Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 288, 2002 г.

В. Г. Осмоловский

СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ СЛОИСТЫХ ДВУХФАЗОВЫХ СРЕД ПРИ ЗАДАННЫХ НАГРУЗКАХ НА ГРАНИЦЕ

**Посвящается юбилею
Ольги Александровны Ладыженской**

1. Введение. Обсудим постановку задачи в теории двухфазовых упругих сред. Предположим, что в недеформированном состоянии двухфазовая упругая среда занимает область $\Omega \subset R^m$. Пусть $u(x) = (u^1(x), \dots, u^m(x))$ – поле ее смещений, а $F^{\pm}(\nabla u, u, x)$ – плотности энергии деформации каждой из ее фаз. Мы ограничимся случаем малых деформаций однородных и изотропных упругих сред. Тогда

$$F^{\pm}(M, u, x) = F^{\pm}(M) = a_{\pm}\,\mathrm{sp}(e - \zeta_{\pm})^2 + b_{\pm}\,\mathrm{sp}^2(e - \zeta_{\pm}) + d_{\pm},$$

$$M \in R^{m\times m}, \quad u \in R^m, \quad e = e(M) = \frac{1}{2}(M + M^*), \quad \zeta_{\pm} = c_{\pm} I, \quad (1.1)$$

$$a_{\pm}, b_{\pm}, d_{\pm}, c_{\pm} \in R^1, \quad a_{\pm}, b_{\pm} > 0.$$

Коэффициенты $a_{\pm}$, $b_{\pm}$ характеризуют упругие свойства вещества, величины $d_{\pm}$ определяются температурой, а матрицы $\zeta_{\pm}$ называются тензорами остаточной деформации.

Задача о равновесии двухфазовой упругой среды имеет вариационный характер. Потенциальная энергия деформации задается равенством

$$I[u,\chi] = \int\limits_{\Omega} \{\chi F^{+}(\nabla u) + (1-\chi) F^{-}(\nabla u)\}\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} f(u,x)\, dS, \quad (1.2)$$
$$u \in Y \subset W_2^1(\Omega, R^m), \quad \chi \in X,$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант No. 02-01-00276.

здесь Y – заданное линейное подпространство, определяемое граничными условиями для функции u, X – множество измеримых характеристических функций, определенных в области Ω. Носитель функции χ – множество Ω_+ – соответствует недеформированному состоянию вещества с плотностью энергии деформации F^+, а множество $\Omega_- = \Omega \setminus \Omega_+$ – недеформированному состоянию вещества с плотностью энергии деформации F^-. Функция $f(u,x)$, $u \in R^m$, $x \in \partial\Omega$, является плотностью потенциала сил, приложенных к границе области Ω. Состоянием равновесия двухфазовой упругой среды с указанным функционалом энергии называется такая пара $\hat{u} \in Y$, $\hat{\chi} \in X$, что

$$I[\hat{u},\hat{\chi}] = \inf_{Y\times X} I[u,\chi],$$

Особенностью функционала (1.2) является тот факт, что существование пары $\hat{u}$, $\hat{\chi}$, вообще говоря, не гарантировано. Возникает вопрос, можно ли обойти эту неприятность, заменяя в определении состояния равновесия глобальный минимум на локальный? В работе строится пример, показывающий несостоятельность такого подхода.

В этом примере расматривается образец двухфазовой упругой среды с плотностями энергии (1.1), заполняющий абсолютно жесткий цилиндр Ω. Этот образец закреплен на нижнем остновании цилиндра ω_0 и подвержен гидростатическому давлению p на верхнем основании цилиндра ω_H. В процессе деформации упругая среда может проскальзывать без трения вдоль боковой поверхности цилиндра S.

Сначала мы рассматриваем функционал энергии (1.2) на подпространстве полей смещений $\widetilde{Y}$, имеющих только одну компоненту, напавленную вдоль оси цилиндра и зависящую лишь от точки на этой оси, и подпространстве характеристических функций $\widetilde{X}$, зависящих только от точки на оси цилиндра. Такие поля смещений и характеристические функции описывают слоистые распределения фаз со слоями, ортогональными оси цилиндра. Доказывается, что на подпространстве $\widetilde{Y} \times \widetilde{X}$ функционал (1.2) достигает наименьшего значения, каждая точка его минимума $\widetilde{u}, \widetilde{\chi}$ на этом множестве выписывается явно.

Затем исследуется роль полученной точки минимума $\widetilde{u}$, $\widetilde{\chi}$ в классе всех допустимых полей смещения и характеристических функций. Доказывается, что если пара $\widetilde{u}$, $\widetilde{\chi}$ описывает конечное число слоев, то на ней обращается в ноль вычисленная по классическому правилу первая вариация функционала (1.2). Однако, если число слоев конечно и более одного, то при $a_+ = a_- \equiv a$ пара $\widetilde{u}, \widetilde{\chi}$ вопреки ожиданиям, навеянным симметрией задачи, не является локальным минимумом для функционала (1.2).

Отметим, что данный результат обусловлен граничным условием на верхнем основании ω_H цилиндра Ω. При других граничных условиях, когда на ω_H задается постоянное поле смещений, направленное вдоль оси выпуклого цилинра Ω, функционал энергии с плотностями энергии (1.1) достигает наименьшего значения и каждая пара типа $\widetilde{u}$, $\widetilde{\chi}$ является его точкой минимума [1].

При исследовании поставленной задачи использовались приемы, разработанные в [2].

2. Постановка задачи и формулировка результатов. Пусть $\omega \subset R^{m-1}$, $m \geqslant 2$ – ограниченная область, цилиндр $\Omega \subset R^m$ задается равенством

$$\Omega = \omega \times (0, H), \quad H > 0.$$

Точку $x \in \Omega$ будем записывать в виде

$$x = (x_1; x'), \quad x_1 \in (0, H), \quad x' = (x_2, \dots, x_m) \in \omega.$$

Кроме того, положим

$$\omega \times \{0\} = \omega_0, \quad \omega \times \{H\} = \omega_H, \quad \partial\Omega \setminus (\omega_0 \cup \omega_H) = S.$$

Для плотностей (1.1) функционал (1.2) конкретизируем следующим образом

$$\begin{gathered} I[u, \chi] = \int\limits_{\Omega} \{\chi F^+(\nabla u) + (1 - \chi) F^-(\nabla u)\}\, dx + p \int\limits_{\omega_H} u_n \, dS, \\ u \in Y, \quad \chi \in X, \\ Y = \{u \in W_2^1(\Omega, R^m) : \, u|_{\omega_0} = 0, \, u_n|_S = 0\}, \end{gathered} \tag{2.1}$$

здесь u_n – нормальная компонента вектор-функции u.

Функционал (2.1) описывает образец двухфазовой упругой среды, заполняющий абсолютно жесткий цилиндр Ω, закрепленный на основании этого цилиндра ω_0 и подверженный гидростатическому давлению p, приложенному к верхнему основанию ω_H. В процессе деформации упругая среда может проскальзывать без трения вдоль боковой поверхности S цилиндра Ω.

Благодаря специальному строению области Ω, выбору функции $f(u,x)$ и граничных условия для функции u, естественно выдвинуть гипотезу, что точка минимума $\widetilde{u}$, $\widetilde{\chi}$ функционала (2.1), если она существует, удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered}
\widetilde{u} \in \widetilde{Y}, \quad \widetilde{\chi} \in \widetilde{X}, \\
\widetilde{Y} = \{u \in Y : u^i(x) = \delta_{i1} w(x_1),\, w \in Y_0\}, \\
Y_0 = \{w \in W_2^1(0,H) : w(0) = 0\}, \\
\widetilde{X} = \{\chi \in X : \chi(x) = \chi(x_1)\}.
\end{gathered} \tag{2.2}$$

В этом случае пара $\widetilde{u}$, $\widetilde{\chi}$ определяется равенством

$$I[\widetilde{u},\widetilde{\chi}] = \inf_{u\in\widetilde{Y},\, \chi\in\widetilde{X}} I[u,\chi]. \tag{2.3}$$

Целью работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема. (1) *Функционал I достигает на множестве $\widetilde{Y}\times\widetilde{X}$ наименьшего значения. Семейство всех его минимальных точек состоит из пар функций $\widetilde{u}\in\widetilde{Y}$, $\widetilde{\chi}\in\widetilde{X}$, представимых равенством* $\widetilde{u}^i(x) = \delta_{i1}\widetilde{w}(x_1)$

$$\begin{gathered}
\widetilde{w}(x_1) = \rho\int_0^{x_1}\widetilde{\chi}(z)\,dz + \frac{c_-(a_-+b_-m)-\frac{p}{2}}{a_-+b_-}x_1, \quad \rho = \Big[\frac{c(a+bm)-\frac{p}{2}}{a+b}\Big] \\
\widetilde{\chi}(x_1)\equiv 0 \quad \textit{при} \quad t_+ > t_-, \quad \widetilde{\chi}(x_1)\equiv 1 \quad \textit{при} \quad t_+ < t_-, \\
\widetilde{\chi}(x_1) \text{ – \textit{произвольная измеримая}} \\
\textit{характеристическая функция при} \quad t_+ = t_-,
\end{gathered} \tag{2.5}$$

где $\big[A\big]\equiv A_+ - A_-$ *– скачок величины* A,

$$t_\pm = mc_\pm^2(a_\pm+b_\pm m) + d_\pm - \frac{(c_\pm(a_\pm+b_\pm m)-\frac{p}{2})^2}{a_\pm+b_\pm}.$$

(2) *Пары $\widetilde{u},\widetilde{\chi}$ из (2.5), в которых функция $\widetilde{\chi}$ является характеристической функцией конечного числа непересекающихся интервалов, плотны в множестве (2.5) относительно сходимости в пространтсве $W_2^1(\Omega,R^m)\times L_1(\Omega)$.*

(3) *На каждой паре функций из* (2.5), *где функция* $\widetilde{\chi}$ – *характеристической функцией конечного числа непересекающихся интервалов, обращается в ноль первая вариация функционала* (2.1), *при вычислении которой допускается малое гладкое возмущение поля смещений* $\widetilde{u}$ *и границы раздела фаз.*

(4) *При* $a_- = a_+ \equiv a$, $\rho \neq 0$, $t_+ = t_-$ *пара функций из* (2.5) *не является локальным минимумом функционала* (2.1).

Отметим, что вариация функций $\widetilde{\chi}$, на которой выявляется свойство (4) имеет довольно сложный характер: в множествах $\Omega_\pm$ вырезается ряд специальных лакун, заполняемых веществом фазы с индексами $\mp$. Вариация функции $\widetilde{u}$ специальнвм образом определяется по вариации функции $\widetilde{\chi}$.

Доказательство теоремы разобьем на ряд этапов.

3. Доказательство утверждения (1). Займемся сначала преобразованием выражения (1.1). Поскольку

$$u^i_{x_j}u^i_{x_j} = \frac{1}{2}(u^i_{x_j}u^i_{x_j} - 2u^i_{x_j}u^j_{x_i} + u^j_{x_i}u^j_{x_i}) + u^i_{x_j}u^j_{x_i} =$$

$$= \frac{1}{2}(u^i_{x_j} - u^j_{x_i})(u^i_{x_j} - u^j_{x_i}) + u^i_{x_j}u^j_{x_i} \equiv \frac{1}{2}|\operatorname{rot} u|^2 + u^i_{x_j}u^j_{x_i},$$

$$(\operatorname{rot} u)_{ij} = u^i_{x_j} - u^j_{x_i}, \quad |\operatorname{rot} u|^2 = (\operatorname{rot} u)_{ij}(\operatorname{rot} u)_{ij},$$

имеет

$$F^\pm(\nabla u) = a_\pm u^i_{x_j}u^i_{x_j} + b_\pm u^i_{x_i}u^j_{x_j} - 2c_\pm(a_\pm + b_\pm m)u^i_{x_i} +$$

$$+ mc^2_\pm(a_\pm + b_\pm m) + d_\pm = \frac{a_\pm}{2}|\operatorname{rot} u|^2 + (a_\pm + b_\pm)|\operatorname{div} u|^2 -$$

$$-2c_\pm(a_\pm + b_\pm m)\operatorname{div} u + + mc^2_\pm(a_\pm + b_\pm m) + d_\pm + a_\pm(u^i_{x_j}u^j_{x_i} - u^i_{x_i}u^j_{x_j}).$$

Положим для любой характеристической функции χ

$$\alpha_\pm = a_\pm + b_\pm, \quad \beta_\pm = c_\pm(a_\pm + b_\pm m), \quad \gamma_\pm = mc^2_\pm(a_\pm + b_\pm m) + d_\pm,$$

$$a = a_+\chi + a_-(1-\chi), \quad \alpha = \alpha_+\chi + \alpha_-(1-\chi),$$

$$\beta = \beta_+\chi + \beta_-(1-\chi), \quad \gamma = \gamma_+\chi + \gamma_-(1-\chi).$$

Тогда

$$\chi F^+(\nabla u) + (1-\chi)F^-(\nabla u) =$$

$$= \frac{a}{2}|\operatorname{rot} u|^2 + \alpha|\operatorname{div} u|^2 - 2\beta\operatorname{div} u + \gamma + a(u^i_{x_j}u^j_{x_i} - u^i_{x_i}u^j_{x_j}).$$

Для любой константы λ справедливо равенство

$$\alpha|\operatorname{div} u|^2 - 2\beta \operatorname{div} u + \gamma = \alpha|\operatorname{div} u|^2 - 2\Big(\beta - \frac{\lambda}{2}\Big) \operatorname{div} u - \lambda \operatorname{div} u + \gamma =$$

$$= \alpha\Big(\operatorname{div} u - \frac{\beta - \frac{\lambda}{2}}{\alpha}\Big)^2 + \gamma - \frac{(\beta - \frac{\lambda}{2})^2}{\alpha} - \lambda \operatorname{div} u.$$

Поэтому

$$\chi F^+(\nabla u) + (1-\chi)F^-(\nabla u) = \frac{a}{2}|\operatorname{rot} u|^2 +$$

$$+\alpha\Big(\operatorname{div} u - \frac{\beta - \frac{\lambda}{2}}{\alpha}\Big)^2 + \Big(\gamma - \frac{(\beta - \frac{\lambda}{2})^2}{\alpha}\Big) - \lambda \operatorname{div} u.$$

Отметим, что для любой характеристической функции χ

$$\frac{\beta - \frac{\lambda}{2}}{\alpha} = \frac{(\beta_+ - \frac{\lambda}{2})\chi + (\beta_- - \frac{\lambda}{2})(1-\chi)}{\alpha_+\chi + \alpha_-(1-\chi)} =$$

$$= \frac{\beta_+ - \frac{\lambda}{2}}{\alpha_+}\chi + \frac{\beta_- - \frac{\lambda}{2}}{\alpha_-}(1-\chi) =$$

$$= \frac{c_+(a_+ + b_+ m) - \frac{\lambda}{2}}{a_+ + b_+}\chi + \frac{c_-(a_- + b_- m) - \frac{\lambda}{2}}{a_- + b_-}(1-\chi).$$

Аналогично

$$\frac{(\beta - \frac{\lambda}{2})^2}{\alpha} = \frac{((\beta_+ - \frac{\lambda}{2})\chi + (\beta_- - \frac{\lambda}{2})(1-\chi))^2}{\alpha_+\chi + \alpha_-(1-\chi)} =$$

$$= \frac{(\beta_+ - \frac{\lambda}{2})^2\chi + (\beta_- - \frac{\lambda}{2})^2(1-\chi)}{\alpha_+\chi + \alpha_-(1-\chi)} = \frac{(\beta_+ - \frac{\lambda}{2})^2}{\alpha_+}\chi + \frac{(\beta_- - \frac{\lambda}{2})^2}{\alpha_-}(1-\chi) =$$

$$= \frac{(c_+(a_+ + b_+ m) - \frac{\lambda}{2})^2}{a_+ + b_+}\chi + \frac{(c_-(a_- + b_- m) - \frac{\lambda}{2})^2}{a_- + b_-}(1-\chi)$$

(справедливость двух последних формул легче устанавливается не вычислением, а их проверкой для $\chi(x) = 1$ и $\chi(x) = 0$). Следовательно

$$\chi F^+(\nabla u) + (1-\chi)F^-(\nabla u) = \frac{a_+\chi + a_-(1-\chi)}{2}|\operatorname{rot} u|^2 +$$

$$+((a_+ + b_+)\chi + (a_- + b_-)(1-\chi))\Big(\operatorname{div} u - \frac{c_+(a_+ + b_+ m) - \frac{\lambda}{2}}{a_+ + b_+}\chi -$$

$$-\frac{c_-(a_-+b_-m)-\frac{\lambda}{2}}{a_-+b_-}(1-\chi))^2+(mc_+^2(a_++b_+m)+$$

$$+d_+-\frac{(c_+(a_++b_+m)-\frac{\lambda}{2})^2}{a_++b_+}\Big)\chi+(mc_-^2(a_-+b_-m)+$$

$$+d_--\frac{(c_-(a_-+b_-m)-\frac{\lambda}{2})^2}{a_-+b_-})(1-\chi)-\lambda\operatorname{div}u+$$

$$+(a_+\chi+a_-(1-\chi))(u^i_{x_j}u^j_{x_i}-u^i_{x_i}u^j_{x_j}). \tag{3.1}$$

Положим $\lambda=p$. Тогда с помощью (3.1) для всех $u\in Y$, $\chi\in X$ получаем

$$I[u,\chi]=\int\limits_\Omega(a_+\chi+a_-(1-\chi))(u^i_{x_j}u^j_{x_i}-u^i_{x_i}u^j_{x_j})\,dx+$$

$$+\int\limits_\Omega\frac{a_+\chi+a_-(1-\chi)}{2}|\operatorname{rot}u|^2\,dx+\int\limits_\Omega((a_++b_+)\chi+$$

$$+(a_-+b_-)(1-\chi))\bigg(\operatorname{div}u-\frac{c_+(a_++b_+m)-\frac{p}{2}}{a_++b_+}\chi-$$

$$-\frac{c_-(a_-+b_-m)-\frac{p}{2}}{a_-+b_-}(1-\chi)\bigg)^2\,dx+|\Omega|\bigg(mc_+^2(a_++b_+m)+ \tag{3.2}$$

$$+d_+-\frac{(c_+(a_++b_+m)-\frac{p}{2})^2}{a_++b_+}\bigg)Q+|\Omega|\bigg(mc_-^2(a_-+b_-m)+d_--$$

$$-\frac{(c_-(a_-+b_-m)-\frac{p}{2})^2}{a_-+b_-}\bigg)(1-Q),\qquad Q=\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega\chi\,dx.$$

Если векторное поле $u\in\widetilde{Y}$, то $u^i_{x_j}=\delta_{1i}\delta_{1j}w'(x_1)$. Поэтому

$$\operatorname{rot}u(x)=0,\quad \operatorname{div}u(x)=w'(x_1),\quad u^i_{x_j}(x)u^j_{x_i}(x)-u^i_{x_i}(x)u^j_{x_j}(x)=0.$$

Следовательно, для пары $u\in\widetilde{Y}$, $\chi\in\widetilde{X}$

$$|\omega|^{-1}I[u,\chi]\equiv J[w,\chi]=\int\limits_0^H((a_++b_+)\chi(z)+(a_-+b_-)(1-\chi(z)))\times$$

$$\times\left(w'(z)-\frac{c_+(a_++b_+m)-\frac{p}{2}}{a_++b_+}\chi(z)-\frac{c_-(a_-+b_-m)-\frac{p}{2}}{a_-+b_-}(1-\chi(z))\right)^2 dz+$$

$$+H\left(mc_+^2(a_++b_+m)+d_+-\frac{(c_+(a_++b_+m)-\frac{p}{2})^2}{a_++b_+}\right)q+$$

$$+H\left(mc_-^2(a_-+b_-m)+d_--\frac{(c_-(a_-+b_-m)-\frac{p}{2})^2}{a_-+b_-}\right)(1-q),$$

$$q=\frac{1}{H}\int\limits_0^H \chi(z)\,dz. \tag{3.3}$$

Очевидно, что для всех $w\in Y$, $\chi\in\widetilde{X}$

$$J[w,\chi]\geqslant H\min\{t_+,t_-\}$$

причем равенство достигается лишь на функциях (2.5).

4. Доказательство утверждения (2). Разобьем интервал $[0,H]$ на N равных частей l_j, $j=1,\ldots,N$. Для произвольной измеримой характеристической функции $\widetilde{\chi}(x_1)$, $x_1\in[0,H]$ рассмотрим набор чисел

$$\mu_j=\frac{1}{N}\int\limits_{l_j}\widetilde{\chi}(x_1)\,dx_1.$$

Очевидно, что $\mu_j\leqslant|l_j|$. Построим семейство интервалов $l'_j\subset l_j$, $|l'_j|=\mu_j$ и определим функцию $\chi_N(x_1)$ как характеристическую функцию объединения конечного числа интервалов l'_j. Тогда ([2], гл.3, §2) последовательность $\chi_n\to\widetilde{\chi}$ в $L_1(\Omega)$, а построенная по χ_N согласно формуле (2.5) последовательность u_N сходится к функции $\widetilde{u}$ в $W_2^1(\Omega,R^m)$. Очевидно, что $I[u_N,\chi_N]=I[\widetilde{u},\widetilde{\chi}]$ для всех N.

5. Доказательство утверждения (3). Если при варьировании в качестве возмущений допускается лишь малая гладкая деформация гладкой границы раздела фаз, то равенство нулю первой вариации функционала (2.1) эквивалентна выполнению классических уравнений равновесия ([2], гл. 5, §3), справедливость которых для пары (2.5), когда $\widetilde{\chi}$ является характеристической функцией конечного числа интервалов, проверяется непосредственно.

6. Преобразование выражения (3.2). В правой части (3.2) есть только одно знаконеопределенное слагаемое, зависящее от u

$$\int\limits_{\Omega}(a_+\chi + a_-(1-\chi))(u^i_{x_j}u^j_{x_i} - u^i_{x_i}u^j_{x_j})\,dx. \tag{6.1}$$

Вторая скобка под интегралом в (6.1) является полным дифференциалом. Если мы устраним невозможность сведения (6.1) к интегралу по границе, сделав предположение

$$a_+ = a_- \equiv a, \tag{6.2}$$

то, интегрируя по частям, для достаточно гладких функций u получаем

$$\int\limits_{\Omega}(a_+\chi + a_-(1-\chi))(u^i_{x_j}u^j_{x_i} - u^i_{x_i}u^j_{x_j})\,dx =$$

$$a\int\limits_{\Omega}(u^i_{x_j}u^j_{x_i} - u^i_{x_i}u^j_{x_j})\,dx = a\int\limits_{\partial\Omega}(u^i_{x_j}u^j n_i - u^i_{x_i}u^j n_j)\,dS,$$

где n – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Введем на $\partial\Omega$ касательный градиент δ с компонентами

$$\delta_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - n_j n_k\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \delta_j + n_j n_k\frac{\partial}{\partial x_k}$$

и на $\partial\Omega$

$$u^i_{x_j}u^j n_i - u^i_{x_i}u^j n_j = n_i u^j\delta_j u^i - u_n\delta_i u^i = \delta_j(u^j u_n) - 2u_n\delta_i u^i - u^i u^j\delta_j n_i.$$

Пользуясь формулой интегрирования по частям

$$\int\limits_{\partial\Omega}\delta_i v^i\,dS = \int\limits_{\partial\Omega}v^i n_i(\delta_j n_j)\,dS$$

и предположением (6.2), получаем

$$\int\limits_{\Omega}(a_+\chi + a_-(1-\chi))(u^i_{x_j}u^j_{x_i} - u^i_{x_i}u^j_{x_j})\,dx =$$

$$= a\int\limits_{\partial\Omega}(u_n^2\delta_j n_j - 2u_n\delta_i u^i - u^i u^j\delta_j n_i)\,dS.$$

Если функция $u \in X$, то в силу граничных условий для u на S и ω_H при выполнении предположения (6.2)

$$\int\limits_{\Omega} (a_+\chi + a_-(1-\chi))(u^i_{x_j} u^j_{x_i} - u^i_{x_i} u^j_{x_j})\, dx =$$
$$-a \int\limits_S u^i u^i \delta_j n_i \, dS - 2a \int\limits_{\omega_H} u_n \delta_i u^i \, dS. \qquad (6.3)$$

Величина $-\delta_j n_i$ является матрицей кривизн поверхности S. Эта матрица вырождается вдоль образующей цилиндра оси x_1. Если основание цилиндра ω выпукло, то матрица $-\delta_j n_i$ неотрицательна и

$$-a \int\limits_S u^i u^j \delta_j n_i \, dS \geqslant 0.$$

Равенство (6.3) было получено для достаточно гладких функций $u \in X$. Однако оно остается справедливым, если последний интеграл в правой части (6.3) понимать как непрерывную билинейную форму от функций $u_n \in W_2^{1/2}(\omega_H)$ и $\delta_i u^i \in W_2^{-1/2}(\omega_H)$.

Итак, при выполнении предположения (6.2) для всех $u \in Y$, $\chi \in X$ справедливо равенство

$$I[u,\chi] = \frac{a}{2} \int\limits_{\Omega} |\operatorname{rot} u|^2 \, dx + \int\limits_{\Omega} (a + b_+\chi + b_-(1-\chi)) \times$$
$$\times \left(\operatorname{div} u - \frac{c_+(a+b_+m) - \frac{p}{2}}{a+b_+}\chi - \frac{c_-(a+b_-m) - \frac{p}{2}}{a+b_-}(1-\chi) \right)^2 dx -$$
$$-a \int\limits_S u^i u^j \delta_j n_i \, dS - 2a \int\limits_{\omega_H} u_n \delta_i u^i \, dS + |\Omega| t_+ Q + |\Omega| t_-(1-Q). \qquad (6.4)$$

7. Вспомогательная задача векторного анализа. Пусть $G \subset R^m$ – ограниченная область. Нам предстоит найти функцию $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G, R^m)$ и измеримую характеристическую функцию χ, удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{rot} u = 0, \quad \operatorname{div} u = c_1\chi + c_2, \qquad (7.1)$$

где

$$c_1,\, c_2 \in R^1, \quad c_1 \neq 0, \quad -\frac{c_2}{c_1} \in [0,1]. \qquad (7.2)$$

Необходимым условием разрешимости второго уравнения (7.1) служит равенство

$$\int\limits_G (c_1\chi + c_2)\,dx = 0, \tag{7.3}$$

которому в силу (7.2) удовлетворяет непустой набор характеристических функций.

Рассмотрим сначала частный случай, когда B_R – открытый шар в пространстве R^m с центром в начале координат и с радиусом R. Будем искать функции $u(x)$ и $\chi(x)$ в сферически симметричном виде

$$u(x) = \frac{x}{|x|}v(|x|), \quad \chi(x) = \chi(|x|). \tag{7.4}$$

Поскольку

$$u^i_{x_j}(x) = \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3}\right)v(|x|) + \frac{x_i x_j}{|x|^2}v'(|x|), \tag{7.5}$$

получаем

$$\operatorname{div} u = v'(|x|) + \frac{m-1}{|x|}v(|x|) = \frac{1}{|x|^{m-1}}(|x|^{m-1}v(|x|))' =$$
$$= c_1\chi(|x|) + c_2, \quad \operatorname{rot} u = 0.$$

Следовательно,

$$-|x|^{m-1}v(|x|) = \int\limits_{|x|}^{R} |z|^{m-1}(c_1\chi(|z|) + c_2)\,d|z| =$$
$$= \frac{1}{|S_1|}\int\limits_{|x|\leqslant|z|\leqslant R}(c_1\chi(|z|) + c_2)\,dz.$$

Здесь $|S_1|$ – площадь единичной сферы в пространстве R^m, а пределы интегрирования выбраны таким образом, чтобы $v(R) = 0$. Так как $|B_{|x|}| = \frac{|S_1|}{m}|x|^m$, пользуясь условием разрешимости (7.3) с $G = B_R$, получаем

$$v(|x|) = \frac{|x|}{m|B_{|x|}|}\int\limits_{|z|\leqslant|x|}(c_1\chi(|z|) + c_2)\,dz. \tag{7.7}$$

Таким образом,

$$u(x) = \frac{x}{|x|}\frac{|x|}{m}\frac{1}{|B_{|x|}|}\int\limits_{B_{|x|}} (c_1\chi(|z|) + c_2)\,dz. \tag{7.8}$$

Из (7.5) – (7.8) вытекают оценки

$$|u(x)| \leqslant (|c_1| + |c_2|)\frac{|x|}{m}, \quad |u^i_{x_j}(x)| \leqslant (|c_1| + |c_2|)(\frac{m-1}{m} + 1). \tag{7.9}$$

Из оценок (7.9) следует, что $u \in W^1_\infty(B_R, R^m)$ и для каждого $q \geqslant 1$

$$\|u\|^q_{W^1_q(B_R)} \leqslant (|c_1| + |c_2|)^q(R^q + 3^q)|B_R|. \tag{7.10}$$

Итак, решением задачи (7.1) в шаре B_R является пара функций (7.4) с любой измеримой характеристической функцией χ, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_{B_R} (c_1\chi(|x|) + c_2)\,dx = 0 \tag{7.11}$$

и функцией u, заданной формулой (7.8). Полученная функция $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_q(B_R, R^m)$ при всех $q \geqslant 1$ и удовлетворяет оценке (7.10).

Производя замену координат, приходим к выводу, что в шаре $B_R(x^0)$ решением задачи (7.1) будет пара функций

$$u(x) = \frac{x - x^0}{|x - x^0|}v(|x - x^0|), \quad \chi(x) = \chi(|x - x^0|) \tag{7.12}$$

с только что найденными функциями $v(|x|)$ и $\chi(|x|)$.

Перейдем теперь к общему случаю. Теорема Витали утверждает, что для любой ограниченной области G существует такой набор открытых шаров $B_{R_j}(x_j) \subset G$, что

$$B_{R_j}(x_j) \cap B_{R_i}(x_i) = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad |G \setminus \cup_{j=1}^\infty B_{R_j}(x_j)| = 0.$$

Построенное ранее решение задачи (7.1) для шара $B_{R_j}(x_j)$ обозначим через $u_j(x)$, $\chi_j(x)$. Продолжим эти функции нулем в область G и сохраним за продолжением старые обозначения. Тогда для каждого j

$$\operatorname{rot} u_j = 0, \qquad \operatorname{div} u_j = \psi_j(c_1\chi_j + c_2),$$
$$u_j \in \overset{\circ}{W}{}^1_q(G, R^m), \qquad \operatorname{supp} u_j \subset \bar{B}_{R_j}(x_j).$$

где ψ_j – характеристическая функция шара $B_{R_j}(x_j)$. Пусть

$$u^N(x)=\sum_{j=1}^N u_j(x),\quad \chi^N(x)=\sum_{j=1}^N \chi_j(x),\quad \psi^N(x)=\sum_{j=1}^N \psi_j(x).$$

Тогда $u^N\in \overset{\circ}{W}{}^1_q(G,R^m)$ для всех q и

$$\operatorname{rot} u^N=0,\quad \operatorname{div} u^N=\sum_{j=1}^N \psi_j(c_1\chi_j+c_2)=\sum_{j=1}^N (c_1\chi_j+c_2\psi_j). \tag{7.13}$$

Поскольку шары из покрытия Витали не пересекаются, в силу (7.10) при $N_2>N_1$ и любого q

$$\|u^{N_2}-u^{N_1}\|^q_{W^1_q(G,R^m)}\leqslant \sum_{j=N_1}^{N_2}\|u_j\|^q_{W^1_q(B_{R_j}(x_j),R^m)}\leqslant C\sum_{j=N_1}^{N_2}|B_{R_j(x_j)}|,$$

$$\|\chi^{N_2}-\chi^{N_1}\|^q_{L_q(G)}\leqslant \sum_{j=N_1}^{N_2}|B_{R_j}(x_j)|,\ \ \|\psi^{N_2}-\psi^{N_1}\|^q_{L_q(G)}\leqslant \sum_{j=N_1}^{N_2}|B_{R_j}(x_j)|.$$

Так как $\sum_{j=1}^\infty |B_{R_j}(x_j)|=G$, то правые части последних неравенств стремятся к нулю при $N_1\to\infty$. Поэтому

$$\begin{aligned} u^n\to u \quad \text{в}\quad & \overset{\circ}{W}{}^1_q(G,R^m),\quad \chi^N\to\chi \quad \text{в}\quad L_q(G),\\ & \psi^N\to 1\quad \text{в}\quad L_q(G), \end{aligned} \tag{7.14}$$

при любых q. Переходя к пределу в (7.13), убедимся, что пара u, χ является решением задачи (7.1) в области G.

Условие (7.3) мы использовали при построении решения задачи в шаре B_R. Поясним, почему оно автоматически выполняется для построенного в области G решения. Для шара $B_{R_j}(x_j)$ это условие (условие (7.11) трансформируется к виду

$$\int\limits_{B_{R_j}(x_j)} (c_1\chi_j(x)+c_2)\,dx=0.$$

Проводя суммирование этих равенств по j от 1 до N, получаем

$$\int\limits_G (c_1\chi^N(x)+c_2\psi^N(x))\,dx=0,$$

что после предельного перехода по $N \to \infty$ совпадает с соотношением (7.3).

Вернемся к цилиндрической области Ω. Пусть точка $x^0 \in R^m$ и число R таковы, что пересечение шара $B_R(x^0)$ с плоскостью, содержащей верхнее основание цилиндра ω_H непусто и содержится в ω_H. Пусть $u(x)$, $\chi(x)$ – построенное для этого шара решение задачи (7.1). Нашей целью является вычисление интеграла

$$\int\limits_{\omega_H} u_n \delta_i u^i \, dS$$

от этого решения.

Производя сдвиг системы координат, будем временно считать, что $x^0 = 0$. Пользуясь формулой (7.5), получаем для $x \in \omega_H$

$$\delta_i u^i = \sum_{i=2}^{m} u^i_{x_i}(x) = \left(\frac{m-1}{|x|} - \frac{|x|^2 - x_1^2}{|x|^3}\right) v(|x|) + \frac{|x|^2 - x_1^2}{|x|^2} v'(|x|),$$

$$u_n(x) = \frac{x_1}{|x|} v(|x|).$$

Следовательно,

$$u_n(x)\delta_i u^i(x) = \frac{x_1}{|x|}(\frac{m-1}{|x|} - \frac{|x|^2 - x_1^2}{|x|^3}) v^2(|x|) + \frac{x_1}{|x|}\frac{|x|^2 - x_1^2}{|x|^2} v(|x|) v'(|x|).$$

Поскольку в силу (7.7)

$$v(|x|) = |x| q(|x|), \quad q(|x|) = \frac{1}{m|B_{|x|}|} \int\limits_{|z| \leqslant |x|} (c_1 \chi(|z|) + c_2) \, dz,$$

получаем

$$u_n(x)\delta_i u^i(x) = x_1 (m-1) q^2(|x|) + x_1 \frac{|x|^2 - x_1^2}{|x|} q(|x|) q'(|x|).$$

Для $x \in \omega_H \cap B_R$ воспользуемся представлением $x = (x_1; x')$, где x_1 фиксировано, а $|x'| \in (0, \sqrt{R^2 - x_1^2})$, причем $|x|^2 = x_1^2 + |x'|^2$. Положим $|x'| = \rho$ и

$$q(|x|) = q(\sqrt{x_1^2 + \rho^2}) \equiv g(\rho) \quad \text{при} \quad x \in \omega_H \cap B_R.$$

Так как

$$g'(\rho) = q'(|x|) \frac{\rho}{|x|},$$

имеем

$$u_n(x)\delta_i u^i(x) = x_1((m-1)g^2(\rho) + \rho g(\rho)g'(\rho)).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\omega_H} u_n\delta_i u_i\,dS = x_1|S_1| \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x_1^2}} ((m-1)\rho^{m-2}g^2(\rho) + \rho^{m-1}\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}g^2(\rho))\,d\rho,$$

где $|S_1|$ – площадь единичной сферы в R^{m-1}. Интегрируя по частям и используя нулевое граничное условие для функции q на границе шара B_R, приводящее к равенству $g(\sqrt{R^2-x_1^2}) = 0$, получаем

$$\int\limits_{\omega_H} u_n\delta_i u^i\,dS = x_1|S_1|\frac{m-1}{2} \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x_1^2}} \rho^{m-2}g^2(\rho)\,d\rho.$$

Возвращаясь к шару $B_R(x^0)$, приходим к формуле

$$\int\limits_{\omega_H} u_n\delta_i u^i\,dS = (H-x_1^0)|S_1|\frac{m-1}{2} \int\limits_0^{\sqrt{R^2-(H-x_1^0)^2}} \rho^{m-2}g^2(\rho)\,d\rho. \quad (7.15)$$

Правая часть (7.15) положительна при $x^0 \in \Omega$, равна нулю при $x^0 \in \omega_H$ и отрицательна при $x^0 \in R^m \setminus \bar{\Omega}$ в том и тодько том случае, если

$$g(\rho) \not\equiv 0, \quad \rho \in [0, \sqrt{R^2-(H-x_1^0)^2}]. \quad (7.16)$$

Тождественное совпадение с нулем функции $g(\rho)$ на указанном интервале эквивалентно соотношению

$$\int\limits_{|z|\leqslant r} (c_1\chi(|z|) + c_2)\,dz = 0 \quad \text{для всех} \quad r \in [|H-x_1^0|, R].$$

Данное равенство справедливо в том и только том случае, если

$$\int\limits_{|z|\leqslant|H-x_1^0|} (c_1\chi(|z|) + c_2)\,dz = 0 \quad \text{и} \quad c_1\chi(|z|) + c_2 \equiv 0 \quad \text{при} \quad |z| \in [|H-x_1^0|, R]. \quad (7.17)$$

Чтобы исключить второе равенство в (7.17), наложим на c_1 и c_2 дополнительные ограничения

$$c_2 \neq 0, \quad c_1 + c_2 \neq 0. \tag{7.18}$$

Объединяя (7.2) и (7.18) приходим к выводу, что разрешимость задачи (7.1) и утверждение о знаке правой части (7.15) гарантированы при

$$c_1,\, c_2 \in R^1, \quad c_1 \neq 0, \quad -\frac{c_2}{c_1} \in (0,1). \tag{7.19}$$

8. Доказательство утверждения (4). Пусть $t_+ = t_-$, $a_+ = a_- \equiv a$, $\rho \neq 0$. Пусть пара $\widetilde{u}$, $\widetilde{\chi}$ определена равенством (2.5), прчем $\widetilde{\chi}$ – характеристическая функция конечного числа непересекающихся интервалов. Предположим, что для некоторого $h \in [0, H)$

$$\widetilde{\chi}(x_1) = 1 \quad \text{при} \quad x_1 \in [h, H]$$

(случай $\widetilde{\chi}(x_1) = 0$ при $x_1 \in [h, H]$ рассматривается аналогично). Продолжим функцию $\widetilde{\chi}(x_1)$ единицей при $x_1 > H$, а продолжение функции $\widetilde{u}(x_1)$ зададим согласно равенству (2.5).

Положим

$$G = \omega \times (h, H) \cup B_R(x^0),$$

где x^0 и R таковы, что пересечение шара $B_R(x^0)$ с плоскостью, содержащей верхнее основание ω_H цилиндра Ω, непусто и содержится в ω_H. Кроме того, будем считать, что $B_R(x^0) \subset \omega \times (0, \infty)$.

Пусть

$$u(x) = \widetilde{u}(x) + v(x) + u_+(x), \quad x \in \Omega \cup G,$$

$$v^i(x) = \epsilon\rho\delta_{i,1}\phi(x_1), \quad 0 < \epsilon < 1,$$

$$\phi \in W^1_{2,loc}(0,\infty), \quad \phi(x_1) = 0 \quad \text{при} \quad x_1 \in [0, h],$$

$$\phi'(x_1) = -1 \quad \text{при} \quad x_1 > 1,$$

$$u_+ \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega \cup G, R^m), \quad \operatorname{supp} u_+ \subset \bar{G},$$

кроме того

$$\chi(x) = \widetilde{\chi}(x) - \chi_+(x),$$

где $\chi_+(x)$ – характеристическая функция с носителем в $\bar{G}$. Очевидно, что χ – характеристическая функция в $\Omega \cup G$.

Будем искать функции u_+, χ_+, зависящие от параметра ϵ, исходя из уравнений

$$\operatorname{rot} u = 0,$$

$$\operatorname{div} u = \frac{c_+(a + b_+ m)}{a + b_+}\chi + \frac{c_-(a + b_- m)}{a + b_-}(1 - \chi),$$

приводящих к соотношениям

$$\begin{gathered} \operatorname{rot} u_+ = 0, \quad \operatorname{div} u_+ = \rho(\epsilon - \chi_+) \quad \text{в} \quad G, \\ u_+|_{\partial G} = 0. \end{gathered} \tag{8.1}$$

Фиксируем покрытие Витали области G, включающее в себя шар $B_R(x^0)$, и возьмем в качестве u_+, χ_+ решение системы (8.1), соответствующее этому покрытию. Поскольку $c_1 = -\rho$, $c_2 = \rho\epsilon$, $\rho \neq 0$, требования (7.19) автоматически выполняются. Так как

$$I[\widetilde{u}, \widetilde{\chi}] = 0, \quad I[u, \chi] = -2a \int\limits_{\omega_H} u_n \delta_i u^i \, dS = -2a \int\limits_{\omega_H} u_{+n} \delta_i u_+^i \, dS,$$

в силу (6.4) и (7.15) при $x_1^0 < H$ для всех $\epsilon \in (0, 1)$ справедливо неравенство

$$I[u, \chi] \leqslant I[\widetilde{u}, \widetilde{\chi}].$$

Так как

$$\int\limits_G \chi_+ \, dx = \epsilon |G|, \tag{8.2}$$

имеем

$$\|\chi - \widetilde{\chi}\|_{L_1(\Omega)} \leqslant \|\chi_+\|_{L_1(G)} = \epsilon |G|. \tag{8.3}$$

Далее

$$\|u - \widetilde{u}\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \|v\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u_+\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\epsilon + \|u_+\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Кроме того

$$\|u_+\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \|u_+\|^2_{W_2^1(G)} = \frac{1}{2} \int\limits_G |\operatorname{rot} u_+|^2 \, dx + \int\limits_G |\operatorname{div} u_+|^2 \, dx =$$

$$= \rho \int\limits_G (\epsilon^2 - 2\epsilon\chi_+ + \chi_+) \, dx.$$

Используя (8.2), получаем

$$\|u_+\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \rho^2 |G| \epsilon (1-\epsilon).$$

Таким образом,

$$\|u - \widetilde{u}\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\sqrt{\epsilon}.$$

Учитывая уже доказонное утверждение (2) теоремы, приходим к справедливости утверждения (4).

Литература

1. В. Г. Осмоловский, *Состояния равновесия слоистых двухфазовых сред при заданных перемещениях на границе.* — (в печати).
2. В. Г. Осмоловский, *Вариационная задача о фазовых переходах в механике сплошных сред.* Изд–во С.-Пб. университета, С.-Пб. (2000), 262 с.

Osmolovskii V. G. Equilibrium states of stratified two-phase bodies under given boundary loads.

An elastic body with the classical double-well potental is considered. It is assumed that the hydrostatic pressure is given on the boundary of the body and the surface-tension coefficient is zero. It is shown that equilibrium states, describing the strarifield distribution of phases, cannot be local minimizers of the energy functional.

С.-Петербургский
государственный университет
arina@aa1101.spb.edu

Поступило 30 мая 2002 г.