, 2$, *либо* $a_3|_{\partial\Pi} = b_3|_{\partial\Pi} = 0$. *Тогда справедливо тождество*

$$\int\limits_{\Pi} \langle \operatorname{rot} \mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b} \rangle \, d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{3} \int\limits_{\Pi} \langle \partial_j \mathbf{a}, \partial_j \mathbf{b} \rangle \, d\mathbf{x} - \int\limits_{\Pi} \operatorname{div} \mathbf{a} \, \overline{\operatorname{div} \mathbf{b}} \, d\mathbf{x}. \qquad (3.1)$$

Предложение 3.2. *Пусть* $\mathbf{a} \in W^1_{6/5}(\Pi, \mathbb{C}^3), \mathbf{b} \in H^1(\Pi, \mathbb{C}^3)$. *Тогда справедливо тождество*

$$\int\limits_{\Pi} \langle \mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b} \rangle \, d\mathbf{x} = \int\limits_{\Pi} \langle \operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \, d\mathbf{x} + \int\limits_{\partial\Pi} n_3 (a_2 \overline{b_1} - a_1 \overline{b_2}) \, dx_1 dx_2, \qquad (3.2)$$

где $n_3 = 1$ *при* $x_3 = T$, $n_3 = -1$ *при* $x_3 = 0$. *При дополнительном предположении, что* $a_j|_{\partial\Pi} = 0$, $j = 1, 2$, *либо* $b_j|_{\partial\Pi} = 0$, $j = 1, 2$, *справедливо тождество*

$$\int\limits_{\Pi} \langle \mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b} \rangle \, d\mathbf{x} = \int\limits_{\Pi} \langle \operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \, d\mathbf{x}. \qquad (3.3)$$

Далее, обсудим стандартную формулу

$$\operatorname{rot} (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + (\nabla \varphi) \times \mathbf{a}. \qquad (3.4)$$

Если здесь $\mathbf{a} \in H^1(\Pi, \mathbb{C}^3)$, а $\varphi(\mathbf{x})$ – Г-периодическая ограниченная функция в Π такая, что $\varphi \in W_3^1(\Pi \cap B_R)$, $\forall R < \infty$, то оба члена в правой части (3.4) заведомо принадлежат $L_2(\Pi, \mathbb{C}^3)$.

Аналогично, пусть в другой стандартной формуле

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} \tag{3.5}$$

$\mathbf{b} \in H^1(\Pi, \mathbb{C}^3)$ и $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ – Г-периодическая функция в Π такая, что $\mathbf{a} \in W_{3/2}^1(\Pi \cap B_R, \mathbb{C}^3)$, $\forall R < \infty$. Тогда каждый член справа в (3.5) принадлежит классу $L_{6/5}(\Pi, \mathbb{C}^3)$.

2. Всюду ниже предполагается, что ε и μ удовлетворяют условиям теоремы 1.1.

Лемма 3.3. *Пусть* $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in H^1(\Pi, \mathbb{C}^3)$, *причем* $\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{u} = 0$, $u_j|_{\partial\Pi} = w_j|_{\partial\Pi} = 0$, $j = 1, 2$. *Тогда справедливо тождество*

$$\begin{aligned}
&\int_{\Pi} \mu^{-1} \langle \operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{w} \rangle \, d\mathbf{x} \\
&= \sum_{j=1}^{3} \int_{\Pi} \langle \partial_j(\varepsilon^{1/2}\mathbf{u}), \partial_j(\varepsilon^{-1/2}\mu^{-1}\mathbf{w}) \rangle \, d\mathbf{x} \\
&- \int_{\Pi} \langle \operatorname{rot} \mathbf{u}, \varepsilon \left(\nabla(\varepsilon\mu)^{-1}\right) \times \mathbf{w} \rangle \, d\mathbf{x} + \int_{\Pi} \langle V(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \, d\mathbf{x} \\
&+ \int_{\partial\Pi} (2\varepsilon\mu)^{-1} (\partial_n \varepsilon) u_3 \overline{w_3} \, dx_1 dx_2,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где $V(\mathbf{x})$ – (3×3)-*матрица с элементами*

$$\begin{aligned}
V_{jk}(\mathbf{x}) = &\left((2\varepsilon\mu)^{-1}\Delta\varepsilon - (4\varepsilon^2\mu)^{-1}|\nabla\varepsilon|^2\right)\delta_{jk} \\
&+(\varepsilon^2\mu)^{-1}(\partial_j\varepsilon)(\partial_k\varepsilon) - (\varepsilon\mu)^{-1}(\partial_j\partial_k\varepsilon).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Поясним, что из условий на ε и μ вытекает, что все члены в (3.6) являются полуторалинейными непрерывными функционалами над $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in H^1(\Pi, \mathbb{C}^3)$. Для первого члена в правой части (3.6) это следует из того, что $\varepsilon^{1/2}$ и $\varepsilon^{-1/2}\mu^{-1}$ при условиях (1.2)–(1.4) являются мультипликаторами в $H^1(\Pi, \mathbb{C}^3)$. Для второго это вытекает из периодичности ε и μ и из соотношений $\mathbf{w} \in H^1(\Pi, \mathbb{C}^3) \subset L_6(\Pi, \mathbb{C}^3)$, $\varepsilon\left(\nabla(\varepsilon\mu)^{-1}\right) \in L_p(\Pi \cap B_R, \mathbb{C}^3)$, $p > 3$, $\forall R < \infty$. Далее, $V(\mathbf{x})$ – Г-периодическая матрица такая, что

$V \in L_{3/2}(\Pi \cap B_R)$, $\forall R < \infty$. Поэтому третий член в правой части (3.6) – также непрерывный полуторалинейный функционал над $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in H^1(\Pi, \mathbb{C}^3)$. Наконец, для четвертого члена в правой части (3.6), требуемое следует из теоремы о следах, в силу которой $u_3|_{\partial\Pi}, w_3|_{\partial\Pi} \in L_4(\partial\Pi)$, из включения $(2\varepsilon\mu)^{-1}(\partial_n \varepsilon) \in L_{2,\mathrm{loc}}(\partial\Pi)$, и из периодичности ε и μ.

Доказательство. Применяя дважды формулу (3.4), получаем

$$\int_\Pi \mu^{-1}\langle \mathrm{rot}\,\mathbf{u}, \mathrm{rot}\,\mathbf{w}\rangle\, d\mathbf{x}$$
$$= \int_\Pi \mu^{-1}\langle \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\varepsilon\mathbf{u} + (\nabla\varepsilon^{-1}) \times \varepsilon\mathbf{u}, \mathrm{rot}\,\mathbf{w}\rangle\, d\mathbf{x}$$
$$= \int_\Pi \langle \mathrm{rot}\,\varepsilon\mathbf{u}, \mathrm{rot}\,\left((\varepsilon\mu)^{-1}\mathbf{w}\right) - (\nabla(\varepsilon\mu)^{-1}) \times \mathbf{w}\rangle\, d\mathbf{x}$$
$$+ \int_\Pi \varepsilon\mu^{-1}\langle (\nabla\varepsilon^{-1}) \times \mathbf{u}, \mathrm{rot}\,\mathbf{w}\rangle\, d\mathbf{x}.$$

Отсюда, в силу предложения 3.1, условия $\mathrm{div}\,\varepsilon\mathbf{u} = 0$, граничных условий на $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$, а также соотношения (3.3), имеем

$$\int_\Pi \mu^{-1}\langle \mathrm{rot}\,\mathbf{u}, \mathrm{rot}\,\mathbf{w}\rangle\, d\mathbf{x}$$
$$= \sum_{j=1}^{3} \int_\Pi \langle \partial_j(\varepsilon\mathbf{u}), \partial_j\left((\varepsilon\mu)^{-1}\mathbf{w}\right)\rangle\, d\mathbf{x}$$
$$- \int_\Pi \langle \mathrm{rot}\,\varepsilon\mathbf{u}, (\nabla(\varepsilon\mu)^{-1}) \times \mathbf{w}\rangle\, d\mathbf{x}$$
$$+ \int_\Pi \langle \mathrm{rot}\,\left(\varepsilon\mu^{-1}(\nabla\varepsilon^{-1}) \times \mathbf{u}\right), \mathbf{w}\rangle\, d\mathbf{x} =: J_1 + J_2 + J_3. \qquad (3.8)$$

Дифференцируя произведения

$$\varepsilon\mathbf{u} = \varepsilon^{1/2}(\varepsilon^{1/2}\mathbf{u}), \quad (\varepsilon\mu)^{-1}\mathbf{w} = \varepsilon^{-1/2}(\varepsilon^{-1/2}\mu^{-1}\mathbf{w})$$

и интегрируя по частям, с учетом граничных условий $u_j|_{\partial\Pi} = 0$,

$j = 1, 2$, легко преобразовать член J_1 к виду

$$J_1 := \sum_{j=1}^{3} \int_{\Pi} \langle \partial_j(\varepsilon \mathbf{u}), \partial_j \left((\varepsilon\mu)^{-1}\mathbf{w}\right)\rangle \, d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \int_{\Pi} \langle \partial_j(\varepsilon^{1/2}\mathbf{u}), \partial_j(\varepsilon^{-1/2}\mu^{-1}\mathbf{w})\rangle \, d\mathbf{x} - \sum_{j=1}^{3} \int_{\Pi} (\varepsilon\mu)^{-1}(\partial_j\varepsilon)\langle \partial_j\mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle \, d\mathbf{x} -$$

$$\int_{\Pi} \left(\varepsilon^{-1/2}\mu^{-1}(\Delta\varepsilon^{1/2}) + (2\varepsilon^2\mu)^{-1}|\nabla\varepsilon|^2\right) \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle \, d\mathbf{x}$$

$$+ \int_{\partial\Pi} (2\varepsilon\mu)^{-1}(\partial_n\varepsilon) u_3 \overline{w_3} \, dx_1 dx_2. \tag{3.9}$$

Применяя формулу (3.5) и условие $\operatorname{div} \varepsilon\mathbf{u} = 0$, получаем

$$J_3 := \int_{\Pi} \langle \mathrm{rot}\, \left(\mu^{-1}(\nabla\varepsilon^{-1}) \times (\varepsilon\mathbf{u})\right), \mathbf{w}\rangle \, d\mathbf{x} =$$

$$- \int_{\Pi} \varepsilon \,\mathrm{div}\, \left(\mu^{-1}(\nabla\varepsilon^{-1})\right) \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle \, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{3} \int_{\Pi} (\varepsilon\mu)^{-1}(\partial_j\varepsilon)\langle \partial_j\mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle \, d\mathbf{x} +$$

$$\int_{\Pi} (\varepsilon^2\mu)^{-1}|\nabla\varepsilon|^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle \, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{3} \int_{\Pi} \varepsilon u_j \langle \partial_j \left(\mu^{-1}(\nabla\varepsilon^{-1})\right), \mathbf{w}\rangle \, d\mathbf{x}. \tag{3.10}$$

Используя формулу (3.4), преобразуем член J_2 к виду

$$J_2 := - \int_{\Pi} \langle \mathrm{rot}\, \varepsilon\mathbf{u}, (\nabla(\varepsilon\mu)^{-1}) \times \mathbf{w}\rangle \, d\mathbf{x} =$$

$$- \int_{\Pi} \langle \mathrm{rot}\, \mathbf{u}, \varepsilon(\nabla(\varepsilon\mu)^{-1}) \times \mathbf{w}\rangle \, d\mathbf{x} - \int_{\Pi} \langle (\nabla\varepsilon) \times \mathbf{u}, (\nabla(\varepsilon\mu)^{-1}) \times \mathbf{w}\rangle \, d\mathbf{x}. \tag{3.11}$$

Теперь из (3.8)–(3.11) вытекает соотношение (3.6), где

$$\langle V(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle$$

$$= \left(-\varepsilon^{-1/2}\mu^{-1}(\Delta\varepsilon^{1/2}) + (2\varepsilon^2\mu)^{-1}|\nabla\varepsilon|^2 - \varepsilon \,\mathrm{div}\, \left(\mu^{-1}(\nabla\varepsilon^{-1})\right)\right) \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle$$

$$+ \sum_{j=1}^{3} \varepsilon u_j \langle \partial_j \left(\mu^{-1}(\nabla\varepsilon^{-1})\right), \mathbf{w}\rangle - \langle (\nabla\varepsilon) \times \mathbf{u}, (\nabla(\varepsilon\mu)^{-1}) \times \mathbf{w}\rangle.$$

Легко видеть, что матрица $V(\mathbf{x})$ задается формулами (3.7). $\bullet$

Лемма 3.4. *Пусть* $\mathbf{v}, \mathbf{f} \in H^1(\Pi, \mathbb{C}^3)$, *причем* $\operatorname{div} \mu \mathbf{v} = 0$, $v_3|_{\partial \Pi} = f_3|_{\partial \Pi} = 0$. *Тогда справедливо тождество*

$$\int\limits_{\Pi} \varepsilon^{-1} \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{f} \rangle \, d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{3} \int\limits_{\Pi} \langle \partial_j (\mu^{1/2} \mathbf{v}), \partial_j (\varepsilon^{-1} \mu^{-1/2} \mathbf{f}) \rangle \, d\mathbf{x} - \int\limits_{\Pi} \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \mu \left(\nabla (\varepsilon \mu)^{-1} \right) \times \mathbf{f} \rangle \, d\mathbf{x} + \int\limits_{\Pi} \langle \widetilde{V}(\mathbf{x}) \mathbf{v}, \mathbf{f} \rangle \, d\mathbf{x} - \int\limits_{\partial \Pi} (2 \varepsilon \mu)^{-1} (\partial_n \mu) (v_1 \overline{f_1} + v_2 \overline{f_2}) \, dx_1 dx_2, \tag{3.12}$$

где $\widetilde{V}(\mathbf{x})$ – (3×3)*-матрица с элементами*

$$\widetilde{V}_{jk}(\mathbf{x}) = \left((2\varepsilon\mu)^{-1} \Delta \mu - (4 \varepsilon \mu^2)^{-1} |\nabla \mu|^2 \right) \delta_{jk} + (\varepsilon \mu^2)^{-1} (\partial_j \mu)(\partial_k \mu) - (\varepsilon \mu)^{-1} (\partial_j \partial_k \mu). \tag{3.13}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.3. Применяя дважды формулу (3.4), получаем

$$\int\limits_{\Pi} \varepsilon^{-1} \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{f} \rangle \, d\mathbf{x} = \int\limits_{\Pi} \langle \operatorname{rot} \mu \mathbf{v}, \operatorname{rot} \left((\varepsilon \mu)^{-1} \mathbf{f} \right) - \left(\nabla (\varepsilon \mu)^{-1} \right) \times \mathbf{f} \rangle \, d\mathbf{x} + \int\limits_{\Pi} \varepsilon^{-1} \mu \langle (\nabla \mu^{-1}) \times \mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{f} \rangle \, d\mathbf{x}.$$

Отсюда, в силу предложения 3.1, условия $\operatorname{div} \mu \mathbf{v} = 0$, граничных условий на $\mathbf{v}$, $\mathbf{f}$, а также соотношения (3.2), имеем

$$\int\limits_{\Pi} \varepsilon^{-1} \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{f} \rangle \, d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{3} \int\limits_{\Pi} \langle \partial_j (\mu \mathbf{v}), \partial_j \left((\varepsilon \mu)^{-1} \mathbf{f} \right) \rangle \, d\mathbf{x}$$

$$-\int_\Pi \langle \operatorname{rot} \mu\mathbf{v}, (\nabla(\varepsilon\mu)^{-1}) \times \mathbf{f}\rangle \, d\mathbf{x} + \int_\Pi \langle \operatorname{rot} \left(\varepsilon^{-1}\mu(\nabla\mu^{-1}) \times \mathbf{v}\right), \mathbf{f}\rangle \, d\mathbf{x}$$

$$-\int_{\partial\Pi} n_3\varepsilon^{-1}\mu \left(\left((\nabla\mu^{-1}) \times \mathbf{v}\right)_1 \overline{f_2} - \left((\nabla\mu^{-1}) \times \mathbf{v}\right)_2 \overline{f_1}\right) \, dx_1 dx_2$$

$$=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \qquad (3.14)$$

Дифференцируя произведения

$$\mu\mathbf{v} = \mu^{1/2}(\mu^{1/2}\mathbf{v}), \quad (\varepsilon\mu)^{-1}\mathbf{f} = \mu^{-1/2}(\varepsilon^{-1}\mu^{-1/2}\mathbf{f})$$

и интегрируя по частям, с учетом граничного условия $v_3|_{\partial\Pi} = 0$, легко преобразовать член I_1 к виду

$$I_1 := \sum_{j=1}^3 \int_\Pi \langle \partial_j(\mu\mathbf{v}), \partial_j \left((\varepsilon\mu)^{-1}\mathbf{f}\right)\rangle \, d\mathbf{x} =$$

$$\sum_{j=1}^3 \int_\Pi \langle \partial_j(\mu^{1/2}\mathbf{v}), \partial_j(\varepsilon^{-1}\mu^{-1/2}\mathbf{f})\rangle \, d\mathbf{x} - \sum_{j=1}^3 \int_\Pi (\varepsilon\mu)^{-1}(\partial_j\mu)\langle \partial_j\mathbf{v}, \mathbf{f}\rangle \, d\mathbf{x} -$$

$$\int_\Pi \left(\varepsilon^{-1}\mu^{-1/2}(\Delta\mu^{1/2}) + (2\varepsilon\mu^2)^{-1}|\nabla\mu|^2\right) \langle \mathbf{v}, \mathbf{f}\rangle \, d\mathbf{x} +$$

$$\int_{\partial\Pi} (2\varepsilon\mu)^{-1}(\partial_n\mu)(v_1\overline{f_1} + v_2\overline{f_2}) \, dx_1 dx_2. \qquad (3.15)$$

Применяя формулу (3.5) и условие $\operatorname{div} \mu\mathbf{v} = 0$, получаем

$$I_3 := \int_\Pi \langle \operatorname{rot} \left(\varepsilon^{-1}(\nabla\mu^{-1}) \times (\mu\mathbf{v})\right), \mathbf{f}\rangle \, d\mathbf{x} =$$

$$-\int_\Pi \mu \operatorname{div} \left(\varepsilon^{-1}(\nabla\mu^{-1})\right) \langle \mathbf{v}, \mathbf{f}\rangle \, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^3 \int_\Pi (\varepsilon\mu)^{-1}(\partial_j\mu)\langle \partial_j\mathbf{v}, \mathbf{f}\rangle \, d\mathbf{x} +$$

$$\int_\Pi (\varepsilon\mu^2)^{-1}|\nabla\mu|^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{f}\rangle \, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^3 \int_\Pi \mu v_j \langle \partial_j \left(\varepsilon^{-1}(\nabla\mu^{-1})\right), \mathbf{f}\rangle \, d\mathbf{x}. \qquad (3.16)$$

Используя формулу (3.4), имеем

$$I_2 := -\int\limits_{\Pi} \langle \operatorname{rot} \mu \mathbf{v}, (\nabla(\varepsilon\mu)^{-1}) \times \mathbf{f} \rangle \, d\mathbf{x} =$$

$$-\int\limits_{\Pi} \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \mu(\nabla(\varepsilon\mu)^{-1}) \times \mathbf{f} \rangle \, d\mathbf{x} - \int\limits_{\Pi} \langle (\nabla\mu) \times \mathbf{v}, (\nabla(\varepsilon\mu)^{-1}) \times \mathbf{f} \rangle \, d\mathbf{x}. \tag{3.17}$$

С учетом граничного условия $v_3|_{\partial\Pi} = 0$, член I_4 преобразуется к виду

$$I_4 := -\int\limits_{\partial\Pi} n_3 \varepsilon^{-1} \mu \left(\left((\nabla\mu^{-1}) \times \mathbf{v} \right)_1 \overline{f_2} - \left((\nabla\mu^{-1}) \times \mathbf{v} \right)_2 \overline{f_1} \right) \, dx_1 dx_2 =$$

$$-\int\limits_{\partial\Pi} (\varepsilon\mu)^{-1} (\partial_n \mu)(v_1 \overline{f_1} + v_2 \overline{f_2}) \, dx_1 dx_2. \tag{3.18}$$

Теперь из (3.14)–(3.18) вытекает соотношение (3.12), где

$$\langle \widetilde{V}(\mathbf{x})\mathbf{v}, \mathbf{f} \rangle$$

$$= \left(-\varepsilon^{-1}\mu^{-1/2}(\Delta\mu^{1/2}) + (2\varepsilon\mu^2)^{-1}|\nabla\mu|^2 - \mu \operatorname{div} \left(\varepsilon^{-1}(\nabla\mu^{-1}) \right) \right) \langle \mathbf{v}, \mathbf{f} \rangle +$$

$$\sum_{j=1}^{3} \mu v_j \langle \partial_j \left(\varepsilon^{-1}(\nabla\mu^{-1}) \right), \mathbf{f} \rangle - \langle (\nabla\mu) \times \mathbf{v}, (\nabla(\varepsilon\mu)^{-1}) \times \mathbf{f} \rangle.$$

Непосредственно проверяется, что матрица $\widetilde{V}(\mathbf{x})$ задается формулами (3.13). •

§4. Доказательство теоремы 2.2

1. Пусть $E \in \mathbb{R}$ – собственное значение, а $\operatorname{col}(\mathbf{u}, \alpha, \mathbf{v}, \beta)$ – собственный элемент оператора $\mathcal{M}$, определенного в (2.2), (2.4). Тогда $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Pi, \mathbb{C}^3)$, $u_1|_{\partial\Pi} = u_2|_{\partial\Pi} = v_3|_{\partial\Pi} = 0$, $\alpha, \beta \in H^1(\Pi)$, $\beta|_{\partial\Pi} = 0$, и

$$-i\nabla\beta + i\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} \mathbf{v} = E\mathbf{u}, \tag{4.1}$$

$$-i\operatorname{div} \mu\mathbf{v} = E\alpha, \tag{4.2}$$

$$-i\nabla\alpha - i\mu^{-1}\operatorname{rot} \mathbf{u} = E\mathbf{v}, \tag{4.3}$$

$$-i\operatorname{div} \varepsilon\mathbf{u} = E\beta. \tag{4.4}$$

2. Домножим равенство (4.1) на вектор $\varepsilon\nabla\varphi$, $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Pi)$, и проинтегрируем по Π. С учетом тождества

$$\int\limits_{\Pi} \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \nabla\varphi\rangle \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Pi),$$

получаем

$$-i \int\limits_{\Pi} \varepsilon(\mathbf{x})\langle \nabla\beta, \nabla\varphi\rangle \, d\mathbf{x} = E \int\limits_{\Pi} \varepsilon(\mathbf{x})\langle \mathbf{u}, \nabla\varphi\rangle \, d\mathbf{x}. \tag{4.5}$$

В силу условия $\varphi|_{\partial\Pi} = 0$ и уравнения (4.4), правая часть в (4.5) преобразуется к виду

$$-E \int\limits_{\Pi} (\operatorname{div} \varepsilon\mathbf{u})\overline{\varphi} \, d\mathbf{x} = -iE^2 \int\limits_{\Pi} \beta\overline{\varphi} \, d\mathbf{x}.$$

Таким образом, функция $\beta \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Pi)$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{\Pi} \varepsilon(\mathbf{x})\langle \nabla\beta, \nabla\varphi\rangle \, d\mathbf{x} = E^2 \int\limits_{\Pi} \beta\overline{\varphi} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Pi). \tag{4.6}$$

Далее, при любых $\beta, \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Pi)$ справедливо тождество (ср. [3, §6])

$$\int\limits_{\Pi} \varepsilon(\mathbf{x})\langle \nabla\beta, \nabla\varphi\rangle \, d\mathbf{x} = \int\limits_{\Pi} \langle \nabla(\varepsilon^{1/2}\beta), \nabla(\varepsilon^{1/2}\varphi)\rangle \, d\mathbf{x} + \int\limits_{\Pi} \varepsilon^{1/2}(\Delta\varepsilon^{1/2})\beta\overline{\varphi} \, d\mathbf{x}. \tag{4.7}$$

Введем обозначения $\varepsilon^{1/2}\beta := b$, $\varepsilon^{1/2}\varphi := \zeta$, и учтем, что $\varepsilon^{1/2}$ является мультипликатором в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Pi)$. Из (4.6), (4.7) следует, что $b \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Pi)$ и удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{\Pi} \left(\langle \nabla b, \nabla\zeta\rangle + \mathcal{V}_1(\mathbf{x}) b\overline{\zeta} \right) \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \zeta \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Pi), \tag{4.8}$$

где

$$\mathcal{V}_1(\mathbf{x}) := \varepsilon^{-1/2}(\Delta\varepsilon^{1/2}) - E^2\varepsilon^{-1}. \tag{4.9}$$

Тождество (4.8) означает, что b является обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения $-\Delta b + \mathcal{V}_1(\mathbf{x})b = 0$. Из условий (1.2)–(1.4) вытекает, что функция $\mathcal{V}_1(\mathbf{x})$ Γ-периодична и $\mathcal{V}_1 \in$

$L_{3/2}(\Pi \cap B_R)$, $\forall R < \infty$. На основании теоремы 1.3 статьи [10] при этих условиях спектр задачи Дирихле для оператора $-\Delta + \mathcal{V}_1$ заведомо свободен от собственных значений. Поэтому $b = 0$, а тогда и

$$\beta = 0. \tag{4.10}$$

3. Домножим равенство (4.3) на вектор $\mu\nabla\psi$, $\psi \in H^1(\Pi)$, и проинтегрируем по Π. Учитывая, что при $\mathbf{u} \in H^1(\Pi)$, $u_1|_{\partial\Pi} = u_2|_{\partial\Pi} = 0$ справедливо тождество

$$\int\limits_{\Pi} \langle \operatorname{rot} \mathbf{u}, \nabla\psi\rangle \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \psi \in H^1(\Pi),$$

получаем

$$-i \int\limits_{\Pi} \mu(\mathbf{x}) \langle \nabla\alpha, \nabla\psi\rangle \, d\mathbf{x} = E \int\limits_{\Pi} \mu(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}, \nabla\psi\rangle \, d\mathbf{x}. \tag{4.11}$$

В силу условия $v_3|_{\partial\Pi} = 0$ и уравнения (4.2), правая часть в (4.11) принимает вид

$$-E \int\limits_{\Pi} (\operatorname{div} \mu\mathbf{v})\overline{\psi} \, d\mathbf{x} = -iE^2 \int\limits_{\Pi} \alpha\overline{\psi} \, d\mathbf{x}.$$

Итак, функция $\alpha \in H^1(\Pi)$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{\Pi} \mu(\mathbf{x}) \langle \nabla\alpha, \nabla\psi\rangle \, d\mathbf{x} = E^2 \int\limits_{\Pi} \alpha\overline{\psi} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \psi \in H^1(\Pi). \tag{4.12}$$

При любых $\alpha, \psi \in H^1(\Pi)$ справедливо тождество (ср. (4.7))

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Pi} \mu(\mathbf{x}) \langle \nabla\alpha, \nabla\psi\rangle \, d\mathbf{x} = \int\limits_{\Pi} \langle \nabla(\mu^{1/2}\alpha), \nabla(\mu^{1/2}\psi)\rangle \, d\mathbf{x} + \\ \int\limits_{\Pi} \mu^{1/2}(\Delta\mu^{1/2})\alpha\overline{\psi} \, d\mathbf{x} - \int\limits_{\partial\Pi} \frac{1}{2}(\partial_n\mu)\alpha\overline{\psi} \, dx_1 dx_2. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Положим $\mu^{1/2}\alpha := a$, $\mu^{1/2}\psi := \xi$, и учтем, что $\mu^{1/2}$ является мультипликатором в $H^1(\Pi)$. Из (4.12), (4.13) видно, что функция $a \in H^1(\Pi)$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{\Pi} \left(\langle \nabla a, \nabla\xi\rangle + \mathcal{V}_2(\mathbf{x}) a\overline{\xi} \right) \, d\mathbf{x} - \int\limits_{\partial\Pi} (2\mu)^{-1}(\partial_n\mu) a\overline{\xi} \, dx_1 dx_2 = 0,$$
$$\forall \xi \in H^1(\Pi), \tag{4.14}$$

где

$$\mathcal{V}_2(\mathbf{x}) := \mu^{-1/2}(\Delta\mu^{1/2}) - E^2\mu^{-1}. \tag{4.15}$$

Тождество (4.14) означает, что a является обобщенным решением уравнения $-\Delta a + \mathcal{V}_2(\mathbf{x})a = 0$ с третьим краевым условием $(\partial_n a + \sigma a)|_{\partial\Pi} = 0$, где $\sigma := -(2\mu)^{-1}(\partial_n \mu)$. Из условий на $\mu(\mathbf{x})$ вытекает, что функции $\mathcal{V}_2$ и σ Γ-периодичны, причем $\mathcal{V}_2 \in L_{3/2}(\Pi \cap B_R)$, $\forall R < \infty$, а $\sigma \in L_{2,\mathrm{loc}}(\partial\Pi)$. В силу теоремы 1.3 статьи [10] при этих условиях спектр третьей краевой задачи для оператора $-\Delta + \mathcal{V}_2$ свободен от собственных значений. Поэтому $a = 0$, а тогда и

$$\alpha = 0. \tag{4.16}$$

4. С учетом (4.10), (4.16) равенства (4.1)–(4.4) перепишем в виде

$$i\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = E\mathbf{u}, \tag{4.17}$$

$$\mathrm{div}\,\mu\mathbf{v} = 0, \tag{4.18}$$

$$-i\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = E\mathbf{v}, \tag{4.19}$$

$$\mathrm{div}\,\varepsilon\mathbf{u} = 0. \tag{4.20}$$

Домножим уравнение (4.19) на $\mathrm{rot}\,\mathbf{w}$, где $\mathbf{w} \in H^1(\Pi, \mathbb{C}^3)$, причем $w_1|_{\partial\Pi} = w_2|_{\partial\Pi} = 0$, и проинтегрируем по Π. Тогда

$$-i\int\limits_{\Pi} \mu^{-1}\langle \mathrm{rot}\,\mathbf{u}, \mathrm{rot}\,\mathbf{w}\rangle\, d\mathbf{x} = E\int\limits_{\Pi} \langle \mathbf{v}, \mathrm{rot}\,\mathbf{w}\rangle\, d\mathbf{x}. \tag{4.21}$$

В силу предложения 3.2 и уравнения (4.17), правая часть в (4.21) принимает вид

$$E\int\limits_{\Pi} \langle \mathrm{rot}\,\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle\, d\mathbf{x} = -iE^2\int\limits_{\Pi} \varepsilon(\mathbf{x})\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle\, d\mathbf{x}.$$

Таким образом, $\mathbf{u} \in H^1(\Pi, \mathbb{C}^3)$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{\Pi} \mu^{-1}\langle \mathrm{rot}\,\mathbf{u}, \mathrm{rot}\,\mathbf{w}\rangle\, d\mathbf{x} = E^2\int\limits_{\Pi} \varepsilon(\mathbf{x})\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle\, d\mathbf{x},$$
$$\forall \mathbf{w} \in H^1(\Pi, \mathbb{C}^3),\ \ w_1|_{\partial\Pi} = w_2|_{\partial\Pi} = 0, \tag{4.22}$$

и граничным условиям $u_1|_{\partial\Pi} = u_2|_{\partial\Pi} = 0$.

5. Домножим уравнение (4.17) на $\operatorname{rot}\mathbf{f}$, где $\mathbf{f}\in H^1(\Pi,\mathbb{C}^3)$, $f_3|_{\partial\Pi}=0$, и проинтегрируем по Π. Получим

$$i\int\limits_{\Pi}\varepsilon^{-1}\langle\operatorname{rot}\mathbf{v},\operatorname{rot}\mathbf{f}\rangle\,d\mathbf{x}=E\int\limits_{\Pi}\langle\mathbf{u},\operatorname{rot}\mathbf{f}\rangle\,d\mathbf{x}.\tag{4.23}$$

С учетом предложения 3.2 и уравнения (4.19), правая часть в (4.23) преобразуется к виду

$$E\int\limits_{\Pi}\langle\operatorname{rot}\mathbf{u},\mathbf{f}\rangle\,d\mathbf{x}=iE^2\int\limits_{\Pi}\mu(\mathbf{x})\langle\mathbf{v},\mathbf{f}\rangle\,d\mathbf{x}.$$

Следовательно, $\mathbf{v}\in H^1(\Pi,\mathbb{C}^3)$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{\Pi}\varepsilon^{-1}\langle\operatorname{rot}\mathbf{v},\operatorname{rot}\mathbf{f}\rangle\,d\mathbf{x}=E^2\int\limits_{\Pi}\mu(\mathbf{x})\langle\mathbf{v},\mathbf{f}\rangle\,d\mathbf{x},$$
$$\forall\mathbf{f}\in H^1(\Pi,\mathbb{C}^3),\ \ f_3|_{\partial\Pi}=0,\tag{4.24}$$

и граничному условию $v_3|_{\partial\Pi}=0$.

6. Применяя лемму 3.3 и равенства (4.19), (4.20), перепишем тождество (4.22) в виде

$$\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{\Pi}\langle\partial_j(\varepsilon^{1/2}\mathbf{u}),\partial_j(\varepsilon^{-1/2}\mu^{-1}\mathbf{w})\rangle\,d\mathbf{x}-iE\int\limits_{\Pi}\langle\mathbf{v},\varepsilon\mu\left(\nabla(\varepsilon\mu)^{-1}\right)\times\mathbf{w}\rangle\,d\mathbf{x}+$$
$$\int\limits_{\Pi}\langle V(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle\,d\mathbf{x}+\int\limits_{\partial\Pi}(2\varepsilon\mu)^{-1}(\partial_n\varepsilon)u_3\overline{w_3}\,dx_1dx_2=E^2\int\limits_{\Pi}\varepsilon\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle\,d\mathbf{x},$$
$$\forall\mathbf{w}\in H^1(\Pi,\mathbb{C}^3),\quad w_1|_{\partial\Pi}=w_2|_{\partial\Pi}=0.\tag{4.25}$$

Аналогично, из леммы 3.4 и из (4.17), (4.18), (4.24) вытекает тождество

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{\Pi}\langle\partial_j(\mu^{1/2}\mathbf{v}),\partial_j(\varepsilon^{-1}\mu^{-1/2}\mathbf{f})\rangle\,d\mathbf{x} \\ &+iE\int\limits_{\Pi}\langle\mathbf{u},\varepsilon\mu\left(\nabla(\varepsilon\mu)^{-1}\right)\times\mathbf{f}\rangle\,d\mathbf{x} \\ +\int\limits_{\Pi}\langle\widetilde{V}(\mathbf{x})\mathbf{v},\mathbf{f}\rangle\,d\mathbf{x} &-\int\limits_{\partial\Pi}(2\varepsilon\mu)^{-1}(\partial_n\mu)(v_1\overline{f_1}+v_2\overline{f_2})\,dx_1dx_2 \\ &=E^2\int\limits_{\Pi}\mu\langle\mathbf{v},\mathbf{f}\rangle\,d\mathbf{x}, \\ &\forall\mathbf{f}\in H^1(\Pi,\mathbb{C}^3),\quad f_3|_{\partial\Pi}=0. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Положим

$$\Phi(\mathbf{x}):=\begin{pmatrix}\varepsilon^{1/2}\mathbf{u}\\ \mu^{1/2}\mathbf{v}\end{pmatrix},\quad \Psi(\mathbf{x}):=\begin{pmatrix}\varepsilon^{-1/2}\mu^{-1}\mathbf{w}\\ \varepsilon^{-1}\mu^{-1/2}\mathbf{f}\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Phi,\ \Psi\in H^1(\Pi,\mathbb{C}^6),\quad \Phi_j|_{\partial\Pi}=\Psi_j|_{\partial\Pi}=0,\quad j=1,2,6.$$

Складывая (4.25) и (4.26), получаем, что функция Φ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{\Pi}\langle\partial_j\Phi,\partial_j\Psi\rangle_6\,d\mathbf{x}+\int\limits_{\Pi}\langle\mathcal{W}(\mathbf{x})\Phi,\Psi\rangle_6\,d\mathbf{x}+ \\ \int\limits_{\partial\Pi}&\left((2\varepsilon)^{-1}(\partial_n\varepsilon)\Phi_3\overline{\Psi_3}-(2\mu)^{-1}(\partial_n\mu)(\Phi_4\overline{\Psi_4}+\Phi_5\overline{\Psi_5})\right)\,dx_1dx_2=0, \\ &\forall\Psi\in H^1(\Pi,\mathbb{C}^6),\quad \Psi_j|_{\partial\Pi}=0,\quad j=1,2,6. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle_6$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^6$, а $\mathcal{W}(\mathbf{x})$ – (6×6)-матрица вида

$$\mathcal{W}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}\mu V-\varepsilon\mu E^2I_3 & -2iE\mathcal{A}\\ 2iE\mathcal{A} & \varepsilon\widetilde{V}-\varepsilon\mu E^2I_3\end{pmatrix},$$

где I_3 – единичная матрица, $V(\mathbf{x})$ и $\widetilde{V}(\mathbf{x})$ – (3×3)-матрицы, определенные в (3.7), (3.13), а матрица $\mathcal{A}$ задана формулой

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 0 & -\partial_3(\varepsilon\mu)^{1/2} & \partial_2(\varepsilon\mu)^{1/2} \\ \partial_3(\varepsilon\mu)^{1/2} & 0 & -\partial_1(\varepsilon\mu)^{1/2} \\ -\partial_2(\varepsilon\mu)^{1/2} & \partial_1(\varepsilon\mu)^{1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вообще говоря, $\mathcal{W}(\mathbf{x})$ – не эрмитова матрица. Отметим, что в случае, когда $\varepsilon\mu = \mathrm{Const}$, матрица $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ аннулируется, и тогда $\mathcal{W}(\mathbf{x})$ оказывается эрмитовой.

Тождество (4.27) означает, что $\Phi(\mathbf{x})$ является обобщенным решением уравнения $-\Delta\Phi + \mathcal{W}(\mathbf{x})\Phi = 0$ с краевыми условиями

$$\begin{gathered} \Phi_l|_{\partial\Pi} = 0, \quad l = 1, 2, 6, \\ (\partial_n\Phi_j + \sigma_j\Phi_j)|_{\partial\Pi} = 0, \quad j = 3, 4, 5, \end{gathered} \tag{4.28}$$

где $\sigma_3 = (2\varepsilon)^{-1}(\partial_n\varepsilon)$, $\sigma_4 = \sigma_5 = -(2\mu)^{-1}(\partial_n\mu)$. Из условий на ε и μ вытекает, что $\mathcal{W}$ и σ_j Γ-периодичны и

$$\begin{gathered} \mathcal{W} \in L_{3/2}(\Pi \cap B_R), \quad \forall R < \infty; \\ \sigma_j \in L_{2,\mathrm{loc}}(\partial\Pi), \quad j = 3, 4, 5. \end{gathered}$$

При этих условиях на коэффициенты применима теорема 1.3 из [10], в силу которой спектр матричного оператора Шредингера $-\Delta+\mathcal{W}(\mathbf{x})$ с краевыми условиями (4.28) свободен от собственных значений. Следовательно, $\Phi = 0$, а тогда и

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{v} = 0. \tag{4.29}$$

7. Соотношения (4.10), (4.16), (4.29) показывают, что при любом $E \in \mathbb{R}$ система (4.1)–(4.4) имеет на множестве (2.4) лишь тривиальное решение. Тем самым, теорема 2.2 доказана.

§5. Добавление

1. Здесь мы обсудим вопрос о совпадении (при принятых предположениях об ε и μ) “слабого” (т.е. на области определения (1.7)) и “сильного” (на классе $H^1(\Pi)$, см. (1.8)) определений оператора Максвелла M. Самосопряженность M гарантируется (см. [2]) именно слабым определением. Если граница области и функции ε, μ – недостаточно гладкие, то “сильный” оператор M может оказаться лишь симметричным оператором, возможно, с бесконечными индексами дефекта. Эти осложнения обсуждаются, например, в [2] и в [1], где, впрочем, основное внимание уделяется негладкостям границы.

Наши выкладки в §3 существенно опираются на принадлежность полей $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ классу $H^1(\Pi, \mathbb{C}^3)$. Поэтому мы накладываем на ε, μ условия, при которых области определения (1.7) и (1.8) для M совпадают. Этот вопрос, очевидно, равносилен вопросу о совпадении областей определения (2.3) и (2.4) для оператора $\mathcal{M}$.

Нужные нам факты можно извлечь из результатов работ [2] и [4] в сочетании с результатами из книги [7] о разрешимости в классе H^2 задач Дирихле и Неймана для дивергентных эллиптических операторов второго порядка. Так как в нашем случае граница не имеет особенностей, мы используем результаты из [2], [4] только для ограниченных областей с гладкой границей, сосредотачивая внимание лишь на возможных особенностях ε и μ. Все приводимые ниже рассмотрения годятся не только для скалярных, но и для матричнозначных функций ε и μ.

2. В этом пункте мы следуем, в основном, работе [2]. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – область с гладкой границей (для наших целей с избытком достаточно $\partial\Omega \in C^2$). Пусть $s(\mathbf{x})$ – вещественная (3×3)-матрица такая, что

$$s_0\mathbf{1} \le s(\mathbf{x}) \le s_1\mathbf{1}, \quad 0 < s_0 \le s_1 < \infty, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{5.1}$$

Здесь $\mathbf{1}$ – единичная (3×3)-матрица. Введем обозначение

$$F(\Omega, s) = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3) : \ \operatorname{rot}\mathbf{u} \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3), \quad \operatorname{div}(s\mathbf{u}) \in L_2(\Omega)\}.$$

Пространство $F(\Omega, s)$ полно относительно метрической формы

$$\|\mathbf{u}\|^2_{F(\Omega,s)} = \int \left(\langle s\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + |\operatorname{rot}\mathbf{u}|^2 + |\operatorname{div}(s\mathbf{u})|^2\right)\, d\mathbf{x}.$$

В $F(\Omega, s)$ выделяются подпространства

$$F(\Omega, s, \tau) = \{\mathbf{u} \in F(\Omega, s) : \ u_\tau|_{\partial\Omega} = 0\}, \tag{5.2}$$

$$F(\Omega, s, \nu) = \{\mathbf{u} \in F(\Omega, s) : \ (s\mathbf{u})_\nu|_{\partial\Omega} = 0\}. \tag{5.3}$$

Здесь u_τ – касательная составляющая вектора $\mathbf{u}$, а $(s\mathbf{u})_\nu$ – нормальная составляющая вектора $s\mathbf{u}$ на $\partial\Omega$. Граничные условия в (5.2), (5.3) понимаются в обобщенном смысле (см. [2]). Положим

$$E(\Omega, s, \tau) = \{\nabla\psi : \ \psi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), \ \operatorname{div}(s\nabla\psi) \in L_2(\Omega)\},$$

$$E(\Omega,s,\nu)=\{\nabla\psi:\ \psi\in H^1(\Omega),\ \operatorname{div}(s\nabla\psi)\in L_2(\Omega),\ (s\nabla\psi)_\nu|_{\partial\Omega}=0\}.$$

Тогда $E(\Omega,s,\tau)$ – подпространство в $F(\Omega,s,\tau)$, а $E(\Omega,s,\nu)$ – подпространство в $F(\Omega,s,\nu)$. Подпространство $E(\Omega,s,\tau)$ (соотв., $E(\Omega,s,\nu)$) представляет собой множество градиентов слабых решений задачи Дирихле (соотв., задачи Неймана) в Ω для эллиптического уравнения $-\operatorname{div}(s\nabla\psi)=f$ при $f\in L_2(\Omega)$.

Введем также классы

$$H^1_\tau(\Omega,\mathbb{C}^3)=\{\mathbf{u}\in H^1(\Omega,\mathbb{C}^3):\ u_\tau|_{\partial\Omega}=0\},$$

$$H^1_\nu(\Omega,\mathbb{C}^3)=\{\mathbf{u}\in H^1(\Omega,\mathbb{C}^3):\ (s\mathbf{u})_\nu|_{\partial\Omega}=0\}.$$

Класс H^1_ν на самом деле зависит также от s, но мы не будем отражать это в обозначениях. Ниже значок σ принимает значения τ либо ν.

Предложение 5.1. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ – ограниченная область с гладкой границей. Пусть матрица $s(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию* (5.1) *и, кроме того, $s(\mathbf{x})$ является мультипликатором в $H^1(\Omega,\mathbb{C}^3)$. Тогда существуют линейные непрерывные операторы X_σ, Y_σ,*

$$X_\sigma: F(\Omega,s,\sigma)\to H^1_\sigma(\Omega,\mathbb{C}^3),\quad \sigma=\tau,\nu,$$

$$Y_\sigma: F(\Omega,s,\sigma)\to E(\Omega,s,\sigma),\quad \sigma=\tau,\nu,$$

такие, что $\mathbf{u}=X_\sigma\mathbf{u}+Y_\sigma\mathbf{u}$, $\forall\mathbf{u}\in F(\Omega,s,\sigma)$.

Непрерывность операторов X_σ, Y_σ означает, что представление

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_\sigma+\nabla\psi_\sigma,\quad \mathbf{u}_\sigma=X_\sigma\mathbf{u},\quad \nabla\psi_\sigma=Y_\sigma\mathbf{u}, \tag{5.4}$$

для $\mathbf{u}\in F(\Omega,s,\sigma)$ сопровождается оценкой

$$\|\mathbf{u}_\sigma\|^2_{H^1(\Omega,\mathbb{C}^3)}+\|\operatorname{div}(s\nabla\psi_\sigma)\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\nabla\psi_\sigma\|^2_{L_2(\Omega,\mathbb{C}^3)}\le C_1\|\mathbf{u}\|^2_{F(\Omega,s)}. \tag{5.5}$$

Постоянная C_1 зависит только от Ω и от s.

Предложение 5.1 при более жестком условии $s\in C^1(\overline{\Omega})$ установлена в [2, теоремы 3.1, 3.4], а в [4] результат был перенесен на случай, когда s – мультипликатор в $H^1(\Omega,\mathbb{C}^3)$.

Замечание. Если Ω – ограниченная область с гладкой границей, а $s(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию (5.1) и $s\in W^1_3(\Omega)$, то s, очевидно, является мультипликатором в $H^1(\Omega,\mathbb{C}^3)$.

3. Таким образом, поля пространств (5.2), (5.3) представимы в виде суммы слагаемого из $H^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$ и градиента слабого решения задачи Дирихле или Неймана для уравнения $-\operatorname{div}(s\nabla\psi) = f$ при $f \in L_2(\Omega)$ и при однородных граничных условиях. Применим следующее утверждение о "повышении гладкости" слабых решений эллиптических уравнений, содержащееся в результатах книги [7].

Предложение 5.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с гладкой границей. Пусть матрица $s(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию (5.1) и*

$$s \in W_p^1(\Omega), \quad p > 3. \tag{5.6}$$

Пусть $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ (соотв., $\psi \in H^1(\Omega)$) – слабое решение задачи Дирихле (соотв., Неймана) для уравнения $-\operatorname{div}(s\nabla\psi) = f$ при $f \in L_2(\Omega)$. Тогда $\psi \in H^2(\Omega)$, причем выполнена оценка

$$\|\psi\|^2_{H^2(\Omega)} \leq C_2 \left(\|f\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\psi\|^2_{L_2(\Omega)} \right), \tag{5.7}$$

где C_2 зависит только от Ω и от s.

Предложения 5.1, 5.2 вместе приводят к следующему результату.

Предложение 5.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с гладкой границей. Пусть матрица $s(\mathbf{x})$ удовлетворяет условиям (5.1), (5.6). Тогда*

$$F(\Omega, s, \sigma) = H^1_\sigma(\Omega, \mathbb{C}^3), \quad \sigma = \tau, \nu, \tag{5.8}$$

причем справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega,\mathbb{C}^3)} \leq C_3 \|\mathbf{u}\|_{F(\Omega,s)}, \quad \mathbf{u} \in F(\Omega, s, \sigma), \quad \sigma = \tau, \nu. \tag{5.9}$$

Постоянная C_3 зависит лишь от Ω и от s.

4. Легко понять, что в условиях предложения 5.3 слабое и сильное определения оператора Максвелла совпадают. Перенесение результата на интересующий нас случай $\Omega = \Pi$ (и, тем более, на случай $\Omega = \mathbb{R}^3$) достигается стандартным использованием разбиения единицы. Мы не будем входить здесь в подробности. Отметим лишь, что, например, в случае $\Omega = \Pi$ удобно выбирать локально конечное покрытие и согласованное с ним разбиение единицы Γ-периодическими. Это облегчает при проведении оценок использование Γ-периодичности матрицы s. (То же относится к случаю $\Omega = \mathbb{R}^3$ при Γ_0-периодической матрице s.) В результате приходим к следующему предложению.

Предложение 5.4. *Пусть* Π – *слой* (1.1). *Пусть* Γ*-периодическая матрица* $s(\mathbf{x})$ *удовлетворяет в* Π *условию* (5.1) *и*

$$s \in W_p^1(\Pi \cap B_R), \quad p > 3, \quad \forall R < \infty. \tag{5.10}$$

Тогда

$$F(\Pi, s, \sigma) = H_\sigma^1(\Pi, \mathbb{C}^3), \quad \sigma = \tau, \nu. \tag{5.11}$$

При этом выполнена оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Pi,\mathbb{C}^3)} \le C\|\mathbf{u}\|_{F(\Pi,s)}, \quad \mathbf{u} \in F(\Pi, s, \sigma). \tag{5.12}$$

Ясно, что отсюда следует совпадение областей определения (1.7) и (1.8) для оператора M при условиях (1.2)–(1.4) на ε и μ. Разумеется, для $\Omega = \mathbb{R}^3$ справедлив аналог предложения 5.4, обеспечивающий совпадение сильного и слабого операторов M_0.

Литература

1. М. Ш. Бирман, *Три задачи теории сплошных сред в многогранниках.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **200** (1992), 27–37.
2. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *L_2-теория оператора Максвелла в произвольных областях.* — Усп. матем. наук **42**, № 6 (1987), 61–76.
3. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности.* — Алгебра и анализ **11**, № 2 (1999), 1–40.
4. Н. Д. Филонов, *Главные особенности магнитной составляющей поля в резонаторах с границей заданного класса гладкости.* — Алгебра и анализ **9**, № 2 (1997), 241–255.
5. P. Kuchment, *Floquet theory for partial differential equations.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
6. P. Kuchment, S. Levendorskii, *On the structure of spectra of periodic elliptic operators.* — Trans. AMS **354** (2002), 537–569.
7. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* Наука, Москва, 1964.
8. A. Morame, *The absolute continuity of the spectrum of Maxwell operator in a periodic media.* — J. Math. Phys. **41** no. 10 (2000), 7099–7108.
9. T. A. Suslina, *Absolute continuity of the spectrum of periodic operators of mathematical physics.* Journées Équations aux Dérivées Partielles, Nantes, 5-8 juin 2000, XVIII-1–XVIII-13.
10. T. A. Suslina, *On the absence of eigenvalues of a periodic matrix Schrodinger operator in a layer.* — Russian Journal of Mathematical Physics **8** no. 4 (2001), 463–486.

Suslina T. A. Absolute continuity of the spectrum of the periodic Maxwell operator in a layer.

We study the Maxwell operator in a layer $\mathbb{R}^2 \times (0, T)$. It is assumed that an electric permittivity $\varepsilon(\mathbf{x})$ and a magnetic permeability $\mu(\mathbf{x})$ are periodic along the layer. On the boundary of the layer, we impose conditions of ideal conductivity. Under wide assumptions on $\varepsilon(\mathbf{x})$ and $\mu(\mathbf{x})$, it is shown that the spectrum of the Maxwell operator is absolutely continuous.

С.-Петербургский
государственный университет
tanya@petrov.stoic.spb.su

Поступило 10 июня 2002 г.