Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 288, 2002 г.

О. А. Ладыженская, Т. Н. Шилкин

О КОЭРЦИТИВНЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

§1. Введение

Работа посвящена доказательству коэрцитивных оценок для решений стационарных систем, являющихся линеаризациями модифицированных уравнений Навье–Стокса (ЛМНС), предложенных О. А. Ладыженской для описания динамики жидкостей при наличии больших градиентов скоростей (см. [1–3]). Простейшим представителем ЛМНС является система Стокса. Системы ЛМНС принадлежат к классу обобщенно-эллиптических систем – систем, для которых была разработана техника получения коэрцитивных оценок в $L_q(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (см. [4–6] и др.) Но техника эта громоздкая. Получение с ее помощью окончательных, безусловных оценок, требует большого труда. Для системы Стокса коэрцитивные оценки в $L_q(\Omega)$ были раньше (и сравнительно компактно) получены с привлечением теории гидродинамических потенциалов В. А. Солонниковым (см. [7], полное изложение дано в [8]). Однако эта теория требует не только гладкости $\partial\Omega$, но и ее компактности, а также не дает локальных оценок.

В данной работе используется иная методика, разработанная итальянскими математиками для получения коэрцитивных оценок решений эллиптических уравнений и сильно эллиптических систем второго порядка (см. S. Campanato [9, 10], G. Stampaccia [11], M. Giaquinta [12] и др.) Мы распространяем эту методику на более сложный объект – системы гидродинамического типа. Такое доказательство можно считать элементарным, ибо оно складывается из "удачно" выполненных интегрирований по частям в интегральных тождествах, заменяющих собой уравнения, и "подходящего" выбора пробных функций. Именно с помощью такого

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ, грант No. 01-01-00330, "Научные школы" (грант No. 00-15-96-017).

типа вычислений мы доказываем выполнение условий интерполяционной теоремы Стампаккия ([10, 11]) или интегральных критериев принадлежности функции к пространствам Гельдера или Морри–Кампанато.

Этот путь не очень короткий, но одинаково легкий как для системы Стокса, так и для более общих ЛМНС. Мы его подробно излагаем для системы Стокса, а затем поясняем, как он реализуется для общей системы ЛМНС.

В данной публикации мы это делаем для двух модельных задач: задачи Дирихле в $\mathbb{R}^n$ и задачи Дирихле в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$. Задача Дирихле в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ "склеивается" из этих двух модельных задач. Для обычных эллиптических систем процедура "склейки" проста. Для систем же ЛМНС она усложняется наличием связи – уравнения $\operatorname{div} v = 0$. Как преодолевается данное затруднение, мы опишем в другой публикации.

Мы используем стандартные обозначения $L_q(\Omega)$, $W^l_q(\Omega)$ для пространств Лебега и Соболева, соответственно, Кроме того, мы обозначаем через $u_{,k} \equiv u_{x_k} \equiv \partial_{x_k} u \equiv \frac{\partial u}{\partial x_k}$ частную производную функции u по переменной x_k, $(u)_\Omega \equiv \fint\limits_\Omega u(x)\,dx$. Для a, $b \in \mathbb{R}^n$ мы обозначаем символом $a \otimes b$ матрицу порядка $n \times n$ с компонентами $(a_i b_j)$. Через c мы обозначаем постоянные, зависящие (если не оговорено противное) только от n.

§1. Система Стокса в $\mathbb{R}^n$

Коэрцитивные оценки в норме $L_s(\mathbb{R}^n)$, $s \in (1, \infty)$ для системы Стокса

$$-\Delta v + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} v = 0 \ \text{ в } \ \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

проще всего получаются с помощью преобразования Фурье и использования теоремы Марцинкевича. Для образов Фурье

$$\widetilde{v}(\xi) = \varkappa \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x) e^{-ix\cdot\xi}\,dx, \quad \varkappa = (2\pi)^{-n/2},$$

$\widetilde{p}$ и $\widetilde{f}$ получается легко решаемая алгебраическая система. Она дает

$$\widetilde{v}_j(\xi) = \frac{1}{\xi^2}\left(\delta^k_j - \frac{\xi_j \xi_k}{\xi^2}\right)\widetilde{f}_k, \quad \widetilde{p} = -\frac{i\xi_k}{\xi^2}\widetilde{f}_k.$$

Производным $v_{jx_lx_m}$ соответствуют Фурье-образы $-\xi_l\xi_m\widetilde{v}_j$, а p_{x_m} – Фурье-образ $i\xi_m\widetilde{p}$. Легко видеть, что функции

$$-\frac{\xi_l\xi_m}{\xi^2}\left(\delta_j^k-\frac{\xi_j\xi_k}{\xi^2}\right) \quad \text{и} \quad \frac{\xi_k\xi_m}{\xi^2}$$

удовлетворяют условиям теоремы Марцинкевича, и поэтому справедливы оценки

$$\|\nabla p\|_{s,\mathbb{R}^n}+\|\nabla^2 p\|_{s,\mathbb{R}^n}\leqslant c(s)\|f\|_{s,\mathbb{R}^n} \tag{1.2}$$

с любым $s\in(1,\infty)$. Этот факт, а также оценка резольвенты для (1.1), точнее, оценка

$$\|v\|_{s,\mathbb{R}^n}\leqslant\frac{c(s)}{|\lambda|}\|f\|_{s,\mathbb{R}^n}$$

для решения задачи

$$\lambda v-\Delta v+\nabla p=f, \quad \operatorname{div} v=0,$$

при $\lambda\in\Sigma_\theta=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\arg\lambda|\leqslant\theta\}$, $\theta\in[0,\pi)$, были отмечены первым из авторов еще в середине 50-х годов.

Такие же оценки получаются и с помощью теоремы Кальдерона–Зигмунда о сингулярных интегралах. Третий способ – это использовать технику получения оценок решений эллиптических уравнений, развитую в работах итальянских математиков. Он более длинный, чем первые два, но зато для полупространства $\mathbb{R}^n_+$ он проще, особенно, если вместо (1.1) берется более сложная система гидродинамического типа, рассматриваемая нами в §3. Опишем здесь этот способ.

Прежде всего изучим систему (1.1) с $f=\operatorname{div} F$, где F есть тензор $n\times n$, и для ее решений v, p получим разнообразные оценки, используя от F лишь его нормы в пространствах L_s с $s\in(1,\infty]$, или в пространствах Морри–Кампанато, или в пространствах Гельдера H^λ, локальные или глобальные в $\mathbb{R}^n$. Выделим ее отдельной строкой

$$-\Delta v+\nabla p=\operatorname{div} F, \quad \operatorname{div} v=0. \tag{1.3}$$

Важную роль на избранном нами пути исследования играет однородная система

$$-\Delta u+\nabla q=0, \quad \operatorname{div} u=0. \tag{1.4}$$

Прежде чем формулировать разные утверждения о решениях систем (1.1), (1.3), (1.4), условимся не указывать какой гладкостью обладают эти решения и в каком смысле они удовлетворяют уравнениям системы. Читатель, неискушенный в теории краевых задач для дифференциальных уравнений, может считать известные функции f и F и решения гладкими и, если надо, нужным образом убывающими при $|x| \to \infty$, и смотреть на наши оценка, как на априорные. Наша цель – получить коэрцитивные оценки, дающие оптимальную информацию о решении при наложенных на f или F условиях.

Для решений системы (1.4) справедлива

Теорема 1.1. *Для решений системы* (1.4) *в любом кубе* $K_1(x^0)$ *и концентрическом ему кубе* $K_{1/2}(x^0)$ *справедливы неравенства*

$$\left\|\nabla^{k+1} u\right\|^2_{2,K_{1/2}(x^0)} + \left\|\nabla^k q\right\|^2_{2,K_{1/2}(x^0)} \leqslant c(k)\Phi(1,u,q,x^0),\quad k = 1,2,\dots, \tag{1.5$_1$}$$

где

$$\Phi(\rho,y,q,x^0) = \left\|\nabla u - (\nabla u)_\rho\right\|^2_{2,K_\rho(x^0)} + \left\|q - (q)_\rho\right\|^2_{2,K_\rho(x^0)}, \tag{1.5$_2$}$$

где $c(k)$ *зависит только от* k *м размерности* n.

Как и всюду, зависимость констант от n явно не указывается. Здесь и далее $\|\cdot\|_{2,K_\rho}$ есть норма в $L_2(K_\rho)$, K_ρ – кубы с длинами ребер, равными ρ, и с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям. В пределах одной теоремы все кубы $K_\rho(x^0)$ имеют один и тот же произвольно фиксированный центр x^0, и он явно не указывается.

Символ $(q)_\rho$ означает следующее

$$(q)_\rho \equiv (q)_{K_\rho} \equiv \fint_{K_\rho} q(x)\,dx = |K_\rho|^{-1}\int_{K_\rho} q(x)\,dx.$$

Из (1.4) следует тождество

$$\int_{K_1}\left[\nabla u - (\nabla u)_1\right]\cdot\nabla\eta + \int_{K_1}\left[q - (q)_1\right]\operatorname{div}\eta = 0 \tag{1.6}$$

с любой вектор-функцией $\eta \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(K_1)$. Возьмем в нем $\eta = \partial_k[\zeta^2(u_{,k} - (u_{,k})_1]$, где $u_{,k} = \partial_{x_k} u$, а ζ есть срезка для K_1, точнее: $\zeta(x) = 0$ для $x \notin K_1$, $\zeta(x) = 1$ для $x \in K_\delta$ с $\delta \in [\frac{1}{2}, 1)$, и $|\nabla\zeta| \leqslant 2(1-\delta)^{-1}$. Элементарные преобразования с учетом уравнения $\operatorname{div} u = 0$ дают

$$\big\|\nabla u_{,k}\,\zeta\big\|^2_{2,K_1} = -\Big(\nabla u_{,k}, \big[u_{,k} - (u_{,k})_1\big] \otimes 2\zeta\nabla\zeta\Big) - \\ - \Big(q - (q)_1, u_{,kk}\cdot 2\zeta\nabla\zeta + \big[u_{,k} - (u_{,k})_1\big]\cdot 2\nabla(\zeta\zeta_{,k})\Big), \tag{1.7$_1$}$$

где $(\,\cdot\,,\,)$ есть скалярное произведение в $L_2(K_1)$. Отсюда с помощью неравенства Коши получим при любом $k = 1, 2, \ldots, n$ оценку

$$\big\|\nabla u_{,k}\big\|^2_{2,K_\delta} \leqslant \frac{c}{(1-\delta)^2}\Big[\|\nabla u - (\nabla u)_1\|^2_{2,K_1} + \|q - (q)_1\|^2_{2,K_1}\Big]. \tag{1.7$_2$}$$

В силу системы (1.4) из (1.7$_2$) следует также оценка

$$\big\|\nabla q\big\|^2_{2,K_\delta} \leqslant \frac{c}{(1-\delta)^2}\Phi(1, u, q, x^0). \tag{1.7$_3$}$$

Так как производные $\partial^m_x u$, $\partial^m_x q$ при любом $m = (m_1, \ldots, m_n)$ также являются решениями системы (1.4), то для них верны неравенства (1.7$_2$), (1.7$_3$). Из них же следуют оценки (1.5$_1$)

Теорема 1.1 позволяет доказать следующее важное свойство решений однородной системы (1.4).

Теорема 1.2. *Для решений u, q системы* (1.4) *в любой паре концентрических кубов $K_\rho(x^0) \in K_R(x^0)$ справедливы неравенства*

$$\Psi(\rho, u, q, x^0) \leqslant c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n \Psi(R, u, q, x^0) \tag{1.8$_1$}$$

и

$$\Phi(\rho, u, q, x^0) \leqslant c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n+2} \Phi(R, u, q, x^0) \tag{1.8$_2$}$$

где

$$\Psi(\rho, u, q, x^0) = \big\|\nabla u\big\|^2_{2,K_\rho(x^0)} + \big\|q - (q)_\rho\big\|^2_{2,K_\rho(x^0)}, \tag{1.8$_3$}$$

а $\Phi(\rho, u, q, x^0)$ определено в (1.5$_2$).

Докажем эти неравенства сначала для пары кубов $K_\tau \equiv K_\tau(x^0) \subset K_1 \equiv K_1(x^0)$ с $\tau \leqslant \frac{1}{2}$, а затем, делая в этих неравенствах подходящую замену переменных, получим (1.8$_k$). В силу классических теорем вложения и (1.5_1) имеем при $\tau \leqslant \frac{1}{2}$

$$\left\|\nabla u\right\|_{K_\tau}^2 \leqslant |K_\tau| \sup_{K_\tau} |\nabla u|^2 \leqslant c\tau^n \Big(\left\|\nabla u\right\|_{2,K_1}^2 + \left\|q-(q)_1\right\|_{2,K_1}^2\Big). \quad (1.9)$$

Для оценки давления q используем следующую лемму из работы [13].

Лемма 1.1. *Если для функции p в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеется представление*

$$\nabla p = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_k} + F_0 \quad (1.10_1)$$

с $F_k \in L_2(\Omega)$ и $F_0 \in L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega$, то

$$\left\|p-(p)_\Omega\right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant c(\Omega) \sum_{k=1}^n \left\|F_k\right\|_{2,\Omega}^2 + c_1(\Omega)\left\|F_0\right\|_{2,\Omega}^2, \quad (1.10_2)$$

где $(p)_\Omega$ есть усреднение по Ω. В случае $F_0 \equiv 0$ постоянная $c(\Omega)$ не меняется при растяжении области Ω.

Благодаря этой лемме, (1.9) и (1.4) справедливы неравенства

$$\left\|(q-(q)_\tau\right\|_{2,K_\tau(x^0)}^2 \leqslant c\tau^n \Psi(1,u,q,x^0), \quad \tau \leqslant \frac{1}{2}. \quad (1.11)$$

Неравенства (1.8_2) для пары кубов $K_\tau \subset K_1$ с $\tau \leqslant 1/2$ доказываются почти также, но при этом надо использовать нераверства Пуанкаре, а именно:

$$\begin{aligned}\left\|\nabla u - (\nabla u)_\tau\right\|_{2,K_\tau}^2 \leqslant c\tau^2 \left\|\nabla^2 u\right\|_{2,K_\tau}^2 \leqslant c_1 \tau^{n+2} \sup_{K_\tau} |\nabla^2 u|^2 \leqslant \\ \leqslant c_2 \tau^{n+2} \Phi(1,u,q,x^0). \quad (1.12_1)\end{aligned}$$

Отсюда, благодаря (1.4) и лемме 1.1, получим

$$\left\|(q-(q)_\tau\right\|_{2,K_\tau}^2 \leqslant c\tau^{n+2}(1,u,q,x^0). \quad (1.12_2)$$

Из (1.12_k), $k = 1, 2$, следует (1.8_2), а из (1.9) и (1.11) следует (1.8_1), ибо система (1.4) и функционалы $\Phi(R,u,q,x^0)$ и $\Phi(R,u,q,x^0)$ обладают следующим свойством обобщенной инвариантности:

если u, q удовлетворяют системе (1.4) в кубе K_R, то функции $\widetilde{u}(x) \equiv u(Rx)$, $\widetilde{q}(x) \equiv Rq(Rx)$ удовлетворяют такой же системе в кубе K_1. Функционалы же Ψ и Φ при этом преобразуются так:

$$\begin{aligned} &\Psi(\tau, \widetilde{u}, \widetilde{q}, x^0) = R^{-n-2}\Psi(\tau R, u, q, x^0), \\ &\Phi(\tau, \widetilde{u}, \widetilde{q}, x^0) = R^{-n-2}\Phi(\tau R, u, q, x^0), \ \ \tau \in (0,1]. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Поэтому из (1.9) и (1.11) для функций $\widetilde{u}$, $\widetilde{q}$ в кубах $K_\tau \subset K_1$ следуют (1.8_1) для u, q в кубах $K_\rho \subset K_R$ с $\rho = \tau R$. Аналогично, из (1.12_k), $k = 1, 2$, для $\widetilde{u}$, $\widetilde{q}$ в $K_\tau \subset K_1$ следуют (1.8_2).

Подобную процедуру замены функций u, q в кубах K_ρ, $\rho \in (0, R]$, на "нормированные" функции $\widetilde{u}$, $\widetilde{q}$ в кубах K_τ, $\tau \in (0,1]$, называют "скейлингом".

Итак, теорема 1.2 доказана для $\rho \in (0, \frac{R}{2}]$; для $\rho \in (\frac{R}{2}, R]$ она очевидна.

Перейдем теперь к исследованию решений системы (1.3). Для нее мы используем факт об однозначной разрешимости первой краевой задачи в произвольной области Ω в классе обобщенных решений с конечной диссипацией, установленный первым из авторов в середине 50х годов. Из этого факта и леммы 1.1 сделаем вывод, который необходим нам в данной работе.

Лемма 1.2. *В любой ограниченной области Ω система* (1.3) *с $F \in L_2(\Omega)$ имеет единственное решение v, p, удовлетворяющее краевому условию $v\big|_{\partial\Omega} = 0$ и*

$$\|\nabla v\|_{2,\Omega} + \|p - (p)_\Omega\|_{2,\Omega} \leqslant c(\Omega)\|F - (F)_\Omega\|_{2,\Omega}, \tag{1.14}$$

постоянная $c(\Omega)$ в котором не меняется при преобразовании подобия.

В случае $\Omega = \mathbb{R}^n$ и $F \in L_2(\mathbb{R}^n)$ система (1.3) *имеет единственное решение v, p, удовлетворяющее неравенству*

$$\|\nabla v\|_{2,\mathbb{R}^n} + \|p\|_{2,\mathbb{R}^n} \leqslant c\|F\|_{2,\mathbb{R}^n}. \tag{1.15}$$

В случае $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ и $F \in L_2(\mathbb{R}^n_+)$ система (1.3) *имеет единственное решение v, p, удовлетворяющее краевому условию $v\big|_{x_n=0}$ и неравенству*

$$\|\nabla v\|_{2,\mathbb{R}^n_+} + \|p\|_{2,\mathbb{R}^n_+} \leqslant c\|F\|_{2,\mathbb{R}^n_+}. \tag{1.16}$$

Докажем следующее предложение.

Теорема 1.3. *Для любого решения v, p системы (1.3) в кубе $K_R(x^0)$ с $F \in L_2(K_R(x^0))$ и любого куба K_ρ, $\rho \in (0, R]$, концентрического с K_R справедливы неравенства*

$$\Psi(\rho, v, p, x^0) \leqslant c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n \Psi(R, v, p, x^0) + c\big\|F - (F)_R\big\|^2_{2, K_R(x^0)} \qquad (1.17_1)$$

и

$$\Phi(\rho, v, p, x^0) \leqslant c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n+2} \Phi(R, v, p, x^0) + c\big\|F - (F)_R\big\|^2_{2, K_R(x^0)}, \quad (1.18_1)$$

где $\Psi(\rho \dots)$ и $\Phi(\rho \dots)$ определены в (1.8_3) и (1.5_2) соответственно.

Представим исследуемое решение v, p в $K_R(x^0)$ в виде суммы $v = u + w$, $p = q + r$, где w, r есть решение задачи

$$-\Delta w + \nabla r = \operatorname{div} F, \quad \operatorname{div} w = 0, \quad w\big|_{\partial K_R(x^0)} = 0. \qquad (1.19)$$

Для w, r используем оценку (1.14). Функции же u, q являются решением системы (1.4), и потому к ним мы можем применить результаты теоремы 1.2. Ввиду сказанного верна цепочка неравенств

$$\begin{gathered}\Psi(\rho, v, p, x^0) \leqslant 2\Psi(\rho, u, q, x^0) + 2\Psi(\rho, w, r, x^0) \leqslant \\ \leqslant 2c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n \Psi(R, u, q, x^0) + 2\Psi(\rho, w, r, x^0) \leqslant \\ \leqslant 4c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n \Psi(R, u, q, x^0) + 4c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n \Psi(R, w, r, x^0) + 2\Psi(\rho, w, r, x^0) \leqslant \\ \leqslant 4c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n \Psi(R, u, q, x^0) + c_1\big\|F - (F)\big\|^2_{2, K_R(x^0)}.\end{gathered}$$

Итак, (1.17) доказано. Аналогично, используя для u, q неравенство (1.8_2), докажем (1.18_1).

Наложим на F одно из следующих условий:

$$\sup_{\rho \in (0, R_0]} \Big(\rho^{-2\mu}\big\|F\big\|^2_{2, K_\rho(x^0)}\Big)^{1/2} \equiv \\ \equiv m(F, \mu, R_0, x^0) < \infty, \quad \mu \in [0, n/2) \qquad (1.20)$$

или $F \in L_\infty(K_R)$; в этом случае

$$\sup_{\rho \in (0, R_0]} \Big(\rho^{-n}\big\|F\big\|^2_{2, K_\rho(x^0)}\Big)^{1/2} \leqslant \big\|F\big\|_{\infty, K_\rho(x^0)} < \infty, \qquad (1.21)$$

или

$$\sup_{\rho\in(0,R_0]}\Big(\rho^{-n-2\lambda}\big\|F-(F)_\rho\big\|^2_{2,K_\rho(x^0)}\Big)^{1/2}\equiv\langle F\rangle_{\lambda,K_{R_0}(x^0)}<\infty. \qquad (1.22)$$

Из (1.17_1) и (1.18_1) для $K_{R_0}=K_{R_0}(x^0)$ сделаем такие выводы:

$$\Psi(\rho,v,p,x^0)\leqslant c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n\Psi(R,u,p,x^0)+cR^{2\mu}m^2(F,\mu,R_0,x^0), \qquad (1.17_2)$$

$$\Phi(\rho,v,p,x^0)\leqslant c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n+2}\Phi(R,u,p,x^0)+cR^n\big\|F\big\|^2_{\infty,K_{R_0}(x^0)} \qquad (1.18_2)$$

и

$$\Phi(\rho,v,p,x^0)\leqslant c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n+2}\Phi(R,u,p,x^0)+cR^{n+2\lambda}\langle F\rangle_{\lambda,K_{R_0}(x^0)} \qquad (1.18_3)$$

для всех $0<\rho\leqslant R\leqslant R_0$.

Для дальнейших заключений привлечем следующее следствие из леммы 4.8, гл. 2 монографии [14].

Лемма 1.3. *Пусть неубывающая функция* $\Phi:[0,R_0]\to R_+=[0,\infty)$ *при всех* $0<\rho\leqslant R\leqslant R_0$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\Phi(\rho)\leqslant A_1\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^\alpha\Phi(R)+A_2R^\beta \qquad (1.23)$$

с какими-либо $\alpha>\beta\geqslant0$ *и* A_1, $A_2\geqslant0$. *Тогда при всех* $\rho\in[0,R_0]$ *верно неравенство*

$$\Phi(\rho)\leqslant c\Big(A_1,\frac{1}{\alpha-\beta}\Big)\Big[\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^\beta\Phi(R_0)+A_2\rho^\beta\Big], \qquad (1.24)$$

где c *есть некоторая непрерывная функция указанных аргументов.*

Благодаря ей из (1.17_2) и (1.18_k), $k=2,3$, следует

Теорема 1.4. *Для решений* v, p *системы* (1.3) *в кубе* $K_{R_0}(x^0)$ *при любых* $0<\rho\leqslant R\leqslant R_0$ *верны неравенства*

$$\Psi(\rho,v,p,x^0)\leqslant$$
$$\leqslant c\Big(\frac{1}{n-2\mu}\Big)\rho^{2\mu}\Big[R^{-2\mu}\Psi(R,v,p,x^0)+m^2(F,\mu,R_0,x^0)\Big], \qquad (1.17_3)$$

$$\Phi(\rho,v,p,x^0)\leqslant c\rho^n\Big[R^{-n}\Phi(R,v,p,x^0)+\big\|F\big\|^2_{\infty,K_{R_0}(x^0)}\Big], \qquad (1.18_4)$$

$$\Phi(\rho,v,p,x^0)\leqslant c\rho^{n+2\lambda}\Big[R^{-n-2\lambda}\Phi(R,v,p,x^0)+\langle F\rangle^2_{\lambda,K_{R_0}(x^0)}\Big], \qquad (1.18_5)$$

с $\mu \in (0, n/2)$, $\lambda \in (0,1)$.

Если же v, p *является решением системы* (1.3) *в* $\mathbb{R}^n$ *с* $F \in L_2(\mathbb{R}^n)$, *подчиняющимся неравенству* (1.15), *то для него при всех* $0 < \rho \leqslant R$ *и всех* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *верны неравенства*

$$\Psi(\rho, v, p, x^0) \leqslant \\ \leqslant c\Big(\frac{1}{n-2\mu}\Big)\rho^{2\mu}\Big[R^{-2\mu}\big\|F\big\|^2_{2,\mathbb{R}^n} + m^2(F,\mu,R,x^0)\Big], \quad (1.17_4)$$

$$\Phi(\rho, v, p, x^0) \leqslant c\rho^n\Big[R^{-n}\big\|F\big\|^2_{2,\mathbb{R}^n} + \big\|F\big\|^2_{\infty,\mathbb{R}^n}\Big] \quad (1.18_6)$$

и

$$\Phi(\rho, v, p, x^0) \leqslant c\rho^{n+2\lambda}\Big[R^{-n-2\lambda}\big\|F\big\|^2_{2,\mathbb{R}^n} + \langle F\rangle^2_{\lambda,\mathbb{R}^n}\Big]. \quad (1.18_7)$$

Из них, в частности, следуют оценки

$$\sup_{\substack{\rho>0,\\ x^0\in\mathbb{R}^n}} \rho^{-2\mu}\Psi(\rho, v, p) \leqslant c\Big(\frac{1}{n-2\mu}\Big)m^2(F,\mu), \quad (1.17_5)$$

$$\sup_{\substack{\rho>0,\\ x^0\in\mathbb{R}^n}} \rho^{-n}\Phi(\rho, v, p) \leqslant c\|F\|^2_{\infty,\mathbb{R}^n}, \quad (18.8_8)$$

$$\sup_{\substack{\rho>0,\\ x^0\in\mathbb{R}^n}} \rho^{-n-2\lambda}\Phi(\rho, v, p) \leqslant c\langle F\rangle^2_{\lambda,\mathbb{R}^n}, \quad (1.18_9)$$

в которых

$$m(F,\mu) = \sup_{\substack{R_0>0,\\ x^0\in\mathbb{R}^n}} m(F,\mu,R_0,x^0),$$

а $\langle F\rangle_{\lambda,\mathbb{R}^n}$ *есть константа Гельдера для* F *в пространстве Гельдера* $H^\lambda(\mathbb{R}^n)$.

Разумеется, неравенство содержательно, если величины, входящие в мажоранты конечны.

Неравенство (1.17_5) гарантирует принадлежность функций ∇v и p пространству Морри–Кампанато с показателем μ, а неравенство (1.18_9) дает оценку константы Гельдера в пространстве $H^\lambda(\mathbb{R}^n)$ для ∇v и p. Неравенство же (1.18_8) позволяет привлечь интерполяционную теорему Стампаккиа для получения коэрцитивной оценки в $L_s(\mathbb{R}^n)$. Для удобства читателя приведем формулировку этой теоремы.

Теорема (Стампаккиа). *Если линейный оператор T является ограниченным в $L_q(K_0)$ с $q \in [1,\infty)$, и ограниченным из $L_\infty(K_0)$ в* BMO(K_0), *причем*

$$\|Tf\|_{q,K_0} \leqslant T_q\|f\|_{q,K_0} \quad \text{и} \quad [Tf]_{\mathrm{BMO}(K_0)} \leqslant T_\infty\|f\|_{\infty,K_0},$$

то он будет ограниченным в $L_s(K_0)$ с любым $s \in (q,\infty)$ и

$$\|Tf\|_{s,K_0} \leqslant \Big(T_q + c(n,q,s)T_q^{s/q}\,T_\infty^{1-s/q}\Big)\|f\|_{s,K_0}. \tag{1.25}$$

В этой теореме K_0 есть произвольный куб; от его размеров постоянная в (1.25) не зависит. В работах [10, 11] в качестве полунормы $[\,\cdot\,]$ взята величина

$$[f]_{\mathrm{BMO}(K_0)} = \sup_{K\subset K_0}|K|^{-1}\int\limits_K |f-(f)_K|\,dx. \tag{1.26$_1$}$$

Мы в качестве $[f]_{\mathrm{BMO}(K_0)}$ берем

$$[f]_{\mathrm{BMO}(K_0)} = \sup|K|^{-1}\bigg(\int\limits_K |f-(f)_K|^2dx\bigg)^{1/2}. \tag{1.26$_2$}$$

и именно эту величину оцениваем через $\|F\|_{\infty,K_0}$ (см. (1.18$_8$)). Легко видеть, что полунорма из (1.26$_2$) мажорирует полунорму из (1.26$_1$).

Мы применим эту теорему к операторам T_k, $k=1,\dots,n$, сопоставляющим тензорам $F \in L_2(\mathbb{R}^n)\cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$ производные $\partial_{x_k}v$ решений v, p задачи (1.3) в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих оценке (1.15). Точнее, будем рассматривать сначала лишь F, равные тождественно нулю вне какого-либо куба $K^*(0)\equiv K^*$. Соответствующие им решения v, p возьмем на произвольном кубе $K_0 \supset K^*$. Оператор T_k, сопоставляющий F ограничение $\partial_{x_k}v$ на K_0 в силу (1.15) и (1.18$_8$) удовлетворяет условиям теоремы Стампаккиа и потому для него справедлива оценка (1.25) с любым $s>2$. Это же верно и для оператора T_0, сопоставляющего F ограничение на K_0 давления p. Итак, мы доказали справедливость неравенства

$$\big\|\nabla v\big\|_{s,K_0} + \big\|p\big\|_{s,K_0} \leqslant c(s)\big\|F\big\|_{s,K_0} = c(s)\big\|F\big\|_{s,\mathbb{R}^n} \tag{1.27$_1$}$$

при любом $s>2$. Так как постоянная $c(s)$ в (1.27) не зависит от размера K_0, то из него следует неравенство

$$\big\|\nabla v\big\|_{s,\mathbb{R}^n} + \big\|p\big\|_{s,\mathbb{R}^n} \leqslant c(s)\big\|F\big\|_{s,\mathbb{R}^n}, \quad s>2. \tag{1.27$_2$}$$

Более того, так как эта оценка верна для любого F с компактным носителем, то она будет верна и для любого $F \in L_2(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Покажем теперь, что из (1.27_2) для $s \geqslant 2$ следует справедливость таких же неравенств для $s \in (1,2)$.

Это достаточно сделать лишь для ограниченных F с компактными носителями. Для них в силу (1.27_1) ∇v и p принадлежат $L_s(\mathbb{R}^n)$ с $\forall\, s \geqslant 2$, и имеет место тождество

$$(\nabla v, \nabla \xi) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla v \cdot \nabla \xi \, dx = -(F, \nabla \xi) \tag{1.28}$$

для любого ξ из $\overset{\bullet}{W}{}_2^1(\mathbb{R}^n)$ с $\operatorname{div} = 0$ (точка над W_2^1 указывает на то, что ξ имеет компактный носитель). Так как ∇v и F принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$, то тождество (1.28) верно для любых соленоидальных $\xi \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ с $\nabla \xi \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим также решения w, r системы

$$-\Delta w + \nabla r = \operatorname{div} G, \quad \operatorname{div} w = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \tag{1.29}$$

с G, принадлежащей $L_2(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$ и имеющей компактный носитель. Для него мы доказали справедливость оценок

$$\|\nabla w\|_{s',\mathbb{R}^n} + \|r\|_{s',\mathbb{R}^n} \leqslant c(s') \|G\|_{s',\mathbb{R}^n} \tag{1.30}$$

с $s' \geqslant 2$. Кроме того, для него справедливо и тождество

$$(\nabla w, \nabla \eta) = -(G, \nabla \eta) \tag{1.31_1}$$

для любой $\eta \in L_{2,\mathrm{loc}}$ с $\nabla \eta \in L_2(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{div} \eta = 0$. В частности (1.28) справедливо при $\xi = w$, а (1.31_1) справедливо с $\eta = v$, и потому

$$(F, \nabla w) = -(\nabla v, \nabla w) = (G, \nabla v) \tag{1.31_2}$$

при любых ограниченных F, G с компактными носителями. Из (1.31_2) и (1.30) сделаем такие выводы

$$|(\nabla v, G)| = |(F, \nabla w)| \leqslant \|F\|_{s,\mathbb{R}^n} \|\nabla w\|_{s',\mathbb{R}^n} \leqslant \|F\|_{s,\mathbb{R}^n} c(s') \|G\|_{s',\mathbb{R}^n}.$$

Отсюда же, как хорошо известно, следует, что

$$\|\nabla v\|_{s,\mathbb{R}^n} \leqslant c(s') \|F\|_{s,\mathbb{R}^n}, \quad s \in (1,2). \tag{1.32}$$

Осталось оценить $\|p\|_{s,\mathbb{R}^n}$ для $s \in (1,2)$. Это можно сделать, например, так: считая все функции гладкими, вычислить от обоих частей системы (1.3) $\operatorname{div} v$. Это дает

$$\Delta p = \partial^2_{x_i x_j} F_{ij}, \tag{1.33}$$

где F_{ij} суть компоненты тензора F. Так как p и F квадратично суммируемы по $\mathbb{R}^n$, то уравнение (1.33) для их преобразований Фурье $\widetilde{p}$ и $\widetilde{F}$ дает соотношение

$$\widetilde{p}(\xi) = \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \widetilde{F}_{ij}(\xi). \tag{1.34}$$

В силу теоремы Марцинкевича

$$\|p\|_{s,\mathbb{R}^n} \leqslant c(s) \|F\|_{s,\mathbb{R}^n}. \tag{1.35}$$

Эта оценка справедлива и для любых $F \in L_s(\mathbb{R}^n)$, ибо $c(s)$ зависит только от s и n. Таким образом мы доказали следующее предложение.

Теорема 1.5. *Система* (1.3) *с* $F \in L_s(\mathbb{R}^n)$, $s \in (1, \infty)$, *имеет единственное решение* v, p, *подчиняющееся неравенству*

$$\|\nabla v\|_{s,\mathbb{R}^n} + \|p\|_{s,\mathbb{R}^n} \leqslant c(s) \|F\|_{s,\mathbb{R}^n}. \tag{1.36}$$

Точнее, мы доказали только априорную оценку (1.36). Утверждение же о ее однозначной разрешимости устанавливается с помощью аппроксимации F гладкими функциями с компактными носителями.

Обратимся теперь к системе (1.1) с $f \in L_s(\mathbb{R}^n)$, $s \in (1, \infty]$. Из нее следуют системы

$$-\Delta v_{,k} + \nabla p_{,k} = f_{,k}, \quad \operatorname{div} v_{,k} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \tag{1.37$_1$}$$

Их можно записать так

$$-\Delta v_{i,k} + p_{,ik} = f_{i,k} = \sum_j \partial_{x_j} (f_i \delta^k_j)$$

и следовательно $v_{,k}$, $p_{,k}$ является решением системы

$$-\Delta v_{,k} + \nabla p_{,k} = \operatorname{div} F^{(k)} \quad v_{,k} = 0 \tag{1.37$_2$}$$

с тензорами $F^{(k)} = (F^{(k)}_{ij})$, $F^{(k)}_{ij} = f_i \delta^k_j$. Накладывая на f те условия, которые мы накладывали выше на F, получим для $v_{,k}$, $p_{,k}$ все те утверждения, которые доказаны выше для v, p. Мы не будем перечислять их все, а выделим из них следующие.

Теорема 1.6. *Для решений v, p системы* (1.1) *в* $\mathbb{R}^n$ *справедливы оценки*

$$\left\|\nabla^2 v\right\|_{s,\mathbb{R}^n} + \left\|\nabla p\right\|_{s,\mathbb{R}^n} \leqslant c(s)\left\|f\right\|_{s,\mathbb{R}^n} \tag{1.38}$$

при любом $s \in (1,\infty)$. *Кроме того, справедливы оценки*

$$\sup_{K_\rho \subset \mathbb{R}^n} \rho^{-2\mu}\left[\sum_{i,j=1}^n \left\|v_{,ij}\right\|^2_{2,K_\rho} + \sum_{i=1}^n \left\|p_{,i} - (p_{,i})_{K_\rho}\right\|^2_{2,K_\rho}\right] \leqslant$$
$$\leqslant c\Big(\frac{1}{n-2\mu}\Big) m^2(f,\mu), \tag{1.39}$$

при любом $\mu \in (0, n/2)$,

$$\sup_{K_\rho \subset \mathbb{R}^n} \rho^{-n}\left[\sum_{i,j=1}^n \left\|v_{,ij} - (v_{,ij})_{K_\rho}\right\|^2_{2,K_\rho} + \sum_{i=1}^n \left\|p_{,i} - (p_{,i})_{K_\rho}\right\|^2_{2,K_\rho}\right] \leqslant$$
$$\leqslant c\left\|f\right\|^2_{\infty,\mathbb{R}^n} \tag{1.40}$$

и

$$\sup_{K_\rho \subset \mathbb{R}^n} \rho^{-n-2\lambda}\left[\sum_{i,j=1}^n \left\|v_{,ij} - (v_{,ij})_{K_\rho}\right\|^2_{2,K_\rho} + \sum_{i=1}^n \left\|p_{,i} - (p_{,i})_{K_\rho}\right\|^2_{2,K_\rho}\right] \leqslant$$
$$\leqslant c(\lambda)\langle f\rangle^2_{\lambda,\mathbb{R}^n} \tag{1.41}$$

при любом $\lambda \in (0,1)$. *В них супремум берется по всем кубам* $K_\rho(x^0)$ *с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям.*

§2. Системы Стокса в полупространстве

В этом параграфе мы докажем аналоги теорем первого параграфа для решений системы

$$-\Delta v + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad v\big|_\Gamma = 0, \tag{2.1}$$

в полупространстве $\mathbb{R}^n_+ = \{x \| x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$, где Γ есть граница $\mathbb{R}^n_+$, т.е. $\Gamma = \{x \| x \in \mathbb{R}^n, x_n = 0\}$, решений u, q соответствующей однордной системы

$$-\Delta u + \nabla q = 0, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u\big|_\Gamma = 0, \tag{2.2}$$

и решений системы вида

$$-\Delta v + \nabla p = \operatorname{div} F, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad v\big|_\Gamma = 0. \tag{2.3}$$

Для этого мы, кроме семейств кубов $K_\rho(x^0)$, $\rho \in (0,R]$, имеющих общий центр $x^0 \in \mathbb{R}^n_+$ будем использовать и семейства кубов $K_{\rho,y}$, $\rho \in (0,R]$, расположенных в $\mathbb{R}^n_+$ и имеющих общую “вершину” $y \in \Gamma$, т.е. $K_{\rho,y} = \Big\{x \,\|\, x_\alpha \in \Big(-\dfrac{\rho}{2}+y_\alpha, \dfrac{\rho}{2}+y_\alpha\Big), \alpha = 1,\dots,n-1, x_n \in (0,\rho); y=(y_1,\dots,y_{n-1},0)\in\Gamma\Big\}$. Параметр ρ у $K_\rho(x^0)$ и $K_{\rho,y}$ указывает длину сторон этих кубов. Для кубов первого семейства, лежащих а $\mathbb{R}^n_+$, мы будем использовать теоремы первого параграфа, а для кубов второго типа докажем предложения, близкие к теоремам первого параграфа.

Аналогом теоремы 1.1 является

Теорема 2.1. *Для решений u, q системы (2.2) в $K_{1,y}$ с любым $y \in \Gamma$ справедливы неравенства*

$$\left\|\nabla^{k+1}u\right\|^2_{2,K_{\frac12,y}} + \left\|\nabla^k q\right\|^2_{2,K_{\frac12,y}} \leqslant c(k)I_y(1,u,q), \quad k = 1,2,\dots, \tag{2.4$_1$}$$

где

$$I_y(\rho,y,q) \equiv \sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\|u_{,\alpha}\right\|^2_{2,K_{\rho,y}} + \left\|q-(q)_{\rho,y}\right\|^2_{2,K_{\rho,y}(x^0)}, \tag{2.4$_2$}$$

где $u_{,\alpha} = u_{x_\alpha}$, $\alpha = 1,\dots,n-1$, $(q)_{\rho,y} = \displaystyle\fint_{K_{\rho,y}} q\,dx$.

Сначала напомним вывод локальной оценки производных $\nabla^2 u$ и ∇q. Сделаем это для решений системы (2.1). Возьмем семейство кубов $K_{\delta_l,y}$ с $\delta_l = 2^{-1}+2^{-l}$, $l = 1,2,\dots$, и условимся в пределах данного доказательства обозначать их $K(l)$. Для каждой пары $K(l) \subset K(l-1)$ возьмем срезку ξ_l, равную нулю вне $K(l-1)$, единице в $K(l)$ и обладающую обычными свойствами срезки: $\zeta_l(x) \in [0,1]$ и $|\nabla\zeta_l(x)| \leqslant 2^{l+1}$. Индекс “$l$” у ζ_l будем опускать. Продифференцируем (2.1) по x_α, $\alpha < n$, результат умножим на $v_{,\alpha}\zeta^2$ и проигтегрируем по $K(l-1)$. После однократного интегрирования по частям во всех членах и учета уравнения $\operatorname{div} v = 0$ получим соотношение

$$\left\|\nabla_{,\alpha}\zeta\right\|^2_{2,K(l-1)} = -(\nabla v_{,\alpha}, v_{,\alpha}\nabla\zeta^2) +$$

$$+\big(p-(p)_{(l-1)}, v_{,\alpha}\nabla\zeta^2\big)-\big(f, v_{,\alpha\alpha}\zeta^2+v_{,\alpha}\partial_{x_\alpha}\zeta^2\big). \qquad (2.5_1)$$

Здесь (,) есть скалярное произведение в $L_2(K(l-1))$, а $(p)_{(l-1)}$ есть усреднение p по $K(l-1)$. Из (2.5_1) следуют неравенства

$$\big\|\nabla v_{,\alpha}\big\|^2_{2,K(l)} \leqslant 4^l c\Big(\big\|p-(p)_{(l-1)}\big\|^2_{2,K(l-1)}+\big\|v_{,\alpha}\big\|^2_{2,K(l-1)}\Big)+$$

$$+c\big\|f\big\|^2_{2,K(l-1)} \equiv J_{(l-1)}(v,p), \quad \alpha<n. \qquad (2.5_2)$$

Здесь c, как и всюду, зависит только от n. Благодаря $\operatorname{div} v=0$ отсюда следует

$$\big\|v_{n,nn}\big\|^2_{2,K(l)} \leqslant cJ_{(l-1)}(v,p). \qquad (2.5_3)$$

Это же неравенство, (2.5_2) и уравнение $p_{,n}=\Delta v_n+f_n$ дают оценку

$$\big\|p_{,n}\big\|^2_{2,K(l)} \leqslant cJ_{(l-1)}(v,p). \qquad (2.5_4)$$

Теперь оценим $p_{,\alpha}$, используя систему $\nabla p_{,\alpha}=f_{,\alpha}+\Delta v_{,\alpha}$, $\alpha<n$, и лемму 1.1. Благодаря им и (2.5_k), $k=2,3$ имеем

$$\big\|p_{,\alpha}-(p_{,\alpha})_{(l)}\big\|^2_{2,K(l)} \leqslant cJ_{(l-1)}(v,p). \qquad (2.5_5)$$

Оценим $|(p_{,\alpha})_{(l)}|$ следующим образом

$$|(p_{,\alpha})_{(l)}|^2=\big|K(l)\big|^{-2}\bigg|\int\limits_{K(l)} p_{,\alpha}\,dx\bigg|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-2n}\bigg|\int\limits_{\partial K(l)} \big|p-(p)_{(l-1)}\big|\,ds\bigg|^2 \leqslant c_1\int\limits_{\partial K(l)} \big(p-(p)_{(l-1)}\big)^2\,ds \leqslant \qquad (2.5_6)$$

$$\leqslant \varepsilon\int\limits_{K(l)} |\nabla p|^2dx+c_\varepsilon\big\|p-(p)_{(l-1)}\big\|^2_{2,K(l-1)},$$

где ε – любое число из $(0,1]$. Ниже мы выберем его достаточно малым, но фиксированным числом. Здесь, как и в ряде других мест, мы используем то, что $\|p-(p)_\Omega\|_{2,\Omega}\leqslant\|p-c\|_{2,\Omega}$ при любом c. Из (2.5_5) и (2.5_6) выведем оценку

$$\big\|p_{,\alpha}\big\|^2_{2,K(l)} \leqslant c\varepsilon\big\|\nabla p\big\|^2_{2,K(l)}+cc_\varepsilon J_{(l-1)}(v,p). \qquad (2.5_7)$$

Недостающую оценку для $v_{\alpha,nn}$ получим из системы (2.1) и неравенств (2.5_5). А именно

$$\|v_{\alpha,nn}\|^2_{2,K(l)} \leqslant \varepsilon c \|\nabla\|^2_{2,K(l)} + cc_\varepsilon J_{(l-1)}(v,p). \qquad (2.5_8)$$

Складывая неравенства (2.5_k), $k = 2,3,4,7,8$ и выбирая ε достаточно малым, получаем желательную оценку

$$\|\nabla^2 v\|^2_{2,K(l)} + \|\nabla p\|^2_{2,K(l)} \leqslant c4^l I_y(\delta_{l-1}, v, p) + c_1 \|f\|^2_{2,K(l-1)}, \qquad (2.6)$$

где $K(l) \equiv K_{\delta_l,y}$, $\delta_l = \frac{1}{2} + 2^{-l}$, $l = 2,3,\dots$, а I_y определено в (2.4_2). Для решений $u \cdot q$ однородной системы (2.2) эта оценка имеет вид

$$\|\nabla^2 u\|^2_{2,K(l)} + \|\nabla q\|^2_{2,K(l)} \leqslant c4^l I_y(\delta_{k-1}, u, q), \quad l \geqslant 2. \qquad (2.7)$$

Из нее следует оценка (2.4_1) при $k=1$. Покажем, как с помощью (2.7) получить (2.4_1) с $k=2$. Так как $u_{,\alpha}$, $q_{,\alpha}$ удовлетворяют всем соотношениям (2.2), то для них справедливы (2.7) и потому

$$\|\nabla^2 u_{,\alpha}\|^2_{2,K(3)} + \|\nabla q_{,\alpha}\|^2_{2,K(3)} \leqslant c_1 I_y\big(\delta_2, u_{,\alpha}, q_{,\alpha}\big) \leqslant$$
$$\leqslant c_2 I_y(1,u,q), \ \ \alpha < n. \qquad (2.8_1)$$

Оценки недостающих членов $\partial^3_{x_n} u$ и $\partial^2_{x_n} q$ получим с помощью (2.8_1) и уравнений (2.2), причем проще, чем при доказательстве (2.7). А именно,

$$\|\partial^3_{x_n} u_n\|^2_{2,K(3)} = \left\| \sum_{\alpha=1}^{n-1} \partial^2_{x_n}\, \partial_{x_\alpha}\, u_\alpha \right\| \leqslant cI_y(1,u,q) \qquad (2.8_2)$$

и

$$\|\partial^2_{x_n} q\|^2_{2,K(3)} = \left\|\partial_{x_n} \Delta u_n\right\|^2_{2,K(3)} \leqslant cI_y(1,u,q). \qquad (2.8_3)$$

Таким образом мы оценили

$$\|\nabla^2 q\|^2_{q,K(3)} \leqslant cI_y(1,u,q).$$

Оставшиеся производные $\partial^2_{x_n} u_\alpha$ оценим так:

$$\|\partial^3_{x_n} u_\alpha\|^2_{2,K(3)} = \left\| \partial_{x_n}\partial_{x_\alpha} q - \sum_{\beta=1}^{n-1} \partial_{x_n}\, \partial^2_{x_\beta}\, u_\alpha \right\|^2_{2,K(3)} \leqslant cI_\beta(1,u,q).$$

Из сделанного следует (2.4_1) с $k=2$. Аналогично выводится (2.4_1) для любого $k \geqslant 3$.

Следующая теорема является аналогом теоремы 1.2.

Теорема 2.2. *Для решений u, q системы (2.2) в $K_{R,y}$ с любыми $y \in \Gamma$, $R > 0$ и любого $K_{\rho,y} \subset K_{R,y}$ имеют место неравенства*

$$\Psi_y(\rho, u, q) \leqslant c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n \Psi_y(R, u, q) \tag{2.9_1}$$

и

$$\Phi_y(\rho, u, q) \leqslant c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n+2} \Phi_y(R, u, q,) \tag{2.10_1}$$

где

$$\Psi_y(\rho, u, q) = \big\|\nabla u\big\|^2_{2,K_{\rho,y}} + \big\|q - (q)_{\rho,y}\big\|^2_{2,K_{\rho,y}}, \tag{2.9_2}$$

$$\Phi_y(\rho, u, q) = \big\|\nabla u - [\nabla u]_{\rho,y}\big\|^2_{2,K_{\rho,y}} + \big\|q - (q)_{\rho,y}\big\|^2_{2,K_{\rho,y}}, \tag{2.10_2}$$

а

$$\big\|\nabla u - [\nabla u]_{\rho,y}\big\|^2_{2,K_{\rho,y}} = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \big\|u_{,\alpha}\big\|^2_{2,K_{\rho,y}} + \big\|u_{,n} - (u_{,n})_{\rho,y}\big\|^2_{2,K_{\rho,y}}.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.2. Сначала берем кубы $K_{\tau,y} \equiv K_\tau$ с $\tau \in (0, \frac{1}{2}]$, и $K_{1,y} \equiv K_1$. Для них в силу теоремы 2.1 имеем

$$\big\|\nabla u\big\|^2_{2,K_\tau} \leqslant \tau^n \sup_{K_\tau} |\nabla u|^2 \leqslant c\tau^n \Big(\big\|\nabla u\big\|^2_{2,K_1} + \big\|q - (q)_1\big\|^2_{2,K_1}\Big), \tag{2.11_1}$$

а также

$$\begin{aligned}\big\|\nabla u - [\nabla u]_{\tau,y}\big\|^2_{2,K_{\rho,y}} + \big\|q - (q)_{\tau,y}\big\|^2_{2,K_\tau} \leqslant c\tau^2 \Big(\big\|\nabla^2 u\big\|^2_{2,K_\tau} + \big\|\nabla q\big\|^2_{2,K_\tau}\Big) \leqslant \\ \leqslant c\tau^{n+2}\Big(\sup_{K_\tau} |\nabla^2 u|^2 + \sup_{K_\tau} |\nabla q|^2\Big) \leqslant c_1 \tau^{n+2} I_y(1, u, q) \leqslant \\ \leqslant c_1 \tau^{n+2} \Phi_y(1, u, q).\end{aligned} \tag{2.11_2}$$

Скейлинг, описанный в §1 при доказательстве теоремы 1.2, показывает, что из (2.11_k), $k = 1, 2$, следуют неравенства (2.9_1) и (2.10_1).

С помощью теоремы 2.2 доказывается

Теорема 2.3. *Для решений v, p системы* (2.3) *в* $K_{R,y}$ *справедливы оценки*

$$\Psi_y(\rho, v, p) \leqslant c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n \Psi_y(R, v, p) + c\big\|F - (F)_{R,y}\big\|^2_{2,K_{R,y}} \qquad (2.12)$$

и

$$\Phi_y(\rho, v, p) \leqslant c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n+2} \Phi_y(R, v, p) + c\|F - (F)_{R,y}\|^2_{2,K_{R,y}} \qquad (2.13)$$

Доказательство ее аналогично доказательству теоремы 1.3. А именно, представим v и p в виде сумм

$$v = u + w, \quad p = q + r,$$

где w, r есть решение краевой задачи в $K_{R,y}$:

$$-\Delta w + \nabla r = \operatorname{div} F, \quad \operatorname{div} w = 0, \quad w\Big|_{\partial K_{R,y}} = 0. \qquad (2.14)$$

Ясно, что u, q при этом удовлетворяют в $K_{\rho,y}$ всем соотношениям (2.2), и потому для них справедлива теорема 2.1. Благодаря (2.9_1)

$$\begin{aligned}\Psi_y(\rho, v, p) &\leqslant 2\Psi_y(\rho, u, q) + 2\Psi_y(\rho, w, r) \leqslant \\ &\leqslant 2c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n \Psi_y(R, u, q) + 2\Psi_y(\rho, w, r) \leqslant \\ &\leqslant 4c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n \Psi_y(R, v, p) + 4c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n \Psi_y(R, w, r) + 2\Psi_y(R, w, r) \leqslant \\ &\leqslant 4c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n \Psi_y(R, v, p) + c_1\|F - (F)_{R,y}\|^2_{2,K_{R,y}}.\end{aligned}$$

При этом для оценки $\Psi_y(R, w, r)$ мы использовали энергетическую оценку (1.14) для $\Omega = K_{R,y}$. Аналогично, используя (2.10), доказывается 2.13.

Из (2.12), (2.13) с помощью леммы 1.3 получаем аналог первой части теоремы 1.4, а именно

Теорема 2.4. *Для решений v, p системы* (2.3) *в кубе* $K_{R_0,y}$ *при любых* $0 \leqslant \rho \leqslant R \leqslant R_0$ *верны неравенства*

$$\Psi_y(\rho, v, p) \leqslant \\ \leqslant c\Big(\frac{1}{n - 2\mu}\Big)\rho^{2\mu}\Big[R^{-2\mu}\Psi_y(R, v, p) + m^2(F, \mu, R_0, y)\Big], \qquad (2.15_1)$$

$$\Phi_y(\rho, v, p) \leqslant c\rho^n \Big[R^{-n}\Phi_y(R, v, p) + \big\|F\big\|^2_{\infty, K_{R_0,y}}\Big] \tag{2.16}$$

и

$$\Phi_y(\rho, v, p) \leqslant c\rho^{n+2} \Big[R^{-n-2}\Phi_y(R, v, p) + \langle F\rangle^2_{\lambda, K_{R_0,y}}\Big] \tag{2.17}$$

с $\mu \in (0, n/2)$, $\lambda \in (0,1)$.

Здесь

$$m(F, \mu, R_0, y) = \sup_{\rho\in(0,R_0]} \Big(\rho^{-2\mu}\big\|F\big\|^2_{2,K_{\rho,y}}\Big)^{1/2}, \tag{2.15$_2$}$$

а $\langle F\rangle^2_{\lambda, K_{R_0,y}}$ есть константа Гельдера тензора F в пространстве $H^\lambda(\overline{K}_{R_0,y})$.

Для доказательства аналогов других частей теоремы 1.4 используем утверждения этих частей теоремы 1.4 и утверждения теоремы 2.4 следующим образом.

С каждой точкой $x^0 \in \mathbb{R}^n_+$ свяжем семейство кубов $\{K_\rho(x^0), \rho \in (0, 2x^0_n]\}$ первого типа и семейство кубов $\{K_{\rho,y}, \rho > 0, y = (x^0_1, \dots, x^0_{n-1}, 0)\}$ второго типа. Благодаря (1.17$_3$) и (2.15$_1$) при любых $R \geqslant 2x^0_n$ верны неравенства

$$\begin{aligned}
&\Psi(\rho, v, p, x^0) \leqslant \\
&\quad\leqslant c\Big(\frac{1}{n-2\mu}\Big)\rho^{2\mu}\Big[(2x^0_n)^{-2\mu}\Psi(2x^0_n, v, p, x^0) + m^2(F, \mu, 2x^0_n, x^0)\Big] \leqslant \\
&\quad\leqslant c\Big(\frac{1}{n-2\mu}\Big)\rho^{2\mu}\Big[(2x^0_n)^{-2\mu}\Psi_y(2x^0_n, v, p) + m^2(F, \mu)\Big] \leqslant \qquad (2.18_1)\\
&\leqslant c\Big(\frac{1}{n-2\mu}\Big)\rho^{2\mu}\Big\{c\Big(\frac{1}{n-2\mu}\Big)\Big[R^{-2\mu}\Psi_y(R, v, p) + m^2(F, \mu)\Big] + m^2(F, m)\Big\}.
\end{aligned}$$

Из неравенств (1.18$_k$), $k = 4, 5$ и неравенств (2.16), (2.17) сделаем также выводы: при любых $R \geqslant 2x^0_n$ справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned}
\Phi(\rho, v, p, x^0) &\leqslant c\rho^n \Big[(2x^0_n)^{-n}\Phi(2x^0_n, v, p, x^0) + \big\|F\big\|^2_{\infty, K_{2x^0_n}(x^0)}\Big] \leqslant \\
&\leqslant c\rho^n \Big[(2x^0_n)^{-n}\Phi_y(2x^0_n, v, p) + \big\|F\big\|^2_{\infty, K_{2x^0_n}(x^0)}\Big] \leqslant \\
&\leqslant c\rho^n \Big\{c\Big[R^{-n}\Phi_y(R, v, p) + \big\|F\big\|^2_{\infty, K_R}\Big] + \big\|F\big\|^2_{\infty, K_{2x^0_n}(x^0)}\Big\} \leqslant
\end{aligned}$$

$$\leqslant c\rho^n \Big\{ cR^{-n}\Phi_y(R,v,p) + c_1 \|F\|^2_{\infty,\mathbb{R}^n_+} \Big\} \tag{2.19}$$

и

$$\Phi(\rho,v,p,x^0) \leqslant c\rho^{n+2\lambda}\Big[(2x^0_n)^{-n-2\lambda}\Phi(2x^0_n,v,p,x^0) + \langle F\rangle^2_{\lambda,K_{2x^0_n}(x^0)}\Big] \leqslant$$

$$\leqslant c\rho^{n+2\lambda}\Big\{ c\Big[R^{-n-2\lambda}\Phi_y(R,v,p) + \langle F\rangle^2_{\lambda,\mathbb{R}^n_+}\Big] + \langle F\rangle^2_{\lambda,\mathbb{R}^n_+}\Big\}. \tag{2.20$_1$}$$

Если v, p есть решение системы (2.3) с $F\in L_2(\mathbb{R}^n_+)$ во всем $\mathbb{R}^n_+$ и для него верно энергетическое неравенство

$$\|\nabla v\|_{2,\mathbb{R}^n_+} + \|p\|_{2,\mathbb{R}^n_+} \leqslant c\|F\|_{2,\mathbb{R}^n_+}, \tag{2.21}$$

то функционалы $\Psi_y(R,v,p)$ и $\Phi_y(R,v,p)$ мажорируются $\|F\|_{2,\mathbb{R}^n_+}$, и потому из (2.18$_1$)–(2.20$_1$) следуют оценки

$$\rho^{-2\mu}\Psi(\rho,v,p,x^0) \leqslant c\Big(\frac{1}{n-2\mu}\Big)\Big[R^{-2\mu}\|F\|^2_{2,\mathbb{R}^n_+} + m^2(F,\mu)\Big], \tag{2.18$_2$}$$

$$\rho^{-n}\Phi(\rho,v,p,x^0) \leqslant c\Big[R^{-n}\|F\|^2_{2,\mathbb{R}^n_+} + \|F\|^2_{\infty,\mathbb{R}^n_+}\Big], \tag{2.19$_2$}$$

$$\rho^{-n-2\lambda}\Phi(\rho,v,p,x^0) \leqslant c\Big[R^{-n-2\lambda}\|F\|^2_{2,\mathbb{R}^n_+} + \langle F\rangle^2_{\lambda,\mathbb{R}^n_+}\Big]. \tag{2.20$_2$}$$

Устремляя в этих неравенствах R к ∞ придем к такому заключению:

$$\sup_{\substack{x^0\in\mathbb{R}^n_+\\ \rho\in(0,2x^0_n]}} \rho^{-2\mu}\Psi(\rho,v,p,x^0) \leqslant c\Big(\frac{1}{n-2\mu}\Big)m^2(F,\mu),$$

$$\mu\in(0,n/2), \tag{2.18$_3$}$$

$$\sup_{\substack{x^0\in\mathbb{R}^n_+\\ \rho\in(0,2x^0_n]}} \rho^{-n}\Psi(\rho,v,p,x^0) \leqslant c\|F\|^2_{2,\mathbb{R}^n_+}, \tag{2.19$_3$}$$

$$\sup_{\substack{x^0\in\mathbb{R}^n_+\\ \rho\in(0,2x^0_n]}} \rho^{-n-2\lambda}\Psi(\rho,v,p,x^0) \leqslant c\langle F\rangle^2_{\lambda,\mathbb{R}^n_+}, \quad \lambda\in(0,1) \tag{2.20$_3$}$$

Оценки (2.21), (2.19$_3$) позволяют применить теорему Стампаккиа к операторам T_k, $k=1,\dots,n$ сопоставляющим тензору

$F \in L_2(\mathbb{R}^n_+)$ производные $v_{,k}$ решения v, p задачи в $\mathbb{R}^n_+$, подчиняющегося неравенству (2.21), а также к оператору $T_0 : F \to p$. Это гарантирует оценки

$$\|\nabla v\|_{s,\mathbb{R}^n_+} + \|p\|_{s,\mathbb{R}^n_+} \leqslant c(s)\|F\|_{s,\mathbb{R}^n_+} \tag{2.23}$$

при любом $s \in [2,\infty)$.

Рассуждение, проведенное в §1 после неравенства (1.27_2), справедливо и для области $\mathbb{R}^n_+$. Благодаря ему из (2.23) для $s \in [2,\infty)$ следуют такие же неравенства и для $s \in (1,2)$.

Подытожим сделанное:

Теорема 2.5. *Для решения v, p системы* (2.3) *справедливы неравенства* (2.18_k), (2.19_k), (2.20_k), $k = 1,2,3$, *а также оценки* (2.23), *с любым $s \in (1,\infty)$.*

Установленные нами резушьтаты о решениях системы (2.3) позволяют получить для решения v, p систему (2.1) оценки разных норм $\nabla^2 v$ и ∇p через такие же нормы для f. Делается это следующим образом. Из системы (2.1) для v, p следуют системы

$$-\Delta v_{,\alpha} + \nabla p_{,\alpha} = f_{,\alpha}, \quad \operatorname{div} v_{,\alpha} = 0, \quad v_{,\alpha}\big|_\Gamma = 0 \tag{2.24}$$

при любом $\alpha = 1,\dots,n-1$. То есть функции $v_{,\alpha}$, $p_{,\alpha}$ являются решениями системы вида (2.3) с $F = (F^{(\alpha)}_{ij})$, $F^{(\alpha)}_{ij} = f_{i,\alpha}\delta^i_j$. Поэтому для $v_{,\alpha}$, $p_{,\alpha}$ справедливы все неравенства, доказанные нами выше для решений v, p системы (2.3) с $F = (F^{(\alpha)}_{ij})$. Мы выпишем ниже части из них, но сначала отметим следующий важный факт.

Замечание 2.1. Если для $\nabla v_{,\alpha}$, $p_{,\alpha}$, $\alpha = 1,\dots,n-1$ промажорированы какие-либо нормы $\|\cdot\|$ или функционалы типа $\Phi(\rho,\nabla_{,\alpha},p_{,\alpha})$, определяющие каким-либо полунормы, то такие же мажоранты справедливы и для норм (функционалов) $v_{k,nn}$, $k = 1,\dots,n$, $p_{,n}$. Это обусловлено тем, что уравнения системы (2.3) позволяют определить $v_{,nn}$ и $p_{,n}$ как линейные комбинации $\nabla v_{,\alpha}$ и $p_{,\alpha}$. Действительно, они дают следующее:

$$v_{n,nn} = \sum_{\alpha=1}^{n-1} v_{\alpha,\alpha n}, \tag{2.21_1}$$

$$p_{,n} = \Delta v_n + f_n, \tag{2.25_2}$$

$$v_{\alpha,nn} = -\sum_{\beta=1}^{n-1} v_{\alpha,\beta\beta} + p_{,\alpha} - f_\alpha, \tag{2.21_3}$$

и потому

$$\|v_{n,nn}\| \leqslant \sum_{\alpha=1}^{n-1} \|v_{\alpha,\alpha n}\|, \quad \|p_{,n}\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|v_{n,ii}\| + \|f_n\|,$$

и

$$\|v_{\alpha,nn}\| \leqslant \sum_{\beta=1}^{n-1} \|v_{\alpha,\beta\beta}\| + \|p_{,\alpha}\| + \|f_n\|.$$

Такие же неравенства верны и для полунорм, в том числе и для $\Phi^{1/2}(\,\cdot\,)$. Выпишем лишь часть оценок, справедливых для решений v, p задачи (2.1).

Теорема 2.6. *Для решения v, p задачи (2.1) в $\mathbb{R}^n_+$ с $f \in L_2(\mathbb{R}^n_+)$ справедливы оценки:*

$$\sup_{\substack{x^0\in\mathbb{R}^n_+\\ \rho\in(0,2x^0_n]}} \rho^{-2\mu} \sum_{k=1}^{n} \Psi(\rho, v_{,k}, p_{,k}, x^0) \leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\frac{1}{n-2\mu}\Big) m^2(f,\mu), \quad \mu \in (0, n/2), \tag{2.26}$$

$$\sup_{\substack{x^0\in\mathbb{R}^n_+\\ \rho\in(0,2x^0_n]}} \rho^{-n} \sum_{k=1}^{n} \Phi(\rho, v_{,k}, p_{,k}, x^0) \leqslant c\|f\|^2_{\infty,\mathbb{R}^n_+}, \tag{2.27}$$

$$\sup_{\substack{x^0\in\mathbb{R}^n_+\\ \rho\in(0,2x^0_n]}} \rho^{-n-2\lambda} \sum_{k=1}^{n} \Phi(\rho, v_{,k}, p_{,k}, x^0) \leqslant c\langle f\rangle^2_{\lambda,\mathbb{R}^n_+}, \quad \lambda \in (0,1), \tag{2.28}$$

а также при любом $s \in (1,\infty)$ оценка

$$\|\nabla^2 v\|_{s,\mathbb{R}^n_+} + \|\nabla p\|_{s,\mathbb{R}^n_+} \leqslant c(s)\|f\|_{s,\mathbb{R}^n_+}. \tag{2.29}$$

§3. Системы гидродинамического типа

1. Линеаризации Модифицированных уравнений Навье–Стокса имеют вид

$$-\sum_{k,l,m=1}^{n} A_{jklm} v_{l,km} + p_{,j} = f_j, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad j = 1,\dots,n. \tag{3.1}$$

Точнее, линеаризации МНС на произвольном поле скоростей могут отличаться от (3.1) наличием младших членов – производных первого или нулевого порядка от $v = (v_1, \dots, v_n)$. Но эти младшие члены мы отбросили, ибо для нашей главной цели – получения коэрцитивных оценок для решений ЛМНС достаточно установить такие оценки только для систем вида (3.1). Далее мы будем опускать знак $\sum$ в членах вида $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k w_k$. В (3.1) использовано обозначение $v_{l,km} \equiv \partial^2_{x_k x_m} v_l$ и $p_{,j} = \partial_{x_j} p$.

О системе (3.1) предполагается, что она обладает следующими свойствами:

$$A_{jklm} = A_{jmlk} \tag{3.2$_1$}$$

и

$$\nu_1 |\varkappa|^2 \leqslant A_{jklm} \varkappa_{jk} \varkappa_{lm} \leqslant \nu_2 |\varkappa|^2, \quad 0 < \nu_1 \leqslant \nu_2 \tag{3.2$_2$}$$

где $\varkappa = (\varkappa_{lm})$ есть произвольный тензор $n \times n$, а $|\varkappa| = \left(\sum\limits_{l,m=1}^{n} \varkappa_{lm}^2 \right)^{1/2}$. Это свойство гарантирует принадлежность (3.1) к классу обобщенных эллиптических систем. Для нее мы докажем теоремы, аналогичные теоремам §§1 и 2. Коэрцитивные оценки решений v, p задачи Дирихле для системы (3.1) с непрерывными коэффициентами A_{jklm} в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ “склеиваются” из коэрцитивных оценок решений двух модельных задач: задачи Дирихле для (3.1) в $\mathbb{R}^n$ и задачи Дирихле для (3.1) в $\mathbb{R}^n_+$, причем это достаточно сделать для систем (3.1) с постоянными коэффициентами. Именно этим двум задачам для системы (3.1) с постоянными коэффициентами посвящен данный параграф.

Сначала мы изучим свойства решений систем вида

$$-A_{jklm} v_{l,km} + p_{,j} = \partial_k F_{jk}, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad j = 1, \dots, n \tag{3.3}$$

и однородных систем

$$-A_{jklm} u_{l,km} + q_{,j} = 0, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{3.4}$$

Для v, p, удовлетворяющих (3.3) в произвольной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и краевому условию $v\big|_{\partial\Omega} = 0$, верны соотношения

$$\Big(A_{jklm} v_{l,m}, \eta_{j,k} \Big) - \big(p, \operatorname{div} \eta \big) = -\big(F_{jk}, \eta_{j,k} \big) \tag{3.5}$$

при любой $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. Из (3.5) с $\eta = v$ в силу условия (3.2) следуют неравенства

$$\nu_1 \|\nabla v\|^2_{2,\Omega} \leqslant \Big(A_{jklm} v_{l,m}, v_{j,k}\Big) = -\big(F_{jk}, v_{j,k}\big) \leqslant \|F\|_{2,\Omega} \|\nabla v\|_{2,\Omega}.$$

Отсюда имеем оценку

$$\|\nabla v\|_{2,\Omega} \leqslant \nu_1^{-1} \|F\|_{2,\Omega}. \tag{3.6$_1$}$$

Она позволяет применить лемму 1.1, рассматривая систему (3.4) как представление ∇p в виде дивергенции тензора, суммируемости по Ω со второй степенью. Это дает оценку

$$\|p - (p)_\Omega\|_{2,\Omega} \leqslant c\|F\|_{2,\Omega}. \tag{3.6$_2$}$$

Здесь и далее мы не будем отмечать зависимость постоянных c от n, ν_1^{-1} и ν_2.

Для решения v, p системы (3.4) в $\mathbb{R}^n$ с $F \in L_2(\mathbb{R}^n)$ аналогом (3.6_k), $k = 1, 2$, является оценка

$$\|\nabla v\|_{2,\mathbb{R}^n} + \|p\|_{2,\mathbb{R}^n} \leqslant c\|F\|_{2,\mathbb{R}^n}. \tag{3.7}$$

Ее можно получить из (3.6_k), $k = 1, 2$, аппроксимируя $\mathbb{R}^n$ областями K_m, $m = 1, 2, \dots$.

Аналогом теоремы 1.1 является

Теорема 3.1. *Для решения u, q системы (3.4) в любом кубе $K_1(x^0)$ и концентрическом ему кубе $K_{1/2}(x^0)$ справедливы неравенства*

$$\|\nabla^{k+1} u\|^2_{2,K_{1/2}(x^0)} + \|\nabla^k q\|^2_{2,K_{1/2}(x^0)} \leqslant c(k)\Phi(1, u, q, x^0), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{3.8}$$

где $\Phi(\rho, u, q, x^0)$ определено в (1.5_2).

Доказательство ее то же, что и теоремы 1.1, только роль (1.6) играет (3.5) точнее, тождество

$$\Big(A_{jklm}\big[u_{l,m} - (u_{l,m})_1\big], \eta_{j,k}\Big) - \big(q - (q)_1, \operatorname{div} \eta\big) = 0, \tag{3.5$'$}$$

для области $\Omega = K_1$. Следствием теоремы 3.1 является

Теорема 3.2. *Для решения u, q системы* (3.4) *в кубе $K_R(x^0)$ справедливы неравенства*

$$\Psi(\rho, u, q, x^0) \leqslant c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n \Psi(R, u, q, x^0) \qquad (3.9_1)$$

и

$$\Phi(\rho, u, q, x^0) \leqslant c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n+2} \Phi(R, u, q, x^0) \qquad (3.9_2)$$

при любом $\rho \in [0, R]$.

Функционал $\Psi(\dots)$ определен в (1.8_3), а $\Phi(\dots)$ в (1.5_2). Доказательство теоремы 3.2 то же, что и теоремы 1.2.

Для решений v, p системы (3.3) справедливы аналоги теорем 1.3–1.5. Объединим их все в одну теорему:

Теорема 3.3. *Для любого решения v, p системы* (3.3) *в кубе $K_R(x^0)$ с $F \in L_2(K_R(x^0))$ и любого куба $K_\rho(x^0)$ с $\rho \in (0, R]$ справедливы неравенства* (1.17_1) *и* (1.18_1). *Если v, p есть решение системы* (3.3) *в кубе $K_{R_0}(x^0)$, то при любых $0 < \rho \leqslant R \leqslant R_0$ для него вернет неравенства* (1.17_3), (1.18_4) *и* (1.18_5).

Если v, p является решением системы (3.3) *в $\mathbb{R}^n$ с $F \in L_2(\mathbb{R}^n)$, подчиняющемуся неравенству* (3.7), *то для него при всех $0 < \rho \leqslant R$ и всех $x^0 \in \mathbb{R}^n$ верны неравенства* (1.17_k), $k = 4, 5$, *и* (1.18_k), $k = 6, 7, 8, 9$. *Кроме этого для него верны коэрцитивные оценки*

$$\|\nabla v\|_{s,\mathbb{R}^n} + \|p\|_{s,\mathbb{R}^n} \leqslant c(s)\|F\|_{s,\mathbb{R}^n}$$

при любом $s \subset (1, \infty)$.

Доказательство всех этих утверждений то же, что и в §1 для системы Стокса (1.3).

Для решений v, p системы (3.1) из теоремы 3.3 следует аналог теоремы 1.6, а именно:

Теорема 3.4. *Для решения v, p системы* (3.1) *в $\mathbb{R}^n$ справедливы оценки* (1.38) *с любым $s \in (1, \infty)$, а также неравенства* (1.39) – –(1.41).

В общем, рассуждения, проведенные в §1 для системы Стокса в $\mathbb{R}^n$, без каких-либо изменений применимы и к системам гидродинамического типа. В случае же полупространства $\mathbb{R}^n_+$ требуется одно небольшое дополнение алгебраического характера. Его мы опишем в следующем пункте.

2. В данном пункте рассмотрим те же системы гидродинамического типа, что и в п. 1, но в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$ при краевом условии Дирихле: $v\big|_\Gamma = 0$.

Запишем их короче:

$$-A\nabla^2 v + \nabla p = f, \qquad \operatorname{div} v = 0, \quad v\big|_\Gamma = 0, \tag{3.10}$$

$$-A\nabla^2 v + \nabla p = \operatorname{div} F, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad v\big|_\Gamma = 0, \tag{3.11}$$

и

$$-A\nabla^2 u + \nabla q = 0, \qquad \operatorname{div} u = 0, \quad u\big|_\Gamma = 0. \tag{3.12}$$

Для них справедливы все утверждения, сформулированные нами в §2 для системы Стокса, а также и способы их доказательства. Требуется лишь в двух местах корректировка порядка действий. Первая корректировка нужна в доказательстве теоремы 2.1 – в выводе оценки (2.6) для решений v, p системы (3.10) из оценок (2.5_2), (2.5_3). Теперь мы не можем утверждать, что из них и системы (3.10) следует оценка (2.5_4), ибо в уравнение системы (3.10), содержащее $p_{,n}$ могут войти производные вида $v_{k,nn}$, еще не оцененные нами. Поэтому сначала мы оценим $p_{,\alpha}$, $\alpha < n$, используя системы ∂_{x_α} (3.10). Они дают представления для $\nabla p_{,\alpha}$ в виде сумм производных v третьего порядка, не содержащих производных вида $\partial^3_{x_n} v$. Благодаря этому и неравенствам (2.5_2) мы можем применить лемму 1.1 и получить оценку (2.5_6), т.е.

$$\big\|p_{,\alpha} - (p_{,\alpha})_{(l)}\big\|^2_{2,K(l)} \leqslant cJ_{(l-1)}(v,p).$$

Отсюда следует оценка (2.5_7) для $\big\|p_{,\alpha}\big\|^2_{2,K(l)}$. Теперь возьмем первые $n-1$ уравнений системы (3.10) и запишем их в виде

$$\sum_{\beta=1}^{n-1} A_{\alpha n\beta n} v_{\beta,nn} = -\sum_{k+m<2n} A_{\alpha klm} v_{l,km} - A_{\alpha nnn} v_{n,nn} + p_{,\alpha} - f_\alpha \equiv \mathcal{F}_\alpha, \\ \alpha = 1,\dots,n-1. \tag{3.13}$$

Для их правых частей $\mathcal{F}_\alpha$ мы уже получили оценки вида $\big\|\mathcal{F}_\alpha\big\|^2_{2,K(l)} \leqslant cJ_{(l-1)}(v,p) + c\varepsilon\big\|\nabla p\big\|^2_{2,K(l)}$. В силу условия (3.2_2) система (3.13) однозначно разрешима относительно $v_{\beta,nn}$, $\beta = 1,\dots,n-1$, и потому для этих $v_{\beta,nn}$ имеют место те же оценки, что и для $\mathcal{F}_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,n-1$. Тем самым мы оценили нужным образом все производные $\nabla^2 v$. Оставшаяся производная $p_{,n}$ оценивается с помощью уравнения системы (3.10), содержащего $p_{,n}$. Оценку производных $\nabla^3 u$, $\nabla^2 q$ для решений однородной системы (3.12) надо проводить в таком порядке: из сделанного на предыдущем этапе следуют оценки для производных $\nabla^2 u_{,\alpha}$, $\partial^3_{x_n} v_n$ и $\nabla q_{,\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, n-1$. Недостает оценок для $\partial^3_{x_n} u_\alpha$ и $\partial^2_{x_n} q$. Для оценки $\partial^3_{x_n} u_\alpha$ возьмем систему (3.13) для u, q (в ней $f \equiv 0$), продифференцированную по x_n. В ее левой части вместо $v_{\beta,nn}$ будут стоять $\partial^3_{x_n} v_\beta$, $\beta = 1, \dots, n-1$, а ее правая часть уже оценена нужным образом. Поэтому все $\partial^3_{x_n} v_\beta$, $\beta = 1, \dots, n-1$, будут мажорироваться теми же интегралами, что и правые части. Оставшаяся производная $\partial^2_{x_n} q$ оценивается из последнего уравнения системы (3.12), продифференцированного по x_n. Так, шаг за шагом оцениваются все $\nabla^{k+1} u$ и $\nabla^k q$ и доказывается

Теорема 3.5. *Для решений u, q системы* (3.12) *в $K_{1,y}$ с любым $y \in \Gamma$ справедливы оценки* (2.4_1).

Ее следствием является аналог теоремы 2.2.

Теорема 3.6. *Для решений u, q системы* (3.12) *в $K_{R,y}$ с любыми $y \in \Gamma$, $R > 0$ и любого $K_{\rho,y} \subset K_{R,y}$ справедливы неравенства* (2.9_1) *и* (2.10_1).

С помощью этой теоремы доказываются аналоги теорем 2.3–2.5 ровно так же, как это было сделано в §2. Сформулируем их в виде одной теоремы.

Теорема 3.7. *Для решений v, p системы* (3.11) *в $K_{R,y}$ справедливы неравенства* (2.12) *и* (2.13).

Для решений v, p системы (3.11) *в $K_{R_0,y}$ при любых $0 \leqslant \rho \leqslant R \leqslant R_0$ верны неравенства* (2.15_1), (2.16) *и* (2.17).

Для решения v, p системы (3.11) *в $\mathbb{R}^n_+$, подчиненного неравенству* (2.21) *верны оценки* (2.18_k), (2.19_k), (2.20_k), $k = 1, 2, 3$, *а также оценка* (2.23) *с любым $s \in (1, \infty)$.*

Из этих результатов по системам (3.11) выводится нижеследующий аналог теоремы 2.6 для систем (3.10).

Теорема 3.8. *Для решения v, p задачи* (3.10) *в $\mathbb{R}^n_+$ с $f \in L_2(\mathbb{R}^n_+)$ справедливы оценки* (2.26)–(2.29).

Доказательство этой теоремы отличается от доказательства теоремы 2.6 лишь оценкой производных $v_{,nn}$, $\alpha = 1, \dots, n-1$, и $p_{,n}$. Для системы Стокса их оценка базируется на соотношениях (2.25_k), $k = 1, 2, 3$. В случае же системы (3.11) из них мы используем лишь (2.25). Оно дает возможность оценить для $v_{n,nn}$ те же нормы (и полунормы), что и для $\nabla v_{,\alpha}$, $p_{,\alpha}$. После этого используем соотношения (3.13). Они позволяют выразить $v_{\beta,nn}$, $\beta = 1, \dots, n-1$, в виде линейных комбинаций правых частей $\mathcal{F}_\alpha$, для которых рассматриваемая норма (или полунорма) уже оценена. Это же гарантирует желаемую оценку для $v_{\beta,nn}$, $\beta = 1, \dots, n-1$. Наконец, последней оценивается норма (или полунорма) для производной $p_{,n}$ – она, как видно из последнего уравнения системы (3.10), есть сумма членов, нормы (полунормы) которых уже оценены.

Таким образом, теорему 3.8 можно считать доказанной.

Литература

1. О. А. Ладыженская, *О некоторых нелинейных задачах теории сплошных сред.* Международный Математический Когресс (Тезисы докладов по приглашению), Москва (1966), с. 149; Мир, М. (1968), 560–573.
2. О. А. Ладыженская, *О новых уравнениях для описания движений вязких несжимаемых жидкостей и разрешимости в целом для них краевых задач.* — Труды МИАН СССР **102** (1967), 85–104.
3. О. А. Ладыженская, *О некоторых модификациях уравнения Навье–Стокса для больших градиентов скоростей.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **7** (1968), 125–154.
4. S Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions,* II. — Comm. Pure Appl. Math. **17** (1964), 35–92.
5. В. А. Солонников, *Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле Даглиса–Ниренберга.* I. — Изв. АН СССР, Сер. матем. **28** (1964), 665–706.
6. В. А. Солонников, *Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле Даглиса–Ниренберга.* II. — Труды МИАН СССР **92** (1966), 233–297.
7. В. А. Солонников, *Об оценках тензора Грина для некоторых краевых задач.* — ДАН СССР **30** (1960), 988–991.
8. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* ГИФМЛ, Москва (1961).
9. S. Campanato, *Equazioni ellittiche del secondo ordine e space* $L^{2,\lambda}$. — Ann. Mat. Pura e Appl. **69** (1965), 321–380.
10. S. Campanato, G. Stampaccia, *Sulle maggiorazioni in* L^p *nella teoria delle equazioni ellittiche.* — Boll. UMI **20** (1965), 393–399.
11. G. Stampaccia, *The spaces* $L^{p,\lambda}$, $N^{(p,\lambda)}$ *and interpolation.* — Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **19** (1965), 443–462.

12. M. Giaquinta, *Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic systems.* Birkhäuser, ETM Zürich (1993).
13. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, *О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье–Стокса.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **59** (1976), 81–116.
14. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* Наука, Москва (1976).

Ladyzhenskaya O. A. and Shilkin T. N. On coersitive estimates for solutions to the linear systems of hydrodynamical type.

We prove local and nonlocal coersitive estimates in the spaces of Lebeque, Hölder and Morrey–Campanato for solutions of linear stationary systems of hydrodynamical type. For this purpose the technic proposed by Italian mathematicians for the study of solutions to the equations and systems of elliptic and parabolic types is developed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 21 апреля 2002 г.