Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 288, 2002 г.

В. В. Пухначев

ИЕРАРХИЯ МОДЕЛЕЙ В ТЕОРИИ КОНВЕКЦИИ

**Ольге Александровне Ладыженской
с уважением и восхищением**

В работе обсуждаются три модели, используемые для описания естественной конвекции жидкости в замкнутом объеме.

1. Исходные соотношения. Предположим, что вязкая теплопроводная жидкость заполняет конечный сосуд Ω, граница которого есть твердая недеформируемая непроницаемая стенка с заданным на ней распределением теплового потока или температуры. На жидкость действует сила тяжести с ускорением $\vec{g}$. Как известно, в этих условиях равновесие жидкости возможно лишь при весьма специальном выборе граничного теплового режима. "Случай общего положения" соответствует возникновению конвекции.

Далее жидкость считается двухпараметрической термодинамической средой с параметрами состояния θ (абсолютная температура) и p (давление). Плотность жидкости ρ определяется уравнением состояния

$$\rho = R(\theta, p), \tag{1.1}$$

где функция R конкретизируется ниже. Предположим также, что реология жидкости задается соотношением Стокса

$$\mathrm{S} = (-p + \lambda\,\mathrm{div}\,\vec{v})\mathrm{I} + 2\mu\mathrm{D},$$

где S – тензор напряжений, $\mathrm{D} = [\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^*]/2$ – тензор скоростей деформаций, I – единичный тензор, $\vec{v}$ – вектор скорости, μ и λ – динамические коэффициенты первой и второй вязкости соответственно. Функции $\vec{v}, p, \theta$ удовлетворяют системе уравнений гидродинамики [1]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0, \tag{1.2}$$

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla(-p + \lambda\,\mathrm{div}\,\vec{v}) + \mu\Delta\vec{v} + \rho\vec{g}, \tag{1.3}$$

$$\rho\theta\frac{ds}{dt} = k\Delta\theta + \Phi,$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \vec{v}\cdot\nabla$ – оператор полного дифференцирования по времени, s – удельная энтропия, k – коэффициент теплопроводности,

$$\Phi = (\lambda + \frac{2}{3}\mu)(\mathrm{div}\ \vec{v})^2 + 2\mu \mathrm{D}' : \mathrm{D}'$$

– диссипативная функция, $\mathrm{D}' = \mathrm{D} - (\mathrm{div}\ \vec{v})\ \mathrm{I}/3$. Эти уравнения записаны в предположении,что μ, λ и k – положительные постоянные. Последнее уравнение системы можно переписать в более удобной для нас форме:

$$\rho c_p\frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{\rho}(\frac{\partial\rho}{\partial\theta})\frac{dp}{dt} = k\Delta\theta + \Phi, \qquad (1.4)$$

где $c_p = \theta\partial s/\partial\theta$ – теплоемкость при постоянном давлении. При выводе (1.4) использовалось известное термодинамическое соотношение

$$\frac{\partial s}{\partial p} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial\theta},$$

в котором энтропия s и плотность ρ рассматриваются как функции основных термодинамических переменных θ и p.

Система соотношений (1.1) – (1.4) становится замкнутой, если известна зависимость теплоемкости c_p от θ и p. Далее рассматривается простейший вид такой зависимости: $c_p = \mathrm{const} > 0$. Оправданием данного предположения является тот факт, что для большинства реальных жидкостей зависимость теплоемкости от температуры и тем более от давления значительно слабее аналогичных зависимостей коэффициентов вязкости и теплопроводности. Так, для воды при атмосферном давлении в диапазоне изменения θ от 273 K до 373 K отклонение c_p от его среднего значения не превышает одного процента.

Перейдем теперь к обсуждению уравнения состояния. Сама его запись в виде (1.1) продиктована тем, что для истинных ("капельных") жидкостей, в отличие от газов, значительные вариации температуры (и еще бóльшие – давления) приводят к малым изменениям плотности. Естественно предположить, что R есть неубывающая функция p. Исключая из рассмотрения аномальные ситуации (классический пример – вода при температуре, близкой к 273 K), будем считать, что функция $R(\theta, p)$ монотонно убывает с ростом θ. Как правило, при рассмотрении течений, вызванных силами плавучести (а именно они составляют основное содержание теории тепловой гравитационной конвекции), зависимость ρ от θ и p аппроксимируется линейной,

$$\rho = \rho_0[1 - \beta(\theta - \theta_0) + \gamma(p - p_0)],$$

где β и γ – положительные постоянные, а ρ_0, θ_0 и p_0 – характерные значения плотности, температуры и давления соответственно. Однако для наших целей предпочтительнее иная аппроксимация уравнения состояния, а именно,

$$\rho = \rho_0[1 + \beta(\theta - \theta_0)]^{-1}[1 + \gamma(p - p_0)]. \tag{1.5}$$

С точки зрения приложений, отличие зависимости (1.5) от линейной несущественно. Действительно, возникающая при этом относительная погрешность имеет порядок $(\beta\theta_*)^2$, где θ_* – максимальный перепад температур в рассматриваемом движении. В частности, для воды эта величина не превосходит 10^{-5}.

Система (1.2)–(1.5) является отправным пунктом дальнейших построений. Данная система может быть разрешена относительно производных $d\vec{v}/dt, d\theta/dt$ и dp/dt, поэтому для нее следует задавать начальные значения всех искомых функций:

$$\vec{v} = \vec{v}_0(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0, \tag{1.6}$$

$$\theta = \theta_0(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0, \tag{1.7}$$

$$p = p_0(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0. \tag{1.8}$$

На границе Σ области Ω ставится условие прилипания для скорости:

$$\vec{v} = 0, \quad x \in \Sigma, \quad t > 0, \tag{1.9}$$

и одно из условий для температуры:

$$k\frac{\partial\theta}{\partial n} = f(x,t), \quad x \in \Sigma, \quad t > 0 \tag{1.10}$$

либо

$$\theta = h(x,t), \quad x \in \Sigma, \quad t > 0, \tag{1.10$'$}$$

где $\partial/\partial n$ – производная по направлению внешней нормали к Σ.

Мы не ставим здесь целью дать обзор результатов исследования корректности задач (1.2)–(1.10), (1.2)–(1.10$'$). Отметим, что теорема единственности классического решения каждой из этих задач фактически содержится в [2]. При надлежащей гладкости функций $\vec{v}_0, \theta_0, p_0, f, h$ и поверхности Σ для этих задач имеет место и теорема существования, по крайней мере, в малом по t [3].

2. Критерии подобия. Приняв гипотезу о постоянстве теплоемкости c_p и конкретизировав уравнение состояния (1.5), мы ликвидировали функциональный произвол в системе уравнений гидродинамики. Результирующая система (1.2)–(1.5) содержит девять размерных параметров: $g = |\vec{g}|, \mu, \lambda, k, c_p, \rho_0, \beta, \gamma, \theta_0, p_0$. Из них можно составить шесть независимых безразмерных комбинаций, каждая из которых может быть названа критерием подобия конвективных течений. Совокупность определяющих параметров (а значит, и критериев подобия) расширяется, если речь идет о движении, возникающем из заданного начального состояния и поддерживаемом заданным граничным распределением температуры или теплового потока. В частности, задание области течения Ω предписывает характерный линейный размер $l = \operatorname{diam}\Omega$. Другими важными размерными характеристиками являются характерное время τ изменения функций $f(x,t)$ или $h(x,t)$, определяющих граничный тепловой режим, а также характерный перепад температур в рассматриваемом течении θ_*. Последняя величина имеет тот же порядок, что и $(f_{\max} - f_{\min})l/k$ или $h_{\max} - h_{\min}$, где max и min вычисляются по области $\Sigma \times [0, \bar{t}\,]$ ($\bar{t}$ – временной интервал, на котором рассматривается задача (1.2)–(1.10) или (1.2)–(1.10′)).

Приняв величину θ_* за характерный масштаб температуры, мы можем сформировать один из важных критериев подобия (число Буссинеска)

$$\varepsilon = \beta\theta_*, \tag{2.1}$$

характеризующий отклик плотности на изменение температуры. Другая температурная характеристика процесса θ_0, входящая в уравнение состояния (1.5), может быть отождествлена со средней температурой жидкости. Ясно, что параметры θ_* и θ_0 независимы. Еще один размерный параметр p_0, присутствующий в (1.5), без потери общности может быть положен равным нулю, поскольку уравнения (1.2) – (1.4) допускают преобразование эквивалентности $\hat{p} = p - p_0$.

Введем обозначения $\nu = \mu/\rho_0$ (кинематический коэффициент вязкости), $\chi = k/\rho_0 c_p$ (коэффициент температуропроводности). С их помощью можно составить два критерия подобия:

$$Pr = \nu/\chi, \quad \xi = \lambda/\rho_0\nu. \tag{2.2}$$

Далее предполагается, что параметры Pr (число Прандтля) и ξ имеют порядок единица. В то же время, параметр ε всегда является малым, что служит основой асимптотических разложений, используемых при получении уравнений тепловой гравитационной конвекции из точных уравнений гидродинамики. (Впервые процедура разложения по параметру ε в теории конвекции была осуществлена в [4] для случая, когда функция R в (1.1) линейна по θ и не зависит от p).

Теперь нам следует определить характерный "внутренний" масштаб времени (он не обязан совпадать с введенной ранее величиной τ). Обычно для этой цели используется т.н. конвективный масштаб $t_c = (l/g\varepsilon)^{1/2}$, по порядку величины равный времени всплывания горячей частицы жидкости на высоту l. Поскольку $t_c \to \infty$ при $g \to 0$, а мы хотим построить модель конвекции, равномерно пригодную для сколь угодно малых значений g, то выберем в качестве характерного времени величину $t_f = l^2/\chi$ – время релаксации температуры. Так как число Прандтля $Pr \sim 1$, то время релаксации вязких напряжений $t_s = l^2/\nu$ имеет тот же порядок, что и t_f.

Располагая характерным временем, мы можем определить две характерные скорости. Одна из них, $V_e = \varepsilon\chi/l$, вводится на основании уравнения неразрывности (1.2) и характеризует скорость всестороннего расширения жидкости, вызванного внедрением в нее локального источника тепла. Другая, $V_b = g\varepsilon l^2/\nu$, определяется из уравнения импульса (1.3), в котором приравниваются порядки членов $\mu\Delta\vec{v}$ и $\rho_0\beta(\theta - \theta_0)\vec{g}$ (второй из них характеризует вклад сил плавучести в общий баланс сил). Вследствие условия $Pr \sim 1$, тот же порядок будет иметь и левая часть уравнения (1.3). Стационарная составляющая в уравнении импульса (она присутствует и в состоянии покоя) компенсируется гидростатическим давлением $p_{hs}(x)$. Введем в рассмотрение функцию $\bar{p} = p - p_{hs}(x)$. Естественно предположить, что член $\nabla\bar{p}$ имеет тот же порядок, что и остальные динамические составляющие сил, действующих на жидкую частицу. Это определяет характерный масштаб величины $\bar{p}$: он равен $\rho_0 g\varepsilon l$.

Обозначим через η отношение характерных скоростей V_b и V_e.

Параметр

$$\eta = \frac{gl^3}{\nu\chi} \tag{2.3}$$

играет важную роль в теории микроконвекции, развиваемой в последнее десятилетие [5–7]. В цитируемых работах показано, что классическая модель Обербека–Буссинеска [1] непригодна для описания тепловой гравитационной конвекции, если параметр η имеет порядок, меньший или равный единице. Величина η имеет простой физический смысл: она характеризует относительный вклад факторов плавучести и объемного расширения жидкости в формирование поля скоростей.

В дальнейших рассмотрениях важную роль играет безразмерная величина

$$\delta = \frac{\gamma\rho_0\nu\chi}{l^2}, \tag{2.4}$$

которую можно назвать параметром сжимаемости. Еще два критерия подобия,

$$\varepsilon_1 = \frac{\nu\chi}{l^2 c_p \theta_*}\ , \quad \varepsilon_2 = \frac{\nu\chi\beta\theta_0}{l^2 c_p \theta_*}\ , \tag{2.5}$$

характеризуют относительный вклад диссипативной функции Φ и члена, пропорционального dp/dt, в уравнение энергии (1.4). Наконец, отношение введенных ранее характерных времен t_f и τ дает критерий подобия $\zeta = t_f/\tau$. Заметим, что еще один возможный критерий подобия, включающий величину p_0, не является существенным ввиду устранимости p_0 из уравнения состояния (1.5) посредством преобразования эквивалентности.

Итак, в нашем распоряжении имеется восемь критериев подобия: $Pr, \xi, \varepsilon, \eta, \delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \zeta$. Они являются независимыми и могут быть названы базовыми критериями. Разумеется, выбор базовых критериев неоднозначен. Например, вместо ε, δ и ε_1 взять следующие параметры: $\hat{\varepsilon} = \beta\theta_0$, $\rho_0^{1/3}(\mu g)^{2/3}\gamma$ (аналог параметра сжимаемости), $c_p\theta_0(\rho_0/\mu g)^{2/3}$ (безразмерная теплоемкость). Тогда три последних параметра вместе с величинами Pr и ξ образуют пять (т.е. максимально возможное число) "внутренних" критериев подобия, определяемых только свойствами жидкости и величиной ускорения силы тяжести g . Оставшиеся три параметра η, ε_2 и ζ естественно называть внешними, поскольку в них входят характеристики области течения и граничного теплового режима. Однако первоначальный выбор базовых критериев подобия более удобен, так как именно они сформируются при обезразмеривании уравнений (1.2)–(1.5), которое будет выполнено в следующем разделе.

3. Переход к безразмерным переменным. Выберем в качестве характерных масштабов длины, времени, скорости, давления и температуры величины l, l^2/χ, χ/l, $\rho_0\nu\chi/l^2$ и θ_* соответственно и обозначим $T = \theta - \theta_0, \hat{p} = p - p_0$. Отметим, что характерная скорость $V = \chi/l$ отличается от введенных ранее величин V_e и V_b. Это вызвано желанием, по аналогии с [8], выбрать характерную скорость не зависящей от температурного условия на границе области и тем самым "уравнять в правах" масштаб скорости с масштабами длины и времени.

Введем безразмерные (штрихованные) переменные по формулам:

$$\vec{x} = l\vec{x}\,', \quad t = \frac{l^2}{\chi}t', \quad \vec{v} = \frac{\chi}{l}\vec{v}\,', \quad \hat{p} = \frac{\rho_0\nu\chi}{l^2}p', \quad T = \theta_* T' \qquad (3.1)$$

Подставим выражения (3.1) в уравнения (1.2)–(1.5) и затем опустим штрихи. Уравнение состояния (1.5) в безразмерных переменных принимает вид

$$\rho = (1+\varepsilon T)^{-1}(1+\delta p) \qquad (3.2)$$

(за масштаб плотности принята величина ρ_0). Вследствие (3.1), (3.2) безразмерная форма уравнения неразрывности (1.2) такова:

$$\frac{\delta}{1+\delta p}\cdot\frac{dp}{dt} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon T}\cdot\frac{dT}{dt} + \operatorname{div}\vec{v} = 0, \qquad (3.3)$$

а уравнения импульса (1.3) —

$$\frac{1+\delta p}{1+\varepsilon T}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = Pr[\nabla(-p+\xi\operatorname{div}\vec{v}) + \Delta\vec{v}] + \frac{\eta Pr(1+\delta p)}{1+\varepsilon T}\vec{e}, \qquad (3.4)$$

где обозначено $\vec{e} = |\vec{g}|/g$. Наконец, уравнение энергии (1.4) в безразмерных переменных записывается в виде

$$\frac{1+\delta p}{1+\varepsilon T}\cdot\frac{dT}{dt} - \frac{\varepsilon_2+\varepsilon\varepsilon_1 T}{1+\varepsilon T}\cdot\frac{dp}{dt} = \Delta T + \varepsilon_1\Phi, \qquad (3.5)$$

где безразмерная диссипативная функция Φ определена равенством

$$\Phi = (\xi + \frac{2}{3})(\operatorname{div}\vec{v})^2 + 2D' : D'$$

(здесь D' – безразмерный девиатор тензора скоростей деформаций). Уравнения (3.3)–(3.5) содержат семь параметров, которые можно разбить на четыре группы в порядке убывания их типичных значений. Первая группа состоит из одного элемента η . В земных условиях и для обычных жидкостей величина η весьма велика. Так, если диаметр сосуда $l = 10^{-2}M$ (этот характерный размер будет использоваться и в дальнейшем), а заполняющая его жидкость – вода при температуре $293K$, то для $g = 9,81m/c^2$ будем иметь, согласно (2.3), $\eta = 6,9 \cdot 10^7$. Однако в условиях микрогравитации, в областях малых размеров, а также для высоковязких жидкостей, значения η могут быть порядка единицы, что дает основания назвать η параметром микроконвекции.

Вторую группу параметров образуют величины Pr и ξ , определенные формулами (2.2). Как уже отмечалось, мы предполагаем, что обе эти величины имеют порядок единица. Нам неизвестны жидкости, у которых величина ξ (т.е. отношение коэффициентов второй и первой вязкости) принимала бы большие значения. Что же касается числа Прандтля Pr , то для реальных жидкостей (в отличие от газов) этот параметр варьируется в широких пределах. Однако предположение $Pr \sim 1$ выделяет среди текучих сред достаточно обширную группу, включающую воду, этиловый спирт, четыреххлористый углерод, а также все газы.

В третью группу мы выделяем единственный параметр ε (число Буссинеска), определенный равенством (2.1). Поскольку объемный коэффициент теплового расширения β для обычных жидкостей не превосходит $2 \cdot 10^{-3} 1/K$, то величина ε будет малой даже при характерном перепаде температур $\theta_* = 50K$. Если же $\theta_* = 10K$ (такое значение θ_* будет использоваться и при оценке величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2$), то для воды при комнатной температуре $\varepsilon = 2,1 \cdot 10^{-3}$.

Наконец, в четвертую группу параметров попадают δ, ε_1 и ε_2 , заданные соотношениями (2.4), (2.5). Оценим сначала величину δ . Этот параметр пропорционален изотермическому коэффициенту сжимаемости γ , входящему в уравнение состояния (1.5). Для обычных жидкостей γ лежит в диапазоне $10^{-9} - 10^{-10} m^2/H$. Учитывая, что для воды $\gamma = 4,9 \cdot 10^{-10} m^2/H$, при $l = 10^{-2}m$ из (2.4) мы получаем значение параметра $\delta = 6,9 \cdot 10^{-15}$. Несколько бо́льшим (но все равно очень малым по сравнению с ε) получается в тех же условиях значение параметра $\varepsilon_1 = 3,4 \cdot 10^{-14}$, а

$\varepsilon_2 = 1,8 \cdot 10^{-15}$ имеет тот же порядок, что и δ .

Далее мы используем малость параметров δ, ε_1 и ε_2 для асимптотического упрощения системы (3.3)–(3.5). Учитывая, что в типичных ситуациях величины ε_i $(i = 1, 2)$ имеют тот же порядок, что и δ , и желая свести дело к разложению по одному малому параметру, положим $\varepsilon_i = \alpha_i \delta$, где $\alpha_i = O(1)$ при $\delta \to 0$. Тогда уравнение (3.5) перепишется в следующем виде:

$$\frac{1 + \delta p}{1 + \varepsilon T} \cdot \frac{dT}{dt} - \delta \frac{\alpha_2 + \varepsilon \alpha_1 T}{1 + \varepsilon T} \cdot \frac{dp}{dt} = \Delta T + \delta \alpha_1 \Phi. \qquad (3.5')$$

Краевые условия для системы (3.3)–(3.5') — это переписанные в безразмерных переменных условия (1.9), (1.10) или (1.9), (1.10'). Сохраняя за безразмерными тепловым потоком или температурой, заданными на границе области, их прежние обозначения, мы перепишем краевые условия в такой форме:

$$\vec{v} = 0, \ x \in \Sigma, \ t > 0, \qquad (3.6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = f(x, \zeta t), \ x \in \Sigma, \ t > 0, \qquad (3.7)$$

либо

$$T = h(x, \zeta t), \ x \in \Sigma, \ t > 0, \qquad (3.7').$$

Введение в правые части равенств (3.7), (3.7') параметра ζ вызвано желанием рассмртреть ситуации, когда величины t_f (время релаксации температуры в объеме Ω) и τ (характерное время изменения теплового потока или температуры, заданных на границе Σ) существенно отличаются. Пусть, например, диаметр сосуда $l = 10^{-2}m$, заполняющая его жидкость вода при комнатной температуре, а температура на поверхности сосуда периодически зависит от времени с периодом $\tau = 14c$, тогда $\zeta = t_f/\tau = 50$.

Для замыкания постановки задачи нам осталось переписать в безразмерных переменных начальные условия (1.6)–(1.8):

$$\vec{v} = \vec{v}_0(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0, \qquad (3.8)$$

$$T = T_0(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0, \qquad (3.9)$$

$$p = p_0(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0. \qquad (3.10)$$

Здесь, как и прежде, за безразмерными функциями, задающими начальные распределения скорости, температуры и давления, сохранены их прежние обозначения.

4. Разложение по малому параметру. Ниже строится асимптотическое разложение решения системы (3.3)–(3.5′) по параметру сжимаемости $\delta \to 0$ в предположении, что остальные входящие в нее параметры $\varepsilon, Pr, \xi, \eta, \alpha_1, \alpha_2$ сохраняют конечные значения.

Система (3.3)–(3.5′) является сингулярно возмущенной, поскольку в первом и третьем ее уравнениях малый параметр δ является множителем при эволюционной производной dp/dt. Априори ясно, что представление решения этой системы в виде рядов по степеням δ не в состоянии асимптотически точно удовлетворить всем требуемым условиям. Однако с помощью подобного разложения удается удовлетворить с любой степенной точностью по параметру δ уравнениям системы, всем краевым условиям и первым двум начальным условиям (3.8), (3.9).

Итак, будем искать решение системы (3.3)–(3.5′) в виде формальных степенных рядов

$$\vec{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \vec{v}^{(k)}(x,t), \quad T = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k T^{(k)}(x,t),$$

$$p = \frac{P(t)-1}{\delta} + \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k p^{(k)}(x,t). \tag{4.1}$$

В отличие от $\vec{v}$ и T, функция p имеет сингулярную составляющую, когда $\delta \to 0$. Ее происхождение имеет ясный физический смысл. Величину $\delta^{-1}[P(t)-1]$ можно отождествить со средним по области Ω давлением жидкости. Если суммарный тепловой поток через границу Σ области Ω отличен от нуля, это приводит к изменению средней по Ω температуры жидкости. Поскольку стенки полости неподвижны и непроницаемы, то масса заключенной в ней жидкости сохраняется. В силу уравнения состояния (3.2) и предположения о малости параметра δ, конечные изменения среднейтемпературы будут приводить к изменениям среднего давления на величину порядка δ^{-1} при $\delta \to 0$.

Подстановка рядов (4.1) в уравнения (3.3)–(3.5′) приводит к рекуррентной системе для функций $\vec{v}^{(k)}, T^{(k)}, p^{(k)}\,(k = 0, 1, \ldots)$. Система, которой удовлетворяют функции $\vec{v}^{(0)}, T^{(0)}, p^{(0)}$, будет нелинейной. Все последующие тройки функций $\vec{v}^{(j)}, T^{(j)}, p^{(j)}\,(j = 1, 2, \ldots)$. определяются из линейных систем уравнений с однородными краевыми и начальными условиями. Поскольку наибольший интерес представляют главные члены разложений (4.1), в дальнейшем мы сосредоточимся на системе, которой подчиняются функции $\vec{v}^{(0)}, T^{(0)}, p^{(0)}$. Подставляя (4.1) в уравнения (3.3)–(3.5′) и переходя к пределу при $\delta \to 0$, мы получаем:

$$\frac{\dot{P}}{P} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon T^{(0)}}(T_t^{(0)} + \vec{v}^{(0)} \cdot \nabla T^{(0)}) + \mathrm{div}\vec{v}^{(0)} = 0, \tag{4.2}$$

$$\frac{P}{1+\varepsilon T^{(0)}}(\vec{v}_t^{(0)} + \vec{v}^{(0)} \cdot \nabla \vec{v}^{(0)}) = Pr[\nabla(-p^{(0)} + \xi \mathrm{div}\vec{v}^{(0)}) + \Delta \vec{v}^{(0)}] + \frac{\eta Pr P \vec{e}}{1+\varepsilon T^{(0)}}, \tag{4.3}$$

$$\frac{P}{1+\varepsilon T^{(0)}}(T_t^{(0)} + \vec{v}^{(0)} \cdot \nabla T^{(0)}) - \dot{P}\frac{\alpha_2 + \varepsilon \alpha_1 T^{(0)}}{1+\varepsilon T^{(0)}} = \Delta T^{(0)}, \tag{4.4}$$

где через $\dot{P}$ обозначена производная функции $P(t)$.

Сформулируем начально–краевую задачу для системы (4.2) –(4.4). Для определенности будем далее считать, что на поверхности Σ задано условие второго рода для температуры. Вследствие (3.6), (3.7), (4.1) имеем:

$$\vec{v}^{(0)} = 0, \quad x \in \Sigma, \quad t > 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial n} = f(x, \zeta t), \quad x \in \Sigma, \quad t > 0, \tag{4.6}$$

Условия (3.8), (3.9) приводят к начальным условиям для функций $\vec{v}^{(0)}, T^{(0)}$,

$$\vec{v}^{(0)} = \vec{v}_0(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0, \tag{4.7}$$

$$T^{(0)} = T_0(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0. \tag{4.8}$$

Начальное условие для давления $p^{(0)}$ не ставится, так как система (4.2)–(4.4) не является эволюционной относительно $p^{(0)}$. Кроме того, соотношения (4.2)–(4.8) определяют функцию $p^{(0)}$ с точностью до произвольного слагаемого, зависящего от времени. (Аналогичным произволом обладают функции $p^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$). Распоряжаясь этим произволом, мы можем обеспечить выполнение соотношений

$$\int\limits_{\Omega} p^{(k)}(x,t)dx = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

при любом $t \geq 0$. При такой нормировке $p^{(k)}$ величина $\delta^{-1}[P(t)-1]$ будет в точности совпадать со средним давлением жидкости в области Ω для любого $t \geq 0$.

Для замыкания постановки начально–краевой задачи нам следует вывести уравнение, которому подчиняется функция $P(t)$. С этой целью умножим уравнение (4.2) на P, а уравнение (4.4) – на ε, и сложим полученные равенства. Это дает:

$$[1-\frac{\varepsilon(\alpha_2+\varepsilon\alpha_1 T^{(0)})}{1+\varepsilon T^{(0)}}]\dot{P}+\operatorname{div}(P\vec{v}^{(0)}-\varepsilon\nabla T^{(0)})=0.$$

Интегрируя последнее соотношение по области Ω и учитывая условия (4.5), (4.6), мы приходим к требуемому уравнению:

$$\dot{P}\int\limits_{\Omega}[1-\frac{\varepsilon(\alpha_2+\varepsilon\alpha_1 T^{(0)})}{1+\varepsilon T^{(0)}}]dx=\varepsilon\int\limits_{\Sigma} f d\Sigma. \tag{4.9}$$

В качестве начального условия для (4.9) мы выберем

$$P(0)=1, \tag{4.10}$$

что вследствие (4.1) согласуется с естественным предположением о конечности значений функции $p_0(x)$ при $\delta \to 0$.

Задача (4.2)–(4.10) представляет достаточно сложный объект для исследования. Достаточно сказать, что в предельном случае $\varepsilon = 0$ (тогда $P = 0$ в силу (4.9), (4.10)) соотношения (4.2), (4.3) превращаются в уравнения Навье–Стокса несжимаемой жидкости. Как известно, в общем трехмерном случае вопрос однозначной разрешимости "в целом" начально–краевой задачи для этой системы до сих пор остается открытым. Поэтому для задачи (4.2)–(4.10) представляют интерес локальные теоремы существования. Сформулируем одну из них.

Предполагая данные задачи достаточно гладкими, подчиним их локальным условиям согласования

$$\vec{v}_0 = 0, \quad x \in \Sigma, \tag{4.11}$$

$$f_t(x,0)=\frac{\partial G}{\partial n}, \quad x \in \Sigma, \tag{4.12}$$

$$[1-\frac{\varepsilon(\alpha_2+\varepsilon\alpha_1 T_0)}{1+\varepsilon T_0}]\dot{P}_0+\operatorname{div}(\vec{v}_0-\varepsilon\nabla T_0)=0, \quad x \in \Omega, \tag{4.13}$$

где обозначено

$$\dot{P}_0 = \varepsilon\{\int\limits_{\Omega}[1 - \frac{\varepsilon(\alpha_2 + \varepsilon\alpha_1 T_0)}{1 + \varepsilon T_0}]dx\}^{-1}\int\limits_{\Sigma} f(x,0)d\Sigma, \qquad (4.13)$$

$$G(x) = (1 + \varepsilon T_0)\Delta T_0 - \vec{v}_0 \cdot \nabla T_0 + \dot{P}_0(\alpha_2 + \varepsilon\alpha_1 T_0) \equiv T_t^{(0)}(x,0),$$

и нелокальному условию, формулируемому в терминах функции $\pi_0(x) = p^{(0)}(x,0)$. Эта функция является решением краевой задачи

$$\mathrm{div}[(1 + \varepsilon T_0)\nabla\pi_0] = \mathrm{div}\vec{F} - Pr^{-1}PH, \quad x \in \Omega,$$

$$(1 + \varepsilon T_0)\frac{\partial \pi_0}{\partial n} = \vec{F} \cdot \vec{n}, \quad x \in \Sigma,$$

где введены обозначения

$$\vec{F} = (1 + \varepsilon T_0)(\xi\nabla\mathrm{div}\vec{v}_0 + \Delta\vec{v}_0) + \eta P\vec{e} - Pr^{-1}P\vec{v}_0 \cdot \nabla\vec{v}_0,$$

$$H = \dot{P}_0\left[G\frac{\varepsilon^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{(1 + \varepsilon T_0)^2} - \mathrm{div}\vec{v}_0\right] - \ddot{P}_0\left[1 - \frac{\varepsilon(\alpha_2 + \varepsilon\alpha_1 T_0)}{1 + \varepsilon T_0}\right] \equiv \mathrm{div}\vec{v}_t^{(0)}(x,0),$$

$$\ddot{P}_0 = \left\{\int\limits_{\Omega}\left[1 - \frac{\varepsilon(\alpha_2 + \varepsilon\alpha_1 T_0)}{1 + \varepsilon T_0}\right]dx\right\}^{-1} \times \left[\varepsilon\int\limits_{\Sigma} f_t(x,0)d\Sigma - \dot{P}_0\varepsilon^2(\alpha_1 - \alpha_2)\int\limits_{\Omega}\frac{Gdx}{(1 + \varepsilon T_0)^2}\right].$$

Требуемое нелокальное условие имеет вид

$$(1 + \varepsilon T_0)[\nabla\pi_0 - (\nabla\pi_0 \cdot \vec{n})\vec{n}] = \vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{n})\vec{n}, \quad x \in \Sigma. \qquad (4.14)$$

Оно аналогично условию В.А. Солонникова [9], возникающему при исследовании разрешимости начально–краевой задачи для системы Стокса в классах гладких функций.

Предложение 1. *Предположим, что поверхность Σ принадлежит классу Гёльдера $C^{3+\alpha}, 0 < \alpha < 1$, а входящие в условия (4.6)–(4.8) функции удовлетворяют требованиям гладкости $f \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Sigma \times [\infty))$, $\vec{v}_0 \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $T_0 \in C^{3+\alpha}(\bar{\Omega})$ и условиям согласования (4.11)–(4.14). Тогда найдется такое $N > 0$, что* *задача (4.2)–(4.10) имеет решение* $\vec{v}^{(0)} \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_N)$, $T^{(0)} \in C^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\bar{Q}_N)$, $\nabla p^{(0)} \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_N)$, $P \in C^{2+\alpha/2}[0,N]$, *где обозначено* $Q_N = \{x,t : x \in \Omega,\ 0 < t < N\}$. *При этом функции* $\vec{v}^{(0)}, T^{(0)}, P$ *определены однозначно, а функция* $p^{(0)}$ *определяется однозначно при дополнительном условии*

$$\int\limits_{\Omega} p^{(0)} dx = 0, \quad 0 \le t \le N. \tag{4.15}$$

Далее мы будем называть уравнения (4.2)–(4.4), (4.9) уравнениями конвекции слабосжимаемой жидкости. Они являются естественным обобщением уравнений конвекции изотермически несжимаемой жидкости, исследованными в [10].

При подстановке выражений $\vec{v} = \vec{v}^{(0)}$, $T = T^{(0)}$, $p = \delta^{-1}(P - 1) + p^{(0)}$ в систему (3.3)–(3.5) получаются невязки порядка $O(\delta)$ при $\delta \to 0$. Краевые условия (3.6), (3.7) и начальные условия (3.8), (3.9) при этом выполняются точно. Мы вправе ожидать, что построенное приближенное решение аппроксимирует с тем же порядком при $\delta \to 0$ решение исходной начально–краевой задачи (3.3)–(3.10) на больших временах.

Поскольку полученная в процессе решения задачи (4.2)–(4.10), (4.15) функция $\pi_0(x) = p^{(0)}(x,0)$ не обязана совпадать с функцией $p_0(x)$, задающей начальное распределение давления в исходной задаче, то формальная асимптотика (4.1) не работает на малых временах. Описание переходного процесса, сопровождающегося распространением нелинейных акустических волн высокой частоты в вязкой теплопроводной жидкости, является очень сложной задачей, в настоящее время еще не решенной. Определенное представление об этом процессе можно получить, изучая его линейную модель. Мы коротко обсудим возникающие здесь эффекты в конце статьи.

5. Уравнения микроконвекции изотермически несжимаемой жидкости. Так называется жидкость, плотность которой зависит лишь от температуры. Уравнение состояния изотермически несжимаемой жидкости мы будем задавать в форме

$$\rho = \rho_0(1 + \varepsilon T)^{-1}. \tag{5.1}$$

Равенство (5.1) получается из (3.2) в пределе $\delta \to 0$.

Соотношение (5.1) означает, что удельный объем жидкости линейно зависит от температуры. Как уже отмечалось в разделе 1, ввиду малости числа Буссинеска $\varepsilon = \beta\theta_*$, различия в аппроксимации уравнения состояния $\rho(T)$ линейной функцией или функцией вида (5.1) несущественны. Вместе с тем, среди многих возможных аппроксимаций функции $\rho(T)$ зависимость (5.1) обладает рядом замечательных свойств, отмеченных в [1, 5, 10]. В частности, теплоемкость при постоянном давлении c_p изотермически несжимаемой жидкости не зависит от давления в том и только в том случае, когда уравнение состояния имеет вид (5.1).

Другое важное свойство выбранного уравнения состояния состоит в возможности радикального упрощения уравнений конвекции изотермически несжимаемой жидкости. Прежде чем приступить к такому упрощению, мы получим необходимое условие разрешимости начально–краевой задачи для указанных уравнений.

Полагая в уравнениях (3.3)–(3.5) $\delta = 0$ (что соответствует независимости плотности жидкости от давления), мы получаем:

$$-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon T} \cdot \frac{dT}{dt} + \mathrm{div}\vec{v} = 0, \tag{5.2}$$

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon T} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = Pr[\nabla(-p + \xi \mathrm{div}\vec{v}) + \Delta\vec{v}] + \frac{\eta Pr}{1+\varepsilon T}\vec{e}, \tag{5.3}$$

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon T} \cdot \frac{dT}{dt} = \Delta T. \tag{5.4}$$

К системе (5.2)–(5.4) добавляются краевые условия (3.6), (3.7) и начальные условия (3.8), (3.9).

Из (5.2), (5.4) следует, что

$$\mathrm{div}(\vec{v} - \varepsilon\nabla T) = 0. \tag{5.5}$$

Интегрируя последнее равенство по области Ω и используя условия (3.6), (3.7), мы заключаем:

$$\int\limits_{\Sigma} f d\Sigma = 0, t \geq 0. \tag{5.6}$$

Это и есть необходимое условие разрешимости задачи (5.2)–(5.4), (3.6)–(3.9). Физическая трактовка условия (5.6) очень наглядна. Для изотермически несжимаемой жидкости, целиком заполняющей ограниченную полость, ненулевой суммарный поток тепла через ее границу вызывает поток массы, что невозможно, если граница полости — недеформируемая непроницаемая стенка.

Эти же рассуждения показывают, что задача о конвекции изотермически несжимаемой жидкости в замкнутом объеме становится лишь условно корректной, если условие (3.7) для температуры заменить условием первого рода (3.7') или условием третьего рода. Модель конвекции слабосжимаемой жидкости свободна от указанного недостатка. Заметим еще, что при выполнении условия (5.6) уравнения (5.2)–(5.4) в точности совпадают с уравнениями (4.2)–(4.4), которым удовлетворяют главные члены разложения (4.1). В этом случае, согласно (4.9), (4.10), $P = 1$, и в разложении (4.1) для давления отсутствует сингулярная составляющая.

Вернемся к системе (5.2)–(5.4). Вытекающее из него равенство (5.5) означает, что вектор $\vec{v}-\varepsilon\nabla T$ является соленоидальным. Это наводит на мысль перейти в изучаемой системе к новым искомым функциям $\vec{w}, q$, определенным соотношениями

$$\vec{w} = \vec{v} - \varepsilon\nabla T, \quad q = p - \varepsilon(1 + \xi - Pr^{-1})\Delta T. \tag{5.7}$$

В новых обозначениях система (5.2) приниает вид

$$\vec{w}_t + \vec{w}\cdot\nabla\vec{w} + \varepsilon[\nabla T\cdot\nabla\vec{w} + (\vec{w}\cdot\nabla)\nabla T - \nabla(\vec{w}\cdot\nabla T)] + \varepsilon^2[(\nabla T\cdot\nabla)\nabla T +$$

$$+\Delta T\nabla T - \nabla(|\nabla T|^2)] = Pr(1+\varepsilon T)(-\nabla q + \Delta\vec{w}) + \eta Pr\vec{e}, \tag{5.8}$$

$$\operatorname{div}\,\vec{w} = 0, \tag{5.9}$$

$$T_t + \vec{w}\cdot\nabla T + \varepsilon|\nabla T|^2 = (1+\varepsilon T)\Delta T. \tag{5.10}$$

Уравнения (5.8)–(5.10) были выведены в [5] и впоследствии получили название уравнений микроконвекции. В.К.Андреев показал [11], что уравнение импульса (5.8) можно преобразовать к более компактному виду,

$$\vec{w}_t + \vec{w}\cdot\nabla\vec{w} + \varepsilon\mathrm{rot}\,\vec{w}\times\nabla T + \varepsilon^2\mathrm{div}(\nabla T\otimes\nabla T -$$

$$-|\nabla T|^2 I) = Pr(1+\varepsilon T)(-\nabla q + \Delta\vec{w}) + \eta Pr\vec{e}. \tag{5.11}$$

Если в уравнениях (5.9) (5.11) заменить T на c, где c – концентрация пассивной примеси, мы получим уравнения, описывающие концентрационную конвекцию в условиях микрогравитации или в микромасштабах. Их вывод был осуществлен в работе [7]. Для системы (5.9)–(5.11) наиболее естественной является начально–краевая задача

$$\vec{w} = -\varepsilon \nabla T, \quad x \in \Sigma, \quad t > 0, \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = f(x, \zeta t), \quad x \in \Sigma, \quad t > 0, \tag{5.13}$$

$$\vec{w} = \vec{w}_0(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0, \tag{5.14}$$

$$T = T_0(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0, \tag{5.15}$$

Краевое условие (5.12) – это условие прилипания, переписанное в терминах модифицированной скорости $\vec{w}$. Функция $\vec{w}_0(x)$, входящая в начальное условие (5.14), в силу (3.8), (5.7) равна $\vec{v}_0(x) - \varepsilon \nabla T_0(x)$.

Далее предполагается, что $\vec{w}_0 = \varepsilon \vec{u}_0$, где функция $\vec{u}_0(x)$ не зависит от ε. В этом случае начальное поле скоростей $\vec{v}_0 = \varepsilon(\vec{u}_0 + \nabla T_0)$ при $\varepsilon \to 0$ будет иметь тот же порядок, что и характерная скорость всплывания неравномерно нагретой жидкости в поле тяжести, а также характерная скорость всестороннего расширения жидкости под действием локального источника тепла (напомним, что при $\eta \sim 1$ обе последних величины имеют одинаковый порядок). Сделанное предположение позволяет разыскивать решение задачи (5.9)–(5.15) в виде рядов по степеням малого параметра ε (числа Буссинеска):

$$T = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i T^{(i)}(x,t), \quad \vec{w} = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \vec{w}^{(i)}(x,t), \quad q = \eta \vec{e} \cdot \vec{x} + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i q^{(i)}(x,t). \tag{5.16}$$

Функция $T^{(0)}$ (она имеет здесь иной смысл, чем в предыдущем разделе) определяется как решение второй начально–краевой задачи для линейного однородного уравнения теплопроводности. Функции $\vec{w}^{(i)}, q^{(i)}$ и функции $T^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ находятся из последовательно решаемых первой начально–краевой задачи для системы Стокса и второй начально–краевой задачи для линейного неоднородного уравнения теплопроводности. Из результатов В.А.Солонникова [9, 12] следует разрешимость возникающих задач в классах Гёльдера при выполнении естественных условий гладкости и согласования, накладываемых на поверхность Σ и функции $f, \vec{w}_0, T_0$. Эти условия очень похожи на те, что указаны в формулировке Предложения 1. Функции $\vec{w}^{(i)}, T^{(i)}$ определены единственным образом, а для однозначного определения функций достаточно потребовать, чтобы среднее по области Ω значение этих функций равнялось нулю при любом $t > 0$.

Сходимость разложений (5.16) в подходящих гёльдеровских нормах при малых значениях параметра ε была установлена в [13]. В процессе доказательства сходимости существенную роль играет соленоидальность вектора модифицированной скорости $\vec{w}$. Это же свойство позволяет использовать переменные "функция тока – завихренность" для построения эффективных алгоритмов численного решения двумерных задач микроконвекции. Ряд таких задач был исследован численно в [14–16]. Результаты этих работ обнаружили не только количественные, но и качественные различия в поведении полей скорости, рассчитанных по модели микроконвекции и традиционной модели Обербека–Буссинеска, если параметр микроконвекции $\eta = gl^3/\nu\chi$ порядка единицы.

В заключение этого раздела отметим, что уравнения (5.9)–(5.11) допускают широкую группу преобразований [11]. На ее основе в работах [6, 17, 18] построен ряд точных решений уравнений микроконвекции.

6. Уравнения Обербека–Буссинеска. В предыдущих разделах на основе точных уравнений движения вязкой сжимаемой теплопроводной жидкости (3.3)–(3.5') были сформулированы две приближенные модели конвекции. Одна из них (система (4.2)–(4.4), (4.9)) выведена в предположении слабой сжимаемости жидкости. При этом в результирующих уравнениях "отфильтрованы" высокочастотные акустические колебания (их следует учитывать лишь на начальном этапе движения), и вклад сжимаемости носит интегральный характер. Если в системе (4.2)–(4.4) положить $P = 1$, что соответствует изотермически несжимаемой жидкости, и перейти к модифицированным скорости и давлению по формулам (5.7), мы придем к уравнениям микроконвекции (5.9)–(5.11). В результате возникает своеобразная иерархия моделей в теории конвекции. Заключительным звеном в этой иерархии является классическая модель Обербека–Буссинеска. Уравнения этой модели легко могут быть получены из (5.9)–(5.11) с помощью предельного перехода $\varepsilon \to 0,\ \eta \to \infty$.

Уравнение неразрывности (5.9) при этом сохраняет прежний вид,

$$\operatorname{div}\vec{w} = 0, \tag{6.1}$$

а уравнение (5.10) в пределе $\varepsilon \to 0$ переходит в уравнение переноса тепла в несжимаемой жидкости

$$T_t + \vec{w} \cdot \nabla T = \Delta T, \tag{6.2}$$

в котором отсутствует член с диссипативной функцией (предположение о малости указанного члена является одним из основных в классической теории конвекции). В уравнении импульса (5.11) сначала сделаем подстановку

$$q = \eta \vec{e} \cdot \vec{x} + r$$

(т.е. выделим из давления гидростатическую составляющую), а затем устремим ε к нулю, а параметр η – к бесконечности, так что их произведение $\varepsilon\eta = \beta\theta_* g l^3/\nu\chi$ (число Рэлея) сохраняет постоянное положительное значение. В результате получаем:

$$\vec{w}_t + \vec{w} \cdot \nabla \vec{w} = Pr(-\nabla r + \Delta \vec{w} - RaT\vec{e}). \tag{6.3}$$

С точностью до обозначений система (6.1)–(6.3) совпадает с системой уравнений Обербека–Буссинеска [1,8]. Заметим также, что вследствие (5.7) при $\varepsilon = 0$ модифицированная скорость $\vec{w}$ превращается в обычную $\vec{v}$; то же самое относится и к модифицированному давлению.

7. Линейная модель переходного процесса. Как уже отмечалось в разделе 4, построенное там приближенное решение системы (3.3)–(3.5′) не удовлетворяет начальному условию для давления, так как входящая в него функция $p_0(x)$, вообще говоря, не совпадает с функцией $\pi_0(x) = p^{(0)}(x, 0)$ (последняя определяется по начальным значениям скорости $\vec{v}_0(x)$ и температуры $T_0(x)$ как решение эллиптической краевой задачи, сформулированной в разделе 4). Однако, если предположить, что функция $\Pi_0(x) = p_0(x) - \pi_0(x)$ мала, и учесть, что в приближенном решении начальные условия для скорости и температуры удовлетворяются точно, то можно линеаризовать уравнения (3.3)–(3.5′) вблизи состояния изотермического равновесия и рассмотреть следующую линейную начально–краевую задачу:

$$\delta \Pi_t - \varepsilon \Xi_t + \mathrm{div} \vec{U} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{7.1}$$

$$\vec{U}_t = Pr[\nabla(-\Pi + \xi \mathrm{div} \vec{U}) + \Delta \vec{U}], \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{7.2}$$

$$\Xi_t - \delta\alpha_2 \Pi_t = \Delta \Xi, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{7.3}$$

$$\vec{U} = 0, \quad x \in \Sigma, \quad t > 0, \tag{7.4}$$

$$\frac{\partial \Xi}{\partial n} = 0, \quad x \in \Sigma, \quad t > 0, \tag{7.5}$$

$$\vec{U} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t = 0, \tag{7.6}$$

$$\Xi = 0, \quad x \in \Omega, \quad t = 0, \tag{7.7}$$

$$\Pi = \Pi_0(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0, \tag{7.8}$$

Здесь символы $\vec{U}, \Xi$ и Π обозначают возмущения скорости, темепературы и давления сооветственно. Далее предполагается, что $\Pi_0 \in W_2^2(\Omega)$.

Несмотря на линейность, задача (7.1)–(7.8) все еще достаточно сложна ввиду наличия малого параметра δ перед производной Π_t. Тем не менее, качественное представление о поведении ее решения при $\delta \to 0$ можно получить, используя разложение вектора $\vec{U}$ на потенциальную и соленоидальную составляющие:

$$\vec{U} = \nabla\varphi + \vec{V}, \quad \mathrm{div}\vec{V} = 0.$$

Опуская несложные вычисления, выпишем соотношения, которым удовлетворяет функция φ:

$$\delta\frac{\partial}{\partial t}[\frac{\partial}{\partial t} - (\xi+1)\Delta][(1-\alpha_2\varepsilon)\varphi_t - \Delta\varphi] - (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)\Delta\varphi = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{7.9}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial n} = 0, \quad x \in \Sigma, \quad t > 0, \tag{7.10}$$

$$\varphi = 0, \quad \varphi_t = -\Pi_0(x), \quad \varphi_{tt} = -(\xi+1)\Delta\Pi_0, \quad x \in \Omega, \quad t = 0, \tag{7.11}$$

При известном φ функции Π и Ξ даются явными выражениями:

$$\Pi = (\xi+1)\Delta\varphi - \varphi_t, \quad \Xi = \varepsilon^{-1}\{\delta[(\xi+1)\Delta\varphi - \varphi_t] + \int\limits_0^t \Delta\varphi d\tau\}.$$

Решение задачи (7.9)–(7.11) ищется в виде ряда Фурье

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\varphi_k(x),$$

где $\{\varphi_k\}$ – ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора Лапласа с условием Неймана, т.е. $\Delta\varphi_k =$

$-\mu_k^2\varphi_k$, $x \in \Omega$; $\frac{\partial\varphi_k}{\partial n} = 0$, $x \in \Sigma$, а $-\mu_k^2$ – соответствующие собственные числа, $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$. Без потери общности можно считать, что среднее по Ω значение функции Π_0 равно нулю. Это приводит к отсутствию в разложении для φ члена с функцией $\varphi_0 = \mathrm{const}$, отвечающего собственному значению $\mu_0 = 0$. Функции $A_k(t)$ находятся из решения задач Коши для линейного обыкновенного уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами. Уравнение для определения характеристических чисел λ имеет вид

$$\delta\lambda[\lambda + (\xi+1)\mu_k^2][(1-\alpha_2\varepsilon)\lambda + \mu_k^2] + (\lambda + \mu_k^2)\mu_k^2 = 0. \tag{7.12}$$

Уравнение (7.12) содержит два малых параметра: δ и ε. Если $\varepsilon = 0$, оно распадается на линейное и квадратное. Это позволяет получить представление корней (7.12) в форме

$$\lambda_{1,2} = \{-\frac{(\xi+1)^2\mu_k^2}{2} \pm \mu_k[\frac{(\xi+1)^2\mu_k^2}{4} - \frac{1}{\delta}]^{1/2}\}[1 + O(\varepsilon)],$$

$$\lambda_3 = -\mu_k^2[1 + O(\varepsilon)].$$

Корень $\lambda_3 < 0$ соответствует тепловой моде, а корни λ_1 и λ_2 – акустическим модам. Вычисления показывают, что при $\delta \to 0$ вклад тепловой моды в амплитуду $A_k(t)$ каждой из гармоник, по которым разлагается функция φ, имеет порядок δ, в то время как акустические моды вносят основной вклад $O(\delta^{1/2})$. Декремент затухания тепловой моды не зависит от δ при $\delta \to 0$. Зависимость от δ характеристических чисел λ_1 и λ_2 весьма существенна. Если $\delta < \delta_0 = 4[(\xi+1)\mu_1]^{-2}$, где $-\mu_1^2$ – наименьшее по модулю собственное число оператора Лапласа, то найдется такое натуральное $n = n(\delta)$, что при $k < n$ корни $\lambda_{1,2}$ имеют ненулевую мнимую часть, и $J_m\lambda_{1,2} = O(\delta^{-1/2})$, а $Re\lambda_{1,2} < 0$ и $Re\lambda_{1,2} = O(1)$ при $\delta \to 0$. Если же $k \geq n$, то корни λ_1 и λ_2 вещественные и отрицательные, причем $\lambda_2 = O(\delta^{-1})$ при $\delta \to 0$, в то время как неулучшаемая равномерная по $k \geq n$ оценка первого корня имеет вид $\lambda_1 = O(1)$, но вклад соответствующей ему моды в амплитуду $A_k(t)$ имеет порядок δ, когда $\delta \to 0$.

Таким образом, решение задачи (7.9)–(7.11) допускает представление

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} B_k(t)\varphi_k(x) + \omega(x,t),$$

где B_k – быстроосциллирующие функции t, а норма функции $\omega(x,\cdot)$ в пространстве $W_2^2(\Omega)$ (или более сильная ее норма, если функция $\Pi_0(x)$ обладает большей гладкостью) оценивается величиной $C\delta\exp(\neq t)$ равномерно по $t \geq 0$, где положительные постоянные $\neq$ и C не зависят от δ при $\delta \to 0$. При этом $n(\delta) \to \infty$, когда $\delta \to 0$. Каждая из функций $B_k(t)$ экспоненциально убывает при $t \to \infty$, однако при стремлении δ к нулю эти функции не имеют поточечных пределов — в этом смысле они очень похожи на функции $\exp(-a_k t) \times \sin(b_k\delta^{-1/2}t)$, где a_k, b_k не зависят от δ. Тем не менее, при $\delta \to 0$ существует слабый предел сужения функций $B_k(t)$ на любой интервал $[0, N]$, и этот предел равен нулю.

Итак, мы определили потенциальную составляющую вектора $\vec{U}$, а вместе с ней и функции Π и Ξ. Чтобы удовлетворить условию прилипания (7.6), вводится соленоидальная составляющая $\vec{V}$ и соответствующее давление Q. Эти функции образуют решение системы Стокса,

$$\vec{V}_t = Pr(-\nabla Q + \Delta\vec{V}), \quad \mathrm{div}\vec{V} = 0, \quad x \in \Omega,\ t > 0, \tag{7.13}$$

для которой ставится следующая начально–краевая задача:

$$\vec{V} = \vec{a}(x,t), \quad x \in \Sigma,\ t > 0, \tag{7.14}$$

$$\vec{V} = 0, \quad x \in \Omega,\ t = 0. \tag{7.15}$$

Функция $\vec{a}$ определена равенством $\vec{a} = -\nabla\varphi_{|\Sigma}$ и в силу (7.10) имеет нулевую нормальную компоненту на поверхности Σ. Отсюда и из (7.13), (7.15) вытекает, что функция $Q(x,0)$ как решение однородной задачи Неймана для уравнения Лапласа равняется постоянной, и, не нарушая общности, эта постоянная может быть взята равной нулю. Поэтому суммарное давление в линеаризованной задаче $\Pi + Q$ удовлетворяет исходному начальному условию (7.8).

Решение задачи (7.13)–(7.15) может быть получено в виде разложения по собственным функциям оператора Стокса [19] после введения вспомогательной функции $\vec{b}(x,t)$, осуществляющей соленоидальное продолжение вектора $\vec{a}$ в область Ω. Не вдаваясь в детали, скажем лишь, что быстрые осцилляции функции $\vec{a}$ по времени при малых δ порождают осцилляции функций $\vec{V}$ и Q. Однако эти осцилляции демпфируются вязкостью. Это проявляется не только в относительно медленном затухании решения задачи

(7.13)–(7.15) со временем, но и в локализации высокочастотных колебаний вблизи границы области Ω (характерная толщина нестационарного пограничного слоя имеет порядок $\delta^{1/4}$ при $\delta \to 0$).

8. Заключительные замечания. а). Как уже отмечалось, асимптотическое решение линейной задачи (7.1)–(7.8) не имеет поточечного предела при $\delta \to 0$. Тем не менее, его можно рассматривать как главный член внутреннего (т.е. описывающего начальный этап конвекции) разложения решения линеаризованных уравнений движения (3.3)–(3.5′), если расширить традиционный принцип согласования асимптотических разложений до согласования на функционалах. Действительно, при $\delta \to 0$ для любой пробной функции $\sigma(t) \in C_0^\infty[0,\infty)$ верно соотношение

$$\int_0^\infty \sigma(t)W(x,t)dt = O(\delta), \quad x \in \Omega,$$

где в качестве W можно взять компоненты $U_k (k = 1, 2, 3)$ вектора $\vec{U}, \Pi + Q$ или Ξ.

б). Причиной появления высокочастотных акустических колебаний, рассмотренных в разделе 7, является несогласованность начального распределения давления $p_0(x)$ и того, которое получится в процессе решения задачи (4.2)–(4.10), (4.15), т.е. $\pi_0(x) = p^{(0)}(x,0)$. Чтобы их избежать, достаточно положить $p_0(x) = \pi_0(x)$. Это приведет к дифференциальному соотношению между функциями $\vec{v}_0, T_0, p_0$, задающими начальное состояние жидкости, в которое также войдут средние по поверхности Σ значения функций $f(x,0)$ и $f_t(x,0)$. В простейшем случае однородных начальных условий (3.8)–(3.10) упомянутое соотношение будет выполнено, если

$$\int_\Sigma f_t(x,0)d\Sigma = 0,$$

т.е. если нагрев жидкости, первоначально находившейся в покое с постоянными температурой и давлением, начинается плавно.

в). Следует отметить, что процедура "фильтрации звука" в уравнениях конвекции осуществлялась и ранее [20–23]. Однако в указанных работах речь шла о конвекции в газах, где предположение о слабой сжимаемости среды не является естественным. Поэтому операции разделения давления на среднее по области течения (что приводит к появлению "источникового" члена в уравнении неразрывности типа выражения $P^{-1}\dot{P}$ в (4.2)) и неоднородную составляющую (аналог функции $p^{(0)}$ в уравнении импульса (4.3)) затруднительно придать асиптотический смысл.

г). Из соотношений (4.9), (4.10) вытекает следующее представление для среднего давления $P(t)$, входящего в уравнения конвекции слабосжимаемой жидкости (4.2)–(4.4):

$$P = 1 + \frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int\limits_0^t (\int\limits_\Sigma f d\Sigma) dt' + O(\varepsilon^2)$$

при $\varepsilon \to 0$ (здесь через $|\Omega|$ обозначен объем области Ω). Это позволяет упростить указанные уравнения, если ограничиться при их решении членами нулевого и первого порядка относительно ε. Напомним, что в типичных ситуациях (см. раздел 3) параметр ε имеет порядок 10^{-3}, так что пренебрежение величинами $O(\varepsilon^2)$ более чем оправдано с точки зрения приложений.

д). В разделе 4 была рассмотрена начально–краевая задача для системы (4.2)–(4.4) с краевым условием 2-го рода для температуры (4.6). Несколько сложнее рассматривается задача с условием 1-го рода (3.7′). В этом случае правую часть уравнения (4.9) следует заменить на

$$\varepsilon \int\limits_\Sigma \frac{\partial T^{(0)}}{\partial n} d\Sigma \equiv F[P(t)],$$

где F – оператор, ставящий в соответствие функции $P(t)$ среднее (с точностью до постоянного множителя) значение теплового потока на поверхности Σ, вычисленное на момент t по решению задачи (4.2)–(4.5), (3.7), (4.7)–(4.10). Оператор F будет непрерывным (и даже компактным) в пространстве $C^{1+\alpha/2}[0, N]$, если N достаточно мало́. Это позволяет доказать локальную однозначную разрешимость указанной задачи.

е). В противоположность этому, нестационарная задача для уравнений микроконвекции изотермически несжимаемой жидкости с краевым условием 1-го рода для температуры (3.7′) при произвольно заданной функции h не имеет решения, так как мы не можем априори обеспечить необходимое условие ее разрешимости

$$\int\limits_\Sigma \frac{\partial T}{\partial n} d\Sigma = 0, \quad t > 0,$$

вытекающее из (5.5), (3.6). Вместе с тем, стационарная задача для уравнений микроконвекции оказывается поставленной корректно как при температурном условии 2-го, так и 1-го рода на границе области Ω [24].

ж). Корректность начально–краевой задачи для уравнений изотермически несжимаемой жидкости можно обеспечить, видоизменив ее постановку. Один из таких способов предложен В. И. Юдовичем, который рассмотрел задачу о конвекции в замкнутом вертикальном цилиндрическом сосуде [10]. Нижнее основание и боковая поверхность сосуда недеформируемы, а верхнее основание является упругой пластиной. Такая постановка нечувствительна к характеру краевого условия для температуры.

Данная работа выполнена в рамках комплексного интеграционного проекта № 5-2000, поддержанного грантом СО РАН. Постановки рассмотренных в ней задач и отдельные результаты работы обсуждались с В. К. Андреевым, О. Н. Гончаровой, Э. Гренье, П. Секки, Е. Б. Соболевой, В. А. Солонниковым, Дж. М. Хомси, В. И. Юдовичем. Всем им автор выражает свою признательность.

Литература

1. Д. Джозеф, *Устойчивость движений жидкости.* М. Мир, 1981, с. 638.
2. J. Serrin, *On the uniqueness of compressible fluid motion.* — Archive Rat. Mech. Anal **3** no. 3 (1959), 271–288.
3. A. Tani, *On the first initial boundary-value problem of compressible viscous fluid motion.* — Publ. Res. Math. Sci. Kyoto Univ. **13** (1977), 193–253.
4. J. M. Mihaljan, *A rigorous exposition of the Boussinesq approximation applicable to a thin layer of fluid.* — Astrophys. J. **136** no. 3 (1962), 1126–1144.
5. В. В. Пухначёв, *Модель конвективного движения при пониженной гравитации.* — Моделирование в механике. СО РАН, Ин-т теорет. и прикл. механики **6 (23)**, № 4 (1992), 47–56.
6. В. В. Пухначёв, *Микроконвекция в вертикальном слое.* — Изв. РАН. МЖГ **5** (1994), 76–84.
7. P. S. Perera, R. F. Sekerka, *Nonsolenoidal flow in a liquid diffusion couple.* — Phys. Fluids **9** no. 2 (1997), 376–391.
8. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости.* М., Наука, 1972, с. 392.
9. В. А. Солонников, *Дифференциальные свойства решения первой начально-краевой задачи для линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса.* — Труды Математического института им. В.А. Стеклова. **73** (1964), 221–291.
10. В. И. Юдович, *Конвекция изотермически несжимаемой жидкости.* Деп. в ВИНИТИ 28.05.99, No. 1699–В99.

11. В. К. Анреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначёв, А. А. Родионов, *Применение теоретико–групповых методов в гидродинамике*. Новосибирск, Наука, 1994, с. 319.
12. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. М., Наука, 1967, с. 736.
13. V. V. Pukhnachov, *Solvability of initial boundary value problem in nonstandard model of convection*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **233** (1996), 217–226.
14. О. Н. Гончарова, *Микроконвекция в слабых силовых полях: сравнение двух моделей при численном исследовании*. — ПМТФ **38**, № 2 (1997), 43–51.
15. О. Н. Гончарова, *Расчет микроконвекции в длинном прямоугольнике*. — Вычислительные технологии **5**, № 5 (2000), 26–37.
16. О. Н. Гончарова, *Точные решения линеаризованных уравнений микроконвекции в бесконечной полосе.*. — В кн.: Труды VII Российского симпозиума "Механика невесомости. Итоги и перспективы фундаментальных исследований гравитационно–чувствительных систем". М., 2001, с. 234–247.
17. В. Б. Бекежанова, *Об одном стационарном решении уравнений микроконвекции в вертикальном слое*. — Прикл. мех. и техн. физ. **42**, № 3 (2001), 63–71.
18. А. А. Родионов, *Некоторые точные решения уравнений микроконвекции*. — В кн.: Симметрия и дифференциальные уравнения. Красноярск, 2000, с. 186–189.
19. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*. М., Наука, 1970, с. 288.
20. S. Paolucci, *On the filtering of sound from the Navier–Stokes equations*. Sandia Nat. Lab. Rep. SAND 82. December, 1982.
21. Д. А. Никулин, М. Х. Стрелец, *Численное моделирование нестационарной естественной конвекции сжимаемого газа в замкнутой недиабатической области*. — Теплофиз. высок. температур **22**, № 5 (1984), 906–912.
22. D. R. Chenoweth, S. Paolucci, *Natural convection in an enclosed vertical air layer with large horizontal temperature differences*. — J. Fluid Mech. **169** (1986), 173–210.
23. Ю. В. Лапин, М. Х. Стрелец, *Внутренние течения газовых смесей*. М., Наука, 1989, с. 368.
24. В. В. Пухначёв, *Стационарная задача микроконвекции*. — В кн.: Динамика сплошной среды. РАН. Сиб. отделение. Ин–т гидродинамики, 1996, с. 109–116.

Pukhnachov V. V. Hierarchy of models in the theory of convection.

The paper is devoted to the discussion of models used for the mathematical analysis of convection in fluids. It is shown that these models form a certain hierarchy in the theory of convection.

Новосибирск Поступило 1 июня 2002 г.