Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 287, 2002 г.

А. А. Иванов

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ, ИХ ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ

Никто не обнимет необъятного.
Козьма Прутков

Как понятие *пространства* так и понятие *структуры*, образующие понятие *пространственной структуры*, постепенно меняли свое содержание от конкретного, непосредственно созерцательного, до абстрактного, специально сконструированного. В философском смысле пространство есть множество объектов, между которыми имеются отношения сходные с обычными пространственными отношениями, структура есть совокупность этих отношений. Математическое понятия пространственной структуры, охватывающее все возможные ситуации, пока не сформулировано, описаны лишь некоторые типы таких структур. Сюда относятся пространственные структуры геометрии и топологии, а также некоторых других областей математики. Соблазительно, конечно, любую структуру рассматривать, как пространственную, имеющую кроме чисто пространственных и другие свойства, но это заведет нас, по-видимому, слишком далеко.

Для этой книги характерно стремление к максимальной, в разумных пределах, общности изложения материала, относящегося к пространственным структурам. Например геометрия евклидова пространства оказывается здесь специальной частью общей теории метрических пространств. Однако пространственные структуры, изучаемые в геометрии и других областях математики, очень разнообразны. Чтобы убедиться в этом достаточно просмотреть предметную математическую классификацию реферативных журналов, например Zentralblatt Math., Mathematics Subject Classification 2000, или описание терминов "геометрия", “геометрический объект”, “многообразие”, “пространство” в Математической Энциклопедии. Все пространственные структуры трудно даже просто описать, поэтому приходится чем-то ограничиться не только по содержанию, но и по форме изложения. В этом томе Записок публикуется первая часть книги, являющаяся своего рода введением в общую топологию. Так как имеется довольно много такого рода введений, появление нового должно быть чем-то обосновано. В связи с этим следует иметь в виду некоторые особенности ее содержания и стиля изложения. Часть материала излагается детально, с соответствующими доказательствами, что-то описывается в общих чертах с некоторыми деталями, поясняющими суть дела, часть результатов только упоминается, а о многом вообще ничего не сказано. Следует также отметить существенное расширение и усовершенствование системы исходных понятий общей топологии.

Обычно топологическое пространство определяется, как некоторое множество X, рассматриваемое с какой-то заданной на нем совокупностью τ открытых множеств. Затем для произвольного топологического пространства (X, τ) вводится понятие окрестности точки, замкнутого множества, замыкания и внутренности произвольного множества и постепенно, шаг за шагом, развертывается более или менее обширная система понятий общей топологии. Классическим примером такого изложения является книга "Общая топология. Основные структуры" широко известной серии "Элементы математики" Н. Бурбаки. Можно заметить, однако, что при решении некоторых проблем структуры открытых множеств оказываются слишком грубыми. Более подходящими (более тонкими) оказываются иногда так называемые слабо топологические и квазитопологические структуры. Их теория не только тоньше, но, в некотором смысле, и проще теории топологических структур. Это обстоятельство позволяет рассматривать квазитопологические и слабо топологические пространства, как исходные объекты теоретико множественной топологии, а их теорию рассматривать, как естественный результат развития топологии и ее приложений. Тем самым, квазитопологические и слабо топологические структуры переходят из области экзотики в топологическую повседневность, образуя вместе с топологическими структурами класс так называемых структур непрерывности. Структуры непрерывности являются классическими пространственными структурами, то есть структурами давно вошедшими в математический обиход. Классическими являются также различные структуры расширений. Имеются веские основания включить сюда и битопологические в смысле Келли структуры.

Теория битопологических в смысле Келли пространств является естественным продолжением теории топологических пространств и может рассматриваться, как введение в общую теорию битопологических пространств.

В теорию метрических пространств обычно включают не только теорию пространств с расстояниями, удовлетворяющими всем трем аксиомам метрики, но и пространств с расстояниями, удовлетворяющим более слабым условиям, и даже с расстояниями, не являющимися вещественными числами. Соответственно, можно считать, что теория метрических пространств развивалась в двух противоположных направлениях, а именно в специализации метрических пространств, то есть в изучении пространств, метрика которых удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, и в обобщении метрических пространств, то есть в изучении пространств с обобщенными метриками. Оба эти направления будут здесь, до некоторой степени, представлены.

Кроме структурного подхода, основой которого является описание самих пространств, здесь используется и категорный подход. Термин "структура" интуитивно ясен сам по себе. Мы говорим о структуре объекта, имея в виду его устройство – термин требует лишь уточнения его описания. Термин "категория" интуитивно менее ясен. В первоначальном смысле это слово означает какую-то общность предметов или понятий, причем эта общность характеризуется не структурой самих предметов (понятий) а связями между ними. Таким образом, возможны два подхода к изучаемым объектам: структурный и категорный. При структурном подходе мы рассматриваем структуры изучаемых объектов, при категорном – связи между объектами, составляющими какую-то общность.

Категорные понятия и утверждения являются важной частью общей теории пространственных структур. Использование категорных методов позволяет сделать более прозрачными некоторые структурные понятия и утверждения, найти и изучить естественные связи между пространственными структурами, имеющими различное роисхождение.

Глава I

Структуры и категории

Эту главу следует рассматривать, как вводную, содержащую некоторые элементы теории структур и теории категорий, используемые в последующих главах, поэтому ее можно в первом чтении пропустить, обращаясь к ней по мере надобности.

§1. Структуры

1. Шкалы множеств и структуры. В упомянутой выше книге "Общая топология, основные структуры" описано некоторое понятие структуры. Это понятие можно сформулировать следующим образом.

Определение. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ -некоторые множества. Начиная с этих множеств, можно образовать новые множества, применяя операции произведения множеств и перехода от множества к множеству всех его подмножеств. При этом под произведением двух множеств Y и Z понимают множество $Y \times Z = \{(y,z) | y \in Y, z \in Z\}$, то есть множество всех пар (y,z), в которых y – произвольная точка множества Y, а z – произвольная точка множества Z. Множество всех подмножеств множества Y мы будем обозначать через $PY = \{A | A \subset Y\}$. Эти операции можно применить в любой последовательности и в любом количестве, получая все новые и новые множества. Система множеств, получаемых из базы $X, X_1, \ldots, X_n$ операциями прямого произведения и перехода к множеству подмножеств, осуществляемых многократно в любом порядке, называется шкалой множеств с данной базой.*

Замечание. Иногда одно или несколько из этих множеств, например X, будем считают *основными* а остальные – *вспомогательными* множествами.

Пример. Пусть база состоит из одного множества X. Начиная с этого множества, мы можем получить множества шкалы $X \times X$, PX, $X \times PX$, $P(X \times X)$, $P(PX)$, и так далее.

Определение. *Будем считать, что две базы эквивалентны, если от одной базы можно перейти к другой заменой входящих в нее* *множеств, причем основное множество одной базы заменяется на основное множество другой.*

Пример. Все базы, каждая из которых состоит из одного множества, эквивалентны.

Определение. *Любая точка Υ любого множества шкалы с базой $X, X_1, \ldots, X_n$, называется структурой на этой базе.*

Замечание. Если выделены основные множества базы, то говорят также, что Υ является структурой на этих множествах.

Пример. Пусть X и Y – произвольные множества, $f : X \longrightarrow Y$ – произвольное частичное многозначные отображение, $F = \{(x, y) | y = f(x)\}$ – график этого отображения. Тогда множество $F \in P(X \times Y)$ можно рассматривать, как *структуру отображения* f множества X в множество Y.

К этому определению можно добавить следующее:

Определение. *Если база шкалы множеств состоит только из одного множества X, то структура на X называется внутренней.*

Пример. Рассмотрим упорядоченное множество $(X, \leq)$, то есть множество, для некоторых пар (x, y) точек которого имеет место отношение $x \leq y$. При этом требуется, чтобы это отношение было *рефлексивным*, то есть всегда $x \leq x$, и *транзитивным*, то есть из $x \leq y$ и $y \leq z$ следует $x \leq z$. Нетрудно заметить, что это отношение определяется взаимно однозначно множеством $S = \{(x, y) | x \leq y\}$, являющемся точкой множества $P(X \times X)$, то есть структурой на X, причем эта структура, как подмножество C множества $X \times X$, должна удовлетворять двум условиям, а именно:

1. $C \circ C \subset C$ (здесь $C \circ C = \{(x, z) | (x, y) \in C, (y, z) \in C\}$),
2. $C \cap C^{-1} = \Delta$ (здесь $C^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in C\}$, $\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$).

Условия 1 и 2 называются *аксиомами структуры упорядоченного множества.*

Этот пример знакомит нас с одной из внутренних структур. В следующем примере база содержит вспомогательное множество.

Пример. Рассмотрим метрическое пространство (X, d), то есть множество, на котором для любых пар (x, y) его точек определено *расстояние* $d(x, y)$ между ними или, как говорят, определена *метрика* d на X. При этом требуется, чтобы выполнялись аксиомы: *тождества* ($d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$), *симметрии* ($d(x, y) = d(y, x)$) и *треугольника* ($d(x, y)+d(y, z) \leq d(x, z)$). Нетрудно заметить, что метрика d определяется взаимно однозначно множеством $M = \{(x, y, d)|d(x, y) = d\}$, являющемся точкой множества $P(X \times X \times \mathbb{R})$, где $\mathbb{R}$ – множество всех вещественных чисел, то есть структурой на X. Эта структура, как подмножество множества $X \times X \times \mathbb{R}$, должна удовлетворять трем условиям, а именно:

1. $(x, y, 0) \in M$ тогда и только тогда, когда $x = y$,
2. $(x, y, d) \in M$ тогда и только тогда, когда $(y, x, d) \in M$,
3. если $(x_1, x_2, d_{12}) \in M$, $(x_2, x_3, d_{23}) \in M$ и $(x_1, x_3, d_{13}) \in M$, то $d_{12} + d_{23} \leq d_{13}$.

Условия 1, 2, 3 называются аксиомами *структуры метрического пространства.*

Можно заметить, однако, что не все ситуации охватываются такими определениями. Рассмотрим, в связи с этим, следующий пример.

Пример. Рассмотрим какие-нибудь множества X и Y и их произведение $Z = X \times Y$. Тогда любая точка из $X \times Y$ является структурой на X и, одновременно, структурой на Y. С другой стороны, интуитивно ясно, что в некотором смысле, множество $X \times Y$ является структурой разложения множества Z в прямое произведение, не являясь, конечно, структурой на Z в смысле Бурбаки.

Тем не менее мы будем понимать термин “структура” в смысле Бурбаки, если не оговорено противное.

2. Типы структур, детализации. Каждая структура является, по определению, точкой некоторого множества соответствующей шкалы множеств.

Определение. *Будем говорить, что две структуры имеют одинаковый тип если они могут быть переведены в одну и ту же точку некоторой шкалы заменой баз на эквивалентную им базу.*

Среди однотипных структур можно выделять различные классы структур, удовлетворяющих некоторым условиям, называемым аксиомами соответствующего класса. При введении дополнительных аксиом такой класс сужается. В примерах предыдущего раздела фигурируют соответствующие аксиомы.

Множества каждой шкалы можно (частично) упорядочить по их рангу.

Определение. *Пусть Y_1 и Y_2 – множества некоторой шкалы. Будем говорить, что ранг множества Y_1 меньше ранга множества Y_2, если оно является промежуточным множеством в процессе образования множества Y_2. Под рангом структуры мы будем понимать ранг множества шкалы, которому эта структура принадлежит.*

Важным является также понятие детализации структур. Повидимому, это скорее категорное чем структурное понятие, так как оно связывает между собой две структуры. Это понятие естественно определяется в категорных терминах, структурное его описание затруднительно. Основная идея структурной детализации состоит в усилении структурности того или иного объекта, но способы такого усиления могут быть различными. Мы приведем здесь только некоторые примеры.

Пример. Пусть Υ – какая-нибудь внутренняя структура на множестве X. Тогда пару (Υ, Υ'), в которой Υ' – отличная от Υ структура на X, можно рассматривать, как детализацию структуры Υ.

Пример. Пусть X – произвольное множество, структура $A \subset X$ – точка в PX, тогда структура $A' \subset A$, будет детализацией структуры A.

§2. Категории и функторы

1. Категории. Существуют и будут изучаться здесь различные классы пространств и отображений этих пространств: топологические пространства и их отображения, слабо топологические пространства и их отображения, квазитопологические пространства и их отображения, пространства близости и их отображения, пространства смежности и их отображения, пространства соседства и их отображения, равномерные пространства и их отображения, битопологические пространства и их отображения. Существуют и изучаются многие другие классы пространств и их отображений. Все эти классы имеют некоторые общие черты, отраженные в следующем определении.

Определение. *Категорией $\mathcal{K}$ называют пару $(Ob\mathcal{K}, Mor\mathcal{K})$ классов, состоящих из так называемых объектов и, соответственно, морфизмов этой категории. Каждой паре (X, Y) объектов сопоставляется некоторое множество $C(X, Y)$ морфизмов объекта X в объект Y, каждый морфизм $f \in C(X, Y)$ определяет однозначно объекты X и Y называемые его областью задания и, соответственно, областью значений. Для каждой тройки X, Y, Z объектов определено отображение $C(X, Y) \times C(Y, Z) \longrightarrow C(X, Z)$, сопоставляющее морфизмам $f \in C(X, Y)$ и $g \in C(Y, Z)$ их композицию $gf \in C(X, Z)$. При этом должны выполняться следующие условия:*
1. Композиция морфизмов ассоциативна, то есть $h(gf) = (hg)f$ для любых морфизмов $f \in C(X, Y), g \in C(Y, Z), h \in C(X, Z)$.
2. Для любого $Y \in Ob\mathcal{K}$ существует тождественный морфизм $1_Y \in C(Y, Y)$, являющийся левой и правой единицей. Это значит, что $1_Y f = f$ для каждого $f \in C(X, Y)$ и $h1_Y = h$ для каждого $h \in C(Y, Z)$.

Замечание. Вместо записи $f \in C(X, Y)$ пользуются часто эквивалентными ей записями $f : X \longrightarrow Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$.

Вместе с каждой категорией $\mathcal{K}$ можно рассматривать двойственную ей категорию $\mathcal{K}^*$.

Определение. *Если объектами категории $\mathcal{K}^*$ являются объекты категории $\mathcal{K}$, а $C^*(X, Y) = C(Y, X)$ для любых объектов X, Y этих категорий, то категория $\mathcal{K}^*$ называется двойственной к категории $\mathcal{K}$.*

Замечание. Нетрудно доказать, что $\mathcal{K}^*$ действительно является категорией. Переход от $\mathcal{K}$ к $\mathcal{K}^*$ получается простым обращением стрелок. Если $f : X \longrightarrow Y$ в $\mathcal{K}$, то $f : X \longleftarrow Y$ или $f : Y \longrightarrow X$ в $\mathcal{K}^*$.

Определение. *Категория $\mathcal{L}$ называется подкатегорией категории $\mathcal{K}$, если каждый объект и каждый морфизм категории $\mathcal{L}$ является объектом и, соответственно, морфизмом категории $\mathcal{K}$. Если при этом $C(X, Y)$ в категории $\mathcal{L}$ совпадает с $C(X, Y)$ в категории $\mathcal{K}$, то категория $\mathcal{L}$ называется полной подкатегорией категории $\mathcal{K}$.*

Особое место занимет категория **Set**, объектами которой являются множества, а морфизмами – все отображения соответствующих множеств.

Нетрудно проверить, что *топологические пространства и их непрерывные отображения образуют категорию.* Действительно, морфизмами в этой категории являются непрерывные отображения соответствующих топологических пространств. Для каждого топологического пространства имеется тождественный морфизм, а именно тождественное отображение этого топологического пространства на себя. С другой стороны, если $f : (X, \tau) \longrightarrow (X', \tau')$ и $f' : (X', \tau') \longrightarrow (X'', \tau'')$ – непрерывные отображения, то $f'f : (X, \tau) \longrightarrow (X'', \tau'')$ – непрерывное отображения. Действительно, если $G'' \in \tau''$, то $G' = (f')^{-1}(G'') \in \tau'$, в силу непрерывности отображения f' и $G = f^{-1}(G') \in \tau$, в силу непрерывности отображения f, поэтому $(f'f)^{-1}(G'') = f^{-1}((f')^{-1}(G'')) = f^{-1}(G') = G \in \tau$. Это означает, что определена ассоциативная композиция соответствующих морфизмов.

Категорию топологических пространств и их (непрерывных) отображений обычно обозначают через **Top** или **T**.

Мы можем рассматривать также категорию **Neigh** окрестностных пространств и их (непрерывных) отображений, категорию **Dist** пространств далеких от точек множеств и их (непрерывных) отображений, категорию **Cl** пространств замыкания и их (непрерывных) отображений, категорию **Int** пространств внутренности и их (непрерывных) отображений, категорию **Conv** пространств сходимости и их (непрерывных) отображений, категорию **Filt** пространств фильтров и их (непрерывных) отображений. Все эти категории мы будем называть *пространственными категориями.* Объекты таких категорий мы будем называть, как обычно, пространствами, их морфизмы – отображениями.

2. Функторы, преобразования функторов. Связи между категориями осуществляются так называемыми функторами, связи между функторами – преобразованиями функторов.

Определение. *Пусть $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ – некоторые категории. Соответствие $\mathcal{F}$, сопоставляющее каждому объекту и каждому морфизму категории $\mathcal{K}$, однозначно определенный объект и, соответственно, морфизм категории $\mathcal{K}'$, называется ковариантным (контравариантным) функтором, если каждому морфизму $f : X \longrightarrow Y$ соответствует морфизм $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ ($\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(Y) \longrightarrow \mathcal{F}(X)$), причем выполняются следующие условия:*

1. $\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$ *для каждого объекта* $X \in \mathcal{K}$.

2. $\mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f)$ $(\mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g))$ для любой композиции gf морфизмов категории $\mathcal{K}$.

Замечание. Аналогично функциям нескольких переменных можно рассматривать многоместные функторы, ковариантные по одним переменным и контравариантные по другим.

Пример. Для любой, рассмотренной выше, пространственной категории определен, так называемый, *стирающий* функтор $\mathcal{E}$, сопоставляющий каждому пространству множество всех его точек и каждому отображению пространств этой категории соответствующее отображение множеств их точек. С другой стороны можно определить различные функторы $\mathcal{I}$ *вложения* категории **Set** в произвольно фиксированную пространственную категорию. Так например, на категории **Set** определены функторы $\mathcal{I}_{\min}$ и $\mathcal{I}_{\max}$ в категорию **Top**, сопоставляющие каждому множеству, определенное на нем тривиальное (кодискретное) топологическое пространство и, соответственно, дискретное топологическое пространство, а каждому отображению множеств соответствующие отображения этих топологических пространств.

Определение. *Пусть $\mathcal{F} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ и $\mathcal{F}' : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ – некоторые ковариантные функторы. Преобразованием функтора $\mathcal{F}$ в функтор $\mathcal{F}'$ называется соответствие $\mathcal{G}$, сопоставляющее каждому объекту категории $\mathcal{K}$ морфизм категории $\mathcal{K}'$ так, что для любого морфизма $f : X \longrightarrow Y$ в категории $\mathcal{K}$ имеет место соотношение $\mathcal{G}(Y)\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}'(f)\mathcal{G}(X)$.*

Замечание. Наглядно, это соотношение можно записать для любого морфизма $f : X \longrightarrow Y$ следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} & \mathcal{F}(Y) \\ {\scriptstyle \mathcal{G}(X)}\big\downarrow & & {\scriptstyle \mathcal{G}(Y)}\big\downarrow \\ \mathcal{F}'(X) & \xrightarrow{\mathcal{F}'(f)} & \mathcal{F}'(Y) \end{array}$$

Для контравариантных функторов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ горизонтальные стрелки будут обращены.

Пример. В предыдущем примере были введены функторы $\mathcal{I}_{\min}$: Set $\longrightarrow$ Top и $\mathcal{I}_{\max}$: Set $\longrightarrow$ Top. Можно ввести преобразование $\mathcal{G}$

функтора $\mathcal{I}_{\max}$ в функтор $\mathcal{I}_{\min}$, взяв в качестве $\mathcal{G}(X) : \mathcal{I}_{\max}(X) \longrightarrow \mathcal{I}_{\min}(X)$ отображение, тождественное на множестве X точек этих топологических пространств.

3. Функторные связи между категориями. Рассматривая различные структуры на множествах, мы встречались с понятием детализации структур. В категорной теории также есть соответствующее понятие.

Определение. *Категория $\mathcal{K}'$ называется $\mathcal{P}$-детализацией категории $\mathcal{K}$, если $\mathcal{P}$ – функтор накрытия, то есть каждый объект X и каждый морфизм f категории $\mathcal{K}$ является $\mathcal{P}$-образом некоторого объекта X' и некоторого морфизма f' категории $\mathcal{K}'$. Объект X' и морфизм f' называются при этом $\mathcal{P}$-детализациями или просто детализациями объекта X и морфизма f. Классы всех таких детализаций будем обозначать через $\mathcal{P}^{-1}(X)$ и $\mathcal{P}^{-1}(f)$.*

Замечание. Классы $\mathcal{P}^{-1}(X)$ и $\mathcal{P}^{-1}(f)$ непусты. При этом в каждом классе $\mathcal{P}^{-1}(X)$ и в каждом классе $\mathcal{P}^{-1}(f)$ можно ввести отношение предпорядка.

Определение. *Положим $X'_1 \le X'_2$, если существует такой морфизм $j' : X'_2 \longrightarrow X'_1$, что $\mathcal{P}(j')$ является тождественным морфизмом X на себя. Положим $f'_1 \le f'_2$, если $f_1 : X'_1 \longrightarrow Y'_1$, $f'_2 : X'_2 \longrightarrow Y'_2$, $X'_1 \le X'_2$, $Y'_1 \le Y'_2$.*

Замечание. Это довольно громоздкое определение становится прозрачным, если обратиться к следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd} X'_2 \arrow[r, "f'_2"] \arrow[d, "i'"'] & Y'_2 \arrow[d, "j'"'] \\ X'_1 \arrow[r, "f'_1"] & Y'_1 \end{tikzcd}$$

$\mathcal{P}$-образ этой диаграммы будет отображением $X \xrightarrow{f} Y$. Заметим, что коммутативность этой диаграммы, то есть соотношение $j'f'_2 = f'_1 i'$, в условие не входит.

Пример. Пусть $\mathcal{E} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathrm{Set}$ – стирающий функтор, причем каждое множество является множеством точек какого-нибудь объекта категории $\mathcal{K}$ и каждое отображение множеств соответствует некоторому морфизму объектов этой категории. Тогда категория $\mathcal{K}$ *является детализацией* категории Set.

Наряду с функторами накрытия, рассматриваются и функторы вложения.

Определение. *Функтор $\mathcal{I} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ называется функтором вложения, если $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(Y) \Longrightarrow X = Y$ и $\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}(g) \Longrightarrow f = g$. При этом объект $\mathcal{I}(X)$ и морфизм $\mathcal{I}(f)$ категории $\mathcal{K}'$ называются $\mathcal{I}$-представителями или просто представителями объекта X и, соответственно, морфизма f категории $\mathcal{K}$.*

Существуют связи между категориями, использующие функторы накрытия и фунторы вложения одновременно.

Определение. *Категория $\mathcal{K}$ называется ретрактом категории $\mathcal{K}'$, если найдутся такие функторы $\mathcal{I} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ и $\mathcal{P} : \mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}$, что $\mathcal{PI}$ – тождественный функтор.*

Замечание. Нетрудно заметить, что функторы $\mathcal{I}$ и $\mathcal{P}$, фигурирующие в этом определении, являются функторами вложения и накрытия, соответственно.

Важными примерами являются ретракты, определяемые следующими последовательностями накрытий и вложений:

$$\mathrm{Set} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{P}}{\leftrightarrows}} \mathrm{Top} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{P}}{\leftrightarrows}} \mathrm{WTop} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{P}}{\leftrightarrows}} \mathrm{QTop} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{P}}{\leftrightarrows}}$$

и

$$\mathrm{Set} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{P}}{\leftrightarrows}} \mathrm{Top} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{P}}{\leftrightarrows}} \mathrm{Prox} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{P}}{\leftrightarrows}} \mathrm{Cont} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{P}}{\leftrightarrows}} \mathrm{Unif}$$

где
Set – категория множеств и их отображений,
Top – категория топологических пространств и их (непрерывных) отображений,
WTop – категория слабо топологических пространств и их (непрерывных) отображений,
QTop – категория квазитопологических пространств и их (непрерывных) отображений,
Prox – категория пространств близости и их (близостно непрерывных) отображений,
Cont – категория пространств смежности и их (смежностно непрерывных) отображений,
Unif – категория равномерных пространств и их (равномерно непрерывных) отображений.

4. Некоторые свойства детализаций. Пусть кагория $\mathcal{K}'$ является $\mathcal{P}$-*детализацией* категории $\mathcal{K}$. Наличие такой функторной связи между этими категориями позволяет, при некоторых дополнительных предположениях, доказывать наличие различных свойств объектов и морфизмов этих категорий. Представляют интерес следующие предположения, которые мы будем называть аксиомами детализаций.

I. Любая совокупность объектов категории $\mathcal{K}'$, накрывающих некоторый объект категории $\mathcal{K}$, имеет точную верхнюю границу, накрывающую тот же объект (*существование точной верхней границы накрывающих объектов*).

I$'$. Любая совокупность объектов категории $\mathcal{K}'$, накрывающих некоторый объект категории $\mathcal{K}$, имеет точную нижнюю границу, накрывающую тот же объект (*существование точной нижней границы накрывающих объектов*).

Замечание. Аксиомы I и I$'$ двойственны друг другу в том смысле, что при одновременном обращении стрелок в категориях $\mathcal{K}'$ и $\mathcal{K}$, эти аксиомы меняются местами.

II. Любая совокупность морфизмов категории $\mathcal{K}'$, накрывающих некоторый морфизм категории $\mathcal{K}$, имеет точную верхнюю границу, накрывающую тот же морфизм (*существование точной верхней границы накрывающих морфизмов*).

II$'$. Любая совокупность морфизмов категории $\mathcal{K}'$, накрывающих некоторый морфизм категории $\mathcal{K}$, имеет точную нижнюю границу, накрывающую тот же морфизм (*существование точной нижней границы накрывающих морфизмов*).

Замечание. Аксиомы II и II$'$ двойственны друг другу в том смысле, что при одновременном обращении стрелок в категориях $\mathcal{K}'$ и $\mathcal{K}$, эти аксиомы меняются местами.

III. Для каждого морфизма категории $\mathcal{K}$ существует накрывающий его морфизм с произвольно фиксированной областью значений (*существование левых накрытий*).

III$'$. Для каждого морфизма категории $\mathcal{K}$ существует накрывающий его морфизм с произвольно фиксированной областью задания (*существование правых накрытий*).

Замечание. Аксиомы III и III$'$ двойственны друг другу в том смысле, что при одновременном обращении стрелок в категориях $\mathcal{K}'$ и $\mathcal{K}$, эти аксиомы меняются местами.

Следующие две аксиомы самодвойственны, то есть двойственны сами себе.

IV. Для любой композиции gf морфизмов категории $\mathcal{K}$ любой накрывающий эту композицию морфизм категории $\mathcal{K}'$ можно представить в виде композиции $g'f'$ морфизмов, накрывающих морфизмы f и g (*поднятие композиции*).

Замечание. Пусть $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$. Аксиома IV утверждает, что для любых объектов X', Z', накрывающих объекты X и Z, любой морфизм $w : X' \longrightarrow Z'$ можно пропустить через некоторый объект Y_0', накрывающий объект Y.

V. Для любых объектов X', Y' категории $\mathcal{K}'$, накрывающих объекты X, Y категории $\mathcal{K}$, отображение $\mathcal{P} : C(X', Y') \longrightarrow C(X, Y)$ является вложением.

Использование тех или иных из этих аксиом позволяет доказывать различные свойства детализаций. В качестве примера такого использования мы рассмотим проблему существования максимального функторного вложения и минимального функторного вложений категории $\mathcal{K}$ в ее $\mathcal{P}$-детализацию $\mathcal{K}'$.

Определение. *Функтор вложение $\mathcal{I}$ категории $\mathcal{K}$ в ее $\mathcal{P}$-детализацию $\mathcal{K}'$ называется максимальным (минимальным) вложением, если $\mathcal{I}$-образ любого объекта и любого морфизма категории $\mathcal{K}$ является максимальным (минимальным) элементом среди накрывающих его объектов и, соответственно, морфизмов категории $\mathcal{K}'$.*

Замечание. Если предпорядок, канонически определенный на $\mathcal{P}^{-1}(X)$, не является порядком, то минимальное (максимальное) вложение определено, в общем случае, не однозначно.

Можно доказать, при соответствующих предположениях, существование максимального и существование минимального функторного вложения. Заметим, что достаточно доказать существование одного из этих вложений – существование второго доказывается двойственным рассуждением.

Теорема. *Пусть $\mathcal{K}'$ является $\mathcal{P}$-детализацией категории $\mathcal{K}$. Если эта детализация удовлетворяет аксиомам* I, II, III *и* V, *то существует максимальное функторное вложение категории $\mathcal{K}$ в категорию $\mathcal{K}'$.*

Доказательство. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – произвольный морфизм категории $\mathcal{K}$. Тогда, в силу аксиомы II, существует максимальный морфизм $f'_{\max} : X' \longrightarrow Y'$, накрывающий f.

Нетрудно убедиться в том, что объект X' совпадает с объектом $X'_{\max}$, существующим в силу аксиомы I, так как в противном случае будет существовать морфизм $j' : X'_{\max} \longrightarrow X'$, накрывающий морфизм 1_X и отображение $f'_{\max} j' : X'_{\max} \longrightarrow Y'$, накрывающее f, что противоречит максимальности морфизма $f'_{\max}$.

С другой стороны, $Y' = Y'_{\max}$, так как, в противном случае, существует, в силу аксиомы III, морфизм $f'_0 : X'_0 \longrightarrow Y'_{\max}$ и отображение $f'_0 j' : X'_{\max} \longrightarrow Y'_{\max}$, накрывающее f, что опять противоречит максимальности морфизма $f'_{\max}$.

Мы доказали, таким образом, что $f'_{\max} : X'_{\max} \longrightarrow Y'_{\max}$ накрывает морфизм $f : X \longrightarrow Y$. Осталось доказать, теперь, выполнение для соответствия $\mathcal{I}(f) = f'_{\max}$ и $\mathcal{I}(X) = X'_{\max}$ условий 1 и 2 определения понятия функтора.

Докажем, что вложение $\mathcal{I}$ переводит тождественное отображение в тождественное отображение, то есть выполняется условие 1 определения функтора. Пусть $\mathcal{I}(X) = X'$. Тогда $\mathcal{P}\mathcal{I}(1_X) = 1_X$ и $\mathcal{P}(1_{X'}) = 1_X$, откуда, в силу аксиомы V, $\mathcal{I}(1_X) = 1_{X'}$.

Осталось доказать выполнение условия 2 определения функтора. Рассмотрим диаграмму

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z.$$

Соответствие $\mathcal{I}$ переводит эту диаграмму в диаграмму

$$X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z'$$

а отображение $gf : X \longrightarrow Z$ в отображение $(gf)' : X' \longrightarrow Z'$. Нам остается доказать, что $(gf)' = g'f'$. Но оба эти морфизма имеют одинаковые области задания, одинаковые области значений, накрывают один и тот же морфизм и потому, в силу аксиомы V, совпадают.

Замечание. При доказательстве существования максимального функтора вложения и минимального функтора вложения категории в ее детализацию были использованы все аксиомы детализации кроме аксиомы IV. Эта аксиома используется при доказательстве некоторых других свойств детализаций, например теорем о накрытии прямых произведений и свободных объединений.

Категорные определения прямого произведения и свободного объединения отличаются от соответствующих структурных определений.

Определение. *Прямым произведением в категории $\mathcal{K}$ ее объектов X_ξ, рассматриваемых для всех $\xi \in \Xi$, называется система (X, p_ξ), состоящая из некоторого объекта X и морфизмов $p_\xi : X \longrightarrow X_\xi$, определенных для всех $\xi \in \Xi$. При этом должно выполняться следующее условие:*

Для любой системы (Y, f_ξ), состоящей из некоторого объекта Y категории $\mathcal{K}$ и ее морфизмов $f_\xi : Y \longrightarrow X_\xi$, найдется такой морфизм $f : Y \longrightarrow X$, что $f_\xi = p_\xi f$ для всех $\xi \in \Xi$.

Определение. *Свободным объединением в категории $\mathcal{K}$ ее объектов X_ξ, рассматриваемых для всех $\xi \in \Xi$, называется система (X, i_ξ), состоящая из некоторого объекта X и морфизмов $i_\xi : X_\xi \longrightarrow X$, определенных для всех $\xi \in \Xi$. При этом должно выполняться следующее условие:*

Для любой системы (Y, f_ξ), состоящей из некоторого объекта Y категории $\mathcal{K}$ и ее морфизмов $f_\xi : X_\xi \longrightarrow Y$, найдется такой морфизм $f : X \longrightarrow Y$, что $f_\xi = f i_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$.

Замечание. Нетрудно заметить, что категорные понятие прямого произведения и свободного объединения двойственны друг другу. Определение одного из них получается из другого обращением стрелок.

Теорема. *Пусть $\mathcal{K}'$ является $\mathcal{P}$-детализацией категории $\mathcal{K}$. Если эта детализация удовлетворяет аксиомам* I, II, II$'$, III, IV *и* V, *то прямое произведение $((X, p_\xi)|\xi \in \Xi)$ объектов X_ξ в категории $\mathcal{K}$ накрывается прямым произведением $((X', p'_\xi)|\xi \in \Xi)$ в категории $\mathcal{K}'$ произвольно фиксированных детализаций X'_ξ этих объектов.*

Доказательство. В силу аксиомы III, для каждого $\xi \in \Xi$ существуют морфизмы с областью значений X'_ξ, накрывающие морфизм p_ξ, а в силу аксиомы II$'$, существует точная нижняя граница таких морфизмов, накрывающая морфизм p_ξ. Обозначим через X' точную верхнюю границу областей задания этих точных нижних границ. По построению этого объекта, для каждого $\xi \in \Xi$ существует морфизм $p'_\xi : X' \longrightarrow X'_\xi$, накрывающий морфизм p_ξ. Нам осталось только доказать, что $((X', p'_\xi)|\xi \in \Xi)$ является прямым произведением объектов X'_ξ, то есть для любой системы $(f'_\xi|\xi \in \Xi)$ морфизмов некоторого объекта Y' в объекты X'_ξ найдется такой морфизм $f' : Y' \longrightarrow X'$, что $f'_\xi = p'_\xi f'$ для всех $\xi \in \Xi$.

Пусть, $f'_\xi : Y' \longrightarrow X'_\xi$ – морфизмы, определенные для некоторого объекта Y' и всех $\xi \in \Xi$. Тогда для $Y = \mathcal{P}(Y')$ и всех $f_\xi = \mathcal{P}(f'_\xi)$ найдется такой морфизм $f : Y \longrightarrow X$, что $f_\xi = p_\xi f$. В силу аксиомы IV, это разложение можно поднять в категорию $\mathcal{K}'$ для каждого $\xi \in \Xi$, но при этом только крайние объекты, то есть область задания Y' и область значений X'_ξ отображеиия f'_ξ известны, в то время как относительно промежуточного объекта, накрывающего X нам известно только то, что он существует. Тем не менее, мы можем рассмотреть для каждого $\xi \in \Xi$ точную верхнюю границу таких объектов и точную верхнюю границу по всем $\xi \in \Xi$ этих точных нижних границ, которую мы обозначим через $\hat{X}'$. Сравнивая построение объектов $\hat{X}'$ и X', мы замечаем, что $X' \leq \hat{X}'$. Это следует из того, что при построении X' мы рассматриваем для каждого $\xi \in \Xi$ все морфизмы с областью значений X'_ξ, накрывающие p_ξ, а при построении $\hat{X}'$ – только морфизмы, входящие в накрытие композиции $p_\xi f$. Мы можем рассмотреть, теперь, для каждого $\xi \in \Xi$ следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "\hat{f}'"] & \hat{X}' \arrow[r, "\hat{p}'_\xi"] \arrow[d, "j'"] & X'_\xi \\
 & X' &
\end{tikzcd}$$

где $\hat{p}'_\xi \hat{f}' = f'_\xi$. По построению объекта X' имеет место для каждого $\xi \in \Xi$ отображение $p'_\xi : X' \longrightarrow X'_\xi$, накрывающее отображение $p_\xi : X \longrightarrow X_\xi$. Поэтому диаграмма может быть дополнена косой стрелкой $X' \xrightarrow{p'_\xi} X'_\xi$. Дополненная такой стрелкой диаграмма накрывает диаграмму

$$Y \xrightarrow{\ f\ } X \xrightarrow{\ p_\xi\ } X_\xi,$$

где $f_\xi = p_\xi f$.

В силу аксиомы V, морфизм $j'\hat{f}'_\xi$ не зависит от ξ, так как он накрывает f, а его область задания и область значений фиксированы. Обозначим этот морфизм через f'. Заметим, теперь, что морфизм f'_ξ и морфизм $p'_\xi f'$, накрывающие морфизм f, имеют одинаковые область задания и область значений, а потому совпадают. Тем самым доказано, что $f'_\xi = p'_\xi f'$.

Замечание. Аналогичная теорема, относящаяся к свободным объединениям, доказывается двойственным рассуждением.

К основным понятиям теории категорий относятся также понятия мономорфизма, эпиморфизма, вложения и наложения.

Определение. *Морфизм $f : X \longrightarrow Y$ называется мономорфизмом в категории $\mathcal{K}$, если для любых морфизмов $g : X' \longrightarrow X$ и $h : X' \longrightarrow X$ в этой категории из $fg = fh$ следует $g = h$.*

Определение. *Морфизм $f : Y \longrightarrow X$ называется эпиморфизмом в категории $\mathcal{K}$, если для любых морфизмов $g : X \longrightarrow X'$ и $h : X \longrightarrow X'$ в этой категории из $gf = hf$ следует $g = h$.*

Замечание. Понятия мономорфизма и эпиморфизма двойственны друг другу, так как одно переходит в другое обращением стрелок.

Теорема. *Пусть $\mathcal{K}'$ является $\mathcal{P}$-детализацией категории $\mathcal{K}$, удовлетворяющей аксиомам* I, III *и* V. *Тогда, если f' – мономорфизм в категории $\mathcal{K}'$, то $\mathcal{P}(f')$ – мономорфизм в категории $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Пусть $f' : X'_1 \longrightarrow X'_2$ является мономорфизмом в категории $\mathcal{K}$, $f = \mathcal{P}(f')$, $X_1 = \mathcal{P}(X'_1)$, $X_2 = \mathcal{P}(X'_2)$, $f : X_1 \longrightarrow X_2$, $g : X \longrightarrow X_1$, $h : X \longrightarrow X_2$, $fg = fh$. В силу аксиомы III существования левых накрытий, найдутся накрытия морфизмов g и h, с X'_1, как областью их значений. Вообще говоря эти морфизмы могут иметь различные области заданий, но воспользовавшись аксиомой I, мы можем найти такие морфизмы с общей областью задания. Итак, мы найдем морфизмы $g' : X' \longrightarrow X'_1$ и $h' : X' \longrightarrow X'_1$, накрывающие f и h. Рассмотрим композиции $f'g'$ и $f'h'$. Эти композиции имеют одни и те же области задания и значений. С другой стороны они накрывают один и тот же морфизм, так как по предположению $fg = fh$. Отсюда, в силу аксиомы V, $f'g' = f'h'$. Так как f' является мономорфизмом в категории $\mathcal{K}'$, то из предыдущего равенства следует $g' = h'$ и потому $g = h$.

Замечание. Аналогичная теорема, относящаяся к эпиморфизмам, доказывается двойственным рассуждением.

Теорема. *Пусть* $\mathcal{K}'$ *является* $\mathcal{P}$*-детализацией категории* $\mathcal{K}$*, удовлетворяющей аксиоме* V*,* $f' : X_1' \longrightarrow X_2'$*,* $\mathcal{P}(f')$ *– мономорфизм в категории* $\mathcal{K}$*. Тогда* f' *– мономорфизм в категории* $\mathcal{K}'$*.*

Доказательство. Пусть $g' : X' \longrightarrow X_1')$, $h' : X' \longrightarrow X_1')$, $f'g' = f'h'$. Тогда $\mathcal{P}(f')\mathcal{P}(g') = \mathcal{P}(f')\mathcal{P}(h')$ и, так как $\mathcal{P}(f')$ – мономорфизм, то $\mathcal{P}(h') = \mathcal{P}(g')$. Отсюда, в силу аксиомы V, следует равенство $h' = g'$.

Замечание. Аналогичная теорема, относящаяся к эпиморфизмам, доказывается двойственным рассуждением.

Определение. *Мономорфизм* $j : Y_2 \longrightarrow Y_1$ *будем называть вложением* Y_2 *в* Y_1*, если для любого разложения* $j = gf$*, в котором* f *– эпиморфизм,* f *оказывается изоморфизмом.*

Определение. *Эпиморфизм* $p : Y_1 \longrightarrow Y_2$ *будем называть наложением* Y_1 *на* Y_2*, если для любого разложения* $p = fg$*, в котором* f *– мономорфизм,* f *оказывается изоморфизмом.*

Замечание. Понятия вложения и наложения двойственны друг другу, так как одно переходит в другое обращением стрелок.

Теорема. *Пусть* $\mathcal{K}'$ *является* $\mathcal{P}$*-детализацией категории* $\mathcal{K}$*, удовлетворяющей аксиомам* I, III *и* V*. Тогда, если* j' *– вложение в категории* $\mathcal{K}'$*, то* $\mathcal{P}(j')$ *– вложение в категории* $\mathcal{K}$*.*

Доказательство. Пусть $j' : Y_2' \longrightarrow Y_1'$ – вложение в категории $\mathcal{K}'$. Тогда морфизм $j = \mathcal{P}(j') : \mathcal{P}(Y_2') \longrightarrow \mathcal{P}(Y_1')$ будет мономорфизмом. Рассмотрим произвольное разложение $j = gf$, в котором f является эпиморфизмом. В силу аксиомы IV, это разложение можно поднять в $\mathcal{K}'$, получив разложение $j' = g'f'$, в котором f' – эпиморфизм. Но тогда, в силу того что j' является вложением, f' будет изоморфизмом и, следовательно, $f = \mathcal{P}(f')$ будет изоморфизмом.

Замечание. Аналогичная теорема, относящаяся к наложениям, доказывается двойственным рассуждением.

5. Некоторые свойства ретрактов. Наряду с отмеченными выше свойствами детализаций представляют определенный интерес и некоторые свойства категорных вложений, связанных с детализациями. Пусть категория $\mathcal{K}$ является ретрактом категории $\mathcal{K}'$, то есть имеется и функтор детализации $\mathcal{P}$ и функтор вложения

$\mathcal{I}$, связанные друг с другом соотношением $\mathcal{PI}$ –тождественный функтор на категории $\mathcal{K}$. Среди функторов вложения здесь особо выделяются, описанные выше, максимальное вложение и минимальное вложение, если таковые существуют. Были описаны достаточные условия существования таких вложений, однако они не являются необходимыми условиями. Поэтому, изучая свойства вложений, мы будем просто предполагать существование минимального вложения $\mathcal{I}_{\min}$ или существование максимального вложения $\mathcal{I}_{\max}$. Так как эти вложения двойственны друг другу, то достаточно изучить свойства одного из них, например минимального вложения

Теорема. *Пусть категория $\mathcal{K}$ является $(\mathcal{P},\mathcal{I})$-ретрактом категории $\mathcal{K}'$ причем $\mathcal{P}$ удовлетворяет аксиомам* III$'$, IV *и* V, *а $\mathcal{I}$ – минимальное вложение. Тогда $\mathcal{I}(\prod X_\xi) = \prod \mathcal{I}(X_\xi)$ для любой системы $(X_\xi|\xi \in \Xi)$ объектов категории $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Рассмотрим прямое произведение (X, π_ξ) для некоторой системы $(X_\xi|\xi \in \Xi)$ объектов категории $\mathcal{K}$ и минимальные вложения $\mathcal{I}(X)$, $\mathcal{I}(X_\xi)$. В силу аксиомы III$'$, существуют накрытия морфизмов π_ξ с общей областью задания $\mathcal{I}(X)$ и с областями значений являющимися соответствующими детализациями объектов X_ξ. Так как $\mathcal{I}(X_\xi)$ являются их минимальными детализациями, можно считать, что морфизмы $\pi_\xi : X \longrightarrow X_\xi$ накрываются морфизмами $\pi'_\xi : \mathcal{I}(X) \longrightarrow (X_\xi)$. Докажем, что $(\mathcal{I}(X), \pi_x i')$ является прямым произведением объектов $\mathcal{I}(X_\xi)$. Действительно, рассмотрим произвольную систему (f'_ξ) морфизмов некоторого объекта Y' в объекты $\mathcal{I}(X_\xi)$. Пусть $Y = \mathcal{P}(Y')$, $f_\xi = \mathcal{P}(f'_\xi)$, $f_\xi : Y \longrightarrow X_\xi$, для каждого $\xi \in \Xi$. Так как (X, π_ξ) является прямым произведением объектов X_ξ, найдется такое отображение $f : Y \longrightarrow X$, что $f_\xi = \pi_\xi f$ для каждого $\xi \in \Xi$. В силу аксиомы IV все эти разложения можно поднять в категорию $\mathcal{K}'$. При этом промежуточные объекты будут детализациями объекта X. Так как $\mathcal{I}(X)$ – минимальная детализация, то можно, воспользовавшихся аксиомой V, взять ее в качестве промежуточного объекта разложения $f'_\xi = \xi' f'$.

Замечание. Аналогичная теорема, относящаяся к свободным объединениям, доказывается двойственным рассуждением.

Теорема. *Пусть категория $\mathcal{K}$ является $(\mathcal{P},\mathcal{I})$-ретрактом категории $\mathcal{K}'$, причем $\mathcal{P}$ удовлетворяет аксиомам* I$'$, III$'$, V, *а $\mathcal{I}$ – мини-*

мальное вложение. Тогда $\mathcal{I}(j)$ является вложением в категории $\mathcal{K}'$ для любого вложения j в категории $\mathcal{K}$.

Доказательство. Пусть $j : X \longrightarrow Y$ – некоторое вложение в категории $\mathcal{K}$. Рассмотрим морфизм $j' = \mathcal{I}(j)$. Так как j – мономорфизм, то и j' – мономорфизм. Рассмотрим его разложение $j' = g'f'$, в котором f' является эпиморфизмом. В категории $\mathcal{K}$ этому разложению соответствует разложение $j = gf$, в котором $g = \mathcal{P}(g')$, $f = \mathcal{P}(f')$ – эпиморфизм. Так как j является вложением, то f будет изоморфизмом, то есть для него существует обратный морфизм h, для которого hf и fh – тождественные морфизмы. Поднимем h в $\mathcal{K}'$ так, что область задания морфизма h' совпадает с областью значений морфизма f. Тогда областью значений этого морфизма будет некоторая детализация объекта X, следовательно, так как $\mathcal{I}(j)$ – его минимальная детализация, ее можно рассматривать в качестве области значений морфизма h'. Так как морфизмы $f'g'$ и $g'f'$ накрывают морфизмы fg и gf являющиеся тождественными морфизмами, то в силу аксиомы V, они также являются тождественными морфизмами и, следовательно, f' – изоморфизм.

Замечание. Аналогичная теорема, относящаяся к наложениям, доказывается двойственным рассуждением.

Глава II

Структуры метрического типа

Мы рассмотрим здесь некоторые общие соображения, теорию полноты и пополнения метрических пространств, некоторые теоремы о неподвижных точках отображений метрических пространств а также метрическую аксиоматику евклидова пространства.

§1. Метрические пространства и их обобщения

1. Метрики на множествах, отклонения. В процессе становления математики понятие расстояния появилось одним из первых. Как и многие другие понятия оно возникло в результате практических потребностей, как "расстояние от пункта А до пункта Б". В геометрии оно уже выглядело, как "расстояние между точками" на прямой в плоскости и в пространстве. В дальнейшем оказалось необходимым рассматривать расстояния между точками не только в евклидовой геометрии, но и в произвольном множестве. Повидимому впервые они были определены на множествах функций (Frechet M. Rend. Circolo mat. Palermo, v. 22 (1906)). При этом оказалось полезным сохранение для таких расстояний их обычных геометрических свойств. Так возникло понятие метрики и метрического пространства.

Определение. *Пусть X – произвольное множество. Метрикой на X называют любую вещественную неотрицательную функцию $d(x,y)$ точек x,y этого множества (точек (x,y) множества $X \times X$), удовлетворяющую аксиомам тождества, симметрии и треугольника.*

1. $d(x,y)=0 \iff x=y$ *(аксиома тождества).*
2. $d(x,y)=d(y,x)$ *(аксиома симметрии).*
3. $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$ *(аксиома треугольника).*

Пара (X,d) называется при этом метрическим пространством.

Пример. Простейшим примером метрики, определенной на произвольно фиксированном множестве, является метрика d для которой

$$d(x,y)=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad x\neq y \\ 0, & \text{если} \quad x=y. \end{cases}$$

Определение. *Пусть* (X, d) *и* (X', d') *– некоторые метрические пространства. Отображение* $f : X \longrightarrow X'$*, сопоставляющее точкам* x *множества* X *точки* $f(x)$ *множества* X'*, называется непрерывным в точке* x *отображением, если для любого* $\epsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$*, что* $d(x, y) < \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon$ *для фиксированного* x *и произвольного* y*. Это отображение называется непрерывным отображением* (X, d) *в* (X', d')*, если оно непрерывно в каждой точке* $x \in X$*.*

Определение. *Отображение* $f : (X, d) \longrightarrow (X', d')$ *называется равномерно непрерывным отображением, если для любого* $\epsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$*, что* $d(x, y) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$ *для произвольных точек* x *и* y*.*

Замечание. Равномерно непрерывное отображение является, в соответствии с определением, непрерывным отображением, обратное, как показывает следующий пример, неверно.

Пример. Пусть $f : (\mathbb{R}, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d), f(x) = x^2$, d – обычная метрика числовой прямой, то есть $d(x, y) = |x - y|$. Тогда $d(f(x), f(y)) = |x^2 - y^2| = |x - y||x + y|$. Каким бы малым не было бы положительное число $|x - y|$, число $|x - y||x + y|$ может оказаться сколь угодно большим за счет увеличения числа $|x + y|$ при фиксированном $|x - y|$. Тем самым условие равномерной непрерывности для рассматриваемой функции не выполняется. Заметим, что возможность одновременно менять x и y для доказательства существенна.

Метрическим пространствам посвящена обширная литература, содержащая много различных направлений. Сюда относится, прежде всего, изучение свойств метрических пространств, инвариантных относительно *изометрий*, то есть отображений сохраняющих расстояния. Здесь мы находим и общие понятия, такие, например, как полнота, ограниченность, вполне ограниченность, мера некомпактности ..., и конкретные теории, например внутренняя геометрия поверхностей, и отдельные утверждения. К теории метрических пространств относится также изучение свойств метрических пространств, сохраняющихся при гомеоморфизмах (взаимно однозначных и взаимно непрерывных отображениях) – так называемых топологичеких свойств. Метрики играют также существенную роль, при изучении различных алгебраических структур. С другой стороны важную роль играют различные теоремы о неподвижных точках отображений метрических пространств.

Довольно быстро были введены различные обобщения понятия метрики и, соответственно, понятия метрического пространства.

Определение. *Если для функции $d(x,y)$ аксиома тождества заменяется более слабым условием*

$$x = y \Longrightarrow d(x,y) = 0,$$

а остальные аксиомы выполняются, то ее называют псевдометрикой.

Определение. *Если для функции $d(x,y)$ аксиома треугольника заменяется более слабым условием: для каждого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что*

$$d(y,z) \leq \delta \Longrightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + \epsilon,$$

а остальные аксиомы выполняются, то ее называют слабой метрикой.

Замечание. Каждая метрика является, конечно, слабой метрикой, так как для метрики число δ можно взять равным числу ϵ. Если $d(y,z) \leq \epsilon$, то из $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ следует $d(x,z) \leq d(x,y) + \epsilon$.

Определение. *Если для функции $d(x,y)$ аксиома симметрии не обязательно выполняется, то ее называют квазиметрикой.*

Определение. *Если для функции $d(x,y)$ аксиома треугольника не обязательно выполняется, то ее называют симметрикой.*

Определение. *Неотрицательную вещественную функцию $d(x,y)$, $x \in X, y \in X$, удовлетворяющую единственному условию*

$$x = y \Longrightarrow d(x,y) = 0,$$

называют отклонением на X.

Замечание. Нетрудно заметить, что любое такое отклонение на X является вещественной функцией на $X \times X$, обращающейся в ноль на диагонали $\Delta = \{(x,x) | x \in X\} \subset X \times X$.

Переход от метрик к отклонениям позволяет перейти к дальнейшему обобщению этого понятия.

Определение. *Пусть Λ -произвольное упорядоченное множество, имеющее минимальный элемент, который мы обозначим через 0, и X - произвольное множество. Тогда можно будет рассматривать произвольную функцию $d : X \times X \longrightarrow \Lambda$, удовлетворяющие единственному условию*

$$x = y \iff d(x, y) = 0,$$

Такую функцию называют отклонением. Элемент $d(x, y)$ называется величиной отклонения y от x.

2. Полнота и пополнение метрических пространств. Пусть (X, d) – некоторое метрическое пространство.

Важную роль в теории метрических пространств играют так называемые фундаментальные последовательности.

Определение. *Последовательность $(x_n | n \in \mathbb{N})$ точек метрического пространства (X, d) называется фундаментальной последовательностью, если для любого $\epsilon > 0$ найдется такое n_ϵ, зависящее от ϵ, что $d(x_m, x_n) < \epsilon$ для всех $m > n_\epsilon, n > n_\epsilon$.*

Определение. *Говорят, что последовательность $(x_n | n \in \mathbb{N})$ метрического пространства (X, d) сходится к точке $x \in X$, если для любого $\epsilon > 0$ найдется такое n_ϵ, зависящее от ϵ, что $d(x_n, x) < \epsilon$ для всех $n > n_\epsilon$.*

Определение. *Метрическое пространство (X, d) называется полным, если каждая его фундаментальная последовательность сходится.*

Пример 1. Простейшими примерам полных метрических пространств являются пространства (X, d), для которых $x \neq y \Longrightarrow d(x, y) = 1$.

В этом примере любая фундаментальная последовательность $(x_n | n \in \mathbb{N})$ стабилизируется, то есть найдется такая точка x, что все элементы x_n этой последовательности совпадают с x, начиная с некоторого n_0. Действительно, пусть $\epsilon = \frac{1}{2}$, тогда найдется такое натуральное число n_0, что $d(x_m, x_n) < \frac{1}{2}$ и поэтому $x_m = x_n$ для всех $n > n_0, n > n_0$. Иначе говоря, все точки x_n рассматриваемой последовательности совпадают с точкой x для $n > n_0$, а такая последовательность сходится к точке x.

Пример 2. Числовая прямая, то есть метрическое пространство $(\mathbb{R}, d)$, где $\mathbb{R}$ – множество всех вещественных чисел и $d(x, y) = |y - x|$, является полным метрическим пространством.

Действительно, рассмотрим любую фундаментальную последовательность $(x_n | n \in \mathbb{N})$ числовой прямой. Фиксируем какую-нибудь строго убывающую сходящуюся к нулю последовательность $(\epsilon_k | k \in \mathbb{N})$ вещественных чисел и такую последовательность $(n_k | k \in \mathbb{N})$, существующую в силу фундаментальности последовательности $(x_n | n \in \mathbb{N}))$, что $d(x_m, x_n) < \epsilon_k$ для всех $m \geqslant n_k, n \geqslant n_k$. Все точки x_n этой последовательности начиная с x_{n_k} содержатся в отрезке $[x_{n_k} - \epsilon_k, x_{n_k} + \epsilon_k]$. Вообще говоря эти отрезки не обязаны последовательно содержаться друг в друге, но переходя к их пересечениям мы можем получить последовательность отрезков $[a_k, b_k]$, в которой

$$[a_k, b_k] = [a_{k-1}, b_{k-1}] \cap [x_{n_k} - \epsilon_k, x_{n_k} + \epsilon_k].$$

Эти отрезки последовательно вложены друг в друга, причем их длины $b_k - a_k \leqslant \epsilon_k \longrightarrow 0$. Известно, что в этом случае существует единственное число x, содержащееся во всех этих отрезках. Так как $|x - x_n| \leqslant \epsilon_k$ для всех $n > n_k$, то рассматриваемая фундаментальная последовательность сходится к точке x.

Пример 3. Интервал $(0, 1)$, рассматриваемый с обычной метрикой $d(x, y) = |x - y|$, не является полным метрическим пространством.

Для доказательства этого рассмотрим последовательность $(x_n | n \in \mathbb{N})$, в которой $x_n = \frac{1}{n}$. Эта последовательность является фундаментальной последовательностью, так как для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Тогда для любых $m > n > n_0$ имеем

$$d(x_m, x_n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}| = \frac{m - n}{mn} < \frac{m}{mn} < \frac{1}{n} < \epsilon,$$

то есть выполняется условие фундаментальности рассматриваемой последовательности. С другой стороны эта последовательности не сходится в интервале (0.1), она сходится в $\mathbb{R}$ к точке 0, но эта точка не принадлежит интервалу $(0, 1)$.

В связи с понятием полноты возникает следующий вопрос. Любое ли метрическое пространство может быть пополнено, то есть вложено в соответствующее полное метрическое пространство?

Определение. *Если $X \subset X'$ и $d(x,y) = d'(x,y)$ для всех x и y из X, то говорят, что метрическое пространство (X,d) является подпространством метрического пространства (X',d'). В этом случае говорят также, что метрическое пространство (X,d) вложено в метрическое пространство (X',d').*

Теорема. *Каждое метрическое пространство является подпространством полного метрического пространства.*

Доказательство. Пусть (X,d) - некоторое метрическое пространство, рассмотрим совокупность всех его фундаментальных последовательностей и введем на этом множестве следующее отношение эквивалентности:

$$(x_n|n \in \mathbb{N}) \sim (y_n|n \in \mathbb{N}) \iff \quad \text{для каждого } \epsilon > 0 \ \text{ существует}$$
$$\text{такое } \ n_0, \ \text{ что } d(x_n, y_m) < \epsilon \ \text{ для всех } \ n > n_0 \ \text{ и } m > n_0.$$

Множество всех классов такой эквивалентности обозначим через X'. Введем метрику на X'. Пусть $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ – два таких класса эквивалентности, положим $d'(\tilde{x},\tilde{y}) = \lim d(x_n, y_n)|n \longrightarrow \infty$, где $(x_n|n \in \mathbb{N}) \in \tilde{x}$, $(y_n|n \in \mathbb{N}) \in \tilde{y}$. Нетрудно проверить, что это определение метрики корректно. то есть не зависит от выбора последовательностей $(x_n|n \in \mathbb{N})$ и $(y_n|n \in \mathbb{N})$ в соответствующих классах эквивалентности, а расстояние d' удовлетворяет аксиомам рефлексивности, симметрии и треугольника. Нетрудно проверить, что для любой точки $x \in X$ все сходящиеся к этой точке последовательности образуют соответствующий этой точке класс $\tilde{x}$ эквивалентности фундаментальных последовательностей, причем $d(x,y) = d'(\tilde{x},\tilde{y})$. Заменив каждую точку $x \in X$ соответствующим ей классом эквивалентности, мы можем считать, что $X \subset X'$. Таким образом мы получаем включение метрического пространства (X,d) в метрическое пространство (X',d'). Осталось доказать, что (X',d') – полное метрическое пространство. Основная идея доказательства этого состоит в том, что для каждой фундаментальной последовательности $(\tilde{x}_n|n \in \mathbb{N})$ точек метрического пространства (X',d') мы можем найти эквивалентную ей фундаментальную последовательность $(x_n|n \in \mathbb{N})$ точек метрического пространства (X,d). Так как эта последовательнось сходится к некоторой точке пространства (X',d'), то и исходная фундаментальная последовательность сходится к этой точке. Такую фундаментальную последовательность можно построить по крайней мере двумя способами.

Во-первых, мы можем для каждой точки $\tilde{x}_n$, являющейся соответствующим классом фундаментальных последовательностей точек из (X, d), произвольно фиксировать одну из этих последовательностей $(x_{n,m}|m \in \mathbb{N}$ и рассмотреть двойную последовательность $(x_{n,m}|n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N})$. Так как $(\tilde{x}_n|n \in \mathbb{N})$ является фундаментальной последовательностью, то для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $n(\epsilon)$, что $d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) < \epsilon$ для всех $n > n(\epsilon)$, $m > n(\epsilon)$. С другой стороны, так как для каждого n последовательность $(x_{n,m}|m \in \mathbb{N})$ является фундаментальной последовательностью, то для каждого $\epsilon > 0$ найдется $n(\epsilon)$ и $m(n, \epsilon)$ такие, что множество $M_\epsilon = \{x_{n,m}|n > n(\epsilon), m > m(n, \epsilon))\}$ имеет диаметр меньше ϵ. Это множество убывает с уменьшением $\epsilon > 0$, но никогда не становится пустым. Выбрав произвольную последовательность (ϵ_k), стремящуюся к нулю, и по точке в каждом M_ϵ, мы получим искомую фундаментальную последовательность.

Другой вариант построения фундаментальной поледовательности $(x_n|n \in \mathbb{N})$, эквивалентной фундаментальной последовательности $(\tilde{x}_n|n \in \mathbb{N})$ состоит в замене каждой точки $\tilde{x}_n$ достаточно близкой к ней точкой x_n из X. Это всегда возможно. Если сама точка $\tilde{x}_n$ принадлежит X, то мы положим $\tilde{x}_n = x_n$, если же $\tilde{x}_n$ не принадлежит X, то к ней сходится некоторая фундаментальная последовательность точек из X и мы в качестве x_n возьмем достаточно близкую к $\tilde{x}_n$ точку этой последовательности.

3. Теоремы о неподвижных точках. Точка x некоторого множества X называется *неподвижной точкой* отображения (операции) $T : X \longrightarrow X$, если $Tx = x$. Теория неподвижных точек имеет большую литературу, содержащую разнообразные результаты относительно неподвижных точек отображений. Здесь мы ограничимся отображениями метрических пространств. Будем считать,что та или иная теорема относится к теории неподвижных точек метрических пространств, если она имеет дело с неподвижными точками, а ее условия можно сформулировать в метрических терминах. Существует несколько книг, содержащих более или менее полные обзоры этой теории. В частности, в Записках Научных семинаров ЛОМИ, том 66, 1976 год, имеется обзорная статья “Неподвижные точки отображений метрических пространств”, (А. А. Иванов, стр. 5–102).

Следует заметить, что многие результаты, относящиеся к этой теории, появлялись просто в процессе доказательства существования решений различных задач. Поэтому иногда бывает трудно выяснить, когда и кем было доказана та или иная теорема о неподвижной точке. Например, начало теории неподвижных точек отображений метрических пространств обычно связывают с классическим принципом Банаха сжимающих отображений (1922 год), хотя сам принцип применялся и раньше. Банах просто сформулировал этот принцип, как некоторую теорему существования и единственности неподвижной точки.

Определение. *Отображение* $T : (X, d) \longrightarrow (X, d)$ *называется сжимающим отображением), если* $d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$ *для некоторого фиксированного положительного неотрицательного числа* $a < 1$ *и любых* x, y *из* X.

Теорема (принцип Банаха). *Сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Доказательство этой и многих других теорем о неподвижной точке основано на изучении *итерационных последовательностей или орбит точек* $(T^n x | n \in \mathbb{N})$, $(T^n x = T(T^{n-1}x))$. Пусть $d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$ для некоторого фиксированного неотрицательного числа $a < 1$ и любых x, y из X. Рассмотрим орбиту $(T^n x | n \in \mathbb{N})$ произвольно фиксированной точки $x \in X$. Оценивая $d(T^n x, T^{n+p}x)$ для произвольных n и p, воспользуемся сначала аксиомой треугольника

$$d(T^n x, T^{n+p}x) \leq d(T^n x, T^{n+1}x) + \ldots + d(T^{n+p-1}x, T^{n+p}x),$$

и затем условием сжатия

$$d(T^{n+k}x, T^{n+k+1}x) \leq ad(T^{n+k-1}x, T^{n+k}x) \leq \ldots \leq a^{n+k}d(x, Tx).$$

Таким образом получаем оценку

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^{n+p}x) &\leq a^n d(x, Tx) + \ldots + a^{n+p-1}d(x, Tx) \\ &= a^n \frac{1 - a^p}{1 - a} \leq \frac{a^n}{1 - a} \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что итерационная последовательность произвольно фиксированной точки x является фундаментальной последовательностью, сходящейся, в силу полноты пространства

(X, d), к некоторой точке $\xi \in X$. Заметим теперь, что $d(T\xi, \xi) \leq d(T\xi, T^n x) + d(\xi, T^n x) \leq ad(\xi, T^{n-1}x) + d(\xi, T^n x)$ – сколь угодно мало для достаточно больших n и поэтому ξ – неподвижная точка отображения T. Наличие другой неподвижной точки ξ' противоречит условию сжатия.

Многие из авторов доказывали различные обобщения принципа Банаха, заменяя условие $d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$ условиями, содержащими не только $d(Tx, Ty)$ и $d(x, y)$, но и различные комбинации расстояний $d(x, Tx)$, $d(y, Ty)$, $d(x, Ty)$, (Tx, y), а также расстояний между итерациями $T^m x$ и $T^n y$. В качестве примера можно привести следующее утверждение из упомянутой выше обзорной статьи.

Теорема. *Пусть (X, d) – полное метрическое пространство, $T : X \longrightarrow X$ – такое отображение, что*

$$\alpha d(x, y) + \beta d(Tx, Ty) + \gamma[d(x, Tx) + d(y, Ty)] + \delta[d(x, Ty) + d(Tx, y)] \geq 0,$$

$$\alpha + \beta + 2\gamma < \min\{0, -2\delta\},$$

$$\beta + \gamma + \delta < 0.$$

Тогда T имеет неподвижную точку, причем, если

$$\alpha + \beta + 2\delta < 0,$$

то неподвижная точка единственна.

Доказательство. Пусть $(T^n x | n \in \mathbb{N})$ – итерационная последовательность произвольно фиксированной точки $x \in X$. Тогда для точек x и Tx будет справедливо неравенство

$$\alpha d(x, y) + \beta d(Tx, Ty) + \gamma[d(x, Tx) + d(y, Ty)] + \delta[d(x, Ty) + d(Tx, y)] \geq 0,$$

эквивалентное неравенству

$$(\alpha + \gamma)d(x, Tx) + (\beta + \gamma)d(Tx, T^2 x) + \delta d(x, T^2 x) \geq 0$$

Из этого неравенства и неравенства

$$d(x, T^2 x) \leq d(x, Tx) + d(Tx, T^2 x) \quad \text{(аксиомы треугольника)}$$

получаем для случая $\delta \geq 0$ неравенство

$$(\alpha + \gamma)d(x, Tx) + (\beta + \gamma)d(Tx, T^2 x) + \delta(d(x, Tx) + d(Tx, T^2 x)) \geq 0$$

или
$$(\alpha+\gamma+\delta)d(x,Tx)+(\beta+\gamma+\delta)d(Tx,T^2x)\geq 0.$$
Так как $\beta+\gamma+\delta>0$, то
$$\frac{\alpha+\gamma+\delta}{\beta+\gamma+\delta}d(x,Tx)+d(Tx,T^2x)\leq 0$$
или
$$d(Tx,T^2x)\leq -\frac{\alpha+\gamma+\delta}{\beta+\gamma+\delta}d(x,Tx)$$
Заметим теперь, что при $\delta\geq 0$ условие $\alpha+\beta+2\gamma<\min\{0,-2\delta\}$ можно переписать в виде $0\leq k=-\frac{\alpha+\gamma+\delta}{\beta+\gamma+\delta}<1$. Таким образом мы получаем соотношение
$$d(Tx,T^2x)\leq kd(x,Tx),\ \text{где}\ \ 0\leq k<1,$$
откуда следует, что итеративная последовательность $(T^nx|n\in\mathbb{N})$ является фундаментальной последовательностью, сходящейся к некоторой точке ξ. Подставив в исходное неравенство T^nx вместо x, и ξ вместо y, получаем неравенство
$$\alpha d(T^nx,\xi)+\beta d(TT^nx,T\xi)+\gamma[d(T^nx,TT^nx)+d(\xi,T\xi)]$$
$$+\delta[d(T^nx,T\xi)+d(TT^nx,\xi)]\geq 0.$$
и в пределе, при $n\longrightarrow\infty$ получаем
$$\alpha d(\xi,\xi)+\beta d(\xi,T\xi)+\gamma[d(\xi,\xi)+d(\xi,T\xi)]+\delta[d(\xi,T\xi)+d(\xi,\xi)]\geq 0.$$
то есть
$$(\beta+\gamma+\delta)d(\xi,T\xi)\geq 0.$$
Отсюда следует $T\xi=\xi$, так как $(\beta+\gamma+\delta)<0$, то есть ξ является неподвижной точкой отображения ξ. Если теперь $T\xi=\xi$ и $T\xi_1=\xi_1$, то подставляя в основное неравенство ξ и ξ_1 вместо x и y, получаем неравенство
$$\alpha d(\xi,\xi_1)+\beta d(T\xi,T\xi_1)$$
$$+\gamma[d(\xi,T\xi)+d(\xi_1,T\xi_1)]+\delta[d(\xi,T\xi_1)+d(T\xi,\xi_1)]\geq 0,$$
или
$$(\beta+\gamma+2\delta)d(\xi,\xi_1)\geq 0.$$
Отсюда следует $d(\xi,\xi_1)=0$, если $\beta+\gamma+2\delta<0$.

Рассмотрим теперь случай $\delta \leq 0$. В этом случае из неравенства

$$(\alpha+\gamma)d(x,Tx)+(\beta+\gamma)d(Tx,T^2x)+\delta d(x,T^2x)\geq 0$$

и неравенства

$$d(x,T^2x)\geq d(x,Tx)-d(Tx,T^2x)$$

получаем неравенство

$$(\alpha+\gamma-\delta)d(x,Tx)+(\beta+\gamma+\delta)d(Tx,T^2x)\geq 0.$$

Отсюда следует, в силу неравенства $\beta+\gamma+\delta<0$, что

$$d(Tx,T^2x)\leq -\frac{\alpha+\gamma-\delta}{\beta+\gamma+\delta}d(x,Tx)$$

С другой стороны, при $\delta \leq 0$, условие $\alpha+\beta+2\gamma<\min\{0,-2\delta\}$, переходит в условие $\alpha+\gamma-\delta+\beta+\gamma+\delta<0$ и поэтому

$$0\leq -\frac{\alpha+\gamma-\delta}{\beta+\gamma+\delta}<1$$

Таким образом и в этом случае итеративная последовательность $(T^nx|n\in\mathbb{N})$ оказывается фундаментальной и сходится к некоторой точке ξ. Так как при доказательстве того, что ξ является единственной неподвижной точкой отображения T мы не использовали условие $\delta\geq 0$, то это верно и в случае $\delta\leq 0$.

Можно предложить принципиально иное обобщение принципа Банаха, в котором вместо метрического пространства рассматривается слабо метрическое пространство, а условие сжатия не меняется. Доказательство обобщенного принципа Банаха существенно отличается от классического, поэтому оно будет здесь приведено.

Теорема (обобщенный принцип Банаха). *Пусть (X,d) – полное слабо метрическое пространство и $T:X\longrightarrow X$ такое отображение, что*

$$d(Tx,Ty)\leq ad(x,y)$$

для любых x,y из X и фиксированного a, $0\leq a<1$. Тогда существует единственная неподвижная точка ξ отображения T и $(T^nx|n\in\mathbb{N})\longrightarrow\xi$ для любой точки $x\in X$.

Доказательство. Имеем очевидное сотношение $d(T^nx,T^{n+1}x)\leq a^n d(x,Tx)$, поэтому $(d(T^nx,T^{n+1}x)|n\in\mathbb{N})\longrightarrow 0$. Отсюда следует, что предел двойной последовательности $(d(T^n x, T^m x)|n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N})$ либо не существует, либо равен нулю. Допустим, что такой предел не существует для некоторой точки $x_0 \in X$. В этом случае найдется такое число $r > 0$ и такие сколь угодно большие числа $m, n,\ n < m$, что

$$d(T^n x_0, T^m x_0) > r.$$

Фиксируем такое число $\epsilon > 0$, что $1 - \frac{2\epsilon}{r} > a$. В силу ослабленной аксиомы треугольника найдется такое число $\delta > 0$, что

$$d(x, z) \leq d(x, y) + \epsilon, \qquad \text{если} \qquad d(y, z) < \delta\ .$$

Так как последовательность $(d(T^n x, T^{n+1} x|n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю, то найдется такое n_0, что

$$d(T^n x_0, T^{n+1} x_0) < \delta$$

для $n \geq n_0$. Тогда для $n \geq n_0$ и $m \geq n_0$

$$\begin{aligned} ad(T^n x_0, T^m x_0) &\geq d(T^{n+1} x_0, T^{m+1} x_0) \\ \geq d(T^{n+1} x_0, T^m x_0) - \epsilon &\geq d(T^n x_0, T^m x_0) - 2\epsilon \end{aligned}$$

и поэтому

$$a \geq 1 - \frac{2\epsilon}{d(T^n x_0, T^m x_0)} \geq 1 - \frac{2\epsilon}{r}$$

что противоречит выбору числа ϵ.

§2. Аксиоматика евклидова пространства

1. Евклидова метрика. Геометрия начиналась, как практическая деятельность по измерению земельных участков и объемов емкостей. Геометрические утверждения формулировались тогда в виде правил. Накоплению таких утверждений способствовало использование логических рассуждений, ставших, в конечном счете, необходимым элементом теории. В "Началах" Евклида впервые были изложены основы аксиоматического метода построения геометрии, то есть выделения некоторых исходных утверждений (аксиом), из которых логическими рассуждениями выводились различные геометрические утверждения. По Евклиду исходным понятием в геометрии является разного рода протяженность, позволяющая вводить наряду с точками этой протяженности также прямые (длина без ширины) и плоскости (длина и ширина без толщины).

В начале изложения геометрии Евклид дает четырнадцать исходных утверждений (пять из них были названы им постулатами, а девять аксиомами) относительно точек , прямых и плоскостей. Понятие расстояния между точками, возникает позже, как результат измерений длин отрезков.

Классическая геометрия евклидова пространства в изложении Гильберта содержит тоже три типа исходных объектов (точки, прямые, плоскости), три типа исходных отношений между ними (принадлежит, между, конгруентен) и пять групп аксиом (принадлежности, порядка, конгруентности, параллельности, непрерывности), содержащих в общей сложности двадцать аксиом.

Нетрудно доказать, что расстояние $d(x, y)$ в евклидовом пространстве, являющееся неотрицательной функцией его точек, удовлетворяет аксиоме тождества, аксиоме симметрии и аксиоме треугольника, то есть евклидово пространство является метрическим пространством. Метрическая аксиоматическая теория евклидова пространства, должна быть основана на расстоянии между точками, как единственном исходном понятии. *В этой теории понятие прямой и понятие плоскости уже не будут исходными понятиями, они подлежат специальному определению.*

Замечание. Переход от обычной аксиоматики евклидова пространства к метрической аксиоматике позволяет по другому взглянуть на геометрию, а также рассматривать различные обобщения евклидова пространства за счет ослабления соответствующих метрических аксиом.

Для того чтобы доказать, что та или иная метрическая система аксиом действительно определяет евклидово пространство, достаточно ввести метрические определения прямых и плоскостей и доказать выполнение для точек, прямых и плоскостей всех аксиом евклидовой геометрии, например в изложении Гильберта. Первая попытка автора построить такую аксиоматику (Метрическая аксиоматика евклидова пространства.– Геометрия и топология 6, Зап. научн. семин. ПОМИ, том 279, 2001) оказалась неудачной в том смысле, что было введено слишком много аксиом.

2. Линейные множества метрических пространств. Мы рассмотрим сначала общее понятие линейного множества в произвольном метрическом пространстве (X, d).

Определение. *Пусть A, B, C – три точки метрического пространства (X, d). Будем говорить, что эти точки образуют в (X, d) линейное множество, если*

$$\pm d(A, C) \pm d(C, B) = d(A, B).$$

В том случае, когда в альтернированной сумме, стоящей в левой части этого равенства, оба слагаемых отличны от нуля и берутся со знаком плюс, то будем говорить, что точка C лежит между точками A и B.

Замечание. Если различные точки A, B, C образуют линейное множество, то одна из них лежит между двумя другими. Чтобы убедиться в этом достаточно в равенстве

$$\pm d(A, C) \pm d(C, B) = d(A, B).$$

перенести член с отрицательным знаком (если такой есть) из левой части в правую. Заметим также, что иногда такие точки назывались расположенными прямолинейно.

Определение. *Множество называется линейным в (X, d), если любые его три точки образуют линейное множество.*

Определение. *Отрезком $[AB]$ с концами A, B называют множество, состоящее из точек A, B и всех точек C, лежащих между точками A и B. Расстояние $d(A, B)$ между точками A и B называют длиной отрезка $[AB]$. Будем обозначать эту длину через $|AB|$.*

Замечание. Так как точки A и B равноправны в определении отрезка, то $[AB]$ и $[BA]$ обозначают один и тот же отрезок.

Определение. *Прямой (линией) AB, проходящей через две точки A и B, называют множество всех точек, образующих с точками A, B линейные множества.*

Замечание. Если указание на точки A, B несущественно, то говорят просто о прямой.

Определение. *Если не существует прямой, содержащей точки A, B, C, то говорят, что эти точки не лежат на одной прямой.*

Определение. *Пусть $A \neq B$. Лучом $[AB$ прямой AB, выходящим из точки A в сторону точки B, называют множество, состоящее из отрезка $[AB]$ и всех точек C, для которых $|AC| - |BC| = |AB|$, лучом $A]B$ прямой AB, выходящим из точки A в сторону противоположную точке B, называют множество, состоящее из всех точек C, для которых $|CB| - |CA| = |AB|$.*

Теория линейных множеств метрического пространства без дополнительных предположений оказывается довольно скудной. Например в общей ситуации отрезок не обязательно является линейным множеством, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = \{A, B, C, D\}$, $d(A, B) = 1$, $d(A, C) = 3$, $d(A, D) = 5$, $d(B, C) = 3$, $d(B, D) = 4$, $d(C, D) = 2$. Нетрудно проверить, что аксиомы метрики здесь выполняются и $[AD] = X$. С другой стороны, множество $\{B, C, D\}$ не является линейным множеством, поэтому здесь не является линейным множеством и отрезок $[AD]$.

Замечание. Из этого примера следует, что в общем случае три точки могут лежать на одной прямой и тогда, когда они не образуют линейное множество. Используя тот же пример, можно показать, что прямая не обязательно является объединением лучей, идущих из одной точки в противоположных направлениях. Действительно, в этом примере прямая AB совпадает с отрезком $[AB]$, но $[CD = \{C, D\}$, $C]D = \{A, C\}$ и поэтому $AB \neq [CD \cup C]D$.

С другой стороны, можно доказать, что если *некоторая конечная совокупность точек образует линейное множество, то существует отрезок которому все эти точки принадлежат, причем его концами являются точки рассматриваемого множества.* Действительно, среди всех пар точек принадлежащих этой совокупности есть пара с наибольшим расстоянием. Обозначим эту пару через A, B и пусть точка C любая другая точка рассматриваемой совокупности точек. Тогда точки A, B, C образуют линейное множество и поэтому одна из этих точек лежит между двумя другими. Но так как $|AB|$ – наибольшая из величин $|AB|, |AC|, |BC|$, то $|AC| + |CB| = |AB|$, то есть $C \in [AB]$.

Определение. *Два множества называются линейно сцепленными, если их пересечение состоит не менее чем из двух точек.*

Определение. *Конечная система множеств в (X, d) называется линейно сцепленной, если эти множества можно так перенумеровать, возможно с повторениями, что любые соседние множества окажутся линейно сцепленными.*

Аксиома E1. *Объединение любой линейно сцепленной системы линейных множеств является линейным множеством (аксиома линейности).*

При выполнении аксиомы E1 для метрического пространства можно доказать, что для его отрезков справедливы некоторые свойства обычных евклидовых отрезков.

Теорема. *Если для некоторого метрического пространства (X, d) выполняется аксиома линейности, то имеют место следующие утверждения:*

1. *любой его отрезок является линейным множеством,*
2. *если точки C, D принадлежат отрезку $[AB]$, то $[CD] \subset [AB]$,*
3. *объединение двух линейно сцепленных отрезков содержится в некотором отрезке, концами которого являются некоторые из концов исходных отрезков,*
4. *каждая прямая является объединением вложенных друг в друга отрезков.*

Доказательство. 1. Рассмотрим произвольный отрезок $[AB]$ этого метрического пространства. Можно считать, что $A \neq B$, так как одноточечное множество всегда линейно. Рассмотрим три любые точки C, D, E этого отрезка. По определению отрезка, тройки $\{A, C, B\}$, $\{A, D, B\}$ и $\{A, E, B\}$ являются линейно сцепленными линейными множествами, поэтому, в силу аксиомы E2, линейно их объединение $\{A, B, C, D, E\}$ и его подмножество $\{C, D, E\}$. Первый пункт теоремы доказан.

2. Пусть точки C, D принадлежат отрезку $[AB]$ и M – произвольная точка отрезка $[CD]$. Нетрудно понять, что достаточно рассмотреть случай $A = C$ или $D = B$. Рассмотрим для определенности случай $D = B$. В этом случае $|AC| + |CB| = |AB|$ и $|CM| + |MB| = |CB|$, если $M \in [CB]$. Из этих равенств получаем $|AC| + |CM| + |MB| = |AB|$, откуда следует, что $|AM| + |MB| = |AB|$ и поэтому $M \in [AB]$. Второй пункт теоремы доказан.

3. Рассмотрим два линейно сцепленных отрезка $[AB]$ и $[CD]$. Так как они являются линейно сцепленными линейными множествами, то их объединение является линейным множеством. В

частности является линейным и множество $\{A, B, C, D,\}$. Но тогда это множество содержится в некотором отрезке, концами которого являются точки из $\{A, B, C, D,\}$. Без нарушения общности можно считать, что это либо точки A, B либо точки A, D. В первом случае $[CD] \subset [AB]$, во втором случае $[AB] \subset [AD]$ и $[CD] \subset [AD]$.

4. Рассмотрим произвольную прямую AB. Нетрудно заметить, что она состоит из отрезков, содержащих отрезок $[AB]$. В силу пункта 3, каждые два таких отрезка содержатся в некотором отрезке этой прямой. Среди систем вложенных друг в друга отрезков, содержащих отрезок $[AB]$ найдется максимальная система, которую мы фиксируем в дальнейших рассуждениях. Произвольный отрезок этой системы обозначим через $[DE]$. Пусть M – некоторая точка прямой AB. Тогда либо найдется отрезок $[DE]$, для которого $|DE| \geq |DM|$ и $|DE| \geq |EM|$ либо для каждого отрезка $[DE]$ или $|DE| < |DM|$ или $|DE| < |EM|$. В первом случае $M \in [DE] \subset AB$, во втором же случае отрезок $[DE]$ строго содержится или в отрезке $[DM]$ или в отрезке $[EM]$, то есть строго содержится, в силу пункта 3, в некотором отрезке содержащем отрезок $[AB]$, что противоречит максимальности рассматриваемой системы отрезков.

Важным для развертывания соответствующей теории линейности является также следующее условие.

Аксиома E2. *На каждой прямой найдутся такие точки A, B, что для любого равенства*

$$\pm d_1 \pm d_2 = d(A, B), d_1 \geqslant 0, d_2 \geqslant 0,$$

существует точка C, для которой

$$d(A, C) = d_1,\ d(C, B) = d_2 \quad \textit{(аксиома заполнения прямой).}$$

Замечание. В этой аксиоме ничего не сказано о единственности такой точки C. В общем случае, единственность не следует из линейности, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = \{A, B, C, D\}$, $d(A, B) = d(C, D) = 2$, $d(A, C) = d(C, B) = d(B, D) = d(D, A) = 1$. Здесь любые три точки составляют линейное множество, так как одно из расстояний между ними равно 2, а остальные два равны 1. С другой стороны, точки C и D

лежат между точками A и B и, одновременно, $d(A,C) = d(A,D)$, $d(B,C) = d(B,D)$.

В связи с этим, возникает желание выделить условие единственности в качестве самостоятельной аксиоиы, что и было осуществлено в упомянутой выше статье на эту тему. Последующий анализ показал, однако, что в этом нет необходимости.

Теорема. *Если метрическое пространство (X,d) удовлетворяет аксиомам* E1 *и* E2*, то в нем выполняется и условие единственности.*

Доказательство. Пусть точки A и B – те самые точки, о которых идет речь в аксиоме E2. Без нарушения общности можно считать, что $d(A,B) = 1$. Допустим, что для некоторого числа d найдутся несовпадающие точки C и D, для которых $d(A,C) = d(A,D) = 1+d, d(B,C) = d(B,D) = d > 0$. Так как прямая AB является линейным множеством, содержащим точки B,C,D, причем точка B лежит между точками C D, то $d(C,D) = 2d$. С другой стороны и точки A,C,D принадлежат этой прямой, причем точка A дежит между точками C и D, поэтому $d(C,D) = 2+2d$, что противоречит предыдущему равенству $d(C,D) = 2d$.
Случай $d(A,C) = d(A,D) = d > 0, d(B,C) = d(B,D) = 1+d$ рассматривается аналогично. Остается случай $d(A,C) = d(A,D) = 1-d > 0, d(B,C) = d(B,D) = d > 0$. Здесь мы получаем $2-2d = 2d$ и отсутствует противоречие только для $d = \frac{1}{2}$ и $d(C,D) = 1$. Но тогда мы можем рассмотреть однозначно определенную точку E, для которой $d(A,E) = \frac{3}{4}, d(E,B) = \frac{1}{4}$. Точки B,C,E лежат на прямой AB, причем $d(B,C) = \frac{1}{2}, d(B,E) = \frac{1}{4}$, поэтому $d(C,E) = \frac{1}{4}$ и, аналогично, $d(D,E) = \frac{1}{4}$, откуда следует, что $d(C,D) = \frac{1}{2}$. Но это противоречит ранее доказанному $d(C,D) = 1$.

Замечание. Одна аксиома E2 не обеспечивает линейность прямой. Действительно, точки A,B,C,D, приведенного выше примера, можно дополнить до метрического пространства, удовлетворяющего этой аксиоме.

Можно доказать даже более сильное утверждение.

Теорема. *Любое метрическое пространство можно расширить до метрического пространства, удовлетворяющего аксиоме* E2.

Доказательство. Рассмотрим произвольное метрическое пространство (X,d). Каждой паре a,b не совпадающих точек этого пространства сопоставим изометричное числовой прямой множество $L_{a,b}$ так, что расстояние между точками a и b в (X,d) и в $L_{a,b}$ совпадают, а $L_{a,b} \cap L_{a',b'} = \{a,b\} \cap \{a',b'\}$ для любых точек a,b,a',b'. Положим $X' = \bigcup L_{a,b}$, где объединение распространяется на все $a \in X, b \in X, a \neq b$. Определим на X' метрику d' так, что метрическое пространство (X,d) будет подпространством метрического пространства (X',d').

Пусть $x \in L_{a,b}, x' \in L_{a',b'}$. Мы можем рассмотреть четыре суммы $|xa| + d(a,a') + |a'y|$, $|xa| + d(ab') + |b'y|$, $|xb| + d(ba') + |a'y|$, $|xb| + d(b,b') + |b'y|$, наименьшую из эти сумм и будем считать расстоянием $d'(x,y)$. Нетрудно доказать, что d' является метрикой и совпадает с d на X.

В пространстве (X',d') аксиома E2 может и не выполняться, но она выполняется для точек из X. Теперь мы можем повторить такую процедуру расширения уже для пространства (X',d'), получив метрическое пространство (X'',d'') и так далее. Повторив эту процедуру n раз, мы получим метрическое пространство $(X^{(n)},d^{(n)})$. Объединение этих метрических пространств, взятых для всех $n \in \mathbb{N}$, и будет расширением пространства (X,d), удовлетворяющим аксиоме $E2$.

Следствие. *Аксиома E1 не зависит от аксиомы E2.*

Доказательство. Рассмотрим любое метрическое пространство, для которого аксиома E1 не выполняется. В силу предыдущей теоремы его можно расширить до метрического пространство, удовлетворяющего аксиоме E2, получив метрическое пространство не удовлетворяющее аксиоме E1.

Замечание. Так как двухточечное пространство удовлетворяет аксиоме E1, но не удовлетворяет аксиоме E2, то аксиома E2 не зависит от аксиомы E1. Тем самым *аксиомы* E1, E2 *не зависят друг от друга.*

С другой стороны аксиомы E1 и E2 достаточны для построения евклидовой геометрии прямой.

Теорема. *Если для метрического пространства (X,d) выполняются аксиомы* E1 *и* E2*, то любая прямая этого пространства изометрична числовой прямой с обычной метрикой.*

Доказательство. Рассмотрим в X произвольную прямую AB и сопоставим точкам A, B точки $\phi(A) = 0$, $\phi(B) = d(A,B)$ числовой прямой. Для произвольной точки M прямой AB положим

$$\phi(M) = \begin{cases} d(A,M), & \text{если} \quad M \in [A,B] \\ d(A,B) + d(B,M), & \text{если} \quad M \in A[B \\ -d(M,A), & \text{если} \quad M \in A]B. \end{cases}$$

Это определение корректно, так как аксиома E1 обеспечивает представление прямой AB в виде объединения $A]B \cup [AB] \cup A[B$. Из аксиом E1 и E2 следуетет взаимная однозначность отображения ϕ и совпадение ϕ-образа прямой AB с $\mathbb{R}$.

Отображение ϕ является изометрией прямой AB на $\mathbb{R}$. Действительно, пусть M, N – произвольные точки из X. Достаточно рассмотреть следующие шесть случаев:

$$\begin{cases} M \in A]B, & N \in A]B \quad \text{или} \quad N \in [AB] \quad \text{или} \quad N \in A[B \\ M \in [AB], & N \in [AB] \quad \text{или} \quad N \in A[B \\ M \in A[B, & N \in A[B. \end{cases}$$

Все эти случаи рассматриваются одинаково. Например, в первом случае мы имеем $\phi(M) = -d(M,A)$, $\phi(N) = -d(N,A)$. Без нарушения общности можно считать, что $d(M,A) > d(N,A)$, поэтому $d(M,N) = d(M,A) - d(N,A) = \phi(N) - \phi(M)$.

Определение. *Аксиомы* E1 *и* E2 *будем называть аксиомами линейности.*

3. Плоскости в метрических пространствах. Мы рассмотрим теперь понятие плоского множества в произвольном метрическом пространстве (X,d), удовлетворяющем аксиомам линейности.

Определение. *Будем говорить, что точки A_0, A_1, A_2 метрического пространства (X,d) находятся в общем положении, если они не образуют линейное множество. Будем говорить также, что эти точки определяют невырожденный треугольник $[A_0A_1A_2]$. Отрезки $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_0]$ будем называть его сторонами, точки A_0, A_1, A_2 – вершинами.*

Замечание. В дальнейшем под треугольником будем понимать, если не оговорено противное, именно невырожденный треугольник.

Определение. *Будем говорить, что точка M пространства (X,d) принадлежит треугольнику $[A_0A_1A_2]$, если для любой другой точки M' этого пространства имеет место по крайней мере одно из следующих неравенств: $d(M,A_0) < d(M',A_0)$, $d(M,A_1) < d(M',A_1)$, $d(M,A_2) < d(M',A_2)$. Под треугольником будем понимать теперь множество всех принадлежащих ему точек.*

Замечание. В упомянутой выше статье, содержащей первоначальный вариант метрической аксиоматики евклидова пространства, условие принадлежности точки M треугольнику $[A_0A_1A_2]$ записывалось соотношением между площадями соответствующих треугольников, а именно $|A_0A_1A_2| = |MA_1A_2| + |A_0MA_2| + |A_0A_1M|$. Так как площади треугольников в евклидовом пространстве выражаются через длины его сторон, то это также метрическое условие, но весьма частного вида. Евклидовость заложена здесь уже в определении площади треугольника (в принципе под площадью треугольника можно понимать любое выражение через длины его сторон, удовлетворяющее соответствующим условиям). Приведенное выше определение основано на своеобразной оптимальности рассматриваемых расстояний от точки M до вершин треугольника.

Теорема. *Точки сторон треугольника ему принадлежат.*

Доказательство. Пусть точка M принадлежит стороне $[A_0A_1]$ треугольника $[A_0A_1A_2]$ и M' – любая другая точка рассматриваемого пространства. В силу аксиомы треугольника и определения отрезка, имеет место неравенство $d(A_0,M) + d(M,A_1) \leq d(A_0,M') + d(M',A_1)$, при этом равенство будет иметь место только тогда, когда точка $M' \in [A_0A_1]$ и в этом случае либо $d(M,A_0) < d(M',A_0)$ либо $d(M,A_1) < d(M',A_1)$. Если же $d(A_0,M) + d(M,A_1) < d(A_0,M') + d(M',A_1)$, то опять $d(M,A_0) < d(M',A_0)$ или $d(M,A_1) < d(M',A_1)$.

Определение. *Будем говорить, что точка M пространства (X,d) образует с вершинами невырожденного треугольника $[A_0A_1A_2]$ плоское (2-линейное) множество, если существует такой выбор символов "<" или ">" в неравенствах $d(M,A_0) \gtrless d(M',A_0)$, $d(M,A_1) \gtrless d(M',A_1)$, $d(M,A_2) \gtrless d(M',A_2)$, при котором для любой другой точки M' этого пространства имеет место по крайней мере одно из этих неравенств.*

Замечание. В этом определении рассматривается восемь случаев, соответствующих выбору в каждом неравенстве символа $<$ или символа $>$. Выбор символа $<$ в каждом из этих трех неравенств фигурировал в определении точек треугольника, при выборе символа $>$ в каждом из этих неравенств таких точек вобще нет. Заметим еще одно важное обстоятельство, непосредственно следующее из предыдущего определения. *Фиксация символов* $<$ или $>$ и соответствующих *расстояний* $d(M, A_0, d(M, A_1), d(M, A_2)$, определяют точку M *однозначно.*

Определение. *Плоскостью $A_0A_1A_2$, проходящую через точки A_0, A_1, A_2, не лежащие на одной прямой, будем называть множество всех точек, образующих с точками A, B, C плоские множества.*

Замечание. Если указание на точки A_0, A_1, A_2 несущественно, то говорят просто о плоскости.

Определение. *Множество называется плоским в (X, d), если оно не линейно и любые его четыре точки, не лежащие на одной прямой, образуют плоское множество.*

Определение. *Два множества называются плоско сцепленными, если их пересечение содержит три точки, не лежащие на одной прямой.*

Определение. *Конечная система множеств в (X, d) называется плоско сцепленной, если эти множества можно так перенумеровать, возможно с повторениями, что любые соседние множества окажутся плоско сцепленными.*

Как и в линейной ситуации, важную роль играет следующее условие.

Аксиома Е3. *Обьединение любой плоско сцепленной системы плоских множеств является плоским множеством (аксиома 2-линейности).*

Теорема. *Если для метрического пространства (X, d) выполняются аксиомы 1–3, то любая плоскость в (X, d) является максимальным плоским множеством.*

Доказательство. Для любой точки $M \in [A_0A_1A_2]$ множество M, A_0, A_1, A_2 является плоским множеством. Для произвольного множества $\{M_1, M_2, M_3, M_4\} \in [A_0A_1A_2]$ мы можем рассмотреть плоско сцепленную систему плоских множеств $\{A_0, A_1, A_2, M_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Объединение множеств этой системы будет, в силу аксиомы E3, плоским множеством $\{A_0, A_1, A_2, M_1, M_2, M_3, M_4\}$, поэтому будет плоским и множество $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$. Максимальность очевидна.

Пусть $A_0A_1A_2$ – произвольная плоскость метрического пространства (X, d), удовлетворяющего аксиомам 1–3, тогда прямые A_0A_1, A_1A_2, A_2A_0, проходящие через вершины треугольника $[A_0A_1A_2]$, разбивают эту плоскость на семь областей. Каждая из этих областей состоит из всех точек, определяемых неравенствами с одним и тем же выбором символов $<$ или $>$. Одной из таких областей является сам треугольник $[A_0A_1A_2]$, каждая точка M которого определяется справедливостью одного из неравенств $d(M, A_0) < d(M', A_0)$, $d(M, A_1) < d(M', A_1)$, $d(M, A_2) < d(M', A_2)$.

4. Трехмерное линейное пространство.

Определение. *Будем говорить, что точки A_0, A_1, A_2, A_3 метрического пространства (X, d) находятся в общем положении, если они не принадлежат никакой его плоскости. Будем говорить также, что эти точки определяют невырожденный тетраэдр $[A_0A_1A_2A_3]$. Сами эти точки будем называть вершинами, пары вершин определяют ребра, тройки вершин определяют грани тетраэдра.*

Замечание. В дальнейшем под тетраэдром будем понимать, если не оговорено противное, именно невырожденный тетраэдр.

Определение. *Будем говорить, что точка M пространства (X,d) принадлежит тетраэдру $[A_0A_1A_2A_3]$, если для любой другой точки M' этого пространства имеет место по крайней мере одно из следующих неравенств: $d(M, A_0) < d(M', A_0)$, $d(M, A_1) < d(M', A_1)$, $d(M, A_2) < d(M', A_2)$, $d(M, A_3) < d(M', A_3)$. Под тетраэдром будем понимать теперь множество всех принадлежащих ему точек.*

Определение. *Будем говорить, что точка M пространства (X,d) образует с вершинами невырожденного тетраэдра $[A_0A_1A_2A_4]$ 3-линейное множество, если существует такой выбор символов "$<$" или "$>$" в неравенствах $d(M, A_0) \gtrless d(M', A_0)$, $d(M, A_1) \gtrless d(M', A_1)$, $d(M, A_2) \gtrless d(M', A_2)$, $d(M, A_3) \gtrless d(M', A_3)$, при котором* *для любой другой точки M' этого пространства имеет место по крайней мере одно из этих неравенств.*

Замечание. В этом определении рассматривается шестнадцать случаев, соответствующих выбору в каждом неравенстве символа $<$ или символа $>$. Выбор символа $<$ в каждом из этих четырех неравенств фигурировал в определении точек тетраэдра, при выборе символа $>$ в каждом из этих неравенств таких точек вобще нет. Заметим еще одно важное обстоятельство, непосредственно следующее из предыдущего определения. *Фиксация символов* $<$ или $>$ и соответствующих *расстояний* $d(M,A_0), d(M,A_1), d(M,A_2)$, $d(M,A_3)$ определяют точку M *однозначно.*

По аналогии с понятием плоскости можно ввести теперь понятие 3-х мерной гиперплоскости в (X,d) и гиперплоскости любой размерности. Нас интересует здесь аксиоматика обычного евклидова пространства, поэтому мы должны фиксировать линейную размерность метрического пространства (X,d), введя следующие аксиомы:

Аксиома E4. *В (X,d) имеются четыре точки, находящиеся в общем положении.*

Аксиома E5. *Пусть A_0, A_1, A_2, A_3 – произвольные точки в (X,d), находящиеся в общем положении. Тогда любая точка из (X,d) образует с ними 3-х линейное множество.*

Определение. *Метрическое пространство (X,d), удовлетворяющее аксиомам* E1–E5*, будем называть трехмерным линейным пространством.*

Можно предполагать, что имеет место также следующее утверждение:

Аксиома E6. *Пусть*

$$d(A,A') + d(A',O) = d(A,O),\ \ d(B,B') + d(B',O) = d(B,O),$$

причем все входящие сюда расстояния отличны от нуля, и

$$\frac{d(A',O)}{d(A,O)} = \frac{d(B',O)}{d(B,O)}$$

тогда

$$\frac{d(A',O)}{d(A,O)} = \frac{d(B',O)}{d(B,O)} = \frac{d(A',B')}{d(A,B)} \quad \textit{(аксиома подобия).}$$

Эти шесть аксиом являются следствиями системы аксиом Гильберта. Присоединив к ним аксиому конгруентности углов и аксиому конгруентности треугольников, мы получим полную систему метрических аксиом евклидова пространства.

Глава III

Структуры непрерывности

§1. Структуры топологических пространств.

Понятие топологического пространства, с которого началась общая (теоретико-множественная) топология, восходит к Хаусдорфу (F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914). В дальнейшем это понятие неоднократно обобщалось, формулировалось в различных вариантах, породило обширную, разветвленную теорию. Здесь будут приведены повидимому все классические обобщения понятия структуры топологического пространства под общим названием структур непрерывности.

1. Структуры открытых множеств и замкнутых множеств.

Определение. *Структурой открытых множеств определенной на множестве X называют такую произвольно фиксированную систему τ множеств $G \subset X$, что*
1. *Пересечение любого конечного числа множеств, принадлежащих τ, есть множество из τ,*
2. *Всякое объединение множеств, принадлежащих τ, есть множество из τ.*

Множество X, рассматриваемое вместе с некоторой фиксированной на нем структурой τ открытых множеств, то есть пару (X, τ), называют топологическим пространством. Говорят также, что τ определяет соответствующую топологию (является топологической структурой) на X.

Замечание. Пустое множество $\emptyset$ и само множество X принадлежат каждой структуре открытых множеств, определенной на X. Действительно, $\emptyset$ есть объединение пустой совокупности множеств, принадлежащих τ, так как объединение множеств состоит из точек множества X, каждая из которых принадлежит какому-нибудь из объединяемых множеств, а в этой ситуации таких множеств нет. С другой стороны X есть пересечение пустой совокупности множеств, принадлежащих τ, так как пересечение множеств состоит из точек множества X, принадлежащих каждому из пересекающихся множеств. Однако таких множеств в этой ситуации вообще нет и поэтому условие выполняется для всех точек x множества X.

Элементы системы τ называются при этом *открытыми множествами топологического пространства* (X, τ). Такое понимание топологического пространства, как пары (X, τ), состоящей из некоторого множества X и некоторой совокупности τ его подмножеств, рассматриваемых как открытые множества, является в топологии общепринятым.

Замечание. С целью упрощения мы будем часто обозначать топологические пространства через $X, X', Y...$, опуская обозначение определенных на этих множествах топологических структур.

Определение. *Отображение $f : X \longrightarrow X'$ называется непрерывным отображением топологического пространства (X, τ) в топологическое пространство (X', τ'), если $f^{-1}(G') \in \tau$ для каждого $G' \in \tau'$.*

Таким образом можно рассматривать класс топологических пространств и класс их непрерывных отображений, образующие категорию, которую мы будем обозначать через **Top** или просто **T**.

Простейшими примерами топологических структур открытых множеств на произвольно фиксированном множестве X является *тривиальная топологическая структура* и *дискретная топологическая структура*. Тривиальная топологическая структура состоит только из X и $\emptyset$, дискретная топологическая структура состоит из всех подмножеств множества X.

Можно рассматривать в качестве системы множеств, задающих топологию на X, соответствующую систему $C\tau = \{X \setminus G | G \in \tau\}$ дополнений в X до открытых множеств. Эти дополнения называются *замкнутыми* в (X, τ) множествами.

Определение. *Структурой замкнутых множеств определенной на множестве X называют такую произвольно фиксированную систему $C\tau$ множеств $F \subset X$, что*

1. *Объединение любого конечного числа множеств, принадлежащих $C\tau$, есть множество из $C\tau$.*

2. *Всякое пересечение множеств, принадлежащих $C\tau$, есть множество из $C\tau$.*

Замечание. Структуры открытых множеств и структуры замкнутых множеств взаимно определяют друг друга (двойственны друг другу), а именно открытые множества переходят в замкнутые множества и наоборот при переходе от множеств $A \subset X$ к их дополнениям $CA = X \setminus A$. При этом, условия 1,2 для структур открытых множеств переходят в условия 1, 2 для замкнутых множеств и обратно. Так как $\emptyset = CX$ и $X = C\emptyset$, то $\emptyset$ и X принадлежат каждой структуре $C\tau$ замкнутых множеств, определенной на X.

Определение. *Отображение $f : X \longrightarrow X'$ называется непрерывным отображением топологического пространства $(X, C\tau)$ в топологическое пространство $(X', C\tau')$, если $f^{-1}(F') \in C\tau$ для каждого $F' \in C\tau'$.*

Замечание. Если на множестве X задана некоторая метрика d, то *эта метрика позволяет ввести* на X соответствующую ей структуру $\tau(d)$ открытых множеств. Такая структура определяется следующим образом: множество G принадлежит структуре $\tau(d)$, если

$$x \in G \iff \text{в } G \text{ содержится некоторая } \epsilon\text{-окрестность } O_\epsilon = \{y | d(x, y) < \epsilon\} \text{ точки } x.$$

Нетрудно проверить, что $\tau(d)$ является структурой открытых множеств.

2. Топологические структуры окрестностей, далеких множеств, близких множеств. Исходным понятием теории метрических пространств является понятие метрики (расстояния). Вводя на метрическом пространстве структуру открытых множеств мы воспользовались понятием ϵ-окрестности точки. Однако в теории топологических пространств само понятие окрестности точки можно сделать исходным понятием.

Определение. *Структурой окрестностей точек на множестве X называют такую произвольно фиксированную систему $\mathcal{O} = (\mathcal{O}_x | x \in X)$ совокупностей $\mathcal{O}_x$ некоторых множеств $O \subset X$, $x \in O$, что*

1. $O \in \mathcal{O}_x$, $O \subset O' \Longrightarrow O' \in \mathcal{O}_x$,
2. $O_1 \in \mathcal{O}_x$ *и* $O_2 \in \mathcal{O}_x \Longrightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_x$.

Если при этом выполняется и условие

3. *В каждой окрестности $O \in \mathcal{O}_x$ содержится такая окрестность*

$O' \in \mathcal{O}_x$, что $y \in O' \Longrightarrow O' \in \mathcal{O}_y$, то эта структура называется топологической структурой окрестностей точек.

Между топологическими структурами окрестностей и структурами открытых множеств имеется взаимно однозначное соответствие

Определение. *Открытой окрестностью точки x произвольного топологического пространства (X, τ) называют любое множество $G \in \tau$, содержащее эту точку, окрестностью этой точки в (X, τ) называют любое множество, содержащее какую-нибудь ее открытую окрестность.*

Нетрудно проверить, что система $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\tau)$ совокупностей окрестностей точек, так определенных по топологической структуре τ, является топологической структурой окрестностей, то есть удовлетворяет условиям 1–3 окрестностей.

С другой стороны, любая топологическая структура $\mathcal{O}$ систем окрестностей на произвольно фиксированном множестве X естественно определяет на этом множестве топологическую структуру $\tau(\mathcal{O})$ открытых множеств, для которой

$$G \in \tau(\mathcal{O}) \iff G \in \mathcal{O}_x \text{ для каждой точки } x \in G.$$

Теорема. *Соответствия $\tau \longrightarrow \mathcal{O}(\tau)$ и $\mathcal{O} \longrightarrow \tau(\mathcal{O})$ удовлетворяют соотношениям $\tau(\mathcal{O}(\tau)) = \tau$ и $\mathcal{O}(\tau(\mathcal{O})) = \mathcal{O}$.*

Доказательство. Пусть $G \in \tau$, тогда G является окрестностью каждой своей точки, то есть $G \in \mathcal{O}(\tau)_y$ для всех $y \in G$, и поэтому $G \in \tau(\mathcal{O}(\tau))$. С другой стороны, если $G \in \tau(\mathcal{O}(\tau))$, то каждая точка $y \in G$ входит в G с некоторой окрестностью из $\mathcal{O}(\tau)$, которая, по определению τ, должна содержать некоторый элемент системы τ и, следовательно, $G \in \tau$. Тем самым доказано первое соотношение.

Перейдем ко второму соотношению. Пусть $G \in \mathcal{O}(\tau(\mathcal{O}))_x$, тогда в G содержится окрестность G' точки x, принадлежащая $\tau(\mathcal{O})$. В соответствии с определением структуры $\tau(\mathcal{O})$, множество G' является окрестностью каждой своей точки и поэтому G' и тем более G принадлежит $\mathcal{O}_x$.

Пусть $G \in \mathcal{O}_x$. Тогда в G содержится $G' \in \mathcal{O}_x$, являющаяся окрестностью каждой своей точки, поэтому $G' \in \tau(\mathcal{O})$, следовательно G' и тем более G принадлежит $\mathcal{O}(\tau(\mathcal{O}))_x$.

Определение. *Пара $(X, \mathcal{O})$ называется пространством окрестностей. Отображение $f : (X, \mathcal{O}) \longrightarrow (X', \mathcal{O}')$ называют непрерывным отображением, если $f^{-1}(O'_{f(x)}) \in \mathcal{O}_x$ для любой точки $x \in X$ и любой окрестности $O' \in \mathcal{O}'_{f(x)}$.*

Подобно тому как для структур открытых множеств существуют двойственные им структуры замкнутых множеств, структуры окрестностей имеют двойственные им структуры далеких множеств.

Определение. *Структурой далеких от точек множеств на множестве X называют такую произвольно фиксированную систему $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_x | x \in X)$ совокупностей $\mathcal{D}_x$ некоторых множеств $D \subset X$, $x \notin D$, что*

1. $D \in \mathcal{D}_x$, $D' \subset D \Longrightarrow D' \in \mathcal{D}_x$,

2. $D_1 \in \mathcal{D}_x$ и $D_2 \in \mathcal{D}_x \Longrightarrow D_1 \cup D_2 \in \mathcal{D}_x$.

Если при этом выполняется и условие

3. Для каждого $D \in \mathcal{D}_x$ существует такое D', содержащее D, что $D' \in \mathcal{D}_y$ для всех $y \in X \setminus D'$,

то эта структура называется топологической структурой далеких от точек множеств.

Любая топологическая структура $\mathcal{D}$ далеких множеств взаимно однозначно определяет соответствующую топологическую структуру окрестностей $\mathcal{O}$, для которой каждое $\mathcal{O}_x = \{X \setminus D | D \in \mathcal{D}_x\}$ и, наоборот, $\mathcal{D}_x = \{X \setminus O | O \in \mathcal{O}_x\}$. Тем самым любая топологическая структура далеких от точек множеств на произвольно фиксированном множестве X определяет структуру $\tau(\mathcal{D})$ открытых множеств, для которой

$$G \in \tau(\mathcal{D}) \iff X \setminus G \in \mathcal{D}_y \text{ для каждой точки } y \in G\ .$$

С другой стороны любая структура τ открытых множеств определяет соответствующую топологическую структуру $\mathcal{D}$ далеких множеств, для которой $D \in \mathcal{D}_x$ если существует $G \in \tau$, $x \in G$, содержащееся в $X \setminus D$.

Определение. *Множество X, на котором определена некоторая структура $\mathcal{D}$ далеких множеств, то есть пара $(X, \mathcal{D})$, называется пространством далеких множеств. Отображение $f : (X, \mathcal{D}) \longrightarrow (X', \mathcal{D}')$ называется непрерывным, если множество $f^{-1}(D')$ далеко от x для любой точки $x \in X$ и любого далекого от $f(x)$ множества D'.*

Определение. *Структурой близких к точкам множеств на множестве X будем называть такую произвольно фиксированную систему $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_x | x \in X)$ совокупностей $\mathcal{C}_x$ некоторых множеств $C \subset X$, что*
1. $C \in \mathcal{C}_x$, *и* $C \subset C' \Longrightarrow C' \in \mathcal{C}_x$,
2. $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}_x \Longrightarrow$ $C_1 \in \mathcal{C}_x$ *или* $C_2 \in \mathcal{C}_x$.

Если при этом выполняется и условие
3. *Для каждого* $A \notin \mathcal{C}_x$ *существует такое* A', *содержащее* A, *что* $A' \notin \mathcal{C}_y$ *для всех* $y \in X \setminus C'$,
то такая структура называется топологической структурой близких к точкам множеств.

Каждая структура $\mathcal{C}$ близких к точкам множеств определяет в некотором смысле двойственую ей структуру $\mathcal{D}$ далеких от точек множеств, для которой $A \in \mathcal{D}_x \iff A \notin \mathcal{C}_x$, $A \subset X$ и, следовательно, определяет соответствующую ей структуру τ_C открытых множеств. С другой стороны, каждая структура τ открытых множеств определяет соответствующую топологическую структуру $\mathcal{C}$ близких к точкам множеств, для которой $A \in \mathcal{C}_x \iff (x \in G \in \tau \Longrightarrow A \cap G \neq \emptyset)$.

3. Операции замыкания и внутренности. Класс структур открытых множеств (замкнутых множеств), рассмотренный выше, допускает значительное расширение. Это расширение было осуществлено, введением не обязательно топологических структур окрестностей. Его можно осуществить также введением абстрактной операции замыкания.

Определение. *На множестве X определена операция замыкания* cl, *если для каждого $A \subset X$ однозначно определено множество* $\mathrm{cl}A$ *так, что*
1. $\mathrm{cl}\emptyset = \emptyset$,
2. $A \subset \mathrm{cl}A$,
3. $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}A \cup \mathrm{cl}B$.

Если при этом выполняется и условие
4. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{cl}A$,
то такая операция называется топологической операцией замыкания.

Замечание. Из условий 1–3 не следует равенство $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{cl}A$, то есть в общем случае операция замыкания не идемпотентна (не является топологической операцией замыкания), как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = \mathbb{N}$, $\mathrm{cl}A = A \cup \{n+1 | n \in A\}$. Это операция замыкания, так как
1. $\mathrm{cl}\emptyset = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$,
2. $A \subset A \cup \{n+1|n \in A\} = \mathrm{cl}A$,
3. $\mathrm{cl}(A \cup B) = A \cup B \cup \{n+1|n \in (A \cup B)\} = A \cup B \cup \{n+1|n \in A\} \cup \{n+1|n \in B\} = \mathrm{cl}A \cup \mathrm{cl}B$.
Эта операция не идемпотентна, например $\mathrm{cl}\{1\} = \{1,2\}$, $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}\{1\}) = \{1, 2.3\} \neq \mathrm{cl}\{1\}$.

Определение. *На множестве* X *определена операция внутренности* int, *если для каждого* $A \subset X$ *однозначно определено множество* $\mathrm{int}A$ *так, что*
1. $\mathrm{int}X = X$,
2. $\mathrm{int}A \subset A$,
3. $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}A \cap \mathrm{int}B$.

Если при этом выполняется и условие
4. $\mathrm{int}(\mathrm{int}A) = \mathrm{int}A$,
то такая операция называется топологической операцией внутренности.

Замечание. Из условий 1–3 не следует равенство $\mathrm{int}(\mathrm{int}A) = \mathrm{int}A$, то есть в общем случае операция внутренности не идемпотентна (не является топологической операцией внутренности), как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = \mathbb{N}$, $\mathrm{int}A = A \setminus \{n+1|n \notin A\}$. Это операция внутренности,так как
1. $\mathrm{int}X = X \setminus \emptyset = X$,
2. $\mathrm{int}A = A \setminus \{n+1|n \notin A\} \subset A$,
3. $\mathrm{int}(A \cap B) = A \cap B \setminus \{n+1|n \notin A \cap B\} = A \cap B \setminus (\{n+1|n \notin A\} \cup \{n+1|n \notin B\}) = (A \setminus \{n+1|n \notin A) \cap (B \setminus \{n+1|n \notin B) = \mathrm{int}A \cap \mathrm{int}B$. Эта операция не идемпотентна, например $\mathrm{int}\{2,3\} = \{3\}$, $\mathrm{int}(\mathrm{int}\{2,3\}) = \emptyset$.

Между операциями cl и int имеется простая связь, а именно, любой операции замыкания cl соответствует операция int, для которой $\mathrm{int}A = X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus A)$ Эта операция является операцией внутренности. Действительно,
1. $\mathrm{int}X = X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus X) = X \setminus \mathrm{cl}\emptyset = X \setminus \emptyset = X$,

2. $\mathrm{int}A = X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus A) \subset X \setminus (X \setminus A) = A$,
3. $\mathrm{int}(A \cap B) = X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus (A \cap B)) = X \setminus \mathrm{cl}((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) = X \setminus (\mathrm{cl}(X \setminus A) \cup (X \setminus B)) = (X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus A)) \cap (X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus B)) = \mathrm{int}A \cap \mathrm{int}B$.
С другой стороны, любой операции внутренности int соответствует операция cl, для которой $\mathrm{cl}A = X \setminus \mathrm{int}(X \setminus A)$ Эта операция является операцией замыкания. Действительно,
1. $\mathrm{cl}\emptyset = X \setminus \mathrm{int}(X \setminus \emptyset) = X \setminus X = \emptyset$
2. $A = X \setminus (X \setminus A) \subset (X \setminus \mathrm{int}(X \setminus A) = \mathrm{cl}A$,
3. $\mathrm{cl}(A \cup B) = X \setminus \mathrm{int}(X \setminus (A \cup B)) = X \setminus \mathrm{int}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) = X \setminus (\mathrm{int}(X \setminus A) \cap \mathrm{int}(X \setminus B)) = (X \setminus \mathrm{int}(X \setminus A)) \cup \mathrm{int}(X \setminus \mathrm{int}(X \setminus B)) = \mathrm{cl}A \cup \mathrm{cl}B$.

Теорема. *Соответствия* $\mathrm{cl} \longrightarrow \mathrm{int}$ *и* $\mathrm{int} \longrightarrow \mathrm{cl}$, *для которых* $\mathrm{int}A = X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus A)$ *и* $\mathrm{cl}A = X \setminus \mathrm{int}(X \setminus A))$ *взаимно обратны, причем топологические операции замыкания и внутренности взаимно переходят друг в друга.*

Доказательство. Первая часть утверждения следует из равенств

$\mathrm{int}A = X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus A) = X \setminus (X \setminus \mathrm{int}(X \setminus (X \setminus A)) = \mathrm{int}A$ и $\mathrm{cl}A = X \setminus \mathrm{int}(X \setminus A) = X \setminus (X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus (X \setminus A)) = \mathrm{cl}A$.

Вторая часть утверждения сдедует из равенств:
если $\mathrm{int}(\mathrm{int}A) = \mathrm{int}A$, то $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A) = X \setminus \mathrm{int}(X \setminus \mathrm{cl}A) = X \setminus \mathrm{int}(X \setminus (X \setminus \mathrm{int}(X \setminus A)) = X \setminus \mathrm{int}(\mathrm{int}(X \setminus A)) = X \setminus \mathrm{int}(X \setminus A) = \mathrm{cl}A$. Если $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{cl}A$, то $\mathrm{int}(\mathrm{int}A) = X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus \mathrm{int}A) = X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus (X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus A)) = X \setminus \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X \setminus A)) = X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus A) = \mathrm{int}A$.

Замечание. Определенные выше операции cl и int на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, $\mathrm{cl}A = A \cup \{n+1 | n \in A\}$, $\mathrm{int}A = A \setminus \{n+1 | n \notin A\}$, соответствуют друг другу. Действительно, в этом случае $\mathrm{int}A = \mathbb{N} \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{N} \setminus A) = \mathbb{N} \setminus ((\mathbb{N} \setminus A) \cup \{n+1 | n \in (\mathbb{N} \setminus A))\} = A \cap (\mathbb{N} \setminus \{n+1 | n \in (\mathbb{N} \setminus A\} = A \setminus (A \cap \{n+1 | n \in (\mathbb{N} \setminus A))\} = A \setminus \{n+1 | n \notin A\} = \mathrm{int}A$.

Определение. *Если на некотором множестве* X *определена какая-нибудь операция замыкания* cl *(операция внутренности* int*), то пару* (X, cl) *(пару* (X, int)*), будем называть пространством замыкания (пространством внутренности).*

Определение. *Отображение* $f : (X, \mathrm{cl}) \longrightarrow (X', \mathrm{cl}')$ *называется непрерывным, если* $f(\mathrm{cl}A) \subset \mathrm{cl}(f(A))$ *для любого множества* $A \subset X$. *Отображение* $f : (X, \mathrm{int}) \longrightarrow (X', \mathrm{int}')$ *называется непрерывным, если* $f^{-1}(\mathrm{int}A') \subset \mathrm{int}(f^{-1}(A))$ *для любого множества* $A' \subset X'$.

Определение. *Множество A пространства замыканий (X, cl) называется замкнутым множеством, если $\mathrm{cl}A = A$. Множество A пространства внутренностей (X, int) называется открытым множеством, если $\mathrm{int}A = A$.*

Пример. Пусть X–произвольное множество и $\varphi : X \longrightarrow X$. Положим $\mathrm{cl}_\varphi A = A \cup \varphi(A)$ или, соответственно, $\mathrm{int}_\varphi A = A \setminus \varphi(X \setminus A)$. Условия 1–3 выполняются, так как
1. $\mathrm{cl}_\varphi \emptyset = \emptyset \cup \varphi(\emptyset) = \emptyset$,
2. $A \subset A \cup \varphi(A) = \mathrm{cl}_\varphi A$,
3. $\mathrm{cl}_\varphi(A \cup B) = A \cup B \cup \varphi(A \cup B) = A \cup B \cup \varphi(A) \cup \varphi(B) = A \cup \varphi(A) \cup B \cup \varphi(B) = \mathrm{cl}_\varphi A \cup \mathrm{cl}_\varphi(B)$.
1. $\mathrm{int}_\varphi X = X \setminus \varphi(X \setminus X) = X$,
2. $\mathrm{int}_\varphi A = A \setminus \varphi(X \setminus A) \subset A$,
3. $\mathrm{int}(A \cap B) = A \cap B \setminus \varphi(X \setminus A \cap B) = A \cap B \setminus \varphi((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) = A \cap B \setminus (\varphi(X \setminus A) \cup \varphi(X \setminus B)) = (A \setminus \varphi(X \setminus A)) \cap (B \setminus \varphi(X \setminus B)) = \mathrm{int}_\varphi A \cap \mathrm{int}_\varphi B$.
поэтому это операция замыкания или, соответственно, операция внутренности. Замкнутыми здесь будут все множества A, для которых $\varphi(A) \subset A$, открытыми – все множества A, для которых $\varphi(X \setminus A) \cap A = \emptyset$. Если, например, $X = \mathbb{N}$ и $\varphi(n) = n + 1$, то замкнутыми множествами будут множества $F_k = \{n | k \leqslant n\}$, открытыми – множества $G_k = \{n | n \leqslant k\}$, в то время как cl_φ–довольно нетривиальная операция.

Замечание. Любая операция замыкания cl, заданная на некотором множестве X, определяет на X соответствующую структуру окрестностей $\mathcal{O}(\mathrm{cl})$, в которой $\mathcal{O}(\mathrm{cl})_x = \{O | x \notin \mathrm{cl}(X \setminus O)\}$. С другой стороны, любая структура окрестностей $\mathcal{O}$ на X определяет операцию замыкания $\mathrm{cl}(\mathcal{O})$, для которой $\mathrm{cl}(\mathcal{O})A = \{x | X \setminus A \notin \mathcal{O}_x\}$.

Теорема (связи между окрестностями и замыканиями)**.** *Соответствия $\mathcal{O} \longrightarrow \mathrm{cl}(\mathcal{O})$ и $\mathrm{cl} \longrightarrow \mathcal{O}(\mathrm{cl})$ взаимно обратны, причем топологические структуры окрестностей взаимно соответствуют топологическим операциям замыкания.*

Доказательство. Взаимная однозначность указанных в теореме соответствий будет следовать, очевидно, из соотношений $\mathcal{O}(\mathrm{cl}(\mathcal{O})) = \mathcal{O}$ и $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(\mathrm{cl})) = \mathrm{cl}$. Докажем эти соотношения.

$\mathcal{O}(\mathrm{cl}(\mathcal{O}))_x = \{O | x \notin \mathrm{cl}(\mathcal{O})(X \setminus O)\} = \{O | x \notin \{y | X \setminus (X \setminus O) \notin \mathcal{O}_y\} = \{O | x \notin \{y | O \notin \mathcal{O}_y\} = \{O | O \in \mathcal{O}_x\} = \mathcal{O}_x$.

$\mathrm{cl}(\mathcal{O}(\mathrm{cl}))A = \{x | X \setminus A \notin \mathcal{O}(\mathrm{cl})_x\} = \{x | X \setminus A \notin \{V | x \notin \mathrm{cl}(X \setminus V\}\} = \{x | x \in \mathrm{cl}(X \setminus (X \setminus A))\} = \{x | x \in \mathrm{cl}A\} = \mathrm{cl}A$.

Докажем, что установленное нами взаимное соответствие переводит топологические структуры окрестностей в топологические операции замыкания и обратно. Напомним, что структура $\mathcal{O}$ окрестностей называется топологической, если для любой окрестности O точки x найдется ее окрестность $O' \subset O$, являющаяся окрестностью каждой своей точки, а операция cl замыкания называется топологической, если $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{cl}A$ для любого множества $A \subset X$. Итак, пусть $\mathcal{O}$ является топологической структурой окрестностей. Заметим, прежде всего, что $\mathrm{cl}(X \setminus O') = X \setminus O'$ для любого множества O', являющегося окрестностью каждой своей точки. Действительно, в этом случае $y \notin \mathrm{cl}(X \setminus O')$ для любой точки $y \in O'$, то есть $O' \cap \mathrm{cl}(X \setminus O') = \emptyset$. Отсюда следует соотношение $\mathrm{cl}(X \setminus O') \subset X \setminus O'$ и, по второму свойству операции замыкания, $\mathrm{cl}(X \setminus O') = X \setminus O'$. Рассмотрим, теперь, произвольное множество $A \subset X$ и точку $x \notin \mathrm{cl}A$, тогда множество $O = X \setminus A$ будет окрестностью точки x и найдется ее окрестность $O' \subset O$, являющаяся окрестностью каждой своей точки. Тогда, в силу доказанного выше, $x \notin \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X \setminus O'))$ и, тем более, $x \notin \mathrm{cl}(\mathrm{cl}A))$. Так как x – произвольная точка, не принадлежащая $\mathrm{cl}A$, то мы получаем включение $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A) \subset \mathrm{cl}A$, из которого, в силу свойства 2, следует равенство $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A)) = \mathrm{cl}A$.

Докажем, теперь, что рассматриваемое соответствие переводит топологические операции замыкания в топологические структуры окрестностей. Пусть $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{cl}A$ для любого $A \subset X$. Рассмотрим произвольное множество $O \in \mathcal{O}_x$ и множество $A = X \setminus O$. Тогда $x \notin \mathrm{cl}A$. Положим $O' = X \setminus \mathrm{cl}A$. Имеем, очевидно, $O' \subset O$. С другой стороны, так как $X \setminus O' = \mathrm{cl}A$, то $\mathrm{cl}(X \setminus O') = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{cl}A = X \setminus O'$. Заметим, теперь, что если $y \in O'$, то $y \notin X \setminus O' = \mathrm{cl}(X \setminus O')$ и потому $O' \in \mathcal{O}_y$. Тем самым доказано, что O' является окрестностью любой своей точки.

4. Структуры сходимости направленных систем. Чтобы сформулировать понятие структуры сходимости направленных систем необходимо, прежде всего, познакомиться с понятием направленного упорядоченного множества.

Определение. *Множество Λ называется упорядоченным множеством, если на нем фиксировано некоторое отношение порядка, то есть для некоторых, не обязательно всех, пар точек λ_1, λ_2 этого множества мы имеем либо $\lambda_1 \leq \lambda_2$ либо $\lambda_1 \geq \lambda_2$, причем выполняются следующие условия:*

1. $\lambda \le \lambda$ *для каждого* $\lambda \in \Lambda$,
2. $\lambda_1 \le \lambda_2$ *и* $\lambda_2 \le \lambda_3 \Longrightarrow \lambda_1 \le \lambda_3$.

Определение. *Упорядоченное множество* Λ *называется направленным по возрастанию (убыванию) упорядоченным множеством, если для любых его элементов* λ_1, λ_2 *найдется элемент* λ *такой, что* $\lambda_1 \le \lambda$ *и* $\lambda_2 \le \lambda$ *(*$\lambda_1 \ge \lambda$ *и* $\lambda_2 \ge \lambda$*).*

Замечание. Очевидно, что можно ограничиться множествами направленными по возрастанию, к ним всегда можно перейти обращением порядка. В дальнейшем мы ограничимся направленностью по возрастанию, если не будет оговорено противное.

Определение. *Упорядоченное множество* Λ', *содержащееся в упорядоченном множестве* Λ, *называют его конфинальной частью, если для любого* $\lambda \in \Lambda$ *найдется* $\lambda' \in \Lambda'$ *такое, что* $\lambda \le \lambda'$.

Замечание. Рассматривая конфинальные части Λ' направленного множества Λ мы будем считать, что порядок на множествах Λ' индуцирован порядком на множестве Λ. Конфинальными частями являются, например, так называемые *конуса* $\Lambda(\mu) = \{\lambda | \lambda \in \Lambda, \mu \le \lambda\}$.

Определение. *Для любого множества* X *можно рассматривать направленные системы* $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ *точек (направленности), где все* $x_\lambda \in X$, Λ *– некоторое направленное упорядоченное множество, называемое множеством индексов этой направленности.*

Замечание. Тривиальными направленностями являются так называемые стационарные системы. Система $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ называется *стационарной*, если найдется такое $\lambda_0 \in \Lambda$ и такая точка $x \in X$, что $x_\lambda = x$ для всех $\lambda \ge \lambda_0$.

Определение. *Говорят, что направленность* $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda')$ *является конфинальной частью системы* $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda)$, *если* Λ' *– конфинальная часть упорядоченного множества* Λ. *Можно рассматривать конуса направленных систем точек* $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda(\mu))$.

В дальнейшем нам понадобится более широкое и более удобное понятие, а именно понятие конфинальности по носителям.

Определение. *Пусть* $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ *– некоторая направленность в* X. *Фиксируем какой-нибудь элемент* $\mu \in \Lambda$. *Тогда множество* $\{x_\lambda|\lambda \in \Lambda(\mu)\}$ *будем называть носителем этой направленности. Если рассматривается не одна направленность в* X, *а некоторое множество направленностей, то носителем этого множества будем называть объединение произвольно фиксированных носителей его направленностей.*

Определение. *Говорят, что направленность* $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda')$ *является конфинальной по носителям для некоторого множества* S *направленностей* $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ *(здесь* Λ *могут быть различными для разных направленностей), если в каждом носителе этого множества содержится какой-нибудь носитель направленности* $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda')$.

Замечание. Если множество S направленностей состоит только из одной направленности $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ и направленность $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda')$ является ее конфинальной частью, то она является конфинальной по носителям этой направленности. Обратное утверждение неверно хотя бы потому, что направленность s' конфинальная по носителям для направленности s не обязана быть частью этой направленности.

Определение. *Пусть* X*–некоторое множество. Сходимостью (направленностей) на* X *к точке* $x \in X$ *называется произвольно фиксированный класс* $\mathcal{S}_x$ *направленностей* $s = (x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$, *удовлетворяющий следующим условиям:*

1. *Если направленность* $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ *стационарна и* $x_\lambda = x$ *для всех* $\lambda \geq \lambda_0$ *и некоторого* $\lambda_0 \in \Lambda$, *то она принадлежит* $\mathcal{S}_x$.
2. *Если направленность* $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda')$ *конфинальна по носителям для некоторого множества направленностей из класса* $\mathcal{S}_x$, *то она сама принадлежит этому классу.*

Определение. *Базой сходимости* $\mathcal{S}_x$ *направленностей в* X *к точке* x *будем называть любое множество* $S \subset \mathcal{S}_x$, *обладающее следующим свойством: если направленность* $s \in \mathcal{S}_x$ *то для каждого носителя системы* S *найдется, содержащийся в нем носитель направленности* s.

Теорема. *Каждая сходимость к точке имеет базу.*

Доказательство. Предположим, что некоторая сходимость $\mathcal{S}_x$ к точке x не имеет базу. Рассмотрим произвольное множество

$S \subset \mathcal{S}_x$. Так как S не является базой $\mathcal{S}_x$, то найдется $s \in \mathcal{S}_x$ и некоторый носитель системы S, в котором не содержится ни один носитель направленности s. Присоединим s к S. Полученное множество направленностей не является базой и мы опять присоединим к нему некоторую направленность из $\mathcal{S}_x$, выбранную по тому же принципу, и так далее. Мы получим трансфинитную последовательность множеств направленностей. Для каждого из этих множеств рассмотрим множество всех его носителей. Так как каждый носитель является подмножеством множества X, то мощность множества всевозможных множеств носителей ограничена некоторым кардинальным числом, в то время как процедура присоединения направленностей имеет неограниченную мощность. Таким образом, множества носителей должны повторяться в процессе присоединения направленностей, то есть найдутся в этом процессе множества S' и S'' с одинаковыми множествами носителей. Без нарушения общности можно считать, что $S' \subset S''$. Пусть $s \in S'' \setminus S'$, причем s – первая, присоединяемая к S', направленность. Так как $s \in S''$, то в каждом носителе множества S'' содержится какой-нибудь носитель направленности s, то есть в каждом носителе множества S' содержится носитель направленности s. Но это невозможно, так как в этом случае направленность s не может присоединяться к S'. Полученное противоречие доказывает теорему.

Определение. *Пусть X–некоторое множество. Структурой сходимости (сходимостью) на X называется множество $\mathcal{S}$, состоящее из независимо выбранных классов сходимости $\mathcal{S}_x$ для всех точек $x \in X$.*

Замечание. Если $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \in \mathcal{S}_x$, то говорят, что эта *система сходится к точке x* или, другими словами, *имеется сходимость* $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow x$.

Определение. *Если на некотором множестве X определена некоторая структура сходимости $\mathcal{S}$, то пару $(X, \mathcal{S})$ будем называть пространством сходимости (направленных систем).*

Рассмотрим некоторую операцию замыкания cl на произвольно фиксированном множестве X. Эта операция позволяет определить на X соответствующую сходимость $\mathcal{S}(\mathrm{cl})$.

Определение. *Пусть* $x \in X$, $\mathcal{A}_x = \{A | x \notin \mathrm{cl}A\}$. *Будем считать, что направленность* s *принадлежит* $\mathcal{S}(\mathrm{cl})_x$ *тогда и только тогда, когда для любого* $A \in \mathcal{A}_x$ *найдется носитель этой направленности, не имеющий общих точек с* A.

Теорема. *Класс* $\mathcal{S}(\mathrm{cl})_x$ *является для любого* $x \in X$ *классом сходимости к точке* x.

Доказательство. Пусть S – некоторое множество направленностей из $\mathcal{S}(\mathrm{cl})_x$ и направленность s конфинальна по носителям к S. Рассмотрим произвольное множество $A \in \mathcal{A}_x$. По определению класса $\mathcal{S}(\mathrm{cl})_x$, для каждой направленности из S найдется носитель, не имеющий общих точек с A, поэтому и для S найдется носитель B, не имеющий общих точек с A. В силу того, что s конфинальна по носителям к S, найдется ее носитель, содержащийся в B и, следовательно, не имеющий общих точек с A. Тем самым доказано, что $s \in \mathcal{S}(\mathrm{cl})_x$.

Рассмотрим, теперь, произвольную сходимость $\mathcal{S}$ в X. Эта сходимость позволяет определить соответствующую операцию замыкания $\mathrm{cl}(\mathcal{S})$ на X.

Определение. *Будем считать, что* $x \in \mathrm{cl}(\mathcal{S})A$ *тогда и только тогда, когда существует направленность* $s \in \mathcal{S}_x$, *некоторый носитель которой содержится в* A.

Теорема. *Операция* $\mathrm{cl} = \mathrm{cl}(\mathcal{S})$ *является операцией замыкания.*

Доказательство. Условие 1 выполняется, так как пустое множество не содержит направленностей, условие 2 выполняется, так как каждый класс $\mathcal{S}_x$ содержит все стационарные направленности. Докажем выполнение условия 3. Пусть $x \in \mathrm{cl}(A \cup B)$, то есть в $A \cup B$ есть направленность s, сходящаяся к точке x. Тогда или в A или в B содержится ее конфинальная часть и поэтому или $x \in \mathrm{cl}A$ или $x \in \mathrm{cl}B$, то есть $x \in \mathrm{cl}A \cup \mathrm{cl}B$. С другой стороны, если $x \in \mathrm{cl}A \cup \mathrm{cl}B$, то $x \in \mathrm{cl}A$ или $x \in \mathrm{cl}B$ и поэтому или в A или в B найдется направленность, сходящаяся к x. Но в обоих случаях эта направленность содержится и в $A \cup B$ и поэтому $x \in \mathrm{cl}(A \cup B)$.

Теорема. *Для любой операции замыкания* cl *и любой сходимости* S *имеют место соотношения* $\mathrm{cl}(\mathcal{S}(\mathrm{cl})) = \mathrm{cl}$ *и* $\mathcal{S}(\mathrm{cl}(\mathcal{S})) = \mathcal{S}$.

Доказательство. Пусть cl – некоторая операция замыкания, определенная на множестве X и $\mathcal{S}(\mathrm{cl})$ – соответствующая этой операции сходимость. Эта сходимость определяет на X операцию замыкания cl'. Докажем, что операции замыкания cl и cl' совпадают.

Пусть $x \in \mathrm{cl}B$, тогда $B \setminus A \neq \emptyset$ для любого $A \in \mathcal{A}_x$. Заметим, теперь, что $\mathcal{A}_x$ является направленным, упорядоченным по включению, множеством, поэтому можно образовать направленность $s = (x_A | A \in \mathcal{A}_x)$, произвольно выбрав точки $x_A \in B \setminus A$ для каждого $A \in \mathcal{A}_x$. Направленность s принадлежит $\mathcal{S}(\mathrm{cl})_x$, так как для любого $A_0 \in \mathcal{A}_x$ ее носитель $\{x_A | A \in \mathcal{A}_x, A \subset A_0\}$ не имеет с A_0 общих точек. Так как направленность s содержится в множестве B, то $x \in \mathrm{cl}'B$.

Пусть, теперь, $x \in \mathrm{cl}'B$, то есть в B имеется направленность $s \in \mathcal{S}(\mathrm{cl})_x$. Тогда $x \in \mathrm{cl}B$, так как в противном случае эта направленность имела бы носитель, не пересекающийся с $\mathrm{cl}B$. Тем самым доказана справедливость первого соотношения теоремы. Перейдем к второму соотношению.

Пусть $\mathcal{S}$ – некоторая сходимость на множестве X и $\mathrm{cl}(\mathcal{S})$ – соответствующая этой сходимости операция замыкания. Эта операция замыкания определяет на X сходимость $\mathcal{S}'$. Докажем, что сходимости $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ совпадают.

Пусть $s \in \mathcal{S}_x$, $\mathrm{cl} = \mathrm{cl}(\mathcal{S})$, $\mathcal{A}_x = \{A | x \notin \mathrm{cl}A\}$. Тогда для каждого $A \in \mathcal{A}_X$ некоторый носитель направленности s не имеет общих точек с A и поэтому $s \in \mathcal{S}'_x$.

Пусть, теперь, $s \in \mathcal{S}'_x$, то есть для каждого $A \in \mathcal{A}_x$ найдется носитель направленности s, не имеющий с A общих точек. Пусть S – некоторая база класса $\mathcal{S}_x$ и B – ее произвольный носитель. Тогда множество $A = X \setminus B \in \mathcal{A}_x$, поэтому найдется носитель направленности s, не имеющий с A общих точек, то есть содержащийся в B. Таким образом, в каждом носителе системы $S \subset \mathcal{S}_x$ содержится некоторый носитель направленности s, откуда следует, что $s \in \mathcal{S}_x$.

Определение. *Пусть* $(X, \mathcal{S})$ *и* $(X', \mathcal{S}')$ *– некоторые пространства сходимости. Отображение* $f : X \longrightarrow X'$ *будем называть непрерывным отображением* $(X, \mathcal{S})$ *в* $(X', \mathcal{S}')$*, если из сходимости* $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow x$ *в* $(X, \mathcal{S})$ *следует сходимость* $(f(x_\lambda) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow f(x)$ *в* $(X', \mathcal{S}')$.

Нетрудно убедиться в том, что *пространства сходимости и их непрерывные отображения образуют категорию*, которую мы обозначим через **Conv**.

Мы рассмотрели связь между сходимостями и операциями замыкания. Дополняя ее уже установленной выше связью между операциями замыкания и структурами окрестностей, мы получаем связь между сходимостями и структурами окрестностей. Эту связь можно установить непосредственно следующим образом.

Пусть $\mathcal{S}$ – некоторая структура сходимости на множестве X. $\mathcal{S}$-окрестностью точки $x \in X$ будем называть любое множество $O \subset X$, обладающее следующим свойством:
направленность $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ принадлежит $\mathcal{S}_x$ тогда и только тогда, когда некоторый ее носитель содержится в O. Все такие окрестности точки x составляют $\mathcal{O}(\mathcal{S})_x$, множество $\{\mathcal{O}(\mathcal{S})_x|x \in X\}$ обозначается через $\mathcal{O}(\mathcal{S})$.
С другой стороны, если $\mathcal{O}$ является некоторой структурой окрестностей, то сходимость $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ определяется следующим образом:
направленность $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ принадлежит $\mathcal{S}(\mathcal{O})_x$ тогда и только тогда, когда для каждого $O \in \mathcal{O}_x$ найдется носитель этой направленности, содержащийся в O.

Мы имеем, таким образом, взаимно однозначные соответствия между структурами окрестностей, операциями замыкания и сходимостями. При этом топологическим структурам окрестностей взаимно соответствовали топологические операции замыкания – соответствующие им сходимости будем называть *топологическими сходимостями*. Выделение класса топологических сходимостей требует некоторого дополнительного условия, к формулировке которого мы сейчас и перейдем.

Определение. *Рассмотрим упорядоченное множество* Ξ *и упорядоченные множества* Λ_ξ, *определенные для каждого* $\xi \in \Xi$. *Композицией этих упорядоченных множеств будем называть множество* $M = \{(\xi, h)|\xi \in \Xi, h : \Xi \longrightarrow \Lambda, h(\xi) \in \Lambda_\xi\}$, $\Lambda = \bigcup \Lambda_\xi|\xi \in \Xi$, *на котором определено следующее отношение порядка:*

$$(\xi, h) \leq (\xi', h') \iff \xi \leq \xi' \quad \text{и} \quad h \leq h',$$

где $h \leq h' \iff h(\xi) \leq h'(\xi)$ *для всех* $\xi \in \Xi$.

Нетрудно понять, что если все исходные множества являются направленными упорядоченными множествами, то и их композиция является направленным упорядоченным множеством. Мы можем теперь рассматривать *композиции направленных систем* *точек* в произвольно фиксированном множестве X и сформулировать *аксиому композиции направленных систем точек.*

Определение. *Пусть* $(x_\xi|\xi \in \Xi)$ *и* $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda_\xi)$, *– направленности в* X, *тогда их композицией будем называть направленность* $(x_\mu|\mu \in M)$, *где* $x_\mu = x_{h(\xi)}$.

Аксиома композиции. *Пусть* $(x_\xi|\xi \in \Xi) \longrightarrow x$ *и* $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda_\xi) \longrightarrow x_\xi$ *для всех* $\xi \in \Xi$ *тогда* $(x_\mu|\mu \in M) \longrightarrow x$.

Теорема. *Сходимость* $\mathcal{S}(\mathcal{O})$, *соответствующая некоторой структуре окрестностей* $\mathcal{O}$, *удовлетворяет аксиоме композиции тогда и только тогда, когда* $\mathcal{O}$ *– топологическая структура окрестностей.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{O}$ – топологическая структура окрестностей и $O \in \mathcal{O}_x$. Пусть, далее, $(x_\mu|\mu \in M)$ – композиция сходящейся к точке x направленности $(x_\xi|\xi \in \Xi)$ и всех сходящихся к точкам x_ξ направленностей $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda_\xi)$, $\xi \in \Xi$. Так как $\mathcal{O}$ является топологической структурой окрестностей, то найдется $O' \in \mathcal{O}$, являющаяся окрестностью каждой своей точки. Тогда найдется такое $\xi_0 \in \Xi$, что $x_\xi \in O'$ для всех $\xi \geq \xi_0$ и поэтому для этих ξ найдутся такие $\lambda(\xi) \in \Lambda_\xi$, что $x_\lambda \in O'$ для $\lambda \geq \lambda(\xi)$, $\lambda \in \Lambda_\xi$. Фиксируем некоторую функцию h_0, для которой $h_0(\xi) = \lambda(\xi)$, если $\xi \geq \xi_0$ и произвольно для остальных ξ. Положим, теперь, $\mu_0 = (\xi_0, h_0)$. Если $\mu = (\xi, h) \geq \mu_0$, то есть, $\xi \geq \xi_0$ и $h(\xi) \geq h(\xi_0)$ для всех $\xi \geq \xi_0$, то $x_\mu = x_{h(\xi)} \in O' \subset O$. Тем самым доказано, что $(x_\mu|\mu \in M) \longrightarrow x$, то есть доказано, что $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ удовлетворяет аксиоме композиции.

Пусть, теперь, $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ удовлетворяет аксиоме композиции и операция cl соответствует структуре $\mathcal{O}$ окрестностей. Пусть $A \subset X$, докажем, что $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{cl}A$. Для этого достаточно доказать, что $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A) \subset \mathrm{cl}A$. Пусть $x \in \mathrm{cl}(\mathrm{cl}A)$, то есть некоторая направленность $(x_\xi|\xi \in \Xi)$, содержащаяся в $\mathrm{cl}A$, сходится к некоторой точке $x \in \mathrm{cl}(\mathrm{cl}A)$. Но к каждой точке x_ξ, принадлежащей множеству $\mathrm{cl}A$ сходится, в свою очередь, некоторая направленность $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda_\xi)$, содержащаяся в A. Но тогда композиция $(x_\mu|\mu \in M)$ этих направленностей будет содержаться в A и сходиться к x, то есть $x \in \mathrm{cl}A$. Тем самым доказано, что $\mathcal{O}$ является топологической структурой окрестностей.

Определение. *Если структура сходимости* $\mathcal{S}$ *удовлетворяет аксиоме композиции, то она называется топологической структурой сходимости.*

5. Базовые структуры сходимости направленностей. Представляют особый интерес некоторые структуры сходимости направленностей, которые мы будем называть *базовыми*.

Определение. *Пусть X – произвольно фиксированное множество, x_0 – некоторая его точка. Образуем следующие базы сходимости к точкам множества X. В базу точки x_0 включим произвольно фиксированную направленность $s_0 = (x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ и направленность $(y_\lambda|\lambda \in \Lambda)$, где $y_\lambda = x_0$ для всех λ. В базы сходимости к остальным точкам $x \in X$ включим только стационарные направленности $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda), x_\lambda = x$ для всех $\lambda \in \Lambda)$. Можно считать при этом, что во всех этих направленностях фигурирует одно и то же направленное множество Λ. Базовой структурой сходимости будем называть структуру $\mathcal{S}$, определенную этими базами.*

Теорема. *Любая базовая структура является топологической структурой сходимости.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для каждого класа $\mathcal{S}_x$ сходимости к точке $x \in X$ выполняются условия 1 и 2, а для этой структуры в целом выполняется аксиома композиции.
Условие 1 выполняется, так как каждая стационарная направленность конфинальна по носителям соответствующей базовой стационарной направленности.
Условие 2 выполняется для точек $x \in X$ отличных от x_0, так как если направленность конфинальна по носителям стационарной направленности, то она сама является стационарной направленностью. Рассмотрим, теперь, структуру $\mathcal{S}_{x_0}$ сходимости к точке x_0. Она, по определению, состоит из направленностей конфинальных множеству $S_0 = \{s_0, (x_0)\}$, где (x_0) обозначает базовую стационарную направленность, сходящуюся к x_0. Если направленность s конфинальна некоторому множеству S направленностей из $\mathcal{S}_{x_0}$, то она будет конфинальна и множеству S_{x_0} и, следовательно, будет принадлежать $\mathcal{S}_{x_0}$. Тем самым доказано выполнение условия 2.

Перейдем к доказательству выполнения аксиомы композиции. В ней рассматриваются сходимости $s = (x_\xi|\xi \in \Xi) \longrightarrow x$, $s_\xi = (x_\lambda|\lambda \in \Lambda_\xi) \longrightarrow x_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$ и направленность $(x_\mu|\mu \in M)$. Если $x \neq x_0$, то в первой сходимости можно считать, что $x_\lambda = x$ для всех λ и поэтому рассматриваемые для всех ξ направленности s_ξ принадлежат $\mathcal{S}_x$, то есть будут стационарны. Но тогда и направленность $(x_\mu|\mu \in M)$ будет стационарна и, следовательно, будет также принадлежать $\mathcal{S}_x$. Рассмотрим теперь случай $x = x_0$. В этом случае направленность $s \in \mathcal{S}_{x_0}$ не обязательно стационарна, то есть точки x_ξ могут не совпадать с x_0, но если $x_\xi \neq x_0$ то s_ξ стационарная направленность. Таким образом, в каждом носителе множества составленного из некоторых направленностей принадлежащих $\mathcal{S}_{x_0}$ содержится некоторый носитель направленности $(x_\mu|\mu \in M)$, поэтому эта направленность также принадлежит $\mathcal{S}_{x_0}$ $(x_\mu|\mu \in M) \longrightarrow x_0$.

Замечание. Построенная здесь топологическая структура сходимости определяется сходимостью $s_0 = (x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow x_0$. Соответствующее этой структуре *базовое топологическое пространство* $(X, \tau(s_0))$ также определяется этой сходимостью. В этом топологическом пространстве сходятся только стационарные направленности и направленности конфинальные по носителям к множеству $S_0 = \{s_0, (x_0)\}$, где (x_0) обозначает базовую стационарную направленность, сходящуюся к x_0.

Базовые топологические пространства можно использовать для построения топологических пространств с теми или иными свойствами.

6. Структуры сходимости фильтров (кофильтров). В теории сходимости наряду с направленными системами точек (направленностями) рассматриваются также двойственные друг другу фильтры и кофильтры.

Определение. *Фильтром в множестве X называют любую непустую систему ω подмножеств этого множества, удовлетворяющую следующим условиям:*
1. $\emptyset \notin \omega$,
2. *Если $G \in \omega$ и $G \subset G'$ то $G' \in \omega$.*
3. *Если $G \in \omega$ и $G' \in \omega$ то $G \cap G' \in \omega$.*

Кофильтром в множестве X называют любую непустую систему γ, подмножеств этого множества, удовлетворяющую следующим условиям:
1. $\emptyset \notin \gamma$,
2. *Если $F \in \gamma$ и $F \subset F'$, то $F' \in \gamma$,*
3. *Если $F_1 \cup F_2 \in \gamma$, то $F_1 \in \gamma$ или $F_2 \in \gamma$.*

Замечание. *Понятия фильтра и кофильтра двойственны друг дру-*

гу. Действительно, очевидные выкладки показывают:
если ω – фильтр в X, то $\gamma(\omega) = \{X \setminus G | G \notin \omega\}$ – кофильтр в X,
если γ – кофильтр в X, то $\omega(\gamma) = \{X \setminus F | F \notin \gamma\}$ – фильтр в X,
$\omega(\gamma(\omega)) = \omega,\ \gamma(\omega(\gamma)) = \gamma$.

Нетрудно заметить, что система $\mathcal{O}_x$ всех окрестностей точки x является фильтром. Операция замыкания определяет кофильтры $\gamma(x) = \{F | x \in \mathrm{cl}F\}$, а операция внутренности определяет фильтры $\omega(x) = \{G | x \in \mathrm{int}G\}$. С другой стороны, любая система $\Omega(X) = \{\omega(x) | x \in X\}$ фильтров в X независимо сопоставленных точкам этого множества определяет операцию внутренности int, для которой $\mathrm{int}A = \{x | A \in \omega(x) \in \Omega\}$. Аналогично, любая система $\Gamma(X) = \{\gamma(x) | x \in X\}$ кофильтров в X независимо сопоставленных точкам этого множества определяет операцию замыкания cl, для которой $\mathrm{cl}A = \{x | A \in \gamma(x) \in \Gamma\}$.

Замечание. Из сказанного выше следует, что структура $\mathcal{O}$ есть не что иное, как соответствующая структура $\Omega(X)$, а структура $\mathcal{C}$ есть не что иное, как соответствующая структура $\Gamma(X)$.

Определение. *Будем говорить, что системы Ω и Γ взаимно соответствуют друг другу, если*
$\omega \in \Omega \iff \gamma(\omega) \in \Gamma$ *или, в эквивалентной форме,* $\gamma \in \Gamma(X) \iff \omega(\gamma) \in \Omega$.

Замечание. Соответствие между системами $\Omega(X)$ и системами $\Gamma(X)$ является просто переформулировкой указанного ранее соответствия между структурами $\mathcal{O}$ и $\mathcal{C}$, определенными на множестве X.

Определение. *Говорят, что фильтр ω сходится к точке x ($\omega \longrightarrow x$) в пространстве $(X, \mathcal{O})$, если $\mathcal{O}_x \subset \omega$.*

Определение. *Говорят, что кофильтр γ сходится к точке x ($\gamma \longrightarrow x$) в пространстве $(X, \mathcal{C})$, если $\gamma \subset \mathcal{C}_x$.*

Теорема. *Пусть $\mathcal{O}$ и $\mathcal{C}$ – взаимно соответствующие друг другу структуры на множестве X, ω и γ – взаимно соответствующие друг другу фильтр и кофильтр в X. Тогда ω сходится к точке x в пространстве $(X, \mathcal{O})$ тогда и только тогда, когда γ сходится к точке x в пространстве $(X, \mathcal{C})$.*

Доказательство. $\omega \longrightarrow x \iff \mathcal{O}_x \subset \omega \iff \gamma = \gamma(\omega) \subset \mathcal{C}_x \iff \gamma \longrightarrow x$.

Мы показали, что любая структура $\mathcal{O}$ окрестностей определяет соответствующую сходимость фильтров, а любая структура $\mathcal{C}$ близких к точкам множеств определяет соответствующую сходимость кофильтров. Можно, однако, рассматривать понятия сходимости фильтров и кофильтров, как первичные понятия, имеющие смысл для произвольно фиксированного множества.

Для формулировки этого понятия нам понадобится следующее определение:

Определение. *Будем говорить, что фильтр ω конфинален некоторому множеству фильтров, если в каждом множестве, принадлежащем пересечению этих фильтров, содержится некоторый элемент фильтра ω.*

Замечание. Понятие конфинальности фильтров можно, как для направленностей, сформулировать в терминах носителей. Носителями фильтра будем называть его элементы, а носителями множества фильтров – объединения носителей всех его фильтров. Любое такое объединение является элементом каждого фильтра рассматриваемого множества фильтров и потому является элементом их пересечения. С другой стороны, любой элемент пересечения принадлежит каждому фильтру этого множества фильтров и поэтому является носителем этого множества. Заметим, также, что если рассматриваемое множество фильтров состоит только из одного фильтра ω_1, то фильтр ω конфинален ω_1, если $\omega_1 \subset \omega$.

Определение. *Будем говорить, что на некотором множестве X задана некоторая структура сходимости фильтров, если для всех точек $x \in X$ независимо определены непустые множества $\Omega(x)$ фильтров, удовлетворяющие следующим условиям:*
1. *$\omega(x) = \{A | x \in A\} \in \Omega(x)$ для каждого $x \in X$,*
2. *Если фильтр ω конфинален некоторому множеству фильтров из $\Omega(x)$, то он является фильтром из $\Omega(x)$.*

Будем также говорить, что фильтр ω сходится к точке $x \in X$ и писать $\omega \longrightarrow x$, если $\omega \in \Omega(x)$.

Замечание. Нетрудно заметить, что для любой точки $x \in X$ пересечение всех фильтров из $\Omega(x)$ является фильтром из $\Omega(x)$. Действительно, это пересечение $\mathcal{O}(x)$ конфинально самому себе, следовательно конфинально $\Omega(x)$, и потому, в силу условия 2, является фильтром из $\Omega(x)$. С другой стороны, каждый фильтр содержащий $\mathcal{O}(x)$ ему конфинален и потому, опять в силу условия 2, принадлежит $\Omega(x)$. Тем самым, задание $\Omega(x)$ эквивалентно заданию $\mathcal{O}(x)$.

Определение. *Если структура $\{\mathcal{O}(x)|x \in X\}$ окрестностей, эквивалентная структуре $\{\Omega(x)|x \in X\}$ сходимости фильтров, удовлетворяет условию 3 окрестностей, то структура $\{\Omega(x)|x \in X\}$ называется топологической структурой сходимости фильтров.*

Рассмотрим произвольное множество S направленностей $s = (x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ в X. Нетрудно заметить, что совокупность $\omega(S)$ всех множеств, содержащих носители этого множества направленностей является фильтром в X. С другой стороны для любого фильтра ω в X можно образовать множество $S(\omega)$ направленностей $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$, в которых $x_\lambda \in G$ для каждого $\lambda = G \in \omega = \Lambda$.

Теорема. *Для любого фильтра ω в X имеет место соотношение $\omega(S(\omega)) = \omega$.*

Доказательство. Пусть $S = S(\omega)$. Множество S состоит из направленностей $s = (x_G|G \in \omega)$, удовлетворяющих условию $x_G \in G$ для каждого $G \in \omega$. Пусть $G' \in \omega$. В качестве носителей направленностей $s \in S$ можно рассматривать множества $|s'_G| = \{x_G|G \in \omega, G \subset G'\}$, объединение которых совпадает с G'. Таким образом $\omega \subset \omega(S(\omega))$.

Пусть, теперь, $G' \in \omega(S(\omega))$, то есть G' содержит некоторый носитель H множества $S(\omega)$ направленностей. Тогда $H = \bigcup |s_G|$. Это объединение носителей $|s_G|$, взятых по всем $s \in S(\omega)$ и произвольно фиксированным для каждого такого s множествам $G \in \omega$. Допустим, что $H \notin \omega$, то есть $G \setminus H \neq \emptyset$. Поэтому мы можем найти для каждого $G \in \omega$ некоторую точку $x_G \in G \setminus H \neq \emptyset$. Тогда направленность $s = (x_G|G \in \omega$ принадлежит $S(\omega)$, но не имеет общих точек с H, что противоречит определению H. Тем самым доказано, что $\omega(S(\omega)) \subset \omega$.

Замечание. Соотношение между S и $S(\omega(S))$ имеет более сложный характер. Это ясно хотя бы потому, что все направленности $s = (x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ из $S(\omega(S))$ образованы по одному и тому же множеству $\Lambda = \omega(S)$, в то время как направленности из S могут быть образованы по разным множествам Λ. В связи с этим, возникает необходимость замены равенства множеств направленностей понятием их эквивалентности.

В дальнейшем будут рассматриваться не только сходящиеся к точкам классы направленностей в множестве X. При этом для произвольных классов $\mathcal{S}$ направленностей очевидным образом вводится понятие носителей и фильтров $\omega(\mathcal{S})$.

Определение. *Класс $\mathcal{S}$ направленностей будем называть полным классом, если он содержит все направленности конфинальные ему по носителям.*

В дальнейшем будут рассматриваться, без специальной оговорки, только полные классы направленностей.

Определение. *Множество S направленностей в X будем называть базой класса $\mathcal{S}$, если любая направленность из $\mathcal{S}$ конфинальна S по носителям.*

Теорема. *Если множество S является базой класса направленностей $\mathcal{S}$, то $\omega(S) = \omega(\mathcal{S})$.*

Доказательство. Так как $S \subset \mathcal{S}$, то каждый носитель класса $\mathcal{S}$ содержит какой-нибудь носитель множества S. Отсюда следует, что любой элемент фильтра $\omega(\mathcal{S})$, содержащий носитель класса $\mathcal{S}$, содержит носитель множества S и потому является элементом фильтра $\omega(S)$. Тем самым доказано включение $\omega(\mathcal{S}) \subset \omega(S)$. С другой стороны, каждый носитель G множества S является носителем класса $\mathcal{S}$, так как для любой направленности $s \in \mathcal{S}$ найдется ее носитель, содержащийся в G, и объединение всех этих носителей, являющееся носителем класса $\mathcal{S}$, совпадает с G. Отсюда следует включение $\omega(S) \subset \omega(\mathcal{S})$.

Определение. *Два множества направленностей в X называются эквивалентными, если они являются базами одного и того же класса направленностей.*

Теорема. *Два множества направленностей в X эквивалентны тогда и только тогда, когда любая направленность одного из этих множеств конфинальна по носителям другому множеству.*

Доказательство. Пусть S и S' базы классов направленностей $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$, соответственно. Тогда из эквивалентности S и S' следует $S \subset \mathcal{S}'$ и $S' \subset \mathcal{S}$, откуда $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ и $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$, следовательно $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$. С другой стороны, пусть S и S' являются базами одного и того же класса $\mathcal{S}$. Так как $S' \subset \mathcal{S}$ и S – база $\mathcal{S}$, то каждая направленность из S' конфинальна по носителям множеству S. Аналогично доказывается, что каждая направленнасть из S конфинальна по носителям множеству S'.

Теорема. *Два множества направленностей в X эквивалентны тогда и только тогда, когда определяеиые ими фильтры совпадают.*

Доказательство. Пусть S и S' – некоторые множества направленностей. Если $\omega(S) = \omega(S')$, то любой носитель G множества S, являясь элементом фильтра $\omega(S)$, содержит какой-нибудь носитель множества S'. Но этот носитель является объединением носителей всех направленностей из S', каждый из которых содержится в G. Аналогично доказывается, что в любом носителе множества S' содержится носитель каждой направленности из S. Тем самым доказано, что S и S' эквивалентны. С другой стороны если множества направленностей S и S' эквивалентны, то есть они являются базами одного и того же класса $\mathcal{S}$, то $\omega(S) = \omega(\mathcal{S})$ и $\omega(S') = \omega(\mathcal{S})$, откуда следует равенство $\omega(S) = \omega(S')$.

Теорема. *Для любого множества S направленностей в X имеет место эквивалентность S и $S(\omega(S))$.*

Доказательство. Рассмотрим фильтры $\omega(S)$ и $\omega(S(\omega(S)))$. В силу доказанной ранее теоремы, эти фильтры совпадают. Но тогда, в силу предыдущей теоремы, множества S и $S(\omega(S))$ эквивалентны.

На множестве всех фильтров (кофильтров) в X имеется естественный порядок по включению, поэтому можно рассматривать точные верхние и точные нижние границы систем фильтров и систем кофильтров. Заметим при этом, что *при переходе от фильтров к соответствующим им кофильтрам и переходе от кофильтров к соответствующим им фильтрам порядок обращается.* Действительно, если $\omega_1 < \omega_2$, то есть если $G \in \omega_1 \Longrightarrow G \in \omega_2$, то $F \in \gamma(\omega_2) \iff X \setminus F \notin \omega_2 \Longrightarrow X \setminus F \notin \omega_1 \iff F \in \gamma(\omega_1)$ и поэтому $\gamma(\omega_2) < \gamma(\omega_1)$.

Теорема. *Для любой системы Ω фильтров в X существует ее точная нижняя граница $inf\Omega$, для любой системы Γ кофильтров в X существует ее точная верхняя граница $sup\Gamma$.*

Доказательство. Рассмотрим пересечение $\cap\omega|\omega \in \Omega$ всех фильтров, входящих в систему Ω. Это пересечение не пусто, так как множество X входит в каждый фильтр из Ω. Более того, это пересечение является фильтром. Действительно, если $G_1 \in \omega \in \Omega$ и $G_2 \in \omega \in \Omega$, то $G_1 \cap G_2 \in \omega \in \Omega$ и поэтому $G_1 \cap G_2 \in \cap\omega | \omega \in \Omega$. Нетрудно убедиться в том, что это пересечение и есть $inf\Omega$. В силу двойственности между фильтрами и кофильтрами, обращающей порядок, из уже доказанного следует вторая часть теоремы.

§2. Структуры слабо топологических пространств

1. Слабо топологические и топологические пространства. В предыдущем параграфе были введены различные структуры, позволяющие описывать топологические пространства. Все эти структуры, за исключением структур открытых и структур замкнутых множеств, можно рассматривать, как варианты задания пространств более тонких, чем топологические пространства. На этих пространствах, которые мы будем называть *слабо топологическими пространствами*, можно рассматривать окрестности точек, далекие от точек множества, близкие к точкам множества, операции замыкания и внутренности, сходимость направленностей, фильтров и кофильтров, удовлетворяющие более слабым, чем для топологических пространств, условиям. При этом слабо топологическое пространство оказывается топологическим пространством, если оно удовлетворяет соответствующим, эквивалентным друг другу, условиям, формулируемым в терминах окрестностей или в терминах далеких от точек множеств, близких от точек множеств, операций замыкания и внутренности, сходимости направленностей. Например, слабо топологическое пространство оказывается топологическим пространством, если

каждая окрестность точки содержит ее окрестность, являющуюся окрестностью любой своей точки

или

$\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{cl}A$ для любого множества A

или

структура сходимости удовлетворяет аксиоме композиции.

Слабо топологические пространства, как и топологические пространства , мы будем, иногда, обозначать *теми же буквами*, что и множества, на которых определены соответствующие структуры.

Пусть X – некоторое слабо топологическое пространство. В качестве исходной структуры, определяющей это пространство будем считать совокупность фильтров окрестностей его точек.

Определение. *Будем говорить, что на множестве X определена слабо топологическая структура, если на этом множестве фиксирована некоторая структура $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_x | x \in X\}$ окрестностей.*

Напомним, что множество A называется *открытым множеством* в X если $A = \mathrm{int}A$ и, соответственно, *замкнутым множеством*, если $A = \mathrm{cl}A$.

Теорема. *Совокупность всех открытых (замкнутых) множеств слабо топологического пространства X является структурой открытых (замкнутых) множеств, то есть структурой некоторого топологического пространства.*

Доказательство. Условие 1 для топологических структур открытых множеств следует, очевидно, из условий 1 и 3 для операции внутренности. Докажем, что условие 2 для топологических структур открытых множеств следует из условия 2 для операций внутренности. Для этого заметим, прежде всего, что из условия 2 для операции внутренности следует ее монотонность, то есть $G \subset G' \Longrightarrow \mathrm{int}G \subset \mathrm{int}G'$. Действительно, $G \subset G' \iff G \cap G' = G$, $\mathrm{int}(G \cap G') = \mathrm{int}G \cap \mathrm{int}G' = \mathrm{int}G$, откуда следует, что $\mathrm{int}G \subset \mathrm{int}G'$. Рассмотрим, теперь, произвольное объединение $G = \cup G_\xi | \xi \in \Xi$ открытых в X множеств. $G_\xi \subset G$ для каждого $\xi \in \Xi$, поэтому $G_\xi = \mathrm{int}G_\xi \subset \mathrm{int}G$ и, таким образом, $G = \cup G_\xi | \xi \in \Xi = \cup \mathrm{int}G_\xi | \xi \in \Xi \subset \mathrm{int}G$, то есть $G = \mathrm{int}G$. Случай замкнутых множеств рассматривается аналогично.

Таким образом каждому слабо топологическому пространству X однозначно сопоставляется,*ассоциированное с ним*, топологическое пространство, которое мы будем обозначать через $\mathcal{P}X$.

Свойства этого топологического пространства можно рассматривать, как свойства исходного слабо топологического пространства. Необходимо при этом помнить, что свойства топологического пространства $\mathcal{P}X$ не исчерпывают всех свойств исходного слабо топологического пространства X. Обычно топологическое свойство является частным (сильным) случаем некоторого слабо топологического свойства. Например, окрестностью множества A в слабо топологическом пространстве X, считают любое множество O, внутренность которого $\mathrm{int}O$ содержит A. В частном случае это множество может содержать открытую окрестность множества A, и тогда мы будем называть эту окрестность *сильной окрестностью* множества A. В соответствии с этим, можно рассматривать отделимость множеств их окрестностями в X и, как частный случай, их *сильную отделимость*, то есть отделимость сильными окрестностями. В частности можно рассматривать отделимость и сильную отделимость точек. Заметим, что если множество O является окрестностью некоторого множества A, то $\mathrm{int}O$ *может и не быть окрестностью этого множества.* Слабо топологическое пространство называется *отделимым*, если две любые его различные точки отделимы и оно называется *сильно отделимым*, если две любые его различные точки сильно отделимы.

Замечание. Тот факт, что слабые топологии определяются *независимо фиксированными* фильтрами окрестностей точек, делает общую теорию слабо топологических пространств, в некотором отношении, проще общей теории топологических пространств. С другой стороны теория топологических пространств является *специальной частью* теории слабо топологических пространств.

Теория слабо топологических пространств является более тонкой теорией, чем теория топологических пространств, так как любая операция слабо топологического замыкания тоньше, чем соответствующая ей операция топологического замыкания. Во многих случаях в результате перехода от слабой топологии к топологии мы получаем тривиальное топологическое пространство. Рассмотрим, например, множество $\mathbb{Z}$ целых чисел и вполне аддитивную операцию замыкания, для которой $\mathrm{cl}\{n\} = \{n-1, n, n+1\}$. Соответствующая ей топологическая структура тривиальна и потому любое отображение $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ будет непрерывным относительно этой структуры. С другой стороны, если отображение f– непрерывно относительно заданной выше слабо топологической структуры, то $f(\mathrm{cl}\{n\}) \subset \mathrm{cl}f(n) = \{f(n)-1, f(n), f(n)+1\}$ и поэтому $|f(n+1) - f(n)| \leqslant 1$– своего рода "условие непрерывности".

2. Операция замыкания в $\mathcal{P}X$. Операция замыкания в $\mathcal{P}X$, вообще говоря, не совпадает с операцией замыкания в X, но определяется этой операцией. Пусть A – произвольное множество в X. Рассмотрим для любого порядкового числа ν такие множества $\mathrm{cl}A, \mathrm{cl}^2A = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}A), \ldots, \mathrm{cl}^\nu A$, что $\mathrm{cl}^\mu A = \mathrm{cl}(\cup \mathrm{cl}^\lambda A | \lambda < \mu)$ для любого $\mu < \nu$. Тем самым определяются на X операции cl^ν.

Теорема. *Для любого слабо топологического пространства X с операцией замыкания* cl *и любого порядкового числа ν, операция* cl^ν *является операцией замыкания.*

Доказательство. Докажем выполнение для cl^ν условий операции замыкания.
1. $\mathrm{cl}^\nu\emptyset = \emptyset$, так как для $A = \emptyset$ все члены трансфинитной последовательности $A, \mathrm{cl}A, \mathrm{cl}^2A = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}A), \ldots, \mathrm{cl}^\nu A$ пусты.
2. $A \subset \mathrm{cl}^\nu A$, так как $\mathrm{cl}A$, $\mathrm{cl}^2A = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}A)$, $\ldots$, $\mathrm{cl}^\nu A$ является неубывающей трансфинитной последовательностью множеств.
3. $\mathrm{cl}^\nu(A \cup B) = \mathrm{cl}^\nu A \cup \mathrm{cl}^\nu B$, так как $\mathrm{cl}^\nu(A \cup B) = \mathrm{cl}(\cup\mathrm{cl}^\mu(A \cup B)|\mu < \nu) = \mathrm{cl}(\cup(\mathrm{cl}^\mu A \cup \mathrm{cl}^\mu A)|\mu < \nu) = \mathrm{cl}((\cup\mathrm{cl}^\mu A|\mu < \nu) \cup (\cup\mathrm{cl}^\mu B|\mu < \nu)) = \mathrm{cl}(\cup\mathrm{cl}^\mu A|\mu < \nu) \cup \mathrm{cl}(\cup\mathrm{cl}^\mu B|\mu < \nu) = \mathrm{cl}^\nu A \cup \mathrm{cl}^\nu B$.
Тем самым доказано, что cl^ν является операцией замыкания.

Теорема. *Для каждого слабо топологического пространства X с операцией замыкания* cl *найдется такое порядковое число ν, что операция* cl^ν *является топологической операцией замыкания.*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что трансфинитная последовательность $A, \mathrm{cl}A, \mathrm{cl}^2A = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}A), \ldots, \mathrm{cl}^\nu A, \mathrm{cl}^{\nu+1}A$ является неубывающей последовательностью множеств. Если мощность этой последовательности больше мощности множества всех точек пространства X, то эта последовательность не может быть строго возрастающей, в частности множества $\mathrm{cl}^\nu A$ и $\mathrm{cl}^{\nu+1}A$ будут совпадать, то есть $\mathrm{cl}^\nu A$ будет замкнутым в X множеством. Для достаточно большого ν и всех $A \subset X$ мы будем иметь $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}^\nu A) = \mathrm{cl}^\nu A$. С другой стороны, из включений $A \subset A' \subset \mathrm{cl}^\nu A$ следуют включения $\mathrm{cl}^\nu A \subset A' \subset \mathrm{cl}^\nu A$ и, следовательно, равенство $A' = \mathrm{cl}^\nu A$. Тем самым доказано, что операция cl^ν является операцией замыкания в $\mathcal{P}X$.

Теорема. *Если* $f : (X, \mathrm{cl}) \longrightarrow (X', \mathrm{cl}')$ *является непрерывным отображением слабо топологических пространств, то отображение* $\mathcal{P}\ f : \mathcal{P}(X, \mathrm{cl}) \longrightarrow \mathcal{P}(X', \mathrm{cl}')$ *является непрерывным отображением топологических пространств.*

Доказательство. Выше было доказано, что для некоторых порядковых чисел ν и ν' операции cl^ν и $(\mathrm{cl}')^{\nu'}$ являются топологическими операциями замыкания для топологических пространств (X, cl) и (X', cl'), соответственно. Так как порядок этих итераций операций замыкания может быть произвольно увеличен, мы можем считать, что $\nu' = \nu$ и, таким образом, cl^ν и $(\mathrm{cl}')^\nu$ являются топологическими операциями замыкания. Условие непрерывности отображения $f : (X, \mathrm{cl}) \longrightarrow (X', \mathrm{cl}')$ эквивалентно условию $f(\mathrm{cl}A) \subset \mathrm{cl}' f(A)$ для любого множества $A \subset X$. но тогда $f(\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A)) \subset \mathrm{cl}'(f(\mathrm{cl}A)) \subset \mathrm{cl}'\mathrm{cl}' f(A), \ldots$. Трансфинитной индукцией можно доказать, что $\mathrm{cl}^\nu f(A) \subset (\mathrm{cl}')^\nu(f(A))$ и поэтому $f : (X, \mathrm{cl}^\nu) \longrightarrow (X', (\mathrm{cl}')^\nu)$ – непрерывное отображение.

Замечание. Рассмотрим соответствие $\mathcal{P} : WTop \longrightarrow Top$, сопоставляющее каждому слабо топологическому пространству X топологическое пространство TX. Как показано выше, при этом соответствии непрерывные отображения слаботопологических пространств являются непрерывными отображениями соответствующих им топологических пространств, тождественное отображение остается тождественным отображением, композиция отображений слабо топологических пространств переходит в композицию отображений топологических пространств.

3. Слабые топологии на множестве. Множество всех слабых тологий на одном и том же множестве естественно упорядочивается.

Определение. *Пусть на некотором множестве M определены две слабо топологические структуры $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$. Если $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}'_x$ для каждой точки $x \in M$, то говорят, что структура окрестностей $\mathcal{O}'$ тоньше, чем структура окрестностей $\mathcal{O}$ (структура $\mathcal{O}$ грубее, чем структура $\mathcal{O}'$). В этом случае говорят также, что слабая топология на $X = (M, \mathcal{O}')$ тоньше, чем слабая топология на $X' = (M, \mathcal{O})$ (слабая топология на $(M, \mathcal{O})$ грубее, чем слабая топология на $(M, \mathcal{O}')$.*

Замечание. Сравнение слабо топологических структур в терминах окрестностей имеет локальный характер. Глобальное определение их сравнения может быть дано в терминах замыканий, а именно
операция замыкания cl' тоньше операции замыкания cl, если $\mathrm{cl}'A \subset \mathrm{cl}A$ для любого $A \subset X$.

Эквивалентные этому сравнения слабых топологий можно ввести и при других способах задания слабо топологических пространств: структурами далеких множеств, близких множеств, операцией внутренности, сходимостями направленностей, фильтров, сходимости кофильтров.

Замечание. Любое топологическое пространство является, конечно, слабо топологическим пространством, поэтому можно сравнивать слабые топологии пространств X и $\mathcal{P}X$. Слабые топология X *тоньше* чем слабые топология $\mathcal{P}X$, так как фильтр сильных окрестностей любой точки содержится в фильтре всех ее окрестностей.

Сравнение слабо топологических структур позволяет ввести на множестве всех слабо топологических пространств, определенных на множестве M, отношение порядка, при котором $X < X'$, если слабо топологическая структура на X грубее, чем слабо топологическая структура на X'. В этом множестве содержится множество всех топологических пространств, определенных на M. Каждое топологическое пространство можно представить, как $\mathcal{P}X$ – топологический представитель слабо топологического пространства X. Все это множество разбивается на множества, каждое из которых состоит из всех слабо топологических пространств, имеющих одного и того же ассоциированного с ними представителя. Наибольшим является множество всех слабо топологических пространств, с которыми ассоциировано тривиальное топологическое пространство. Некоторые топологические пространства являются представителями только самого себя. Нетрудно доказать, что таким топологическим пространством будет любое пространство, подмножества которого обладают следующим свойством: каждая, присоединяемая к множеству (внешняя), предельная точка является *единственной* внешней предельной точкой некоторого его подмножества. Таким пространством является, например, числовая прямая с обычной топологией.

4. Непрерывные отображения. Эквивалентные определения непрерывности отображений слабо топологических пространств в различных терминах были даны ранее в §2. Некоторые из них имеют глобальный характер, другие же – локальный. Например, определение

отображение $f : X \longrightarrow X'$ непрерывно, если $f(\mathrm{cl}A) \subset \mathrm{cl}' f(A)$ для любого $A \subset X$

– явно глобальное определение.

С другой стороны, определение

отображение $f : X \longrightarrow X'$ непрерывно, если $f^{-1}(O')$ является окрестностью точки x для любой окрестности O' точки $f(x)$. является локальным определением.

Теорема. *Если отображение $f : X \longrightarrow X'$ слабо топологических пространств является непрерывным отображением, то отображение $f : \mathcal{P}X \longrightarrow \mathcal{P}X'$ является непрерывным отображением.*

Доказательство. Пусть cl и cl$'$ –слабо топологические операции замыкания в X и X', соответственно, cl^{ν} и $(\mathrm{cl}')^{\nu}$ – топологические операции замыкания в $\mathcal{P}X$ и $\mathcal{P}X'$ (равенство кратностей повторения операций замыкания cl и cl$'$ возможно, так как их увеличение сохраняет соответствующие топологические операции замыкания). По условию теоремы $f(\mathrm{cl}A) \subset \mathrm{cl}'f(A)$ для любого множества A в X. Докажем, что $f(\mathrm{cl}^{\nu}A) \subset (\mathrm{cl}')^{\nu}f(A)$, используя трансфинитную индукцию, то есть предполагая справедливость этого соотношения для всех $\mu < \nu$, докажем его для ν. Так как $\mathrm{cl}^{\nu}A = \mathrm{cl}(\cup \mathrm{cl}^{\mu}A|\mu < \nu)$, то $f(\mathrm{cl}^{\nu}A) = f(\mathrm{cl}(\cup \mathrm{cl}^{\mu}A|\mu < \nu)) \subset f(\cup \mathrm{cl}^{\mu+1}A|\mu < \nu) = \cup f(\mathrm{cl}^{\mu+1}A)|\mu < \nu \subset \cup(\mathrm{cl}')^{\mu+1}f(A)|\mu < \nu = (\mathrm{cl}')^{\nu}f(A)$ и требуемое включение и, тем самым, непрерывность отображения $f : \mathcal{P}X \longrightarrow \mathcal{P}X'$ доказаны.

Пусть X и X'– два множества и $f : X' \longrightarrow X$. Тогда любая слабая топология, определенная на X, может быть перенесена (индуцирована) отображением f на X', а любая слабая топология, определенная на X', может быть перенесена (индуцированна) отображением f на X. В частности, перенос структуры окрестностей может быть осуществлен вложением $i : X' \longrightarrow X$ для $X' \subset X$. При этом структура $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_x|x \in X\}$ окрестностей точек в X перейдет в структуру $\mathcal{O}' = \{\mathcal{O}'_x|x \in X'\}$, где $\mathcal{O}'_x = \{O \cap X'|O \in O_x\}$. Множество X', наделенное такой структурой называется подпространством слабо топологического пространства $(X, \mathcal{O})$.

5. Прямое произведение и свободное объединение. Пусть дано семейство $(X_{\lambda}|\lambda \in \Lambda)$ слабо топологических пространств. Образуем множество $X = \prod X_{\lambda} = \{(x_{\lambda}|\lambda \in \Lambda)|\ x_{\lambda} \in X_{\lambda}\}$. Пусть $x = (x_{\lambda}|\lambda \in \Lambda) \in X$, O_{λ}–окрестность точки x_{λ} в X_{λ}, причем все O_{λ} кроме конечного числа совпадают с X_{λ}. Тогда множество $\prod O_{\lambda}|\lambda \in \Lambda$ рассматривается, как окрестность точки x в произведении. Все множества, содержащие такие окрестности образуют

$\mathcal{O}_x$. Структура $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_x | x \in X\}$ окрестностей определяет слабо топологическое пространство $(X, \mathcal{O})$, называемое *прямым произведением* пространств заданного семейства. Нетрудно понять, что это структурное определение произведения слабо топологических пространств соответствует его категорному определению, а именно обладает следующим свойством:

Фиксируются отображения $\pi_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda,\ \pi_\lambda(x) = x_\lambda$, тогда для любого слабо топологического пространства Y и любых отображений $f_\lambda : Y \longrightarrow X_\lambda,\ \lambda \in \Lambda$ существует такое отображение $f : Y \longrightarrow X$, что $f_\lambda = \pi_\lambda f$.

Заметим, что *операция перемножения слабо топологических пространств ассоциативна*, если считать ассоциативным перемножение множеств.

Определим, теперь, операцию свободного объединения слабо топологических пространств.

Пусть дано семейство $(X_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ слабо топологических пространств, *не имеющих попарно общих точек*. Образуем множество $X = \bigcup X_\lambda$. Рассмотрим произвольную точку $x \in X$. Она будет принадлежать какому-то из пространств X_λ и, следовательно, будет определена ее совокупность $\mathcal{O}_x(X_\lambda)$ окрестностей в этом пространстве. Определим теперь $\mathcal{O}_x$, как совокупность множеств, каждое из которых содержит какое-то множество из $\mathcal{O}_x(X_\lambda)$. Структура $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_x | x \in X\}$ окрестностей определяет слабо топологическое пространство $(X, \mathcal{O})$, называемое *свободным объединением* пространств заданного семейства. Нетрудно понять, что это структурное определение свободного объединения слабо топологических пространств соответствует его категорному определению, а именно обладает следующим свойством:

Фиксируются отображения $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X,\ i_\lambda(x) = x$, тогда для любого слабо топологического пространства Y и любых отображений $f_\lambda : X_\lambda \longrightarrow Y,\ \lambda \in \Lambda$ существует такое отображение $f : X \longrightarrow Y$, что $f_\lambda = f i_\lambda$.

Заметим, что *операция свободного объединения слабо топологических пространств ассоциативна.*

6. Факторпространство и подпространство. Пусть X–некоторое слабо топологическое пространство, X'–множество и $h : X \longrightarrow X'$–отображение множества точек пространства X *на* множество X'. Структуру $\mathcal{O}$ окрестностей можно перенести посредством отображения h на множество X', положив $O \in$

$\mathcal{O}'_{x'} \iff h^{-1}(O) \in \cap \mathcal{O}_x | h(x) = x'$. Слабо топологическое пространство $(X', \mathcal{O}')$ называется *h-факторпространством* слабо топологического пространства X и обозначается через X/h. Можно рассматривать также R-факторпространства X/R, где R–отношение эквивалентности, определенное на X. В качестве множества X' берется в этом случае множество всех классов R-эквивалентности, а отображение h сопоставляет каждой точке $x \in X$ класс эквивалентности, которому она принадлежит.

Рассмотрим некоторые свойства факторпространств. Пусть $f : X \longrightarrow Y$–непрерывное отображение слабо топологических пространств. $X' = f(X)$, $i : X' \longrightarrow Y$–вложение множеств, $h : X \longrightarrow X/f$. Имеем, очевидно, $f = ih$ и можно доказать, что непрерывность отображения f влечет непрерывность отображения i и, наоборот, непрерывность i влечет непрерывность f. Представление отображения f в виде композиции $f = ih$ называется *каноническим разложением непрерывного отображения*. Представляет определенный интерес изучение связи между свойствами слабо топологических пространств $X, X/R$ и отношений эквивалентности R.

7. Компактность и локальная компактность. Так как структура открытых множеств слабо топологического пространства не описывает его слабую топологическую структуру, определение компактности и локальной компактности следует давать в терминах окрестностей.

Определение. *Слабо топологическое пространство $(X, \mathcal{O})$ называется комактным, если из любого его покрытия $(O_x | x \in X)$ окрестностями точек можно выбрать конечное покрытие.*

Понятие компактности можно, конечно, сформулировать в терминах замыканий, внутренностей, далеких от точек множеств, близких к точкам множеств и сходимостей. Нетрудно заметить, что в компактном слабо топологическом пространстве всякое открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Определение. *Отделимое компактное слабо топологическое пространство называется компактом.*

Определение. *Слабо топологическое пространство $(X, \mathcal{O})$ называется локально компактным, если в любой окрестности любой* *его точки содержится ее окрестность с компактным замыканием.*

Теория компактных и локально компактных слабо топологических пространств в общем аналогична соответствующей теории топологических пространств.

8. Связность и локальная связность. Естественным переносом понятия связности топологических пространств на слабо топологические пространства является следующее определение:

Определение. *Слабо топологическое пространство называется связным, если в нем не существует собственное непустое множество, замыкание которого совпадает с внутренностью.*

Нетрудно заметить, однако, что если $\mathrm{cl}A = \mathrm{int}A$ для некоторого множества A слабо топологического пространства X, то A оказывается одновремено открытым и замкнутым в X множеством. Таким образом понятие связности слабо топологического пространства совпадает с понятием связности топологического пространства. С другой стороны, понятие локальной связности слабо топологического пространства не совпадает с понятием локальной связности топологического пространства.

Определение. *Слабо топологическое пространство называется локально связным, если в каждой окрестности любой точки содержится ее связная окрестность.*

Это условие сильнее, чем обычное условие локальной связности.

§3. Структуры квазитопологических пространств

1. Введение. Известно как широко применяются топологические структуры при решении различных теоретических и прикладных проблем. Однако бывают и такие ситуации, когда использование топологических структур не дает нужного эффекта, не позволяет получить решение той или иной проблемы. Они оказываются в такой ситуации слишком грубыми и возникает необходимость введения более тонких структур. Здесь напрашивается аналогия с введением обобщенных функций в тех случаях, когда обычные функции не дают решения проблемы. Одним из примеров возникновения подобной ситуации является проблема топологизации множества $C(Y,Z)$ (Z^Y в другом обозначении) непрерывных отображений топологического пространства Y в топологическое пространство Z. Рассмотрим, например, операцию вычисления значения некоторой функции $f \in C(Y,Z)$ в точке $y \in Y$. Ее можно представить, как отображение

$$E : C(Y,Z) \times Y \longrightarrow Z,\ E(f,y) = f(y),$$

называемое *отображением вычисления.*

Часто приходится рассматривать топологические пространства $C(Y,Z)_\tau$, получаемые фиксацией на $C(Y,Z)$ какой-нибудь топологической структуры τ. При этом естественно рассматривать такие топологичекие структуры τ, для которых отображение вычисления

$$E : C(X,Y)_\tau \times Y \longrightarrow Z,\ E(f,y) = f(y)$$

непрерывно. Такие топологические структуры на $C(Y,Z)$ называются *допустимыми.* Они всегда существуют, например дискретная топологическая структура. Однако наибольший интерес представляет, конечно, минимальная допустимая топологическая структура. Вот здесь-то и возникает неприятная ситуация. Минимальная структура *не всегда существует.* Например, если Y – вполне регулярное топологическое пространство, то минимальная допустимая структура существует тогда и только тогда когда Y – локально компактно. Таким образом рассматриваемая проблема *в топологических структурах не решается.* Математики старались обойтись все же топологическими структурами на множестве $C(Y,Z)$, рассматривая, например, не обычное произведение $C(Y,X)_\tau \times Y$, а соответствующим образом измененное.

Принципиально новый шаг был сделан (1963г.) Спеньером. Он отказался от использования топологических структур в этой ситуации и перешел к структурам, которые он назвал квазитопологическими. Суть его подхода такова. Рассматривается совокупность $\mathcal{C}$ компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений. *Квазитопологией* на произвольно заданном множестве X называется сопоставление каждому компакту C некоторого множества $Q(C,X)$ отображений C в X. При этом должны выполняться следующие условия:
1. Каждое постоянное отображение C в X принадлежит $Q(C,X)$,
2. Если $a : C_1 \longrightarrow C_2$ и $f \in Q(C_2,X)$ то $fa \in Q(C_1,X)$,
3. Если компакт C является свободным объединение компактов C_1 и C_2, то $f \in Q(C,X)$ тогда и только тогда, когда $f|C_1 \in$

$Q(C_1, X)$ и $f|C_2 \in Q(C_2, X)$,
4. Если $a : C_1 \longrightarrow C_2$ – отображение *на*, то $f \in Q(C_2, X)$ тогда и только тогда, когда $fa \in Q(C_1, X)$.

Множество X, на котором задана некоторая квазитопология называется *квазитопологическим* (по Спеньеру) пространством. На квазитопологические, в этом смысле, пространства естественно переносятся основные топологические понятия, в частности понятие *допустимой квазитопологической структуры* на множестве $F(Y, Z)$ квазинепрерывных отображений квазитопологического пространства Y в квазитопологическое пространство Z. *В квазитопологиях проблема существования минимальной допустимой структуры решается положительно.* Кроме того, *в квазитопологиях имеет место экспоненциальный закон,* то есть $F(X \times Y, Z)$ и $F(X, F(Y, Z))$ $(Z^{X\times Y}$ и $(Z^Y)^X$) канонически квазигомеоморфны.

Проблема не решаемая в топологических структурах была решена в квазитопологических (в смысле Спеньера) структурах. Но это решение получено за счет создания специальной теории.

2. Слабая аксиома конфинальности. Мы видели, что топологическая стуктура сходимости направленностей, должна удовлетворять следующим уцловиям:
1. *Аксиома стационарности.* Любая стационарная направленность $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$, то есть направленность, у которой $x_\lambda = x$ для всех $\lambda \geq \lambda_0$ и некоторого $x \in X$, сходится к x.
2. *Аксиома конфинальности по носителям.* Если направленность $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ конфинальна по носителям некоторому множеству, сходящихся к точке $x \in X$ направленностей, то она сама сходится к этой точке.
3. *Аксиома композиции.* Из сходимости направлености $(x_\xi|\xi \in \Xi) \longrightarrow x$, и сходимости направленностей $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda_\xi) \longrightarrow x_\xi$, определенных для всех $\xi \in \Xi$, следует сходимость к x их композиции $(x_\mu|\mu \in M)$.

Замечание. Из сказанного выше следует, что структура сходимости, удовлетворяющая условям 1 и 2, является *слабо топологической структурой сходимости.*

Дальнейшее ослабление аксиоматики можно осуществить за счет ослабления аксиомы конфинальности по носителям.

$2'$ *Слабая аксиома конфинальности по носителям.* Пусть Λ' конфинальная часть направленного множества Λ. Если направленность $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda')$ конфинальна по носителям некоторому множеству, сходящихся к точке $x \in X$ направленностей с множеством индексов Λ, то она сама сходится к этой точке.

Определение. *Структура сходимости $\mathcal{S}$ на множестве X, удовлетворяющая условиям 1 и $2'$ называется квазитопологической структурой сходимости, пара $(X, \mathcal{S})$ называется квазитопологическим пространством.*

Любому квазитопологическому пространству X можно сопоставить, некоторое слабо топологическое пространство WX, структура сходимости которого получается присоединением к исходной квазитопологической структуре всех направленностей, о которых идет речь в аксиоме 3.

4. Непрерывные отображения. Для слабо топологических пространств мы могли рассмотреть различные определения непрерывности, соответствующие различным вариантам определения самих слабо топологических пространств. Некоторые из них имели глобальный характер, другие же – локальный. Для квазитопологических пространств имеется единственый вариант задания и, соответственно, определения понятия непрерывности отображения – это использование сходимости направленностей.

Определение. *Отображение f квазитопологического пространства $(X, \mathcal{S})$ в квазитопологическое пространство $(X', \mathcal{S}')$ называется непрерывным отображением, если f-образ любой направленности, сходящейся в $(X, \mathcal{S})$ к точке x, является направленностью, сходящейся в $(X', \mathcal{S}')$ к точке $f(x)$.*

Замечание. Как обычно, введение понятия непрерывности позволяет ввести отношение порядка для квазитопологических структур, определенных на одном и том же множестве (пространств с одним и тем же множеством точек).

Определение. *Допустим, что на некотором множестве X определены две квазитопологические структуры $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$. Будем считать, что $\mathcal{S} \leq \mathcal{S}'$, если $\mathcal{S}'_x \subset \mathcal{S}_x$ для всех $x \in X$.*

Замечание. Заметим, что определенный так порядок противоположен порядку по включению структур сходящихся направленностей. Это связано с тем, что при переходе от квазитопологических структур к слабо топологическим (топологическим) структурам порядок по включению обращается.

Теорема. *Если отображение $f : X \longrightarrow X'$ квазитопологических пространств является непрерывным отображением, то отображение $f : WX \longrightarrow WX'$ является непрерывным отображением слабо топологических пространств.*

Доказательство. Непосредственно следует из того факта, что если направленность s'_0 конфинальна по носителям некоторому множеству направленностей s', сходящихся к одной и той же точке x', то направленность $f(s'_0)$ конфинальна по носителям множеству направленностей $f(s')$.

Пусть X и X' – некоторые множества и $f : X' \longrightarrow X$. Тогда любая квазитопология, определенная на X, может быть перенесена (индуцирована) отображением f на X', а любая квазитопология, определенная на X', может быть перенесена (индуцирована) отображением f на X. Это следует из следующего утверждения.

Теорема. *Пусть X и X' – некоторые множества и $f : X' \longrightarrow X$. Тогда для любой квазитопологии $\mathcal{S}$ на X существует минимальная квазитопология $\mathcal{S}'$ на X', при которой отображение f непрерывно, и для любой квазитопологии $\mathcal{S}'$ на X' существует максимальная квазитопология $\mathcal{S}$ на X, при которой отображение f непрерывно.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую квазитопологию $\mathcal{S}$ на X. Тогда все направленности s' в X', для которых $f(s')$ сходится в $(X, \mathcal{S})$, образуют квазитопологию $\mathcal{S}'$ в X', так как f-образ любой направленности, конфинальной по носителям некоторой конечной системе направленностей, будет, очевидно, конфинальной по носителям f-образам направленностей этой системы. Это и будет минимальная квазитопология на X', при которой отображение f непрерывно. Рассмотрим, теперь, некоторую квазитопологическую структуру $\mathcal{S}'$ на X'. Тогда все направленности в X, конфинальные по носителям конечным системам f-образов сходящихся в $(X', \mathcal{S}')$ направленностей, образуют квазитопологию $\mathcal{S}$ в X. Это и будет максимальная квазитопология на X, при которой отображение f непрерывно.

Замечание. В этой теореме рассматриваются, в определенных условиях, максимальные и минимальные квазитопологические структуры. Напомним, что из двух квазитопологических структур $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$, определенных на одном и том же множестве X, имеет место соотношение $\mathcal{S} \leq \mathcal{S}'$, если тождественное отображение X на себя является непрерывным отображением $(X, \mathcal{S}')$ на $(X, \mathcal{S})$. Грубо говоря, если в $(X, \mathcal{S}')$ *не больше* сходящихся направленностей, чем в $(X, \mathcal{S})$.

5. Прямое произведение и свободное объединение. В отличие от понятий прямых произведений топологических и слабо топологических пространств, понятие прямого произведения квазитопологических пространств формулируется в терминах сходимости направленностей.

Определение. *Пусть дано семейство $(X_\xi | \xi \in \Xi)$ квазитопологических пространств. Образуем множество $X = \prod X_\xi = \{(x_\xi | x_\xi \in X_\xi, \xi \in \Xi)\}$ и определим, как обычно, для каждого $\xi_0 \in \Xi$ отображение $p_{\xi_0} : X \longrightarrow X_\xi$, для которого $p_{\xi_0}(x_\xi | \xi \in \Xi) = x_{\xi_0}$. Для каждого $\xi \in \Xi$ определена, таким образом, проекция $p_\xi : X \longrightarrow X_\xi$. Эта проекция переносит заданную на X_ξ квазитопологическую структуру $\mathcal{S}_\xi$ в квазитопологическую структуру $p_\xi^{-1}(\mathcal{S}_\xi)$. Квазитопологическое объединение этих структур называется, квазитопологической структурой прямого произведения.*

Замечание. Эта кваэитопологическая структура состоит из всех сходимостей направленностей в X, проекции которых на каждое X_ξ являются сходимостями. Нетрудно заметить, что такое определение годится и для произведения слабо топологических пространств и для произведения топологических пространств – оно *универсально.*

Теорема. *Пусть X – прямое произведение квазитопологических пространств X_ξ. Тогда для любого квазитопологического пространства X' и любых непрерывных отображений $f_\xi : X' \longrightarrow X_\xi$, заданных для каждого $\xi \in \Xi$, существует такое непрерывное отображение $f : X' \longrightarrow X$, что $f_\xi = p_\xi f$.*

Доказательство. Отображение f определяется стандартно, а именно $f(x') = (f_\xi(x') | \xi \in \Xi)$ так, что $f_\xi = p_\xi f$. Остается только доказать, что это отображение непрерывно. Пусть $s' = (x'_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ – произвольная направленность, сходящаяся к x' в X'. Тогда ее f-образ в X является направленностью $(f(x'_\lambda) | \lambda \in \Lambda)$, p_ξ-образ которой является f_ξ-образом направленности s' и потому сходится в X_ξ. Таким образом, f-образ любой сходящейся в X' направленности является сходящейся в X направленностью, то есть f – непрерывное отображение квазитопологических пространств.

Определим, теперь, операцию свободного объединения квазитопологических пространств.

Определение. *Пусть дано семейство $(X_\xi|\xi \in \Xi)$ квазитопологических пространств, попарно не имеющих общих точек. Образуем множество $X = \bigcup X_\xi$ и рассмотрим для каждого $\xi \in \Xi$ отображение $i_\xi : X \leftrightarrow X_\xi$, для которого $i_\xi(x) = x$. Введем на множестве X следующую квазитопологию.*

Каждую направленность в квазитопологическом пространстве X_ξ, сходящуюся к какой-нибудь точке $x \in X_\xi$ рассматриваем, как направленность в X, сходящуюся к той же точке $x \in X$. Образованная таким образом совокупность сходящихся в X направленностей еще не является квазитопологической структурой, если Ξ не одноточечно. Надо еще присоединить каждую направленность в X конфинальную по носителям какой-нибудь направленности. Такие сходящиеся направленности образуют квазитопологическую структуру на множестве X, которую мы будем рассматривать, как квазитопологическую структуру свободного объединения квазитопологических пространств X_ξ.

Замечание. По самому определению структуры свободного объединения X квазитопологических пространств X_ξ, отображения $i_\xi : X_\xi \longrightarrow X$ являются непрерывными отображениями квазитопологических пространств.

Теорема. *Пусть X – свободное объединение квазитопологических пространств X_ξ. Тогда для любого квазитопологического пространства X' и любых непрерывных отображений $f_\xi : X_\xi \longrightarrow X'$, заданных для каждого $\xi \in \Xi$, существует такое непрерывное отображение $f : X \longrightarrow X'$, что $f_\xi = fi_\xi$.*

Доказательство. Отображение f определяется стандартно, а именно $f(x) = f_\xi(x_\xi)$, где $x = i_\xi$ так, что $f_\xi = f(i_\xi)$. Остается только доказать, что это отображение непрерывно. Пусть $s = (x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ – произвольная направленность, сходящаяся к x в X. Без нарушения общности можно считать, что эта направленность содержится в некотором множестве $i_\xi(X_\xi)$. Тогда эту сходимость можно поднять в X_ξ и затем перенести посредством f_ξ

в X'. В силу соотношения $f_\xi = f(i_\xi)$, полученная таким образом направленность является направленностью $(f(x_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$, сходящейся к $f(x)$.

6. Факторпространство и подпространство. Пусть X – некоторое слабо топологическое пространство, X' – множество и $h : X \longrightarrow X'$ – отображение множества точек пространства X *на* множество X'. Структуру $\mathcal{O}$ окрестностей можно перенести посредством отображения h на множество X', положив $O \in \mathcal{O}'_{x'} \iff h^{-1}(O) \in \cap\mathcal{O}_x|h(x) = x'$. Слабо топологическое пространство $(X', \mathcal{O}')$ называется h-факторпространством слабо топологического пространства X и обозначается через X/h. Можно рассматривать также R-факторпространства X/R, где R – отношение эквивалентности, определенное на X. В качестве множества X' берется в этом случае множество всех классов R-эквивалентности, а отображение h сопоставляет каждой точке $x \in X$ класс эквивалентности, которому она принадлежит.

Рассмотрим некоторые свойства факторпространств. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – непрерывное отображение слабо топологических пространств. $X' = f(X)$, $i : X' \longrightarrow Y$ – вложение множеств, $h|X \longrightarrow X/f$. Имеем, очевидно, $f = ih$ и можно доказать, что непрерывность отображения f влечет непрерывность отображения i и, наоборот, непрерывность i влечет непрерывность f. Представление отображения f в виде композиции $f = ih$ называется *каноническим разложением непрерывного отображения.* Представляет определенный интерес изучение связи между свойствами слабо топологических пространств $X, X/R$ и отношений эквивалентности R.

7. Компактность и локальная компактность. Так как структура открытых множеств слабо топологического пространства не описывает его слабую топологическую структуру, определение компактности и локальной компактности следует давать в терминах окрестностей.

Определение. *Слабо топологическое пространство $(X, \mathcal{O})$ называется комактным, если из любого его покрытия $(O_x|x \in X)$ окрестностями точек можно выбрать конечное покрытие.*

Понятие компактности можно, конечно, сформулировать в терминах замыканий, внутренностей, далеких от точек множеств, близких к точкам множеств и сходимостей. Нетрудно заметить, что в компактном слабо топологическом пространстве всякое открытое поерытие содержит конечное подпокрытие.

Определение. *Отделимое компактное слабо топологическое пространство называется компактом.*

Определение. *Слабо топологическое пространство $(X, \mathcal{O})$ называется локально компактным, если в любой окрестности любой его точки содержится ее окрестность с компактным замыканием.*

Теория компактных и локально компактных слабо топологических пространств в общем аналогична соответствующей теории топологических пространств.

8. Связность и локальная связность. Естественным переносом понятия связности топологических пространств на слабо топологические пространства является следующее определение.

Определение. *Слабо топологическое пространство называется связным, если в нем не существует собственное непустое множество, замыкание которого совпадает с внутренностью.*

Нетрудно заметить, однако, что если $\mathrm{cl}A = \mathrm{int}A$ для некоторого множества A слабо топологического пространства X, то A оказывается одновремено открытым и замкнутым в X множеством. Таким образом понятие связности слабо топологического пространства совпадает с понятием связности топологического пространства. С другой стороны, понятие локальной связности слабо топологического пространства не совпадает с понятием локальной связности топологического пространства.

Определение. *Слабо топологическое пространство называется локально связным, если в каждой окрестности любой точки содержится ее связная окрестность.*

Это условие сильнее, чем обычное условие локальной сиязности.

9. Структуры непрерывности. В предыдущем параграфе были отмечены некоторые особенности топологических пространств, выделяющие их в классе слабо топологических пространств. Это, прежде всего, возможность задания их структурами открытых или структурами замкнутых множеств. Все остальные, рассмотренные там структуры, можно использовать для задания любых слабо топологических пространств. Таким образом структурная возможность введения слабо топологических, но не топологических пространств, уже чем возможность введения топологических пространств. Еще больше сужается структурная возможность введения квазитопологических пространств, не являющихся слабо топологическими пространствами. Такие пространства можно вводить только структурами сходимости направленностей. Тем самым структуры сходимости направленностей оказываются единственным универсальным способом задания квазитопологических пространств.

§4. Категории непрерывности

В этом параграфе будут рассмотрены детализации и вложения всех категорий непрерывности.

1. Категория Top. Категория Top топологических пространств и их непрерывных отображений является детализацией категории Set множеств и их отображений. При этом под топологической структурой пространства мы будем понимать множество τ всех его открытых множеств. Функтор накрытия сопоставляет каждому топологическому пространству (X, τ) множество X его точек, каждому непрерывному отображению топологических пространств – отображение множеств его точек. Нетрудно доказать, что для этой детализации выполняются все аксиомы.

I. Точной верхней границей любого множества топологических структур, определенных на одном и том же множестве точек, является наименьшая содержащая их топологическая структура на том же множестве точек.

I$'$. Точной нижней границей любого множества топологических структур, определенных на одном и том же множестве, является их пересечение.

II. Для произвольно фиксированного множества отображений, накрывающих некоторое отображение f множества X в множество Y их точной верхней границей будет однозначно определенное, накрывающее f, отображение точной верхней границы областей задания в точную верхнюю границу областей значений.

II$'$. Аналогично II, но рассматриваются точные нижние границы.

III и III$'$. Левые и правые накрытия отображения $f : X \longrightarrow Y$

множеств существуют, для этого достаточно рассмотреть f-прообразы и, соответственно, f-образы соответствующих топологических структур.
IV. Следует из соотношения $(gf)^{-1}(G) = g^{-1}(f^{-1}(G))$.
V. Следует из определения морфизмов в Top.

Что касается вложений $\mathcal{I} : \mathrm{Set} \longrightarrow \mathrm{Top}$, то существование максимального $\mathcal{I}_{\max}$ и минимального $\mathcal{I}_{\min}$ вложений очевидно – дискретная топологическая структура максимальна, тривиальная (кодискретная) топологическая структура минимальна.

2. Категория WTop. Категория WTop является детализацией категории Top. При этом под слабо топологической структурой пространства мы будем понимать множество $\mathcal{O}$ всех фильтров окрестностей его точек. Функтор накрытия сопоставляет каждому слабо топологическому пространству $(X, \mathcal{O})$ топологическое пространство (X, τ). В этом топологическом пространстве открытым являются множества, содержащие какие-нибудь окрестности каждой своей точки. Соответствие отображений очевидно.

Ситуация с детализацией $\mathcal{P} : \mathrm{WTop} \longrightarrow \mathrm{Top}$ несколько сложнее, чем с детализацией $\mathcal{P} : \mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Set}$. В частности, здесь аксиома I не имеет места, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$. Определим на этом множестве слабо топологическую структуру, для которой фильтры окрестностей точек содержат (кроме тривиальной) следующие окрестности: $O_1 = \{1, 2\}$, $O_2 = \{2, 3\}$, $O_3 = \{3, 1\}$. Нетрудно проверить, что этой слабо топологической структуре на X соответствует тривиальная топологическая структура. Рассмотрим еще одну слабо топологическую структуру на X, для которой фильтры окрестностей точек содержат (кроме тривиальной) следующие окрестности: $O_1 = \{1, 3\}$, $O_3 = \{3, 2\}$, $O_2 = \{2, 1\}$. Этой слабо топологической структуру также соответствует тривиальная топологическая структура. Таким образом обе эти слабо топологические структуры накрывают одну и ту же (тривиальную) топологическую структуру. Каждая точка точной верхней границы рассматриваемых слабо топологических структур должна иметь в качестве своих окрестностей все ее окрестности в этих пространствах. Окрестностями точки 1 будут множества $\{1, 2\}$ и $\{1, 3\}$, следовательно окрестностью будет их пересечение $\{1\}$. Аналогично доказывается, что окрестностью точки 2 будет множество $\{2\}$, аокрестностью точки 3 будет множество $\{3\}$. Таким образом, этому слабо топологическому пространству соответствует не тривиальная, а дискретная топологическая структура на X.

Из этого примера следует, что аксиома II также не имеет места.

3. Категория $QTop$**.** Категория $QTop$ является детализацией категории $WTop$ и, следовательно, детализацией категории Top. Функтор накрытия $\mathcal{P} : QTop \longrightarrow WTop$ сопоставляет каждому квазитопологическому пространству $(X, \mathcal{S})$ слабо топологическое пространство $(X, \mathcal{O})$. Структура $\mathcal{O}$ окрестностей любого слабо топологического пространства может быть описана в терминах сходимости направленностей, поэтому переход от $(X, \mathcal{S})$ к $(X, \mathcal{O})$ можно представить, как переход к $(X, \mathcal{S}')$, где $\mathcal{S}'$ является минимальным расширением структуры сходимости $\mathcal{S}$, удовлетворяющем аксиоме конфинальности по носителям. В связи с этм нетрудно построить пример, показывающий, например, что аксиома детализации I здесь не выполняется. В категории $QTop$ проблема существования минимальной допустимой квазитопологии на $C(Y, Z)$ решается.

Теорема. *Для любых квазитопологических структур на Y и на Z существует на $C(Y, Z)$ минимальная допустимая квазитопологическая структура.*

Доказательство. Определим на $C(Y, Z)$ совокупность сходимостей $(f_\lambda | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow f$, для которых выполняется следующее условие:
для любой сходимости $(y_\lambda | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow y$ в Y имеет место сходимость $(f_\lambda(y_\lambda) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow f(y)$.

Выполнение аксиомы стационарности для так определенной сходимости следует из непрерывности всех отображений $f : Y \longrightarrow Z$. Проверим выполнение слабой аксиомы конфинальности. Пусть Λ' является конфинальной частью направленного упорядоченного множества Λ и направленность $(f_\lambda | \lambda \in \Lambda')$ конфинальна по носителям некоторой системе направленностей вида $(g_\lambda | \lambda \in \Lambda)$, сходящихся к отображению $f : Y \longrightarrow Z$. Пусть $(y_\lambda | \lambda \in \Lambda') \longrightarrow y$ – произвольная сходимость в Y. По определению сходимости в $C(Y, Z)$,

$$(g_\lambda(y_\lambda) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow f(y).$$

для всех таких сходимостей. Но тогда направленность $(f_\lambda(y_\lambda)|\lambda \in \Lambda')$ будет конфинальна по носителям этой системе направленностей в Y и потому будет сходиться к $f(y)$.

Замечание. Если квазитопологии на Y и Z определены некоторыми топологическими структурами, то минимальная допустимая квазитопология на $C(Y, Z)$ существует в более широком классе структур. Достаточно, например, выполнения в этом классе следующего ослабления аксиомы 2:
(аксиома конфинальности) если направленность $(f_\lambda|\lambda \in \Lambda')$ является конфинальной частью направленности $(f_\lambda|\lambda \in \Lambda)$, сходящейся к f, то она также сходится к f.

Глава IV

Структуры расширений

§1. Расширения топологических пространств

Существует обширная литература, посвященная расширениям топологических пространств. Разные авторы предлагали свои методы построения расширений, обладающих теми или иными интересующими их свойствами. Здесь будут изложены универсальные методы, основанные на применении структур близости, структур смежности, структур соседства и равномерных структур, объединенных общим названием *структур расширений*.

1. Регулярные расширения. Основными объектами структурной теории расширений топологических пространств мы будем считать здесь так называемые *регулярные расширения*.

Определение. *Топологическое пространство X' называется расширением топологического пространства X, если X является подпространством X' и замыкание $\mathrm{cl}X$ множества X в топологическом пространстве X' есть все X'. Множество $X' \setminus X$ будем называть наростом этого расширения.*

Определение. *Два расширения топологического пространства X называются эквивалентными, если существует их гомеоморфизм, тождественный на X.*

Определение. *Расширение X' топологического пространства X называется строгим (по Стону) расширением, если замыкания в X' подмножеств множества X образуют в X' базу замкнутых множеств.*

Теорема. *Понятие строгости расширения наследственно.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$X \subset X' \subset X'',$$

вложенных друг в друга, топологических пространств. Пусть X'' является строгим расширением пространства X, тогда X' является расширением пространства X, докажем, что оно будет строгим расширением. Пусть F' – произвольное, замкнутое в X', множество. Тогда $\mathrm{cl}_{X''}F'$ является пересечением некоторой совокупности множеств $\mathrm{cl}_{X''}F$, где F – соответствующие замкнутые в X

множества, и $F' = X' \cap \mathrm{cl}_{X''} F'$ является пересечением некоторой совокупности множеств $\mathrm{cl}_{X'} F$. Наследственность понятия строгости расширения доказана.

Замечание. На первый взгляд кажется, что понятие строгости расширения транзитивно, но следующий пример показывает, что это не так.

Пример. Пусть X – внутреннесть круга D без некоторого радиуса OA, X' – внутреннесть этого круга, X'' – внутреннесть D и точка A. Топологическая структура внутренности круга обычная, особенность возникает при определении топологической структуры пространства X''.

Полуинтервал $[OA)$ рассматривается, как замкнутое в X'' множество, любая последовательность точек в X, сходящаяся к точке A в обычной топологии, сходится к ней и в X''. Нетрудно доказать, что X' является строгим расширением пространства X, X'' является строгим расширением пространства X', но не является строгим расширением пространства X.

Определение. *Точки x, y пространства X' топологически различимы из его подпространства X, если существует такое множество $A \subset X$, что его замыкание в X' содержит одну из этих точек и не содержит другую.*

Определение. *Расширение X' топологического пространства X называется точным расширением, если любые две различные точки x, y из X', из которых хоть одна не принадлежит X, топологически различимы в X' из X.*

Теорема. *Понятие точности расширения наследственно.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$X \subset X' \subset X'',$$

вложенных друг в друга, топологических пространств. Пусть X'' является точным расширением пространства X, тогда X' является расширением пространства X, докажем, что оно будет точным расширением. Пусть x, y – несовпадающие точки пространства X', из которых хоть одна не принадлежит X. Так как эти точки принадлежат X'' и хоть одна из них не принадлежит X, то в X

найдется такое замкнутое в X множество F, что $\mathrm{cl}_{X''}F$ содержит одну из этих точек и не содержит другую. Для $F \subset X'$ имеет место равенство $X' \cap \mathrm{cl}_{X''}F = \mathrm{cl}_{X'}F$, поэтому $\mathrm{cl}_{X'}F$ также содержит одну из рассматриваемых точек и не содержит другую. Наследственность понятия точности расширения доказана.

Определение. *Расширение X' топологического пространства X называется регулярным расширением, если оно строгое и точное расширение этого пространства.*

Пусть Y некоторое расширение топологического пространства X. Рассмотрим на Y отношение "точки x и y топологически неразличимы из X". Это отношение рефлексивно (любая точка x не различима из X от самой себя), симметрично (определение неразличимости симметрично относительно рассматриваемых точек) и транзитивно (если замыкание в Y некоторого множества $A \subset X$ одновременно содержит или не содержит точки x, y и точки y, z, то оно одновременно содержит или не содержит точки x, z). Таким образом, это отношение является отношением эквивалентности и все множество Y разбивается на непересекающиеся классы топологически неразличимых из X точек. В каждом из таких классов, не имеющих общих точек с X, выбираем произвольно по точке и образуем множество X', состоящее из этих точек и точек пространства X.

На множестве X' можно рассмотреть топологическую структуру подпространства топологического пространства Y и замыкания множеств $A \subset X$ в этом подпространстве. Выбрав эти замыкания в качестве базы замкнутых множеств, мы получим расширение X' топологического пространства X. Это расширение мы назовем *регуляризацией* исходного расширения Y.

Теорема. *Регуляризация X' произвольного расширения Y топологического пространства X является его регулярным расширением.*

Доказательство. Топологическое пространство X' является строгим расширением топологического пространства X по определению его топологической структуры. Для доказательства его точности, рассмотрим две произвольные точки множества X', из которых хоть одна, например y, не принадлежит X. Эта точка выбиралась из некоторого класса топологической неразличимости, не имеющего общих точек с X и, если $x \in X$, то x не принадлежит этому классу, если же $x \notin X$, то она выбиралась из другого класса неразличимости. Таким образом X' является строгим и точным расширением топологического пространства X, то есть его регулярным расширением.

Мы доказали, что от любого расширения топологического пространства X можно перейти к его регуляризации, являющейся регулярным расширением. С другой стороны возможна и обратная процедура, состоящая в следующем:
Рассмотрим какое-нибудь регулярное расширение X' топологического пространства X. Присоединим к каждой точке x множества X' произвольное множество A_x так, что каждое из этих множеств не имеет общих точек ни с другими присоединяемыми множествами ни с множеством X'. Образуем, теперь, множество Y, состоящее из всех точек множества X' и из всех точек присоединяемых множеств A_x. Это первая (теоретико-множественна) часть процедуры. Введем, теперь, топологическую структуру на Y. Замыканиями $\mathrm{cl}_Y A$ множеств $A \subset X$ в Y будем считать их замыкания $\mathrm{cl}_{X'} A$ в X', к которым присоединены точки множеств A_x, взятые для всех точек $x \in \mathrm{cl}_{X'} A$. В качестве базы замкнутых в Y множеств можно взять, теперь, все такие замыкания $\mathrm{cl}_Y A$ и некоторые множества, получаемые произвольным присоединением к этим замыканиям каких-нибудь подмножеств нароста $Y \setminus X$. Это вторая (топологическая) часть процедуры. Полученное такой конструкцией расширение будем называть *искажением* исходного регулярного расширения.

Теорема. *Любое расширение произвольного топологического пространства является некоторым искажением его регуляризации, любое регулярное расширение является регуляризацией произвольного его искажения.*

Доказательство. Пусть Y – произвольное, не обязательно регулярное, расширение топологического пространства X. Его регуляризация строится на множестве X', состоящем из точек множества X и точек, взятых по одной из классов топологической неразличимости, не имеющих общих точек с X. Обратный переход от множества X к множеству Y состоит в присоединению к X некоторых множеств A_x для всех $x \in X'$. Если точка x выбиралась из класса топологической неразличимости, не имеющего общих точек с X, то множество A_x состоит из остальных точек этого класса. Если же точка x принадлежит X, то есть принадлежит некоторому классу неразличимости, имеющему непустое пересечение с X, то возмиожны два варианта. Либо она единственная точка из X, принадлежащая этому классу, и тогда опять A_x состоит из остальных точек этого класса, либо таких точек несколько. Во втором случае для одной из этих точек множество A_x состоит из остальных точек этого класса, не принадлежащих X, а для других точек множество A_x пусто. Тем самым, первая часть процедуры искажения, состоящая в присоединении множеств A_x, восстановит множество Y. Заметим, теперь, что исходная топологическая структура на Y определяла на X' структуру регулярного расширения топологического пространства X замыканиями $\mathrm{cl}_{X'}A = (\mathrm{cl}_Y A) \cap X'$ для всех $A \subset X$, образующими базу его замкнутых множеств. Но все замыкания $\mathrm{cl}_Y A$ однозначно восстанавливаются по замыканиям $\mathrm{cl}_{X'}A$ присоединением соответствующих множеств A_x. Остальные замкнутые множества исходной топологической структуры на Y получаются присоединением подмножеств нароста.

Пусть, теперь, X' – произвольное регулярное расширение топологического пространства X и Y – некоторое его искажение, полученное присоединением к X' каких-то множеств A_x для всех точек $x \in X'$ с последующей топологизацией множества Y. Эта топологизация такова, что каждое множество $\{x\} \cup A_x$ является в Y классом топологической неразличимости из X для всех точек $x \in (X' \setminus X)$. Именно эти точки можно выбрать из каждого такого класса при образовании регуляризации, получив таким образом исходное множество X'.

Эта теорема демонстрирует структурную роль регулярных расширений среди всех расширений топологических пространств. Не менее важной является их категорная роль, которую мы рассмотрим несколько позже.

2. Построение регулярных расширений. Рассмотрим произвольное расширение X' топологического пространства X. Введем для точек $x \in X'$ системы $\omega(x)$ и $\gamma(x)$ непустых открытых и, соответственно, замкнутых множеств топологического пространства X. Условимся обозначать через G, G', F, F' открытые в X, открытые в X', замкнутые в X, замкнутые в X' множества. Полагаем

$$\omega(x) = \{G' \cap X | x \in G'\}$$

$$\gamma(x) = \{F | x \in F' = \mathrm{cl}F\}.$$

Определение. *Систему $\omega(x)$ будем называть открытым следом точки $x \in X'$ в X, систему γ будем называть замкнутым следом точки x в X.*

Система $\omega(x)$ обладает следующими свойствами:
1. $G_1 \in \omega(x), G_1 \subset G_2 \Longrightarrow G_2 \in \omega(x)$,
2. $G_1 \in \omega(x)$ и $G_2 \in \omega(x) \Longrightarrow G_1 \cap G_2 \in \omega(x)$.

Любую непустую систему ω непустых открытых в X множеств, обладающую этими свойствами, будем называть *открытым фильтром* в топологическом пространстве X.

Система $\gamma(x)$ обладает следующими свойствами:
1. $F_1 \in \gamma(x),\ F_1 \subset F_2 \Longrightarrow F_2 \in \gamma(x)$.
2. $F_1 \cup F_2 \in \gamma(x), \Longrightarrow F_1 \in \gamma(x)$ или $F_2 \in \gamma(x)$.

Любую непустую систему γ непустых замкнутых в X множеств, обладающую этими свойствами, будем называть *замкнутым кофильтром* в топологическом пространстве X.

Между открытыми фильтрами ω и замкнутыми кофильтрами γ в произвольно фиксированном топологическом пространстве X имеется каноническое взаимно однозначное соответствие (отношение двойственности), а именно:

$$\gamma(\omega) = \{F | X \setminus F \notin \omega\},$$

$$\omega(\gamma) = \{G | X \setminus G \notin \gamma\}.$$

Нетрудно доказать, что

$$\gamma(\omega(\gamma)) = \gamma,\ \omega(\gamma(\omega)) = \omega.$$

В частности, для любой точки $x \in X'$ расширения топологического пространства X справедливы соотношения

$$\gamma(\omega(x)) = \gamma(x), \quad \omega(\gamma(x)) = \gamma(x).$$

Следующая конструкция всегда приводит к регулярному расширению произвольно фиксированного топологического пространства X.

Берется какое-нибудь множество Ω открытых фильтров в X, не содержащее фильтров вида $\omega(x)$ для $x \in X$. Это множество присоединяется к множеству X. На полученном таким образом множестве $X' = X \cup \Omega$ вводится топологическая структура, открытую базу которой составляют все множества $G \cup \{\omega | G \in \omega \in \Omega\}$.

Без особого труда доказывается, что построенное топологическое пространство X' является регулярным расширением заданного топологического пространства X. Его называют расширением, полученным *присоединением* к X множества Ω открытых фильтров в X.

Двойственной конструкцией строится регулярное расширение X' получаемое присоединением к X какого-нибудь множества Γ замкнутых кофильтров в X, не содержащее кофильтров вида $\gamma(x)$. Это множество присоединяется к X. На полученном множестве $X' = X \cup \Gamma$ вводится топологическая структура, для которой все множества вида $F \cup \{\gamma | F \in \gamma \in \Gamma\}$ составляют базу замкнутых множеств.

Теорема. *Любое регулярное расширение топологического пространства X, канонически гомеоморфно расширению, полученному присоединением к X некоторого множества открытых фильтров или же некоторого множества замкнутых кофильтров.*

Доказательство. Пусть X' является регулярным расширением топологического пространства X. Для любой точки $x \in X'$ определен открытый фильтр $\omega(x) = \{G' \cap X | x \in G'\}$. Пусть $\Omega = \{\omega(x) | x \in X' \setminus X\}$. Фильтры множества Ω взаимно однозначно соответствуют точкам множества $X' \setminus X$, в силу топологической различимости из X этих точек (разным точкам соответствуют разные фильтры). С другой стороны, при этом соответствии, каждому элементу $G \cup \{\omega | G \in \omega \in \Omega\}$ открытого базиса расширения, полученного присоединением множества Ω открытых фильтров, взаимно однозначно соответствует элемент $G' = X' \setminus \mathrm{cl}_{X'}(X \setminus G)$ открытого базиса расширения X' топологического пространства X, что и доказывает теорему.

Определение. *Регулярное расширение называется полным расширением топологического пространства, если оно не содержится в другом регулярном расширении того же пространства.*

Замечание. Нетрудно заметить, что для любого топологического пространства X существует единственное (с точностью до эквивалентности) полное его регулярное расширение, а именно расширение $X'_{\max}$, определяемое, совокупностью всех открытых фильтров в X, отличных от $\omega(x)$ для всех $x \in X$. Любое другое регулярное расширение пространства X эквивалентно расширению, содержащемуся в $X'_{\max}$

3. Категория регулярных расширений. Перейдем теперь к изучению связи между расширениями топологических пространств.

Определение. *Под категорией расширений мы будем понимать здесь категорию, объектами которой будут пары (X, X') топологических пространств и их расширений, а морфизмами (непрерывными отображениями)– пары $(f, f') : (X, X') \longrightarrow (Y, Y')$ таких непрерывных отображений, что $f' : X' \longrightarrow Y'$ является продолжением отображения $f : X \longrightarrow Y$, то есть на X оба отображения совпадают. Категорию расширений будем обозначать через* **ETop** *или просто* **ET**.

Замечание. Нетрудно заметить, что расширения и их непрерывные отображения действительно образуют категорию. Эту категорию можно рассматривать, как детализацию категории топологических пространств и их непрерыаных отображений, функтор накрытия которой сопоставляет каждому расширению (X, X') топологическое пространство X, а каждому непрерывному отображению $(f, f') : (X, X') \longrightarrow (Y, Y')$ расширений сопоставляет непрерывное отображение $f : X \longrightarrow Y$. Нетрудно заметить также, что категория топологических пространств и их непрерывных отображений является естественным ретрактом категории расширений и их непрерывных отображений. Функтор вложения сопоставляет каждому топологическому пространству X тривиальное расширение (X, X), а каждому непрерывному отображению $f : X \longrightarrow Y$ топологических пространств отображение $(f, f) : (X, X) \longrightarrow (Y, Y)$ расширений топологических пространств.

Как обычно в классе всех расширений, накрывающих фиксированное топологическое пространство X, вводится отношение порядка при котором $(X, X') \leq (X, X'')$, если существует непрерывное отображение $f : X'' \longrightarrow X'$, являющееся продолжением тождественного отображения X на себя. Существование такого продолжения – одна из известных проблем теории расширений топологических пространств. В более общей постановке эта проблема формулируется следующим образом:
При каких условиях непрерывное отображение одного топологического пространства в другое продолжимо до непрерывного отображения их расширений.

Замечание. К этой проблеме мы вернемся несколько позже, а сейчас отметим только, что структурное ее решение естественно искать в классе регулярных расширений.

Определение. *Полная подкатегория категории* **ETop**, *состоящая из регулярных расширений топологических пространств и их непрерывных отображений, называется категорией регулярных расширений и обозначается через* **RTop** *или* **RT**.

Замечание. Категория регулярных расширений и их непрерывных отображений является, очевидно, детализацией категории топологическмих пространств и их непрерывных отображений. С другой стороны, так как для любого топологического пространства X расширение (X, X) является регулярным расширением, категория **Top** – ретракт категории **RTop**.

4. Правильные расширения. Еще более узкий класс расширений составляют, так называемые, правильные расширения.

Определение. *Регулярное расширение топологического пространства называется его правильным расширением, если каждое одноточечное множество нароста является замкнутым в этом расширении множеством.*

Регулярные расширения задаются непосредственным описанием множества точек нароста их следами (открытыми или замкнутыми) в расширяемом пространстве, то есть описанием некоторого множества открытых фильтров или соответствующего множества замкнутых кофильтров. При этом правильные расширения характеризуются следующим утверждением.

Теорема. *Расширение, полученное присоединением некоторого множества фильтров (кофильтров), является правильным расширением тогда и только тогда, когда эти фильтры (кофильтры) не содержат друг друга.*

Доказательство. Пусть X' – произвольное, не обязательно правильное, расширение топологического пространства X, полученное присоединением к X некоторого множества замкнутых кофильтров, и γ – точка его нароста. Тогда, по построению такого расширения, условия $F \in \gamma$ и $\gamma \in \mathrm{cl}_{X'} F$ эквивалентны. Если X' – правильное расширение и γ – точка его нароста, то $\{\gamma\} = \cap \mathrm{cl}_{X'} F | F \in \gamma$ и поэтому для любой другой точки нароста (кофильтра) найдется множество $F \in \gamma$ ей не принадлежащее, то есть этот кофильтр не содержит γ. С другой стороны, если никакие два присоединенных к X кофильтра не содержатся друг в друге, то $\{\gamma\} = \cap \mathrm{cl}_{X'} F | F \in \gamma$ и поэтому расширение правильное.

Замечание. Это утверждение позволяет предложить процедуру построения правильных расширений последовательным присоединением к расширяемому топологическому пространству фильтров (кофильтров).

Пусть X какое-нибудь топологическое пространство. Выбираем, например, произвольный открытый фильтр в X и отмечаем все такие фильтры, содержащие выбранный фильтр или содержащиеся в нем. Из множества не отмеченных открытых фильтров выбираем опять произвольный, отмечаем содержащие его или содержащиеся в нем открытые фильтры и так далее. В конце концов мы получаем систему открытых фильтров, определяющую правильное расширение топологического пространства X. Нетрудно заметить, что полученное таким образом правильное расширение будет полным расширением. Можно, однако, остановиться на каком-то этапе этой процедуры, получив неполное расширение. Нетрудно также сообразить, что любое правильное расширение может быть получено этой процедурой.

§2. Структурное описание расширений

1. Предварительные замечания. Рассматривая различные расширения топологических пространств, мы заметили, что регулярные расширения являются среди них основными объектами. Они имеют непосредственное описание в терминах открытых (замкнутых) множеств расширяемого топологического пространства. Однако, как мы увидим в этом параграфе, правильные расширения могут быть эффективно описаны не простым описанием присоединяемых при расширении точек, а посредством специальных структур, имеющих и самостоятельное значение. Такими структурами являются структуры *близости*, структуры *смежности*, структуры *соседства* и *равномерные* структуры, которые могут быть определены на любом топологическом пространстве.

Структуры близости состоят из пар замкнутых множеств, структуры смежности состоят из конечных систем замкнутых множеств, структуры соседства состоят из призвольных систем замкнутых множеств, равномерные структуры состоят из систем открытых множеств, образующих покрытия расширяемого топологического пространства.

Замечание. Вообще говоря, существуют три существенно различных понятия равномерной структуры. Первое из них является непосредственым обобщением понятия метрической равномерности, связанной с понятием равномерно непрерывной функции. Затем идет, упомянутое выше понятие равномерности, как системы открытых покрытий и, наконец, понятие равномерности, как системы окрестностей диагонали (окружений диагонали), которое мы рассмотрим позже.

В литературе все эти структуры определяются часто не на топологических пространствах, а на множествах, и именно эти структуры определяют на этих множествах топологические структуры. Так как мы будем пользоваться структурами для задания соответствующих расширений *топологических пространств*, то нам нет необходимости в такой общности. Более того, задание рассматриваемых здесь структур на топологических пространствах, а не на множествах, позволяет избежать введения несимметричных структур.

2. Структуры (отношения) близости. Мы начнем с определения понятия отношения близости.

Определение. *Пусть X – топологическое пространство. Будем говорить, что отношение δ для пар непустых, замкнутых в X множеств является отношением близости, если выполняются следующим условия:*
1. $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset \Longrightarrow \delta(F_1, F_2)$,
2. *Если каждый элемент пары F_1', F_2' содержит какой-нибудь элемент пары F_1, F_2, то $\delta(F_1, F_2) \Longrightarrow \delta(F_1', F_2')$,*
3. $\delta(F_1 \cup F_2, F) \Longrightarrow \delta(F_1, F)$ *или* $\delta(F_2, F)$.
Если $\delta(F_1, F_2)$ не имеет места, то будем писать $\overline{\delta}(F_1, F_2)$ и говорить, что множества F_1 и F_2 не δ-близки.

Определение. *Пусть X – некоторое топологическое пространство и δ – какое-нибудь отношение близости на X. Пару (X, δ) будем называть пространством близости.*

Замечание. Отношение близости δ, заданное на топологическом пространству X, можно понимать, как совокупность всех пар (F_1, F_2) замкнутых в X множеств, для которых имеет место $\delta(F_1, F_2)$. Но такая совокупность есть *структура* на множестве X, поэтому можно говорить о структуре δ, определенной на множестве X. Заметим также, что так понимаемая структура δ определяет на X исходную топологическую структуру замкнутых множеств, как совокупность всех множеств, входящих в пары (F_1, F_2), для которых $\delta(F_1, F_2)$ имеет место и пустого множества. Можно говорить поэтому, что любое отношение близости, определенное на топологическом пространстве X, *задано на множестве* X и, соответственно, считать пространством близости пару (X, δ), где X – некоторое множество.

Определение. *Непрерывное отображение $f : X \longrightarrow X'$ будем называть отображением пространства близости (X, δ) в пространство близости (X', δ') $(f : (X, \delta) \longrightarrow (X', \delta'))$, если f-прообразы не δ'-близких множеств являются не δ-близкими множествами $(\overline{\delta'}(F'_1, F'_2) \Longrightarrow \overline{\delta}(f^{-1}(F'_1), f^{-1}(F'_2))$.*

Замечание. Нетрудно убедиться в том, что пространства близости и их отображения образуют категорию, которую мы будем обозначать через **Prox**, являющуюся детализацией категории **Top**. Функтор накрытия $\mathcal{P} : Prox \longrightarrow Top$ сопоставляет каждому пространству близости (X, δ) топологическое пространство X и каждому отображению $f : (X, \delta) \longrightarrow (X', \delta')$ пространств близости – отображение $f : X \longrightarrow X'$ топологических пространств. На множестве всех пространств близости, накрывающих одно и то же топологическое пространство можно, как обычно, ввести отношение порядка, положив $(X, \delta) \leqslant (X, \delta')$, если тождественное отображение $i : X \longrightarrow X$ является отображением (X, δ') в (X, δ).

Определение. *Отношение близости δ на топологическом пространстве X называется отделимым, если для любых не δ-близких множеств F_1, F_2 найдутся такие множества F'_1, F'_2, что $F'_1 \cup F'_2 = X$, $F_1 \subset F'_1$, $F_2 \subset F'_2$, $\overline{\delta}(F_1, F'_2)$, $\overline{\delta}(F_2, F'_1)$.*

Пример. Пусть X – произвольное топологическое пространство и δ – бинарное отношение по пересечениям, то есть $\delta(F_1, F_2) \Longleftrightarrow F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Условия 1–3 очевидно выполняются и так определенное отношение будет отношением близости. Однако оно не обязательно будет отделимым отношением близости.

Определение. *Топологическое пространство называется нормальным, если любые его непересекающиеся замкнутые множества отделимы открытыми множествами, то есть для любых его непересекающихся замкнутых множеств F_1, F_2 найдутся такие открытые множества G_1, G_2 что $F_1 \subset G_1, F_2 \subset G_2, G_1 \cap G_2 = \emptyset$.*

Теорема. *Отношение δ близости по пересечениям на топологическом пространстве X будет отделимым тогда и только тогда, когда X – нормальное топологическое пространство.*

Доказательство. Пусть X – нормальное топологическое пространство и F_1, F_2 – непересекающиеся замкрутые в X множества. Тогда, в силу нормальности X, найдутся такие открытые в X множества G_1 и G_2, что $F_1 \subset G_1, F_2 \subset G_2, G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Положим $F_1' = X \setminus G_2, F_2' = X \setminus G_1$, тогда $F_1' \cup F_2' = X$, $F_1 \subset F_1'$, $F_2 \subset F_2'$, $\overline{\delta}(F_1, F_2')$, $\overline{\delta}(F_2, F_1')$. Тем самым доказано, что отношение близости по пересечениям на X отделимо. Путь теперь оношение близости по пересечениям на X отделимо. Воспользовавшись аналогичным рассуждением, можно доказать, что в этом случае X – нормальное пространство.

Пример. Другим, в каком-то смысле противоположным рассмотренному выше, примером является бинарное отношение, для которого $\delta(F_1, F_2)$ всегда имеет место. Это отношение является, как легко заметить, отношением близости.

Некоторые (не все!) правильные расширения можно построить по отношениям близости следующим методом.

Определение. *Рассматриваются системы γ замкнутых множеств топологического пространства X, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. *Если множества F_1, F_2 принадлежат γ, то $\delta(F_1, F_2)$ имеет место,*
2. *Если $F_1 \in \gamma$ и $F_1 \subset F_2$, то $F_2 \in \gamma$,*
3. *Если $F_1 \cup F_2 \in \gamma$, тогда или $F_1 \in \gamma$ или $F_2 \in \gamma$.*

Такие системы γ будем называть системами δ-близости.

Замечание. Системы δ-близости являются кофильтрами, в силу условий 2 и 3.

Определение. *Систему γ называют исчезающей, если $\cap F | F \in \gamma = \emptyset$.*

Определение. *Пусть δ – некоторое отношение близости, определенное на топологическом пространстве X и Γ_δ – множество всех исчезающих максимальных систем δ-близости. Расширение δX, полученное присоединением к X множества Γ_δ называется δ-расширением топологического пространства X и обозначается через δX.*

3. Структуры (отношения) смежности. Перейдем теперь к отношениям смежности. Пусть X – топологическое пространство. Мы будем рассматривать теперь конечные системы непустых, замкнутых в X, множеств.

Определение. *Пусть X–некоторое топологическое пространства и σ–отношение для конечных систем непустых, замкнутых в X, множеств, удовлетворяющее следующим условиям:*
1. *Если $\bigcap F|F \in \alpha$ не пусто, то $\sigma(\alpha)$ имеет место,*
2. *Если каждый элемент системы α' содержит какой-нибудь элемент системы α и $\sigma(\alpha)$ имеет место, то и $\sigma(\alpha')$ имеет место,*
3. *Если $\sigma(\alpha \vee \beta)$ имеет место, то имеет место $\sigma(\alpha)$ или $\sigma(\beta)$. Здесь $\alpha \vee \beta = \{A \cup B | A \in \alpha,\ B \in \beta\}$.*

Такое отношение для конечных систем замкнутых в X множеств будем называть отношением смежности, а системы, для которых отношение σ имеет место, называются системами σ-смежности.

Пара (X, σ), где σ является отношением смежности на топологическом пространстве X называется пространством смежности.

Замечание. Отношение смежности σ, заданное на топологическом пространству X, можно понимать, как совокупность всех конечных систем α непустых, замкнутых в X множеств, для которых имеет место $\sigma(\alpha)$. Но такая совокупность есть *структура* на множестве X, поэтому можно говорить о структуре σ, определенной на множестве X. Заметим также, что так понимаемая структура σ определяет на X исходную топологическую структуру замкнутых множеств, как совокупность всех замкнутых в X множеств, входящих в системы α, для которых $\sigma(\alpha)$ имеет место и пустого множества. Можно говорить поэтому, что любое отношение смежности, определенное на топологическом пространстве X, *задано на множестве* X и, соответственно, считать пространством смежности пару (X, σ), где X – множество.

Определение. *Непрерывное отображение $f : X \longrightarrow X'$ будем называть отображением пространства смежности (X, σ) в пространство смежности (X', σ') $(f : (X, \sigma) \longrightarrow (X', \sigma'))$, если f-прообразы не σ'-смежных множеств являются не σ-смежными множествами.*

Замечание. Нетрудно убедиться в том, что пространства смежности и их отображения образуют категорию, которую мы будем обозначать через **Cont**, являющуюся детализацией категории **Top**. Функтор накрытия $\mathcal{P} : Cont \longrightarrow Top$ сопоставляет каждому пространству смежности (X, σ) топологическое пространство X и каждому отображению $f : (X, \sigma) \longrightarrow (X', \sigma')$ пространств смежности – непрерывное отображение $f : X \longrightarrow X'$ топологических пространств.

Приведем простейшие примеры отношений смежности.

Пример. Пусть X – произвольное топологическое пространство и σ – отношение, определенное для всех конечных систем непустых, замкнутых в X множеств условием:
пусть α – произвольная конечная система непустых, замкнутых в X множеств. Тогда $\sigma(\alpha)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\cap F | F \in \alpha \neq \emptyset$. Это отношение назовем *отношением смежности по пересечениям*.

Пример. Пусть X – произвольное топологическое пространство. Будем считать, что $\sigma(\alpha)$ имеет место для *всех конечных систем* α непустых, замкнутых в X множеств.

Проверка выполнения условий отношений смежности в этих примерах тривиальна.

Замечание. Множество всех отношений смежности, определенных на произвольно фиксированном топологическом пространстве X, *можно упорядочить*, положив $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$, если для каждой конечной системы α непустых, замкнутых в X множеств из $\sigma_2(\alpha)$ следует $\sigma_1(\alpha)$. Нетрудно заметить, что при таком упорядочении, тождественное отображение $i : (X, \sigma_2) \longrightarrow (X, \sigma_1)$ будет отображением пространств смежности, то есть этот порядок совпадает с порядком на множестве всех пространств смежности, накрывающих топологическое пространство X.

Определение. *Систему α, для которой $\sigma(\alpha)$ имеет место будем называть системой σ-смежности. Более того систему γ, любая конечная подсистема которой является системой σ-смежности, будем также называть системой σ-смежности.*

Теорема. *Каждая система σ-смежности γ содержится в некоторой максимальной (по включению) системе σ-смежности.*

Доказательство. Пусть σ – некоторое отношение смежности на топологическом пространстве X и некоторая совокупность систем σ-смежности линейно упорядочена по включению. Рассмотрим объединение этих систем. Если конечная система α содержится в этом объединении, то она содержится в одной из объединяемых систем и, следовательно, является системой σ-смежности. Таким образом само объединение является системой σ-смежности. Отсюда, по лемме Цорна, следует существование максимальной системы σ-смежности, содержащей γ.

Теорема. *Каждая максимальная система σ-смежности является кофильтром.*

Доказательство. Пусть γ – максимальная система σ-смежности. Условие 1 выполняется, в силу условия 2 для систем σ-смежности. Докажем выполнение условия 2. Пусть α – произвольная конечная подсистема системы γ и множество $F_1 \cup F_2$ принадлежит γ. Предположим, что ни F_1 ни F_2 не принадлежат γ. Тогда, в силу максимальности системы γ, в ней найдутся такие конечные подсистемы α_1 и α_2, что ни $\beta_1 = \alpha_1 \cup \{F_1\}$ ни $\beta_2 = \alpha_2 \cup \{F_2\}$ не являются системами σ-смежности. Но тогда, в силу свойства 3 отношений смежности, не является системой смежности и $\beta_1 \vee \beta_2$. Но каждый элемент этой системы содержит какой-нибудь элемент системы $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \{F_1 \cup F_2\}$, поэтому и последняя не является системой σ-смежности, что противоречит условию $F_1 \cup F_2 \in \gamma$.

Определение. *Рассмотрим множество Γ_σ всех исчезающих максимальных систем σ-смежности, являющихся, как было только что доказано, кофильтрами, и расширение X' пространства X, полученное присоединением к X всех этих кофильтров. Это расширение будем называть σ-расширением и обозначать через σX.*

Замечание. Так как для любого топологического пространства X и любого отношения смежности σ на X, система Γ_σ состоит из *исчезающих* кофильтров и поэтому не содежит кофильтров $\gamma(x)$, расширение σX является правильным расширением.

Теорема. *Для любого топологического пространства X и любого отношения смежности σ на X, расширение σX является компактным топологическим пространством.*

Доказательство. Пусть γ' – произвольная центрированная система замкнутых в $X' = \sigma X$ множеств, то есть любая ее конечная подсистема имеет непустое пересечение. Рассмотрим систему γ_0, состоящую из всех замкнутых в X множеств F, замыкания которых $\mathrm{cl}_{X'} F$ содержат множества системы γ'. Заметим, прежде всего, что γ_0 является системой σ-смежности. Действительно, если α – конечная подсистема системы γ_0, то она состоит из множеств, замыкания которых в X' содержат некоторые множества системы γ', образующие конечную систему α'. Множества этой системы имеют непустое пересечение. Если это пересечение содержит точку $x \in X$, то x принадлежит всем множествам системы α и поэтому она является системой σ-смежности. Если же оно не содержит точек из X, то пересечение содержит какую-нибудь точку нароста, являющуюся максимальной исчезающей системой σ-смежности. По определению замыкания в X' замкнутых в X множеств, эта точка, как система σ-смежности, содержит все элементы системы α, поэтому и в этом случае система α является системой σ-смежности.

Итак, система γ_0 является системой σ-смежности. Если пересечение всех множеств, входящих в эту систему, не пусто, то и пересечение всех множеств, входящих в систему γ', не пусто. Если же пересечение всех множеств, входящих в эту систему пусто, то γ_0, являясь исчезающей системой, содержится в максимальной исчезающей системе σ- смежности γ. Все элементы системы γ_0 входят в систему γ, поэтому γ, как точка нароста, принадлежит всем множествам, образующим систему γ'. Таким образом элементы системы γ' имеют непустое пересечение. Так как γ' – произвольная центрированная система, то тем самым доказана компактность расширения σX.

Имеет место и обратное, в некотором смысле, утверждение.

Теорема. *Каждое правильное компактное расширение топологического пространства является его σ-расширением для некоторого отношения смежности σ.*

Доказательство. Пусть X' является правильным компактным расширением топологического пространства X. Рассмотрим следующее отношение σ для конечных систем α замкнутых в X множеств:
$\sigma(\alpha) \iff \cap \mathrm{cl}_{X'} A | A \in \alpha \neq \emptyset$ Проверка выполнения для σ условия 1 тривиальна, как и условия 2. Проверим выполнение условия 3. Систему, состоящую из замыканий в X' множеств некоторой системы γ будем обозначать через $\mathrm{cl}_{X'}\alpha$. Пусть $\sigma(\alpha \vee \beta)$ имеет место, то есть $\cap F' | F' \in \mathrm{cl}_{X'}(\alpha \vee \beta) \neq \emptyset$. Но $\mathrm{cl}_{X'}(\alpha \vee \beta) = \mathrm{cl}_{X'}(\alpha) \vee \mathrm{cl}_{X'}(\beta)$. Таким образом каждое множество $F' = A' \cup B'$, где $A' \in \mathrm{cl}_{X'}(\alpha)$, $B' \in \mathrm{cl}_{X'}(\beta)$ и их пересечение является объединением пересечений множеств A' и B', взятых по одному слагаемому из всех $A' \cup B'$. Хоть одно из таких пересечений должно быть непустым множеством. Если в такое пересечение входят все элементы системы α, то $\sigma(\alpha)$ имеет место, если же в этом пересечении нет какого-то элемента $A'_0 \in \alpha$, то во всех суммах $A'_0 \cup B'$ должны будут выбраны элементы системы β и поэтому $\sigma(\beta)$ имеет место.

4. Связь между отношениями близости и смежности. Между отношениями близости и отношениями смежности существует естественная связь.

Определение. *Пусть σ и δ – некоторые отношения смежности и, соответственно, близости, определенные на каком-то топологическом пространстве X. Будем говорить, что они согласованы, если $\sigma(F_1, F_2)$ и $\delta(F_1, F_2)$ одновременно имеют место или не имеют места для любой пары замкнутых в X множеств F_1, F_2. Можно говорить в этом случае, что δ является ограничением отношения σ на пары замкнутых в X множеств и писать $(X, \delta) = \mathcal{P}(X, \sigma) = (X, \mathcal{P}\sigma)$.*

Теорема. *Для каждого топологического пространства и любого отношения близости на нем существует согласованное с ним отношения смежности, причем среди отношений смежности, согласованных с фиксированным отношением близости, есть наибольшее и наименьшее.*

Доказательство. Для любого отношения близости мы введем сразу два, согласованных с ним отношения смежности, а именно: наибольшее $\sigma_{\max}$ и наименьшее $\sigma_{\min}$, которое называется *главным отношением смежности*. Пусть δ – некоторое отношение близости, определенное на топологическом пространстве X.

Будем считать, что $\sigma_{\max}(\alpha)$ имеет место, если найдутся такие δ-близкие множества F_1, F_2, что каждое множество системы α содержит F_1 или F_2.

Будем считать, что $\sigma_{\min}(\alpha)$ имеет место, если система α обладает следующим свойством:
из любых покрытий множеств системы α замкнутыми множествами можно выбрать по одному элементу из каждого покрытия так, что выбранные множества попарно δ-близки.

Докажем, что эти отношения для конечных систем непустых замкнутых в X иножеств являются отношениями смежности, то есть для них выполняются все три условмя смежности.
Условие 1:
если пересечение всех элементов системы α не пусто, то есть является непустым замкнутым в X множеством F, то каждый элемент системы α содержит множество F. Так как $\delta(F, F)$ имеет место, то имеет место и $\sigma_{\max}(\alpha)$.

При том же условии покрытия элементов системы α замкнутыми множествами являются покрытиями множества F, поэтому можно выбрать по одному элементу из каждого покрытия так, что выбранные множества имеют непустое пересечение и потому попарно δ-близки. Таким образом и $\sigma_{\min}(\alpha)$ имеет место.
Условие 2:
если кажый элемент системы $\alpha\prime$ содержит какой-нибудь элемент системы α и $\sigma_{\max}(\alpha)$ имеет место, то есть найдутся такие δ-близкие множества F_1, F_2, что каждое множество системы α содержит F_1 или F_2. Но тогда то же самое имеет место и для системы α' и поэтому $\sigma_{\max}(\alpha')$ имеет место.

Покрытия элементов системы α' являются покрытиями содежащихся в них элементов системы α. Для тех же элементов системы α, которые не содержатся в каком-нибудь элементе системы α' мы рассмотрим покрытие, состоящее только из одного множества X. По предположению $\sigma_{\min}(\alpha)$ имеет место, поэтому можно выбрать из этих покрытий по одному элементу так, что выбранные элементы попарно δ-близки. Но, тем самым, будут выбраны попарно δ-близкие элементы покрытий множеств составляющих систему α' (возможно и не по одному). Тем самым доказано, что $\sigma_{\min}(\alpha')$ имеет место.
Условие 3:
пусть $\sigma_{\max}(\alpha \vee \beta)$ имеет место, то есть существуют такие δ-

близкие множества F_1, F_2, что каждый элемент системы $\alpha \vee \beta$ содержит или F_1 или F_2. Если каждый элемент системы α содержит или F_1 или F_2, то имеет место $\sigma_{\min}(\alpha)$. Если же какой-то элемент A этой системы не содержит ни F_1 ни F_2, тогда мы должны будем рассмотреть несколько случаев.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда множества $F_1' = A \cap F_1$ и F_2 или же F_1 и $F_2' = A \cap F_2$ являются δ-близкими множествами. Пусть, для определенности, имеет место первый случай. В этом случае мы вместо δ-близких множеств F_1 и F_2 возьмем множества F_1' и F_2. Если теперь каждый элемент системы α содержит или F_1' или F_2, то имеет место $\sigma_{\min}(\alpha)$. Если же какой-то элемент A этой системы не содержит ни F_1' ни F_2, тогда мы повторим эту процедуру. В результате каждого применения этой процедуры количество элементов системы α не содержащих ни одного из рассматриваемых δ-близких множеств уменьшается. Так как система α содержит конечное число множеств, этот процесс либо исчерпает все элементы системы α и тогда имеет место $\sigma_{\min}(\alpha)$ либо приведет к тому, что ни $F_1' = A \cap F_1$ и F_2 ни F_1 и $F_2' = A \cap F_2$ не являются δ-близкими множествами. Тогда множества $B_1' = \mathrm{cl}(F_1 \setminus A)$ и $B_2' = \mathrm{cl}(F_2 \setminus A)$ будут δ-близкими. Заметим теперь, что для каждого элемента B системы β множество $A \cup B$ содержит или F_1 или F_2 и поэтому каждый элемент B системы β содержит или $B_1\prime$ или $B_2\prime$. Но это означает, что $\sigma_{\min}(\beta)$ имеет место.

Перейдем, теперь, к $\sigma_{\min}$. Заметим, прежде всего, что аксиому 3 для отношений смежности можно заменить аксиомой более частного вида, а именно следующей аксиомой.

$3'$. $\sigma(F \cup F', F_1, F_2, \ldots, F_n) \Longrightarrow \sigma(F, F_1, F_2, \ldots, F_n)$ или $\sigma(F', F_1, F_2, \ldots, F_n)$.

Действительно, в предположении справедливости для σ аксиом 2 и 3 рассмотрим системы $\alpha = (F, F_1, F_2, \ldots, F_n)$ и $\beta = (F', F_1, F_2, \ldots, F_n)$. Тогда $\alpha \vee \beta = (F \cup F', F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots)$, где множества замененные многоточием содержат какие-нибудь из множеств $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Таким образом в этой ситуации

$$\sigma(F \cup F', F_1, F_2, \ldots, F_n) \Longrightarrow \sigma(\alpha \vee \beta) \Longrightarrow \sigma(\alpha) \text{ или } \sigma(\beta).$$

С другой стороны, в предположении справедливости для σ аксиом 2 и $3'$, рассмотрим системы $\alpha = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$, $\beta = (B_1, B_2, \ldots, B_n)$ и $\alpha \vee \beta = (A_1 \cup B_1, A_1 \cup B_2, \ldots, A_1 \cup B_n, A_2 \cup$

$B_1, \dots, A_m \cup B_n)$, состоящие из $m \times n$ замкнутых в X множеств. Применив аксиому $3'$ достаточно много раз, мы убедимся в том, что из $\sigma(\alpha \vee \beta)$ следует σ-смежность по крайней мере одной из $2^{m \times n}$ систем $(F_{11}, F_{12}, \dots, F_{1m}, F_{21}, \dots, F_{mn})$, в которых $F_{ij} = A_i$ или B_j для каждых i и j. Но каждая из таких систем содержит или все $A_1, A_2, \dots, A_m$ или же все $B_1, B_2, \dots, B_n$ и поэтому имеет место или $\sigma(\alpha)$ или $\sigma(\beta)$.

Докажем, теперь, что $\sigma_{\min}$ удовлетворяет аксиоме $3'$ и, следовательно, аксиоме 3. Предположим, что $\sigma_{\min}(F \cup F', F_1, F_2, \dots, F_n)$ имеет место, то есть для всяких конечных покрытий множеств $F \cup F', F_1, F_2, \dots, F_n$ замкнутыми в X множествами можно выбрать по одному элементу из каждого покрытия так, что выбранные множества попарно δ-близки.

Рассмотрим всевозможные системы $(\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n, \Sigma', \Sigma'_1, \Sigma'_2, \dots, \Sigma'_n)$ замкнутых в X покрытий множеств $F, F_1, F_2, \dots, F_n, F', F_1, F_2, \dots, F_n$. Покрытия каждого множества упорядочены по вписанности, соответственно этому оказывается упорядоченным и множество рассматриваемых здесь систем покрытий, причем так образованное упорядоченное множество направлено. Образуем для произвольной системы $(\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n, \Sigma'_1, \Sigma'_2, \dots, \Sigma'_n)$ систему $(\Sigma \cup \Sigma', \Sigma_1 \wedge \Sigma'_1, \Sigma_2 \wedge \Sigma'_2, \dots, \Sigma_n \wedge \Sigma'_n)$ покрытий множеств $F \cup F', F_1, F_2, \dots, F_n$. В наших условиях можно выбрать по одному элементу из каждого такого покрытия так, что выбранные элементы попарно δ-близки. Элемент выбранный из покрытия $\Sigma \cup \Sigma'$ принадлежит Σ или Σ'. В первом случае из каждого покрытия системы $(\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n)$ можно выбрать по одному элементу так, что выбранные множества попарно δ-близки. В этом случае будем говорить, что система $(\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n, \Sigma', \Sigma'_1, \Sigma'_2, \dots, \Sigma'_n)$ имеет первый тип. Во втором случае из покрытий системы $(\Sigma', \Sigma'_1, \Sigma'_2, \dots, \Sigma'_n)$ можно выбрать по одному элементу так, что выбранные множества попарно δ-близки. В этом случае будем говорить, что система $(\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n, \Sigma', \Sigma'_1, \Sigma'_2, \dots, \Sigma'_n)$ имеет второй тип. Рассматриваемое нами направленное упорядоченное множество исчерпывается системами первого типа и второго типа, поэтому либо те либо другие составляют его конфинальную часть. Пусть, для определенности, имеет место первый случай. Рассмотрим произвольную систему $(\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n)$ замкнутых покрытий множеств $F, F_1, F_2, \dots, F_n$. Ее можно дополнить произвольными замкнутыми покрытиями множеств $F', F_1, F_2, \ldots, F_n$, например одноэлементными, до системы $(\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, \Sigma', \Sigma'_1, \Sigma'_2, \ldots, \Sigma'_n$. В покрытия этой системы будут вписаны покрытия некоторой системы первого типа. В частности в покрытия $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ будут вписаны покрытия, в каждом из которых можно выбрать по одному элементу так, что выбранные множества попарно δ-близки. Но тогда и из покрытий $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ можно выбрать по одному элементу так, что выбранные множества попарно δ-близки. Так как эти покрытия множеств $F, F_1, F_2, \ldots, F_n$ выбраны произвольно, то $\sigma_{\min}(F, F_1, F_2, \ldots, F_n)$ имеет место.

Согласованность с δ.

Пусть $\sigma_{\max}(A_1, A_2)$ имеет место, то есть каждое из множеств A_1, A_2 содержит какое-то из δ-близких множеств F_1, F_2. Тогда, в силу свойства 2 для отношений близости, имеет место и $\delta(A_1, A_2)$. С другой стороны, если $\delta(A_1, A_2)$ имеет место, то каждое из множеств A_1, A_2 содержит одно из δ-близких множеств A_1, A_2 и поэтому $\sigma_{\max}(A_1, A_2)$ имеет место.

Пусть, теперь, $\sigma_{\min}(A_1, A_2)$ имеет место, то есть из любых покрытий множеств системы $\alpha = \{A_1, A_2\}$ замкнутыми множествами можно выбрать по одному элементу из каждого покрытия так, что выбранные множества попарно δ-близки. Возьмем в качестве покрытий одноэлементные системы $\{A_1\}$ и $\{A_2\}$. Из этих покрытий можно выбрать только множества A_1 и A_2, поэтому $\delta(A_1, A_2)$ имеет место. С другой стороны, если $\delta(A_1, A_2)$ имеет место и α_1, α_2 – какие-то покрытия множеств A_1 и A_2, соответственно, то объединения элементов каждого из этих покрытий будут также δ-близки. Применив свойство 3 отношений близости к этим объединениям достаточное количество раз, мы найдем δ-близкие элементы этих покрытий. Таким образом и $\sigma_{\min}(A_1, A_2)$ имеет место.

Для любого топологического пространства X в разделе 2 было построено расширение δX, определяемое произвольно фиксированным на X отношением близости δ. Можно доказать, что δX является правильным компактным расширением и, следовательно, σ-расширением для некоторого отношения смежности на X. Оказывается верным следующее утверждение.

Теорема. *Пусть δ – некоторое отношение близости на топологическом пространстве X и σ – главное отношение смежности, согласованное с δ. Тогда расширения δX и σX совпадают.*

Доказательство. Пусть σ – главное отношение смежности, согласованное с δ. Заметим, прежде всего, что каждая система δ-близости, в том числе и максимальная, является в этой ситуации системой σ-смежности. Дело в том, что если α – конечная подсистема системы δ-близости, то пользуясь условием 3 можно доказать, что α будет системой σ-смежности, то есть для каждой системы покрытий ее элементов можно выбрать по одному множеству из каждого покрытия так, что выбранные множества попарно δ-близки. С другой стороны, нетрудно проверить, что каждая максимальная система σ-смежности является системой δ-близости.

Пусть γ является максимальной мсчезающей системой σ-смежности. Тогда она будет системой δ-близости, содержащейся в некоторой системе γ', являющейся максимальной системой δ-близости. Но γ' будет,в свою очередь, системой σ-смежности, содержащей γ. Так как γ максимальная система σ-смежности, то $\gamma = \gamma'$ является максимальной системой δ-близости.

Пусть, теперь, γ является максимальной системой δ-близости. Тогда она будет системой σ-смежности, содержащейся в некоторой системе γ', являющейся максимальной системой σ-смежности . Но γ' будет,в свою очередь, системой δ-близости, содержащей γ. Так как γ максимальная система δ-близости, то $\gamma = \gamma'$ является максимальной системой σ-смежности.

5. Категории: топологических пространств, пространств близости и пространств смежности. Мы ввели в рассмотрение три категории, а именно категорию **Top** топологических пространств и их непрерывных отображений, категорию **Prox** пространств близости и их отображений, категорию **Cont** пространств смежности и их отображений. При этом категория Prox оказалась детализацией категории Top. Соответствие $\mathcal{P}$ пространствам смежности, согласованных с ними пространств близости, может быть естественно продолжено до ковариантного функтора накрытия $\mathcal{P}$: Cont $\longrightarrow$ Prox. При этом отображению $f : (X, \sigma) \longrightarrow (X', \sigma')$ соответствует отображение $\mathcal{P}f : (X, \delta) \longrightarrow (X', \delta')$, где структуры близости δ и δ' согласованы со структурами смежности σ и σ'. Категория пространств смежности и их отображений оказывается детализацией категории пространств близости и их отображений. Что касается функтора вложения, то он определен неоднозначно. Обычно рассматриваются два функтора вложения, а именно $\mathcal{I}_{\max}$ и $\mathcal{I}_{\min}$. Таким образом мы получаем накрытия и вложения

$$\mathrm{Set} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{P}}{\leftrightarrows}} \mathrm{Top} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{P}}{\leftrightarrows}} \mathrm{Prox} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{P}}{\leftrightarrows}} \mathrm{Cont}$$

Функторы накрытия определены однозначно для каждой пары категорий, функторы вложения определены неоднозначно.

Теорема. *Для функторов* $\mathcal{P} : \mathrm{Cont} \longrightarrow \mathrm{Prox}$, $\mathcal{P} : \mathrm{Prox} \longrightarrow \mathrm{Top}$, $\mathcal{P} : \mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Set}$ *выполняются все аксиомы детализации.*

Доказательство. Всего было сформулировано восемь аксиом детализации категорий, в теореме рассматриваются три детализации и, таким образом, надо доказать 24 утверждения. Справедливость этих утверждений доказывается довольно простыми рассуждениями.

Для функтора $\mathcal{P} : \mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Set}$:

Топологической структурой точной верхней и точной нижней границы каких-нибудь топологических пространств с одним и тем же множеством точек являются, соответственно, объединение их топологических структур и их пересечение.

Точной верхней границей какого-нибудь множества отображений, накрывающих некоторое отображение f множества X в множество Y, будет отображение f точной верхней границы областей задания этих отображений в точную верхнюю границу их областей значения. Ясно, что отображение f этой точной верхней границы областей задания в любую из рассматриваемых областей значений будет непрерывным отображением, а поэтому будет непрерывным и отображение в их точную верхнюю границу.

Точной нижней границей какого-нибудь множества отображений, накрывающих некоторое отображение f множества X в множество Y, будет отображение f точной нижней границы областей задания этих отображений в точную нижнюю границу их областей значения. Ясно, что отображение f каждой из этих областей задания в точную нижнюю границу областей значений будет непрерывным отображением, а поэтому будет непрерывнымм и отображение их точной нижней границы.

Существование левых накрытий и правых накрытий очевидно.

Пусть $f = gh$ в категории Set, $h : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z$, и непрерывное отображение топологических пространств $f : X' \longrightarrow Z'$

накрывает f. Топологическую структуру пространства Z' обозначим через τ. Тогда f-прообраз топологической структуры τ содержится в топологической структуре пространства X'. Положим $Y' = (Y, g^{-1}(\tau))$. Тогда $h : X' \longrightarrow Y'$ будет непрерывным отображением, так как $f^{-1}(\tau) = (gh)^{-1} = h^{-1}(g^{-1}(\tau))$, и $g : Y' \longrightarrow Z'$ будет непрерывным отображением, по определению Y'.

Аксиома 5 выполняется по определению непрерывных отображений в категории Top. Этим завершается доказательство теоремы для случая $\mathcal{P} : \mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Set}$. Остальные случаи доказываются, в общем, аналогично. Надо следить только, чтобы пространства и отображения , определяемые в ходе доказательства, накрывали нужные пространства и отображения. Например, когда мы доказаваем выполнение аксиомы 1 для функтора $\mathcal{P} : \mathrm{Cont} \longrightarrow \mathrm{Prox}$, мы должны доказать, что точная верхняя граница любого множества структур смежности, согласованных с одной и той юе структурой близости, будет также с ней согласована. Для этого достаточно доказать, что множество всех структур смежности, согласованных с некоторой структурой близости, имеет наибольший элемент.

6. Структуры соседства и равномерные структуры. Мы будем рассматривать теперь произвольные системы замкнутых или открытых множеств произвольно фиксированного топологического пространства.

Определение. *Пусть X – некоторое топологическое пространство и ν – отношение для любых (не обязательно конечных) систем замкнутых множеств пространства X, удовлетворяющее следующим условиям:*

1. $\bigcap A | A \in \alpha \neq \emptyset \Longrightarrow \nu(\alpha)$,

2. *Если каждый элемент системы α' содержит какой-нибудь элемент системы α, то $\nu(\alpha) \Longrightarrow \nu(\alpha')$,*

3. $\nu(\alpha \vee \beta) \Longrightarrow \nu(\alpha)$ *или* $\nu(\beta)$.

Здесь запись $\nu(\alpha)$ означает, что для системы α имеет место отношение ν.

Такое отношение для систем подмножеств множества X будем называть отношением соседства, а системы, для которых отношение ν имеет место, называются системами ν-соседства. Можно говорить также о структуре соседства ν, понимая под этим множество всех систем соседства. Любая пара (X, ν), где

ν является отношением соседства на множестве X, называется пространством соседства.

Понятие структуры соседства эквивалентно понятию равномерной структуры.

Определение. *Будем говорить, что на топологическом пространстве X определена равномерная структура покрытий ρ, как некоторая совокупность его открытых покрытий s, если удовлетворяются следующие условия:*

1. *Если $s_1 \in \rho$ и $s_2 \in \rho$ то $s_1 \wedge s_2 = \{G_1 \cap G_2 | G_1 \in s_1, G_2 \in G_2\} \in \rho$.*

2. *Если покрытие s вписано в покрытие s_1, то есть каждый элемент покрытия s содержится в каком-нибудь элементе покрытия s_1, и $s \in \rho$ то $s_1 \in \rho$.*

Пару (X, ρ) будем называть равномерным пространством (покрытий). Равномерное пространство покрытий мы будем называть иногда для краткости Σ-равномерным пространством.

Иногда к этим условиям добавляют так называемое условие звездной вписанности.

Определение. *Пусть s и s_1–некоторые открытые покрытия топологического пространства X. Говорят, что s– звездно вписано в s_1, если для каждого $G_0 \in s$ его звезда $st_s(G_0) = \cup G | G \in s, G \cap G_0 \neq \emptyset$ содержится в каком-нибудь элементе покрытия s_1.*

Условие 3. В каждое покрытие $s \in \rho$ звездно вписано некоторое покрытие $s' \in \rho$ (условие звездной вписанности).

Равномерную структуру покрытий, удовлетворяющую условиям 1–3 будем называть вейлевской равномерной структурой покрытий.

Замечание. Так как теория равномерных структур покрытий достаточно предметна и без этого дополнительного условия, то его присоединение к первым двум условиям не является необходимостью, но определяет некоторый интересный класс равномерных структур покрытий. Кроме равномерных структур покрытий изучаются и равномерности другого структурного типа. Несколько позже будут рассмотрены равномерные структуры окрестностей и равномерные структуры окружений.

Определение. *Пусть ρ – некоторая равномерная структура. Совокупность $\rho_0 \subset \rho$ называется базой структуры ρ, если в каждое* *покрытие* $s \in \rho$ *вписано какое-нибудь покрытие* $s_0 \in \rho_0$. *Совокупность* $\rho_0 \subset \rho$ *называется предбазой структуры* ρ, *если покрытия* $\wedge s_i$, *образованные по всем конечным комбинациям покрытий* $s_i \in \rho_0$, *составляют базу структуры* ρ.

Перейдем теперь к описанию эквивалентности структур соседства и равномерных структур (покрытий).

Определение. *Произвольную систему открытых множеств и произвольную систему замкнутых множеств топологического пространства* X *будем называть соответствующими друг другу, если совокупность дополнений в* X *всех множеств одной системы составляет другую систему.*

Замечание. Если некоторая система замкнутых в X множеств не является системой соседства, то соответствующая ей система открытых множеств будет его открытым покрытием. Это следует из того, что в противном случае исходная система должна будет иметь непустое пересечение.

Определение. *Структуру соседства* ν *и равномерную структуру* ρ *будем называть эквивалентными друг другу, если каждой системе* ν*-соседства соответствует система открытых множеств, не принадлежащая* ρ *(например не являющаяся покрытием), и каждому открытому покрытию, принадлежащему* ρ, *соответствует система, не принадлежащая* ν *(не являющаяся системой* ν*-соседства).*

Замечание. Наглядно, соответствие между ν и ρ можно представить следующим образом. Все системы замкнутых в X множеств разбиваются на две части – принадлежащие ν (ν-системы) и не принадлежащие ν ($\overline{\nu}$-системы). Аналогично, все системы открытых в X множеств разбиваются на две части – не принадлежащие ρ ($\overline{\rho}$-системы) и принадлежащие ρ (ρ-системы). $\overline{\nu}$-системы взаимно однозначно соответствуют ρ-системам. Таким образом, подобно тому, как топологическая структура может быть задана и структурой открытых множеств и структурой замкнутых множеств, равномерная структура может быть задана и структурой открытых покрытий и структурой систем соседства.

Определение. *Отображение* $f : X \longrightarrow X'$ *называется (равномерно непрерывным) отображеним* $f : (X, \rho) \longrightarrow (X', \rho')$ *равномерных пространств, если* $f^{-1}(s') \in \rho$ *для каждого* $s' \in \rho'$.

Замечание. В терминах структур соседства это определение будет выглядеть следующим образом:
Отображение $f : X \longrightarrow X'$ называется отображеним $f : (X, \nu) \longrightarrow (X', \nu')$ пространств соседства, если $f^{-1}(\alpha') = \{f^{-1}(F') | F' \in \alpha'\} \notin \nu$ для каждого $\alpha' \notin \nu'$.

Нетрудно доказать, что равномерные пространства и их отображения, равно как пространства соседства и их отображения, образуют изоморфные категории, их мы будем обозначать через **Unif** и, соответственно, **Near**.

7. Структуры близости, смежности и равномерности. Среди всех равномерных структур покрытий выделяются так называемые прекомпактные равномерные структуры и бинарные равномерные структуры.

Определение. *Равномерная структура ρ называется прекомпактной равномерной структурой, если в любом покрытии $s \in \rho$ можно выбрать конечное покрытие $s_0 \in \rho$.*

Определение. *Равномерная структура ρ называется бинарной равномерной структурой, если в любое покрытии $s \in \rho$ можно вписать какое-нибудь бинарное покытие $s' \in \rho$, то есть покрытие $s_1 \vee s_2 ... \vee s_n$, где $s_1 \in \rho, s_2 \in \rho, ..., s_n \in \rho$ – двухэлементные покрытия.*

Замечание. Нетрудно установить отношение эквивалентности между прекомпактными равномерными структурами и структурами смежности, а также бинарными равномерными структурами и структурами близости, заданными на одном и том же топологическом пространстве.

Определение. *Прекомпактная равномерная структура ρ и структура смежности σ, определенные на некотором топологическом пространстве X, называются эквивалентными, если имеется взаимно однозначное соответствие между всеми конечными открытыми покрытиями $s \in \rho$ и всеми не σ-смежными системами α замкнутых множеств. При этом, как обычно, $G \in s \iff X \setminus G \in \alpha$.*

Определение. *Бинарная равномерная структура ρ и структура близости δ, определенные на некотором топологическом пространстве X, называются эквивалентными, если имеется взаимно однозначное соответствие между всеми двучленными откры-*

тыми покрытиями $s \in \rho$ и всеми не δ-близкими парами α замкнутых множеств. При этом, как обычно, $G \in s \iff X \setminus G \in \alpha$.

Замечание. Каждая бинарная равномерная структура эквивалентна, как нетрудно доказать, некоторой структуре близости, однако обратное утверждение не очевидно.

Теорема. *Каждая структура близости эквивалентна некоторой бинарной равномерной структуре.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную структуру близости δ, определенную на топологическом пространстве X, и все двухэлементные открытые покрытия $\{G_1, G_2\}$ этого пространства, для которых $\delta(X \setminus G_1, X \setminus G_2)$ не имеет места. Совокупность ρ_0 всех таких покрытий можно рассматривать, как предбазу некоторой равномерной структуры ρ. Остается доказать, что совокупность всех двухэлементных покрытий структуры ρ совпадает с ρ_0. Рассмотрим главную структуру смежности σ^*, согласованную с δ, и эквивалентную ей равномерную структуру ρ^*. Для любой пары F_1, F_2 замкнутых в X множеств $\delta(F_1, F_2)$ не имеет места тогда и только тогда, когда $\sigma(F_1, F_2)$ не имеет места и, следовательно, $\{X \setminus F_1, X \setminus F_2\} \in \rho^*$. Это означает, что ρ_0 является совокупностью всех двухэлементных открытых покрытий принадлежащих ρ^*. С другой стороны, имеется очевидное включение $\rho \subset \rho^*$, поэтому ρ_0 является совокупностью всех двухэлементных открытых покрытий принадлежащих ρ. Таким образом δ и ρ эквивалентны.

Замечание. Нетрудно доказать, что ограничение любого отношения соседства на конечные системы замкнутых множеств является отношением смежности. С другой стороны, нам уже известно, что ограничение любого отношения смежности на пары замкнутых множеств является отношением близости и поэтому ограничение отношения соседства на пары замкнутых множеств является отношением близости. Ранее была установлено отношение эквивалентности между равномерными структурами и структурами соседства, его ограничениями являются эквивалентности между прекомпактными равномерными структурами и структурами смежности. Остается выяснить какие структуры смежности эквивалентны бинарным равномерным структурам.

Теорема. *Бинарные равномерные структуры эавивалентны главным структурам смежности.*

Доказательство. Доказывая предыдущую теорему, мы получили включение $\rho \subset \rho^*$, где ρ – бинарная равномерная структура, а ρ^* – равномерная структура эквивалентная главной структуре смежности, согласованной с δ. Так как ρ^* – минимальная равномерная структура, согласованная с δ, то $\rho = \rho^*$.

8. ρ-расширения топологических пространств. Универсальным методом построения правильных расширений топологических пространств является построение ρ-расширений.

Определение. *Пусть ρ – произвольная равномерная структура, определенная на некотором топологическом пространстве X. Фильтр ω в X будем называть ρ-фильтром (Коши), если в любом покрытии $s \in \rho$ найдется $G \in s$ такое, что $G \in \omega$. Кофильтр γ в X будем называть ρ-кофильтром (Коши), если $C\gamma = \{X \setminus F | F \in \gamma\} \notin \rho$.*

Замечание. Фильтр $\omega(x)$, состоящий из всех открытых в X множеств, содержащих точку $x \in X$, и кофильтр $\gamma(x)$, состоящий из всех замкнутых в X множеств, содержащих точку $x \in X$, определены для каждой точки x. Нетрудно заметить, что они двойственны друг другу. При установленном ранее соответствии между фильтрами и кофильтрами, они соответствуют друг другу.

Определение. *Через Ω_ρ и Γ_ρ будем обозначать множество всех минимальных ρ-фильтров, не совпадающих ни с одним из $\omega(x)$, и, соответственно, максимальных ρ-кофильтров, не совпадающих ни с одним из $\gamma(x)$.*

Замечание. Нетрудно заметить, что установленное ранее соответствие между фильтрами и кофильтрами, определяет взаимно однозначное соответствие между элементами Ω_ρ и Γ_ρ.

Определение. *Расширение ρX топологического пространства X, полученное присоединением к X множества Ω_ρ фильтров (множества Γ_ρ кофильтров), будем называть ρ-расширением этого пространства или расширением по равномерной структуре ρ.*

Теорема. *Для любого топологического пространства X и любой равномерной структуры ρ на X расширение ρX является правильным расширением пространства X и любое его правильное расширение эквивалентно ρ-расширению по некоторой равномерной структуре на X.*

Доказательство. Расширение ρX является регулярным расширением, так как оно получено присоединенем к X некоторого множества фильтров (кофильтров). Рассмотрим теперь любую точку $\gamma \in \Gamma_\rho$ нароста и множество $\cap \mathrm{cl}_{\rho X} F | F \in \gamma$. В силу того, что γ является максимальным ρ-кофильтром, никакая другая точка пространства X или нароста этому множеству не принадлежит, а это и означает правильность ρ-расширения. Перейдем к доказательству второй части теоремы.

Пусть X' – некоторое правильное расширение топологического пространства X. Будем говорить, что открытое покрытие s пространства X продолжимо до открытого покрытия пространства X', если система $s' = C\mathrm{cl}_{X'} Cs$, состоящая из открытых в X' множеств $X' \setminus \mathrm{cl}_{X'}(X \setminus G)$, является покрытием X'. Нетрудно доказать, что совокупность ρ всех открытых покрытий пространства X, продолжимых на X', является равномерной структурой на X. Действительно, пусть покрытие $s \in \rho$, то есть продолжимо на X', и вписано в покрытие s_1, тогда система $C\mathrm{cl}_{X'} Cs$ будет вписана в систему $C\mathrm{cl}_{X'} Cs_1$ и поэтому последняя также покрывает X', то есть $s_1 \in \rho$.

Пусть, теперь, $s_1 \in \rho$ и $s_2 \in \rho$, то есть $C\mathrm{cl}_{X'} Cs_1$ и $C\mathrm{cl}_{X'} Cs_2$ являются покрытиями пространства X'. Тогда $C\mathrm{cl}_{X'} C(s_1 \wedge s_2) = C\mathrm{cl}_{X'} Cs_1 \wedge C\mathrm{cl}_{X'} Cs_2$ является покрытием пространства X' и поэтому $s_1 \wedge s_2 \in \rho$. Тем самым доказано, что ρ является равномерной структурой на X. Осталось доказать, что расширения ρX и X' топологического пространства X эквивалентны.

Рассмотрим произвольную точку нароста x, $x \in X' \setminus X$, и кофильтр $\gamma(x)$, состоящий из замкнутых в X множеств, замыкания которых в X' содержат точку x. Тогда $x \notin \mathrm{cl}_{X'}(X \setminus G)$ для каждого $G = X \setminus F$, где $F \in \gamma(x)$ и, следовательно, $C\gamma(x) = \{XF \setminus F \in \gamma(x)\} \notin \rho$, то есть $\gamma(x)$ является ρ-кофильтром. Более того, $\gamma(x)$ является максимальным ρ-кофильтром.

Действительно, так как X' – правильное расширение, то $\{x\} = \cap \mathrm{cl}_{X'} F$, где пересечение берется по всем $F \in \gamma(x)$. Допустим, что $\gamma(x) \subset \gamma$, где γ – некоторый ρ-кофильтр в X. Тогда $C\gamma \notin \rho$ и, следовательно, $C\mathrm{cl}_{X'} CC\gamma = C\mathrm{cl}_{X'}\gamma$ не является покрытием пространства X'. Но тогда $\cap \mathrm{cl}_{X'} F$, где пересечение берется по всем $F \in \gamma$, не пусто. Это пересечение содержится в аналогичном пересечении, берущемся по всем $F \in \gamma(x)$ и потому оно также равно $\{x\}$. Отсюда следует равенство $\gamma = \gamma(x)$, то есть $\gamma(x)$ является максимальным ρ-кофильтром.

Мы доказали, что каждой точке нароста соответствует (единственный) максимальный ρ-кофильтр, осталось доказать, что каждому максимальному ρ-кофильтру γ, не являющемуся кофильтром $\gamma(x)$ для некоторой точки $x \in X$, соответствует единственная точка нароста. В этом случае, $C\gamma \notin \rho$, то есть $\cap \mathrm{cl}_{X'} F$, где пересечение берется по всем $F \in \gamma$, не пусто. В силу максимальности, это пересечение состоит из единственной точки нароста.

Замечание. Как только что было доказано, любое правильное расширение X' топологического пространства X эквивалентно расширению ρX для соответствующей равномерной структуры ρ. Нетрудно доказать, что любое правильное компактное расширение X' эквивалентно расширению ρX для соответствующей *прекомпактной* равномерной структуры ρ. Если при этом в X' отношение смежности по пересечениям является главным отношением смежности, то это расширение эквивалентно расширению ρX для соответствующей *бинарной* равномерной структуры ρ.

§3. Равномерные пространства покрытий

1. Полнота и пополнение равномерных пространств. Теория полноты и пополнения равномерных пространств может быть построена *для произвольных* равномерных пространств покрытий.

Определение. *Пусть X' – произвольное расширение топологического пространства X и ρ – равномерная структура на X, все покрытия которой продолжимы на X'. Равномерную структуру ρ', состоящую из всех покрытий топологического пространства X, в которые вписаны продолжения на X' покрытий из ρ, будем называть продолжением на X' равномерной структуры ρ.*

Теорема. *Пусть ρ' – продолжение на X' равномерной структуры ρ, определенной на топологическом пространстве X. Тогда ρ' является минимальной равномерной структурой на X', индуцирующей на X равномерную структуру ρ.*

Доказательство. Если $G' \cap X = G$ для открытого в X' множества G', то это множество содержится в продолжении на X' множества G. Отсюда следует,что любое открытое покрытие s' пространства X', для которого $s' \wedge X = s \in \rho$, вписано в продолжение s на X'. Тем самым доказано, что ρ' содержится в любой равномерной структуре на X', индуцирующей на X равномерную структуру ρ, то есть является среди них минимальной структурой.

Определение. *Пусть (X,ρ) – произвольное равномерное пространство, $X' = \rho X$ – расширение X, ρ' – продолжение ρ на X'. Тогда равномерное пространство (X',ρ') будем называть пополнением равномерного пространства (X,ρ).*

Можно рассматривать также продолжение на расширение X' топологического пространства X отношений (структур) смежности.

Определение. *Пусть X' – произвольное расширение топологического пространства X и σ – структура смежности на X, для которой $\bigcap \mathrm{cl}_{X'}\alpha = \emptyset$, если $\sigma(\alpha)$ не имеет места. Продолжением σ на X' , будем называть структуру σ', для которой $\sigma'(\alpha')$ не имеет места, если существует такая конечная система α замкнутых в X множеств, что замыкание в X' любого из ее множеств содержит какой-нибудь элемент системы α' и $\sigma(\alpha)$ не имеет места.*

Теорема. *Пусть ρ_c – прекомпактная равномерная структура, определенная на топологичском пространстве X, и σ – структура смежности, эквивалентная ρ_c. Тогда их продолжения ρ_c' и σ' на расширение X' пространства X эквивалентны.*

Доказательство. По определению зквивалентности структур смежности σ и прекомпактных равномерных структур ρ_c, отношение $\sigma(\alpha)$ не имеет места тогда и только тогда, когда $C\alpha \in \rho_c$. Рассмотрим произвольную конечную систему α' замкнутых в X' множеств, такую систему α замкнутых в X множеств, что элементы ее продолжения на X' содержат элементы (не обязательно все) системы α', систему $C\alpha$ открытых в X множеств и систему $C\alpha'$ открытых в X' множеств. Заметим, прежде всего, что в этой ситуации, элементы продолжения системы $C\alpha$ на X' содержатся в элементах системы $C\alpha'$. Если $\sigma'(\alpha')$ не имеет места, то найдется такое α с указанным выше свойством, что $\sigma(\alpha)$ не имеет места. Тогда $C\alpha \in \rho_c$, продолжение этого покрытия на X' принадлежит ρ_c' и поэтому $C\alpha'$ принадлежит ρ_c'. С другой стороны, если $C\alpha'$ принадлежит ρ_c', то найдется конечное покрытие $s \in \rho$, продолжение которого на X' вписано в $C\alpha'$. Тогда $\alpha = Cs$ не будет системой σ-смежности и элементы его продолжения содержат элементы системы α', которая поэтому не будет системой σ'-смежности.

В дальнейшем будем считать, что расширения ρX получаются присоединением соответствующих минимальных ρ-фильтров, для любого открытого в X множества G его продолжение $C\mathrm{cl}_{\rho X}CG$ на ρX будем обозначать через ρG, продолжение любого открытого покрытия $s \in \rho$ – через ρs, и так далее. Любому ρ-фильтру ω в X естественно соответствует фильтр $\rho\omega = \{G' | G \in \rho, \rho G \subset G'\}$ в ρX, любому ρ'-фильтру ω' в $X' = \rho X$ естественно соответствует фильтр $\omega' \wedge X$ в X. Тем самым устанавливается *естественные соответствия*

$$\omega \longrightarrow \rho\omega, \quad \omega' \longrightarrow \omega' \wedge X.$$

Теорема. *Естественные соответствия между минимальными фильтрами в X и минимальными фильтрами в ρX взаимно обратны.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный фильтр ω в X и соответствующий ему фильтр $\rho\omega$ в ρX. Так как $\rho G \cap X = G$ для любого открытого в X множества G, то $\rho\omega \wedge X = \omega$. С другой стороны, если ω' – некоторый ρ' фильтр в ρX, то из соотношения $G' \subset \rho(G' \cap X)$ следует $\rho(\omega' \wedge X) \subset \omega'$. Так как $\omega' \wedge X$ является фильтром, то $\rho(\omega' \wedge X) = \omega'$, если ω' – минимальный фильтр. Таким образом, для минимальных фильтров имеют место соотношения

$$\rho\omega \wedge X = \omega, \quad \rho(\omega' \wedge X) = \omega',$$

доказывающие взаимную обратность естественных соответствий.

Эта теорема имеет весьма важное следствие, формулируемое в терминах, которые мы сейчас введем.

Определение. *Пусть (X, ρ) – равномерное пространство, $X' = \rho X$, ρ' – продолжение ρ на X', тогда равномерное пространство (X', ρ') называют пополнением равномерного пространства (X, ρ).*

Определение. *Равномерное пространство (X, ρ) называется полным, если $\rho X = X$.*

Теорема о полноте пополнения. *Пополнение равномерного пространства является полным равномерным пространством.*

Доказательство. Если исходное равномерное пространство (X, ρ) является полным равномерным пространством, то оно совпадает со своим пополнением и в этом случае теорема верна. Пусть (X, ρ) не является полным равномерным пространством, то есть

$X' = \rho X \neq X$ и ρ' – продолжение ρ на X'. В силу предыдущей теоремы, каждый минимальный ρ'-фильтр ω' в X' является продолжением на X' минимального ρ-фильтра $\omega = \omega' \wedge X$. Если ω – исчезающий минимальный ρ-фильтр, то он является точкой нароста расширения ρX и, по определению расширения ρX, будет принадлежать всем элементам фильтра ω'. Таким образом, в X' нет исчезающих ρ'-фильтров и, следовательно, $\rho' X' = X'$.

Известно, что пополнение ρX вейлевского равномерного пространства является подпространством расширения σX. Однако в общем случае зто не так, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть X – полуинтервал $[0,1)$ числовой прямой $\mathbb{R}$ с обычной топологической структурой, σ – отношение смежности на X, для которого $\sigma(\alpha)$ имеет место тогда и только тогда, когда замыкания в $\mathbb{R}$ всех элементов системы α имеют непустое пересечение. Нетрудно заметить, что $\sigma X = [0,1]$ с обычной топологией и получается присоединением к X исчезающей максимальной системой σ – смежности γ, состоящей из замкнутых в X множеств, касающихся точки $1 \in \mathbb{R}$. Фиксируем какую-нибудь исчезающую максимальную центрированную систему γ_0 замкнутых в X множеств. Имеем очевидное включение $\gamma_0 \subset \gamma$, причем $\gamma_0 \neq \gamma$. Пусть $s_0 = C\gamma_0$ – открытое покрытие пространства X. Это покрытие имеет следующие свойства:

1. s_0 не содержит конечное открытое покрытие X,
2. конечные объединения и конечные пересечения элементов покрытия s_0 принадлежит s_0,
3. если открытое в X множество G' не принадлежит s_0, то существует такое $G \in s_0$, что $G \cup G' = X$,
4. если открытое в X множество G' содержится в $G \in s_0$, то $G' \in s_0$. Рассмотрим равномерную структуру ρ на X, предбаза которой состоит из всех покрытий вида $(s_0 \wedge C\alpha) \cup \{G\}$, где α – система не σ-смежных замкнутых в X множеств а $G \notin s_0$. В действительности, как это можно доказать, такие покрытия образуют базу этой равномерной структуры. Само покрытие s_0 не принадлежит ρ, так как в него не вписано никакое покрытие вида $(s_0 \wedge C\alpha) \cup \{G\}$, а $s_0 \cup \{G\}$, где $G \notin s_0$, принадлежит ρ. Таким образом s_0 является минимальным ρ-фильтром и $\rho X \neq X$.

Обозначим отношение смежности на X, согласованное с ρ, через σ'. Если $\sigma(\alpha)$ не имеет места, то хоть одно из множеств системы α не принадлежит γ_0. Тогда дополнение этого множества G не принадлежит s_0 и $(s_0 \wedge C\alpha) \cup \{G\}$ принадлежит ρ. Но это покрытие вписано в $C\alpha$ и поэтому $\sigma'(\alpha)$ не имеет места. Докажем теперь, что $\sigma'(\alpha)$ имеет место, если $\sigma(\alpha)$ имеет место, другими словами, что $\alpha \notin \rho$, если $\sigma(\alpha)$ имеет место. Допустим, что это не так, то есть $\sigma(\alpha)$ имеет место и $C\alpha \in \rho$. Но тогда в $C\alpha$ должно будет вписано некоторое покрытие $(s_0 \wedge C\alpha') \cup \{G\}$, в котором $\sigma(\alpha')$ не имеет места, а $G \notin s_0$. Обратим внимание на то, что $C\alpha'$ не может быть вписано в $C\alpha$, в силу первого свойства структур смежности, поэтому в $C\alpha'$ найдется некоторое множество G', не содержащееся ни в одном из элементов $G_1, G_2, \ldots, G_n$ покрытия $C\alpha$. Тогда в s_0 найдутся такие элементы $U_1, U_2, \ldots, U_n$, что $(U_i \cap G') \setminus G_i \neq \emptyset$ для всех i и поэтому найдется $U \in s_0$, для которого $(U \cap G') \setminus G_i \neq \emptyset$ для всех i. Нашелся элемент $U \cap G'$ рассматриваемого нами покрытия $(s_0 \wedge C\alpha') \cup \{G\}$, не содержащийся ни в одном из элементов системы $C\alpha$, что противоречит нашему предположению. Тем самым доказано, что равномерная структура ρ и структура смежности σ согласованы, но ρX не является подпространством σX.

Это неприятное обстоятельство заставляет искать другие варианты пополнения или же накладывать на равномерную структуру соответствующие ограничения. Рассмотрим, сначала, первый вариант.

Определение. *Пусть X – произвольное топологическое пространство, ρ и σ – равномерная структура и структура смежности, не обязательно согласованные друг с другом. Рассмотрим расширение σX и в нем максимальное подпространство, на котором продолжения всех покрытий из ρ являются покрытиями. Это подпространство $\rho\sigma X$ назовем $\rho\sigma$ – пополнением пространства X.*

Замечание. $\rho\sigma$-пополнение пространства X мы можем рассматривать, как расширение, полученное присоединением к X всех максимальных исчезающих систем σ-смежности, являющихся ρ-кофильтрами. В соответствии с этим определением, мы можем рассматривать тройку пространств,

$$X \subset \rho\sigma X \subset \sigma X,$$

последовательно вложенных друг в друга. При этом σX является правильным расширением не только пространства X, но и пространства $\rho\sigma X$.

Определение. *Равномерное пространство (X,ρ) называется $\rho\sigma$-полным, если $\rho\sigma X = X$.*

Теорема. *$\rho\sigma$-пополнение равномерного пространства (X,ρ) является $\rho'\sigma'$-полным равномерным пространством.*

Доказательство. Напомним, прежде всего, что $\rho\sigma X \subset \sigma X$, а структура смежности σ' определена на $\rho\sigma X$ его правильным компактным расширением σX. Отсюда следует, что $\sigma'\rho X = \sigma X$ с точностью до эквивалентности расширений. Тем самым можно считать, что $\rho X \subset \sigma'\rho X$, причем ρX – наибольшее расширение в $\sigma' X$ пространства X, на которое продолжимы все открытые покрытия $s \in \rho$. Нетрудно доказать, что эти продолжения s' составляют некоторую равномерную структуру ρ' на ρX и сами они в $\sigma' X$ более не продолжаемы.

2. Редуктивность равномерных структур. Вейлевские равномерные структуры покрытий, обладающие "достаточно хорошими" свойствами, являются классическими объектами изучения в теории равномерных структур. Однако их "достаточно много" лишь на "достаточно хороших" топологических пространствах. В связи с этим, желательно найти найти равномерные структуры, хорошо представленные на произвольных топологических пространствах и, одновременно, имеющие некоторые черты, присущие вейлевским равномерным структурам.

Определение. *Пусть ρ – произвольная равномерная структура, определенная на некотором топологическом пространстве X, s_1 и s_2 – системы открытых в X множеств, не обязательно являющиеся покрытиями этого пространства. Будем говорить, что система s_2 ρ-мажорирует систему s_1, и писать $s_1 \leq_\rho s_2$, если для любой системы s открытых множеств из $s_1 \cup s \in \rho$ следует $s_2 \cup s \in \rho$.*

Примеры. Система $\{X\}$ ρ-мажорирует любую систему открытых покрытий для любой равномерной структуры ρ. Аналогичная ситуация в случае, когда s_1 является подсистемой системы s_2. В этом случае будем иметь $s_1 \leq_\rho s_2$ для любой структуры ρ на X.

Определение. *Пусть s_1 и $_2$ – некоторые системы открытых множеств топологического пространства X, ρ – равномерная структура на X, $s_1 \leq_\rho s_2$, и $s_2 \cup s' \in \rho$ для некоторой системы s'. Если $s_1 \cup s' \in \rho$, то будем говорить, что $s_2 \cup s'$ ρ-редуцируемо в $s_1 \cup s'$.*

Замечание. Из условий $s_1 \leq_\rho s_2$ и $s_2 \cup s' \in \rho$ не следует, в общем случае, что $s_1 \cup s' \in \rho$, эта система может даже не являться покрытием пространства X.

Определения. *Будем говорить, что равномерное пространство (X, ρ) слабо редуктивно (структура ρ слабо редуктивна), если любое открытое покрытие $s_2 \cup s' \in \rho$, в котором $s' = \{G\}$ – одноэлементное покрытие, ρ-редуцируемо в какое-нибудь покрытие $s_1 \cup s'$, где s_1 – конечная система.*

Будем говорить, что равномерное пространство (X, ρ) сильно редуктивно (структура ρ сильно редуктивна), если любое открытое покрытие $s_2 \cup s'$ ρ-редуцируемо в какое-нибудь покрытие $s_1 \cup s'$, где $s_1 = \{G\}$ – одноэлементная система.

Будем говорить, что равномерное пространство (X, ρ) бинарно редуктивно (структура ρ бинарно редуктивна), если любое открытое покрытие $s_2 \cup S'$, в котором $s' = \{G\}$ – одноэлементное покрытие, ρ-редуцируемо в какое-нибудь покрытие $s_1 \cup s'$, где $s_1 = \{G\}$ – одноэлементная система.

Будем говорить, что равномерное пространство (X, ρ) редуктивно (структура ρ редуктивна), если любое открытое покрытие $s_2 \cup s' \in \rho$ ρ-редуцируемо в какое-нибудь покрытие $s_1 \cup s'$, где s_1 – конечная система.

Замечания. Непосредственно из определений можно заметить, что условие сильной редуктивности сильнее трех других условий того же типа. Наименее слабым является условие слабой редуктивности, остальные два условия лежат между ними. Нетрудно понять, что условие сильной редуктивности можно сформулировать также в следующей форме:
если конечное объединение систем s_i принадлежит ρ, то найдутся такие $G_i \leq_\rho s_i$, что система, состоящая из этих G_i, принадлежит ρ.

Мы докажем теперь, что некоторые классы равномерных структур удовлетворяют тем или иным условиям редуктивности.

Теорема. *Каждая прекомпактная равномерная структура является редуктивной равномерной структурой.*

Доказательство. Пусть ρ – прекомпактная равномерная структура и покрытие $s_2 \cup s' \in \rho$, в нем содержится конечное покрытие

$s \in \rho$. Положим $s_1 = s_2 \cap s$, тогда $s_1 \subset s_2$ и поэтому $s_1 \leq_\rho s_2$. С другой стороны, $s \subset s_1 \cup s'$ и поэтому $s_1 \cup s' \in \rho$.

Теорема. *Каждая вейлевская равномерная структура является сильно редуктивной равномерной структурой.*

Доказательство. Пусть ρ – вейлевская равномерная структура, $s_2 \cup s' \in \rho$ и s^* – какое-нибудь покрытие, звездно вписанное в $s_2 \cup s'$. Обозначим через G_0 объединение всех элементов покрытия s^*, звезды которых содержатся в элементах системы s_2. Так как покрытие s_* вписано в $\{G_0\} \cup s'$, то это покрытие принадлежит ρ. Осталось доказать, что $\{G_0\} \leq_\rho s_2$. Если $G_0 = \emptyset$, то это утверждение тривиально. Пусть $G_0 \neq \emptyset$ и $\{G_0\} \cup s \in \rho$ для какой-нибудь системы s открытых в X множеств. Тогда $s_0 = (\{G_0\} \cup s) \wedge s^* = (\{G_0\} \wedge s^*) \cup (s \wedge s^*) \in \rho$. Если $G \in s \wedge s^*$, то G содержится в каком-нибудь элементе системы s открытых в X множеств. Если же $G \in \{G_0\} \wedge s^*$, то есть $G = G_0 \cap G^*$, где $G^* \in s^*$, тогда, по построению G_0, найдется $G_1^* \in s^*$, звезда которого вписана в некоторый элемент системы s_2, причем $G^* \cap G_1^* \neq \emptyset$. Отсюда следует, что G^* содержится в этой звезде, поэтому G^* содержится в каком-нибудь элементе системы s_2. Так как $G \subset G^*$, то и G содержится в этом элементе системы s_2. Мы доказали, что s_0 вписано в $s_2 \cup s$ и поэтому $s_2 \cup s \in \rho$. Тем самым доказано, что $\{G_0\} \leq_\rho s_2$.

Теорема. *Максимальная равномерная структура на произвольном топологическом пространстве является сильно редуктивной равномерной структурой.*

Доказательство. Пусть ρ – максимальная равномерная структура, определенная на топологическом пространстве X, то есть структура состоящая из всех его открытых покрытий. В этих условиях $s_1 \leq_\rho s_2$ тогда и только тогда, когда объединение всех элементов покрытия s_1 содержится в объединении всех элементов покрытия s_2. Если, теперь, $s_2 \cup s' \in \rho$, то $s_1 \cup s' \in \rho$, для $s_1 = \{G\}$, где G – объединение всех элементов покрытия s_2.

Замечание. Из этой теоремы следует существование сильно редуктивных не прекомпактных равномерных структур.

Мы рассмотрим теперь некоторые следствия условий типа редуктивности.

Теорема. *Пусть равномерная структура ρ, определенная на топологическом пространстве X слабо редуктивна, а σ – структура смежности, согласованная с ρ, тогда ρX является, с точностью до эквивалентности расширений, подпространством пространства σX.*

Доказательство. Пусть γ – максимальный исчезающий ρ-кофильтр, то есть $\gamma \in \rho X \setminus X$, и F – некоторое замкнутое в X множество, не принадлежащее γ. Тогда $\{F\} \cup \gamma$ не является ρ-кофильтром и поэтому $\{X \setminus F\} \cup C\gamma \in \rho$. Мы можем рассматривать системы $C\gamma$ и $\{G\}$, где $G = X \setminus F$, как s_2 и s'. Таким образом $s_2 \cup s' \in \rho$ и s' – одноэлементная система, поэтому, в силу слабой редуктивности ρ, существует такая конечная система s_1, что $s_1 \leq_\rho s_2$ и $s_1 \cup \{G\} \in \rho$. Заметим, теперь, что $s_2 \cup s_2 = s_2 \notin \rho$ и $s_1 \leq_\rho s_2$, поэтому $s_1 \cup s_2 \notin \rho$, то есть $Cs_1 \cup \gamma$ является ρ-кофильтром. Но γ является максимальным ρ-кофильтром, поэтому $Cs_1 \subset \gamma$. Мы доказали, тем самым, что Cs_1 является конечной системой, содержащейся в γ. С другой стороны, $Cs_1 \cup \{F\}$ неявляется системой σ-смежности и поэтому $F \notin \gamma$. Тем самым доказано, что γ – максимальная исчезающая ситема σ-смежности, то есть $\gamma \in \sigma X$.

Замечание. Ранее был приведен пример равномерной структуры ρ на топологическом пространстве X (полуинтервале $[0, 1)$) и согласованного с ней отношения смежности σ, для которых ρX не является подпространством σX. Этот пример и предыдущая теорема доказывают существование равномерых структур, не являющихся слабо редуктивными структурами. Можно построить также примеры, показывающие несовпадение всех четырех классов редуктивности.

Мы остановимся еще на одном интересном вопросе.
Пусть ρ – слабо редуктивная структура на топологическом пространстве X и σ – отношение смежности на X, согласованное с ρ. Как доказано, в этом случае мы получаем вложения пространств

$$X \subset \rho X \subset \sigma X.$$

Пусть, далее, ρ' – продолжение равномерной структуры ρ на пространство ρX, определенное продолжениями на ρX всех покрытий $s \in \rho$, σ' – аналогичное продолжение на ρX структуры смежности σ. Наконец, можно рассмотреть на ρX структуру смежности $\hat{\sigma}$, согласованную с равномерной структурой ρ'. Возникает естественный вопрос – совпадают ли на ρX структуры смежности σ' и $\hat{\sigma}$? Ответ на этот вопрос отрицательный, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = \{(x,y) | |x| \leq 1, -1 \leq y < 0\}$ – подпространство обычной плоскости (прямоугольник без верхней стороны), X' – замыкание этого прямоугольника в плоскости, ρ_0 – прекомпактная равномерная структура на X, определяемая его расширением X'. Выделим следующие множества:
$A^- = \{(x,0) | -1 \leq x < 0\}$,
$A^+ = \{(x,0) | 0 < x \leq 1\}$,
$A_n^- = \{(x,y) | -1 \leq x < 0, \frac{y}{x} \leq \frac{1}{n}\}$
$A_n^+ = \{(x,y) | 0 < x \leq 1, \frac{y}{x} \geq \frac{1}{n}\}$
$s^- = \{X \setminus A_n^-\}$,
$s^+ = \{X \setminus A_n^+\}$,
$s^0 = s^- \cup s^+$.

Рассмотрим на X равномерную структуру, базу которой составляют открытые покрытия вида $s^0 \wedge s$, где $s \in \rho_0$. Нетрудно доказать, что ρX будет прямоугольником X' без точки $O = (0,0)$, $\sigma'(A^-, A^+)$ имеет место, в то время как $\hat{\sigma}(A^-, A^+)$ не имеет места.

Замечание. Сравнивая структуры смежности σ' и $\hat{\sigma}$ на ρX можно заметить, что $\sigma' \leq \hat{\sigma}$, так как σ' согласована с прекомпактной равномерной структурой ρ_0, а $\hat{\sigma}$ согласована с продолжением равномерной структуры ρ на ρX и $\rho_0 \subset \rho'$.

Теорема. *Для любой сильно редуктивной структуры ρ, определенной на топологическом пространстве X, структуры смежности σ' и $\hat{\sigma}$, определенные на ρX, совпадают.*

Доказательство. Мы уже заметили, что $\sigma' \leq \hat{\sigma}$, остается доказать, что $\hat{\sigma} \leq \sigma'$.
Пусть $\hat{\sigma}(\alpha)$ не имеет места для некоторой конечной системы α замкнутых в ρX множеств, то есть $C\alpha \in \rho'$. Тогда найдется такое $s \in \rho$, что его продолжение на ρX, скажем s', вписано в $C\alpha$. Пусть $C\alpha = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$, тогда покрытие s' можно представить, как объединение конечного числа его подсистем s'_i, каждая из которых состоит из всех элементов покрытия s', содержащихся в G_i. Соответственно этому, покрытие s представляется в виде объединения подсистем s_i, продолжениями которых на ρX являются системы s'_i. В силу сильной редуктивности равномерной структуры ρ, существуют такие открытые множества

$U_1, U_2, \ldots, U_n$, что $\{U_i\} \leq_\rho s_i$ и $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \in \rho$. Докажем теперь, что $C\mathrm{cl}_{\rho X} CU_i \subset G_i$ для каждого i. Допустим, что это не так и существует $x \in C\mathrm{cl}_{\rho X} CU_i \setminus G_i$ для некоторого i. Иначе говоря, что $x \in C\mathrm{cl}_{\rho X} CU_i \cap H_i$, где $H_i = \rho X \setminus G_i$. Тогда $x \notin \mathrm{cl}_{\rho X} CU_i$, $CU_i \notin \gamma(x)$, $\gamma(x) \cup \{CU_i\}$ не является системой σ-смежности и поэтому $C\gamma(x) \cup \{U_i\} \in \rho$. Отсюда следует $C\gamma(x) \cup s_i \in \rho$. Но $s_i \subset C\gamma(x)$ и поэтому $C\gamma(x) \in \rho$, что противоречит принадлежности x к ρX. Итак все $C\mathrm{cl}_{\rho X} U_i \subset G_i$, то есть $H_i \subset \mathrm{cl}_{\rho X} CU_i$ или $\mathrm{cl}_{\sigma X} H_i \subset \mathrm{cl}_{\sigma X} F_i$, где $F_i = CU_i$ и $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ не имеет места. Отсюда следует, что $\sigma'(\alpha)$ не имеет места.

§4. Другие варианты равномерности

1. Введение. Существуют различные подходы к понятию равномерной структуры (равномерного пространства), хотя все они имеют один и тот же источник – понятие равномерно непрерывного отображения метрического пространства. Это понятие формулируется следующим образом.

Определение. *Отображение* $f : (X, d) \longrightarrow (X', d')$ *называется равномерно непрерывным отображением, если для каждого* $\epsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$*, что* $d(x, y) < \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon$*, для любых точек* x, y *в* X.

Замечание. Нетрудно заметить, что равномерно непрерывное отображение является непрерывным в каждой точке отображением, однако обратное утверждение неверно. Так, например, отображение $f(x) = x^2$ числовой прямой $\mathbb{R}$ с обычной на ней метрикой $d(x, y) = |x - y|$ непрерывно, но не равномерно непрерывно.

Для того чтобы перенести понятие равномерно непрерывного отображения с метрических пространств на более общие пространства надо было, прежде всего, заменить метрическое условие равномерной непрерывности на эквивалентное условие, в котором метрики явным образом не фигурируют. Оказалось, что такую замену можно осуществить различными способами.

Заметим,прежде всего, что условия $d(x, y) < \delta$ и $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$ можно заменить условиями $y \in O_\delta(x)$ и $f(y) \in O_\epsilon(f(x))$, где $O_\delta(x)$ и $O_\epsilon(f(x))$, являются окрестностями точек $x \in X$ и $f(x) \in X'$, соответственно. Это позволяет перейти в определении понятия равномерно непрерывных отображений от метрик к совокупностям окрестностей точек и, тем самым, получить соответствующее его обобщение на более широкий класс пространств. Числа δ и ϵ заменяются индексами $\lambda \in \Lambda$ и $\lambda' \in \Lambda'$. На этом пути возникает один из вариантов понятия равномерного пространства, основанный на системах $(O_\lambda(x)|\lambda \in \Lambda)$ окрестностей точек, определенных для каждой точки $x \in X$, – так называемая *равномерность окрестностей.*

С другой стороны можно рассматривать совокупности $\{O_\lambda(x)|x \in X\}$, являющиеся для каждого $\lambda \in \Lambda$ покрытием множества X. На этом пути возникает другой вариант понятия равномерного пространства, основанный на покрытиях – так называемая *равномерность по покрытиям.* Этот вариант мы уже рассмотрели.

Заметим, наконец, что условия $d(x,y) < \delta$ и $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$ можно заменить условиями $(x,y) \in U_\delta = \{(x,y)|d(x,y) < \delta\}$ и $(f(x), f(y)) \in U'_\epsilon = \{(x.y)|d'(x,y) < \epsilon\}$, где U_δ и U'_ϵ являются окрестностями диагоналей $\Delta = \{(x,x)|x \in X\} \subset X \times X$ и $\Delta' = \{(x,x)|x \in X'\} \subset X' \times X'$, соответственно. На этом пути возникает третий вариант понятия равномерного пространства, основанный на окрестностях диагонали $\Delta \subset X \times X$ – так называемая *равномерность окружений.*

2. Равномерная структура окрестностей. Мы начнем здесь с основных определений, относящихся к теории равномерных пространств окрестностей.

Определение. *Будем говорить, что на множестве X определена равномерная структура окрестностей $\mathcal{O}_\Lambda$, если фиксировано некоторое множество Λ и для каждой пары $x \in X$, $\lambda \in \Lambda$ определено множество $O_\lambda(x)$ так, что выполняются следующие условия:*

1. *$x \in O_\lambda(x)$ для всех $x \in X$ и $\lambda \in \Lambda$.*
2. *Для любых λ_1, λ_2 из Λ найдется такое $\lambda \in \Lambda$, что*

$$O_\lambda(x) \subset O_{\lambda_1}(x) \cap O_{\lambda_2}(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Пару $(X, \mathcal{O}_\Lambda)$ будем называть равномерным пространством окрестностей, множество Λ будем называть множеством индексов его структуры. Равномерные пространства окрестностей мы будем называть иногда для краткости N-равномерными пространствами.

Замечание. Любая равномерная структура окрестностей $\mathcal{O}_\Lambda$ однозначно определяет топологическую структуру окрестностей $\mathcal{O}$, для которой каждое $\mathcal{O}_x$ состоит из всех подмножеств множества

X, содержащих какое-нибудь множество $O_\lambda(x)$. Обратной однозначности нет, в общем случае различные равномерные структуры окрестностей могут определять одну и ту же топологическую структуру окрестностей.

Определение. *Пусть $(X, \mathcal{O})$ и $(X', \mathcal{O}')$ – N- равномерные пространства. Отображение $f : (X, \mathcal{O}) \longrightarrow (X', \mathcal{O}')$ называется N-равномерным отображением, если для любого $\lambda' \in \Lambda'$ найдется такое $\lambda \in \Lambda$, что $f(O_\lambda(x)) \subset O'_{\lambda'}(f(x))$ для всех $x \in X$.*

Теорема. *Тождественное отображение и композиция N-равномерных отображений являются N-равномерными отображениями.*

Доказательство. Для тождественного отображения достаточно взять $\lambda' = \lambda$. Рассмотрим, теперь, композицию gf двух N-равномерных отображений $f : (X, \mathcal{O}) \longrightarrow (X', \mathcal{O}')$ и $g : (X', \mathcal{O}') \longrightarrow (X'', \mathcal{O}'')$. Для каждого $\lambda'' \in \Lambda''$ найдется $\lambda' \in \Lambda'$, входящее в условие равномерности отображения g и для этого λ' найдется $\lambda \in \Lambda$, входящее в условие равномерности отображения f. Тем самым для каждого $\lambda'' \in \Lambda''$ найдется $\lambda \in \Lambda$, входящее в условие равномерности отображения gf.

Замечание. На множестве Λ индексов равномерного пространства можно ввести отношение порядка положив

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \text{ если } O_{\lambda_1}(x) \subset O_{\lambda_2}(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Нетрудно заметить, что с введением этого отношения порядка Λ становится направленным по убыванию упорядоченным множеством.

Из этого замечания следует, что без нарушения общности можно считать Λ направленным упорядоченным множеством. При этом должно будет, конечно, выполняться следующее условие:

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \Longrightarrow O_{\lambda_1}(x) \subset O_{\lambda_2}(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Любая метрика d на X позволяет ввести соответствующую ей равномерную структуру окрестностей $\mathcal{O}$, для которой множеством индексов является множество $\mathbb{R}_+$ положительных вещественных чисел с обычным отношением порядка, а окрестностями являются обычные ϵ-окрестности $O_\epsilon(x) = \{y | d(x, y) < \epsilon\}$.

3. Равномерная структура окружений. Сформулируем теперь определения, относящиеся к равномерным структурам окружений.

Определение. *Пусть X – произвольное множество. Рассмотрим множество $X \times X$ и диагональ $\Delta = \{(x,x)|x \in X\}$. Любое множество $U \subset X \times X$, содержащее диагональ, будем называть ее окружением. Равномерной структурой окружений на X будем называть любую систему $\mathfrak{U}$ окружений U дигонали в $X \times X$, удовлетворяющую следующим условиям:*

1. *Если $U_1 \in \mathfrak{U}$ и $U_2 \in \mathfrak{U}$, то $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{U}$,*
2. *Если $U \in \mathfrak{U}$ и $U \subset U'$, то $U' \in \mathfrak{U}$.*

Пару $(X, \mathfrak{U})$ будем называть равномерным пространством окружений. Равномерное пространство (структуру) окружений мы будем называть иногда для краткости Δ-равномерным пространством (Δ-равномерной структурой).

Замечание. Иногда к этим условиям присоединяют еще два условия, а именно

3. Если $U \in \mathfrak{U}$, то $U^{-1} = \{(x,y)|(y,x) \in U\} \in \mathfrak{U}$,
4. Если $U \in \mathfrak{U}$, то $V \circ V \subset U$ для некоторого $V \in \mathfrak{U}$. Здесь $V \circ V = \{(x,z)|(x,y) \in V,\ (y,z) \in V$ для некоторого $y \in V\}$.

Так как теория равномерных структур окружений достаточно предметна и без этих дополнительных условий, то их обязательное присоединение к первым двум условиям не является необходимостью.

Любая метрика d на X позволяет ввести соответствующую ей равномерную структуру окружений $\mathfrak{U}_d = \{U_\epsilon|\epsilon > 0\}$, для которых $U_\epsilon = \{(x,y)|d(x,y) < \epsilon\}$.

Определение. *Пусть $(X, \mathfrak{U})$ и $(X', \mathfrak{U}')$ – равномерные пространства. Отображение $f : (X, \mathfrak{U}) \longrightarrow (X', \mathfrak{U}')$ называется равномерно непрерывным отображением, если $(f \times f)^{-1}(U') \in \mathfrak{U}$ для любого окружения $U' \in \mathfrak{U}'$, где $(f \times f)(x,y) = (f(x), f(y))$.*

Заметим, что любая равномерная структура $\mathfrak{U}$ окружений на множестве X определяет на нем *две* структуры окрестностей $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$. Совокупность окрестностей $\mathcal{O}_x$ состоит из множеств $\{y|(x,y) \in U\}$, берущихся по всем $U \in \mathfrak{U}$, совокупность окрестностей $\mathcal{O}'_x$ состоит из множеств $\{y|(y,x) \in U\}$, берущихся по всем $U \in \mathfrak{U}$.

Глава V

Классические битопологические структуры

§1. Классическая битопологическая тематика

1. Предварительные замечания. В классической битопологической теории изучаются *битопологические пространства и их отображения*. Под этим понимается следующее:

Определение. *Битопологическим пространством (в смысле Келли) называется тройка (X, τ_1, τ_2), в которую входит произвольное множество X и две, заданные на этом множестве, топологические структуры τ_1 и τ_2. Пара (τ_1, τ_2) называется при этом битопологической структурой на X.*

Определение. *Пусть (X, τ_1, τ_2) и (X', τ_1', τ_2') – битопологические пространства. Битопологическим отображением $f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (X', \tau_1', \tau_2')$ называют такое отображение $f : X \longrightarrow X'$, что $f : (X, \tau_1) \longrightarrow (X', \tau_1')$ и $f : (X, \tau_2) \longrightarrow (X', \tau_2')$ – непрерывные отображения.*

Нетрудно доказать, что *битопологические пространства и их отображения образуют категорию*. Эту категорию обозначим через **КТор** или **КТ**.

Теория битопологических пространств является сравнительно молодой областью топологии. Ее возникновение связывают обычно с появлением в 1963 году битопологической работы Келли. В этой статье было четко сформулировано исходное понятие битопологического пространства, как множества с двумя произвольно фиксированными на нем топологическими структурами. Там же были приведены и некоторые результаты, в значительной мере определившие направление развития теории битопологических пространств на многие годы вперед. К сожалению это направление не отличалось оригинальностью, основная его проблематика состояла в переносе различных понятий и результатов из топологической теории в битопологическую.

Такой объект, как множество с двумя, определенными на нем топологическими структурами, появлялся в различных областях математики. Пусть, например, d – несимметричная метрика, определенная на некотором множестве X, то есть $d(x, y) \neq d(y, x)$

для некоторых точек x, y из X. Такая метрика определяет две системы окрестностей точек, а именно:

$$U_1(x,\epsilon) = \{y | d(y,x) < \epsilon\}, \ x \in X, \ \epsilon > 0,$$

$$U_2(x,\epsilon) = \{y | d(x,y) < \epsilon\}, \ x \in X, \ \epsilon > 0.$$

и, следовательно, она определяет две, несовпадающие в общем случае, топологические структуры τ_1 и τ_2. Тем самым несимметричная метрика определяет битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2).

Рассмотрим другой пример. Пусть на некотором множестве X определено какое-нибудь отношение порядка. Это отношение определяет две структуры. Одна топологическая структура определяется множествами A, удовлетворяющими условию

$$(x \in A \quad \text{и} \quad x \leq y) \iff y \in A$$

другая же определяется множествами A', удовлетворяющими условию

$$(x \in A' \quad \text{и} \quad y \leq x) \iff y \in A'.$$

Интересны также пары топологических структур, определяемые дистрибутивными решетками. Пусть M – дистрибутивная решетка, то есть частично упорядоченное множество, в котором $a + b = \sup\{a, b\}$ и $a \times b = \inf\{a, b\}$ существуют и эти операции дистрибутивны. Пусть, далее, X – множество, состоящее из всех простых идеалов в M, то есть подмножеств $p \subset M$, для которых

$$a + b \in p \iff (a \in p \quad \text{или} \quad b \in p),$$

$$a \times b \in p \iff (a \in p \quad \text{и} \quad b \in p).$$

На множестве X можно ввести две топологические структуры τ_1 и τ_2, определяемые, соответственно, системой всех множеств вида $\{p | a \notin p\}$ и вида $\{p | a \in p\}$.

Уже давно была установлена связь пар топологических структур с бимодальными логиками. В бимодальной логике имеются две модальные связки $\Diamond_1$ и $\Diamond_2$ – строгая возможность и, соответственно, слабая возможность. Имеются также модальные связки $\Box_1$ и $\Box_2$ – строгая необходимость и слабая необходимость, определяемые, соответственно, как $\sim \Diamond_1 \sim$ и $\sim \Diamond_2 \sim$, где $\sim$ – связка отрицания. При построении битопологической модели фиксированной бимодальной логики, каждой переменной сопоставляется некоторое подмножество фиксированного множества X, отрицанию соответствует дополнение, конъюнкции сответствует пересечение, дизъюнкции – объединение множеств, связкам $\Diamond_1$ и $\Diamond_2$ – соответствуют операции замыкания (вообще говоря, различные), связкам $\Box_1$ и $\Box_2$ – внутренности. Тем самым, модель является битопологическим пространством.

Появление битопологических пространств в самых разных, далеких друг от друга, теориях повлекла необходимость их изучения, как самостоятельных объектов, создания соответствующей теории.

Одновременное изучение двух топологических структур, определенных на одном и том же множестве, проводилось еще в 1931 году Вилсоном, однако у него они не были произвольными. Сам термин "битопологическое пространство" был введен в 1957 году Мотшаном. Он рассматривал битопологические пространства, как тройки (X, τ_1, τ_2), однако топологические структуры τ_1 и τ_2 были у него также сильно связаны друг с другом. У Вестона (1957 год) фигурировали уже произвольные пары топологических структур, но изучались только отношения между ними. Фактически он изучал различные бинарные отношения на множестве всех топологических структур, определенных на произвольно фиксированном множестве X. В связи с этим у него даже не было специального термина, обозначающего тройки (X, τ_1, τ_2).

Структура битопологического пространства в смысле Келли состоит их двух совершенно самостоятельных частей. Совместное их изучение – принципиальная особенность теории и применения теории таких пространств. В любой математической теории, в которой изучаемые объекты допускают их описание парами других, более простых, объектов, есть возможность применения битопологических в смысле Келли пространств.

Допустим, что нас интересует некоторый класс отображений каких-то множеств в себя или в другие множества. Допустим, далее, что мы хотели бы иметь топологическое описание этого класса, то есть представить этот класс, как класс всех непрерывных отображений этих множеств, снабженных соосветствующими топологическими структурами. Если это возможно, то будем говорить, что этот класс *имеет топологическое представление*. К сожалению, это не всегда возможно, но в некоторых случаях такой класс $\mathcal{F}$ можно представить, как пересечение двух классов $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, каждый из которых имеет топологическое представление. Класс $\mathcal{F}$ состоит из всех отображений f, для которых $f:(X,\tau_1)\longrightarrow(X',\tau_1')$ и $f:(X,\tau_2)\longrightarrow(X',\tau_2')$ непрерывны и, следовательно, бинепрерывно отображение $f:(X,\tau_1,\tau_2)\longrightarrow(X',\tau_1',\tau_2')$. В этом случае мы будем говорить, что класс $\mathcal{F}$ имеет *битопологическое представление*. Он является объектом битопологической теории и его можно изучать в рамках этой теории.

Другим интересным примером является топологизация множества PX всех или некоторой части подмножеств топологического пространства X. Известна топологизации Виториса, в которой множества $PG=\{F|F\subset G\}$ и $QG=\{F|F\cap G\neq\emptyset\}$, рассматриваемые для всех открытых в X множеств G, образуют предбазу открытых множеств. Такую топологическую структуру на X мы можем заменить двумя топологическими структурами, из которых одна имеет предбазой множества вида PG, а другая – множества вида QG. Эти топологические структуры изучаются проще, чем исхожная, их совместное изучение есть изучение некоторого битопологического объекта.

В этой главе будет изложены некоторые элементы классической битопологической теории, позволяющие получить некоторое представление об этой области общей топологии. Детальное изложение можно найти в книге "Битопологические пространства" (Записки научн. семинаров ПОМИ, том 248, 1997, стр. 7–212.

2. Классический подход к битопологии. Как уже было отмечено, подавляющая часть классической битопологической литературы посвящена переносу топологических понятий и результатов из топологической теории в битопологическую. Начало этому было положено в упомянутой выше статье Келли 1963 года. Результативность такого переноса обеспечивается структурным сходством топологических и битопологических, в классическом смысле, пространств. В обоих случаях мы имеем переход от одной топологической структуры к двум, одновременно рассматриваемым на заданном множестве, топологическим структурам. Основным методом обобщения определений, условий и результатов является здесь замена каждого вхождения топологической структуры τ в некоторую формулировку на τ_1 или на τ_2 или на какую-нибудь другую топологическую структуру $\tau'=\tau(\tau_1,\tau_2)$, канонически определяемую структурами τ_1 и τ_2. При этом должно, естественно, выполняться условие $\tau(\tau, \tau) = \tau$. Такого рода замена допускает различные варианты, *происходит расщепление понятий*. В качестве примера такого расщепления мы приведем основные варианты обобщения аксиомы отделимости T_2 (аксиомы Хаусдорфа).

Определение. *Топологическое пространство X принадлежит классу T_2 (является хаусдорфовым пространством), если для него выполняется аксиома*
T_2: Для любых двух различных точек x_1, x_2 топологического пространства (X, τ) найдутся такие множества G_1, G_2, что

$$x_1 \in G_1 \in \tau,\ x_2 \in G_2 \in \tau,\ G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$

Битопологическими обобщениями этой аксиомы являются следующие варианты:

pT_2 (парная хаусдорфовость): для любых двух различных точек x_1, x_2 битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) найдутся такие множества G_1, G_2, что

$$x_1 \in G_1 \in \tau_1,\ x_2 \in G_2 \in \tau_2,\ G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$

Здесь мы заменили условия $G_1 \in \tau$, $G_2 \in \tau$ на условия $G_1 \in \tau_1$, $G_2 \in \tau_2$.

wpT_2 (слабая парная хаусдорфовость): для любых двух различных точек x_1, x_2 битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) найдутся такие множества G_1, G_2, что

$$x_1 \in G_1 \in \tau_1,\ x_2 \in G_2 \in \tau_2 \quad \text{или}$$
$$x_1 \in G_1 \in \tau_2,\ x_2 \in G_2 \in \tau_1,\ G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$

Здесь мы заменили условия $G_1 \in \tau$, $G_2 \in \tau$ на условия $G_1 \in \tau_1$, $G_2 \in \tau_2$ или $G_1 \in \tau_2$, $G_2 \in \tau_1$.

$\sup T_2$: для любых двух различных точек x_1, x_2 битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) найдутся такие множества G_1, G_2, что

$$x_1 \in G_1 \in \tau,\ x_2 \in G_2 \in \tau,\ G_1 \cap G_2 = \emptyset,\ \tau = \sup\{\tau_1, \tau_2\}.$$

$\inf T_2$: для любых двух различных точек x_1, x_2 битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) найдутся такие множества G_1, G_2, что

$$x_1 \in G_1 \in \tau,\ x_2 \in G_2 \in \tau,\ G_1 \cap G_2 = \emptyset,\ \tau = \inf\{\tau_1, \tau_2\}.$$

biT_2: для любых двух различных точек x_1, x_2 битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) найдутся такие множества G_1, G_2, что

$$x_1 \in G_1 \in \tau_1,\ x_2 \in G_2 \in \tau_1,\ G_1 \cap G_2 = \emptyset$$

и найдутся такие множества G_1, G_2, что

$$x_1 \in G_1 \in \tau_2,\ x_2 \in G_2 \in \tau_2,\ G_1 \cap G_2 = \emptyset,$$

иначе говоря, топологические пространства (X, τ_1) и (X, τ_2) принадлежат классу T_2.

Возможно также использование сразу нескольких канонически определенных структур

$$\tau_1'(\tau_1, \tau_2),\ \tau_2'(\tau_1, \tau_2), \ldots,$$

переходящих в τ при $\tau_1 = \tau_2 = \tau$.

Переход от топологических формулировок к соответствующим битопологическим неоднозначен, а перебор вариантов и их анализ требует, подчас, значительных исследований. Тем не менее, почти все основные понятия и утверждения топологической теории были, в конечном счете, перенесены с большим или меньшим успехом в битопологическую теорию. Собственно говоря, почти вся классическая битопологическая теория является, пока, результатом такого переноса. Однако классический подход к развитию битопологической теории не всегда срабатывал. В некоторых важных случаях не удалось найти достаточно удачное обобщение даже исходных понятий, не говоря уж о результатах. Мы рассмотрим несколько позже два таких случая: битопологическую компактность и битопологические группы.

3. Битопологическая связность. Значительное количество статей посвящено понятию связности и локальной связности топологических и битопологических в смысле Келли пространств. При этом, как обычно, при переходе от топологических пространств к битопологическим происходит расщепление понятий.

Определение. *Топологическое пространство (X, τ) называют связным, если для него выполняется аксиома*

$$C: \quad \text{\it из } G_1 \cup G_2 = X,\ G_1 \cap G_2 = \emptyset,\ G_1 \in \tau,\ G_2 \in \tau$$

$$\text{\it следует} \quad \{G_1,\ G_2\} = \{\emptyset,\ X\}$$

топологической связности.

При переходе к битопологическим пространствам (X, τ_1, τ_2) эта аксиома расщепляется на следующие аксиомы:

pC: из $G_1 \cup G_2 = X$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_1 \in \tau_1$, $G_2 \in \tau_2$ следует $\{G_1,\ G_2\} = \{\emptyset,\ X\}$.

$\inf C$: из $G_1 \cup G_2 = X$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_1 \in \tau$, $G_2 \in \tau$, $\tau = \inf\{\tau_1,\ \tau_2\}$, следует $\{G_1,\ G_2\} = \{\emptyset,\ X\}$.

$\sup C$: из $G_1 \cup G_2 = X$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_1 \in \tau$, $G_2 \in \tau$, $\tau = \sup\{\tau_1,\ \tau_2\}$, следует $\{G_1,\ G_2\} = \{\emptyset,\ X\}$.

biC: из $G_1 \cup G_2 = X$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_1 \in \tau$, $G_2 \in \tau$, $\tau \in \{\tau_1, \tau_2\}$, следует $\{G_1,\ G_2\} = \{\emptyset,\ X\}$.

Так как связность топологических пространств сохраняется при переходе к произведениям и к непрерывным образам, то в классе KT аксиома biC эквивалентна следующей аксиоме:

upC: топологическое пространство $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2)$ связно.

Как мы убедимся в дальнейшем, структурная формулировка в топологической теории всегда может быть заменена категорной. В частности, определение C-связности, сформулированное выше в терминах соответствующих множеств (структурное определение), можно сформулировать в терминах непрерывных отображений (категорное определение). В рассматриваемом случае можно воспользоваться следующим утверждением:

Топологическое пространство (X, τ) связно тогда и только тогда, когда каждое его непрерывное отображение в двухточечное дискретное пространство постоянно (имеет одноточечный образ).

Аналогичное утверждение справедливо для битопологических в смысле Келли пространств с той только разницей, что теперь имеется в виду pC-связность, рассматриваются бинепрерывные отображения, а в качестве области значений берется битопологическое пространство (D, τ_r, τ_l), где

$$D = \{0,1\}, \tau_r = \{\emptyset, D, \{0\}\}, \tau_l = \{\emptyset, D, \{1\}\}.$$

Перейдем теперь к понятию *локальной связности*. В топологической теории это понятие выглядит. следующим образом.

Определение. *Топологическое пространство (X, τ) называется локально связным, если выполняется аксиома*
lC: для любой точки $x \in X$ топологического пространства (X, τ)

и любой ее τ-окрестности G, $x \in G \in \tau$, найдется связная τ-окрестность G' этой точки, содержащаяся в G, $x \in G' \subset G$.

Проблема выбора того или иного понятия локальной связности в категории KT упирается, прежде всего, в определение понятия окрестности точки битопологического в смысле Келли пространства (X, τ_1, τ_2). Здесь возможны разные подходы, опять происходит расщепление понятия. Некоторые авторы считают, например, что окрестностями точки x в (X, τ_1, τ_2) являются все τ_1- и все τ_2-окрестности этой точки, другие же рассматривают в качестве окрестностей точки x в (X, τ_1, τ_2) всевозможные пересечения τ_1-окрестностей и τ_2-окрестностей или же их объединения.

4. Битопологическая компактность. Разными авторами были предприняты попытки создать естественное обобщение топологического понятия компактности и локальной компактности.

Определение. *Топологическое пространство (X, τ) называется компактным, если выполняется следующее условие:*
Ср: для любого покрытия s множества X τ-открытыми множествами, найдется конечное покрытие s' этого множества τ-открытыми множествами, вписанное в s.

Определение. *Топологическое пространство называется локально компактным, если любая его точка имеет окрестность с компактным замыканием.*

Исходя из этих определений была построена далеко продвинутая теория компактности и локальной компактности топологических пространств.

При переходе от топологических пространств к битопологическим и сопутствующем этому переходу расщеплении понятий, *не удается найти удовлетворительные, во всех отношениях, понятия компактности битопологических пространств и их локальной компактности. Классический подход здесь не срабатывает.* В битопологической литературе имеются различные варианты. Чтобы как-то называть их мы будем пользоваться термином “компактный”, ставя перед ним указание на авторов соответствующих формулировок.

Определение. *Пусть $\tau_i(V) = \{X, \emptyset,\ U \cup V | U \in \tau_i\}$, где $V \in \tau_j$, $V \neq \emptyset$, $i \neq j$. Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) называется K-*

компактным, если все топологические структуры $\tau_i(V)$ компактны.

Определение. *Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) называется B-компактным, если в каждое τ_i-открытое покрытие можно вписать конечное τ_j-открытое покрытие, $i \neq j$.*

Определение. *Покрытие s множества X называется парно открытым покрытием битопологического пространства (X, τ_1, τ_2), если $s = s_1 \cup s_2$, $s_1 \subset \tau_1$, $s_2 \subset \tau_2$, $s_1 \neq \emptyset$, $s_2 \neq \emptyset$.*

Определение. *Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) называется FHP-компактным, если каждое его парно открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.*

Определение. *Покрытие s множества X называется $\tau_1\tau_2$-открытым покрытием, если $s \subset \tau_1 \cup \tau_2$.*

Определение. *Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) называется Sw-компактным, если каждое $\tau_1\tau_2$-покрытие содержит конечное подпокрытие.*

Определение. *Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) называется KN-компактным, если каждое τ_i-замкнутое собственное подмножество в X будет τ_j-компактно.*

Определение. *Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) называется дважды компактным, если топологические пространства (X, τ_1) и (X, τ_2) компактны.*

Определение. *Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) называется S-компактным, если любая бинепрерывная функция $f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (X, \tau_r, \tau_l)$ ограничена.*

Имеются определения компактности, имеющие смысл не для произвольных битопологических пространств, а лишь для довольно узкого их класса.

Определение. *Слабо парно вполне регулярное битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) называется парно вещественно компактным, если оно парно гомеоморфно пересечению τ_1-замкнутых и τ_2-замкнутых множеств в некоторой степени битопологической прямой $(\mathbb{R}, \tau_r, \tau_l)$.*

Определение. *Битопологическое пространство* (X, τ_1, τ_2) *называется* Sg*-компактным, если оно* S*-компактно и парно вещественно компактно.*

Определение. *Битопологическое пространство* (X, τ_1, τ_2) *называется бикомпактным, если топологическое пространство* $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2)$ *компактно.*

Это только основные варианты, имеющихся в битопологической литературе определений компактности битопологических в смысле Келли пространств, а имеются еще варианты, использующие полуоткрытые множества, регулярно открытые множества, а также другие типы множеств.

К сожалению каждое из имеющихся в литературе определений компактности KT-пространств имеет свои недостатки. Одни из них не гарантируют мультипликативность компактности в категории KT, такой, например, является FHP-компактность. Другие же обладают следующим неприятным свойством: если (X, τ_1, τ_2) компактно (в указанном смысле) и парно хаусдорфово, то $\tau_1 = \tau_2$.

Известно, что если топологическое пространство (X, τ) компактно, то структура τ является минимальной структурой в классе хаусдорфовых топологических структур. Естественно считать, что аналогичное утверждение должно быть верным и для битопологических пространств. В соответствии с этим принципом минимальность битопологической структуры (τ_1, τ_2) должна быть необходимым условием компактности для парно хаусдорфовых битопологических пространств. И действительно, почти все известные определения компактности битопологических пространств этому условию удовлетворяют. Пусть, например, (X, τ_1, τ_2)-произвольное KN-компактное парно хаусдорфово битопологическое пространство. В этом пространстве каждое собственное τ_i-замкнутое множество τ_j-компактно. Пусть далее (X', τ_1', τ_2')- также парно хаусдорфово пространство, причем $\tau'_1 \subset \tau_1, \tau'_2 \subset \tau_2$. Пусть F-произвольное собственное τ_i-замкнутое подмножество в X и $x \notin F$. Тогда для каждой точки $y \in F$ найдутся множества U_y и V_y такие, что $y \in U_y \in \tau_j$, $x \in V_y \in \tau_i$, $U_y \cap V_y = \emptyset$. Множества $U_y | y \in F$ образуют τ_j-открытое покрытие множества F и, в силу KN-компактности (X, τ_1, τ_2), найдутся $V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n}$ покрывающие F. Тогда $(\cap_{k=1}^n V_{y_k}) \cap F = \emptyset$ и следовательно точка x не принадлежит τ'-замыканию множества F.

Но это означает в конечном счете, что F является τ_i'-замкнутым множеством. Тем самым доказано, что $\tau_i' = \tau_i$, $i = 1, 2$ и потому (X, τ_1, τ_2)-минимальное парно хаусдорфово битопологическое пространство.

С другой стороны можно доказать, что свойство KN-компактности не мультипликативно. Действительно, пусть X – произвольное множество, τ_d – максимальная T_1 топология, являющаяся дискретной топологической структурой на X, τ_m – минимальная T_1 топология, состоящая из пустого множества и дополнений до всех конечных множеств. Тогда (X, τ_d, τ_m)-парно хаусдорфово битопологическое пространство, так как если $x \neq y$ – произвольные точки из X, то $x \in \{x\} \in \tau_d$, $y \in X \setminus \{x\} \in \tau_m$. Кроме того (X, τ_d, τ_m) является KN-компактным битопологическим пространством. Действительно, любое τ_m-открытое покрытие любого множества содержит, очевидно, конечное покрытие и потому любое подмножество множества X будет τ_m-компактно. С другой стороны, любое τ_m-замкнутое собственное подмножество множества X конечно и, следовательно, τ_d-компактно. По тем же соображениям будет KN-компактным и битопологическое пространство (X, τ_m, τ_d). Рассмотрим теперь произведение этих битопологических пространств $(X \times X, \tau_d \times \tau_m, \tau_m \times \tau_d)$. В $X \times X$ любое вертикальное множество $\{x\} \times X$ будет $\tau_d \times \tau_m$-замкнутым множеством и любое горизонтальное множество $X \times \{y\}$ будет $\tau_m \times \tau_d$-открытым множеством. Поэтому для любого вертикального множества $\{x\} \times X$ мы можем рассмотреть его $\tau_m \times \tau_d$-открытое покрытие горизонтальными множествами. Из такого покрытия не выделить конечное покрытие и потому любое вертикальное множество будет $\tau_d \times \tau_m$-замкнутым множеством, но не будет $\tau_m \times \tau_d$-компактным множеством. Это означает что $(X \times X, \tau_d \times \tau_m, \tau_m \times \tau_d)$ не KN-компактное парно хаусдорфово битопологическое пространство. Можно доказать также, что это битопологическое пространство $(X \times X, \tau_d \times \tau_m, \tau_m \times \tau_d)$ не является минимальным парно хаусдорфовым битопологическим пространством и, таким образом, свойство битопологического пространства быть минимальным парно хаусдорфовым также не мультипликативно.

Понятия KN-компакности, K-компактности и FHP-компактности отличаются только формулировками, на самом деле они определяют одно и то же понятие, называемое парной компактностью. Мы доказали, таким образом, что парная компактность не мультипликативна. С другой стороны некоторые из понятий компактности битопологических пространств мультипликативны, но такие понятия имеют другой недостаток. Для них из компактности (X, τ_1, τ_2) следует компактность топологических пространств (X, τ_1) и (X, τ_2). Для простоты мы рассмотрим случай, когда некоторое понятие битопологической компактности включает в себя парную компактность, симметричность относительно τ_1 и τ_2 и мультипликативность.

Действительно, пусть (X, τ_1, τ_2) – компактное в указанном выше смысле битопологическое пространство. Тогда будет компактно и битопологическое пространство (X, τ_2, τ_1), а также их произведение $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2, \tau_2 \times \tau_1)$. Если τ_1 – тривиальная топологическая структура, то есть $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$, то (X, τ_1) – компактное топологическое пространство. Если же τ_1 – нетривиальная топологическая структура, то мы можем рассмотреть τ_1-замкнутое множество F отличное от пустого множества и от X. Тогда $F \times X$ – непустое $\tau_1 \times \tau_2$-замкнутое собственное подмножество множества $X \times X$ и в силу парной компактности битопологического пространства $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2, \tau_2 \times \tau_1)$ это множество будет $\tau_2 \times \tau_1$-компактно. Рассмотрим произвольное τ_1-открытое покрытие s множества X. Тогда $X \times s$ будет $\tau_2 \times \tau_1$-открытым покрытием множества $F \times X$. В силу $\tau_2 \times \tau_1$-компактности этого множества из покрытия $X \times s$ можно выбрать конечное покрытие $X \times G_1, X \times G_2, \dots, X \times G_n$. Тогда множества $G_1, G_2, \dots, G_n$ будут образовывать конечное покрытие множества X. Но это означает, что в любом τ_1-открытом покрытии множества X найдется конечное подпокрытие, что означает компактность топологического пространства (X, τ_1). Аналогично доказывается компактность топологического пространства (X, τ_2).

Понятие битопологической локальной компактности еще более вариантно, чем понятие компактности. Если при введении понятия битопологической компактности мы сталкиваемся только с трудностью переноса топологической компактности на битопологические пространства, то при введении локальной компактности добавляется необходимость так или иначе сформулировать понятие окрестности точки и понятие замыкания множества. Само же определение локальной компактности не вызывает особых трудностей, оно просто повторяет топологическое определение.

Таким образом вся трудность состоит в понимании трех терминов: окрестность, компактность, замыкание. Каждый из этих трех терминов допускает различные толкования и это нашло свое отражение в битопологической литературе. С некоторыми вариантами определения битопологической компактностью мы только что познакомились, с окрестностями точек мы имели дело в связи с битопологической связностью, осталось только определиться с замыканиями окрестностей. В битопологическом пространстве (X, τ_1, τ_2) имеются две основные операции замыкания, а именно τ_1-замыкание и τ_2-замыкание. Кроме того можно рассматривать $\sup\{\tau_1, \tau_2\}$-замыкание и $\inf\{\tau_1, \tau_2\}$-замыкание. Наконец можно вводить различные комбинации этих (четырех) операций.

Таким образом совокупность различных вариантов понятия битопологической локальной компактности чрезвычайно велика и трудно обозрима. Варианты уже рассмотренные в битопологической литературе составляют ее незначительную часть. Вот некоторые из них:

Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) *локально компактно,* если
каждая точка $x \in X$ имеет τ_i-окрестность с τ_j-компактным τ_j-замыканием;
если
каждая точка $x \in X$ имеет τ_i-окрестность с τ-компактным τ_j-замыканием;
если
каждая точка $x \in X$ имеет τ_i-окрестность с FHP-компактным τ_j-замыканием;
если
каждая точка $x \in X$ имеет τ-окрестность G, для которой

$$\mathrm{cl}_{\tau_1} G \cap \mathrm{cl}_{\tau_2} G \quad \text{компактно в} \quad (X, \tau);$$

если
(X, τ) – локально компактно.
В этих определениях $\tau = \sup\{\tau_1, \tau_2\}$.

6. Заключение. В предыдущем разделе мы убедились на примере компактности, что в некоторых ситуациях классический подход, заключающийся в попытках развития битопологической теории непосредственным обобщением топологических формулировок, непригоден. Другим примером такой ситуации являются битопологические группы.

Различные авторы пытаясь создать достаточно далеко продвинутую теорию битопологических групп, естественно обобщающую теорию топологических групп, не достигли какого-нибудь заметного успеха. Эти попытки заканчивались на этапе формирования основных понятий. Не удалось даже сформулировать исходное понятие битопологической группы, которое стало бы общепризнанной основой соответствующей теории. Разные авторы предлагали существенно различные варианты.

Формулируя тот или иной вариант понятия битопологической группы, исходили из определения топологической группы, изменяя его подходящим образом. Топологическая группа определяется, обычно, как пара (G, τ), где G-некоторая группа, а τ-топологическая структура на G. При этом требуется, чтобы групповая структура и топологическая структура на G были связаны следующими условиями:
отображение $p : (G \times G, \tau \times \tau) \longrightarrow (G, \tau)$, $p(x, y) = xy$, должно быть непрерывным отображением,
отображение $q : (G, \tau) \longrightarrow (G, \tau)$, $q(x) = x^{-1}$, должно быть гомеоморфизмом.

Повидимому первый из существующих в битопологической литературе вариантов понятия битопологической группы состоял в следующем:

Определение. *Битопологической группой называется тройка (G, τ_1, τ_2), где G – какая-нибудь группа, а τ_1 и τ_2 – топологические структуры на G, связанные следующими условиями:*
отображение $p : (G \times G, \tau_1 \times \tau_1, \tau_2 \times \tau_2) \longrightarrow (G, \tau_1, \tau_2)$, $p(x, y) = xy$, должно быть бинепрерывным отображением,
отображение $q : (G, \tau_1) \longrightarrow (G, \tau_2)$, $q(x) = x^{-1}$ должно быть гомеоморфизмом.

Замечание. Нетрудно заметить, что на самом деле задание любой такой битопологической группы эквивалентно заданию на G только одной топологической структуры, например τ_1, удовлетворяющей только одному условию, а именно
отображение $p : (G \times G, \tau_1 \times \tau_1) \longrightarrow (G, \tau_1)$, $p(x, y) = xy$, должно быть непрерывным отображением.

Действительно, топологическая структура τ_2 очевидным образом определяется топологической структурой τ_1.

$\tau_2 = \tau_1^{-1} = \{G^{-1}|G \in \tau_1\}, G^{-1} = \{x^{-1}|x \in G\}$, причем непрерывность отображения $p : (G \times G, \tau_2 \times \tau_2) \longrightarrow (G, \tau_2)$ следует из непрерывности отображения $p : (G \times G, \tau_1 \times \tau_1) \longrightarrow (G, \tau_1)$.

Таким образом, это понятие битопологической группы получается,в действительности, из понятия топологической группы простым отбрасыванием условия

$q : (G, \tau) \longrightarrow (G, \tau), q(x) = x^{-1}$, – непрерывное отображение. *В таком понятии нет ничего битопологического.*

Не лучше обстояло дело, когда было предложено рассматривать битопологическую группу, как тройку (X, τ_1, τ_2), налагая на τ_1 и τ_2 другие условия, а именно:
отображения

$$p : (G \times G, \tau_1 \times \tau_2) \longrightarrow (G, \tau_1)$$

$$p : (G \times G, \tau_1 \times \tau_2) \longrightarrow (G, \tau_2)$$

должны быть непрерывными отображениями,
отображение

$$q : (G, \tau_1) \longrightarrow (G, \tau_2)$$

должно быть гомеоморфизмом.

Такое понятие битопологической группы действительно является непосредственным обобщением понятия топологической группы, так как при $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ мы приходим к обычному групповому определению. Однако *из сформулированных выше условий как раз и следует $\tau_1 = \tau_2$, то есть битопологическая* в этом смысле группа всегда является топологической группой.

Действительно, рассмотрим вложения

$$j_1 : (G, \tau_1) \longrightarrow (G \times G, \tau_1 \times \tau_2)$$

и

$$j_2 : (G, \tau_2) \longrightarrow (G \times G, \tau_1 \times \tau_2),$$

где $j_1(x) = (x, 1_G)$, $j_2(x) = (1_G, x)$. Отображения

$$pj_1 : (G, \tau_1) \longrightarrow (G, \tau_2), \quad pj_2 : (G, \tau_2) \longrightarrow (G, \tau_1)$$

будут взаимно однозначными непрерывными отображениями и потому $\tau_2 \subset \tau_1, \tau_1 \subset \tau_2$, то есть $\tau_1 = \tau_2$.

Не спасает ситуацию и переход к так называемым полутопологическим группам. Условия, накладываемые на полутопологическую группу, отличаются от условий накладываемых на топологическую группу тем, что вместо непрерывности отображения $p : (G \times G, \tau_1 \times \tau_2) \longrightarrow (G, \tau)$ требуется непрерывность этого отображения на каждом горизонтальном в $G \times G$ множестве $G \times \{y\}$ и на каждом вертикальном множестве $\{x\} \times G$. Грубо говоря, вместо непрерывности отображения p по совокупности переменных x, y, как это требуется для топологической группы, требуется непрерывность по каждой из переменных в отдельности. Это условие непрерывности по каждой из переменных в отдельности можно заменить на условие непрерывности отображения p на всем топологическом пространстве $(G \times G, \beta)$ при подходящем выборе топологической структуры β. В качестве β можно взять топологическую структуру на $G \times G$, для которой множество F замкнуто тогда и только тогда, когда его пересечение с каждым горизонтальным и с каждым вертикальным в $G \times G$ множеством замкнуто относительно топологий индуцированных на этих множествах топологической структурой $\tau \times \tau$. Изучение классической тематики позволяет сделать следующее заключение; *классический подход к теории битопологических пространств, заключающийся в обобщении различных топологических понятий и результатов, во многих случаях не приводит к значимым результатам.*

§2. Неклассическая битопологическая тематика

1. Неклассические определения. В соответствии с классическим определением, битопологической структурой на множестве X называется пара (τ_1, τ_2) топологических структур, определенных на X. Любой такой паре соответствует топологическая структура $\beta = \tau_1 \times \tau_2$ на множестве $X \times X$, причем это соответствие взаимно однозначно. Таким образом, мы можем перейти к новому пониманию битопологического пространства, как пары (X, β), где $\beta = \tau_1 \times \tau_2$ – некоторая топологическая структура на множестве $X \times X$. Более того, естественно возникает идея рассматривать на $X \times X$ произвольные *топологические структуры* β, называя их *(общими) битопологическими структурами* на X. Битопологические структуры $\beta = \tau_1 \times \tau_2$, соответствующие классическим битопологическими структурам (τ_1, τ_2), будем называть *разложимыми* битопологическими структурами. Этот термин связан с тем, что $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2) = (X, \tau_1) \times (X, \tau_2)$. Битопологическим отображениям $f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (X', \tau_1', \tau_2')$ соответствуют при этом непрерывные отображения $f \times f : (X \times X, \tau_1 \times \tau_2) \longrightarrow (X' \times X', \tau_1' \times \tau_2')$, где $(f \times f)(x, y) = (f(x), f(y))$ – *покоординатное отображение*. Мы можем, теперь, рассматривать категорию KT, как категорию разложимых битопологических пространств и их отображений. Непонятно, как в такой трактовке битопологических пространств может возникнуть классическая проблематика. Еще дальше от этой проблематики стоит *равномерная интерпретация* битопологических в смысле Келли пространств. Под этим мы понимаем следующее.

В топологическом пространстве $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2)$ мы можем рассмотреть его *диагональ* $\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$ и совокупность $\mathfrak{U}$ окрестностей U (окружений) этой диагонали. Нетрудно доказать, что эта совокупность является *равномерной структурой окружений*. Более того, отображения битопологических пространств являются равномерно непрерывными отображениями соответствующих им битопологических пространств. Таким образом категорию KT можно рассматривать, как некоторую подкатегорию категории $Unif$. При такой интерпретации битопологического пространства можно вводить, например, понятие парно хаусдорфова равномерного пространства, но кому это придет в голову?

2. Неподвижные точки. Пусть $X = \{x | 0 < x \leqslant 1\}$, τ_1, τ_2 – топологические структуры на X, определяемые следующим образом:
τ_1 – обычная топологическая структура полуинтервала $(0, 1]$,
τ_2 – обычная топологическая структура окружности, полученной отождествлением концов отрезка $[0, 1]$.

Топологические пространства (X, τ_1) и (X, τ_2) не обладают свойством неподвижной точки. Зто значит, что для каждого из этих пространств в отдельности (полуинтервала и окружности) существует какое-то его непрерывное отображение $f : X \longrightarrow X$ в себя, не имеющее неподвижной точки, то есть точки $x \in X$, для которой $f(x) = x$. Если, однако, мы рассмотрим отображение $f : X \longrightarrow X$ непрерывное относительно обеих топологических структур τ_1 и τ_2 одновременно, то такое отображение будет иметь неподвижную точку. Действительно, пусть $f(1) \neq 1$, докажем, что в этом случае f-образ множества X является его собственным подмножеством, а именно, что ему не принадлежат точки достаточно близкие к точке 0. Допустим, что это не так и существует в X последовательность (x_n), для которой $f(x_n)$ сходится к 0 относительно обычной топологии числовой прямой. Без нарушения общности, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можно считать, что $(x_n) \longrightarrow x$ в (X, τ_2) для некоторой точки $x \in X$ и поэтому $f(x) = 1$. Но это невозможно, так как последовательность $(f(x_n))$ не сходится в (X, τ_1) к точке 1. Итак мы доказали, что $f(X)$ является собственным подмножеством окружности, и потому будет топологическим отрезком в (X, τ_2). Но тогда f непрерывно отображает этот отрезок в себя и потому имеет неподвижную точку.

Таким образом одновременное рассмотрение двух топологических структур, заданных на одном и том же множестве, или, как говорят, рассмотрение битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) позволило получить существенно новый результат. Это битопологическое пространство обладает свойством неподвижной точки, в то время как топологические пространства (X, τ_1) и (X, τ_2) этим свойством не обладают.

3. Некоторые специальные свойства. Многие авторы изучали не битопологические пространства, а бинарные отношения на множестве всех топологических структур, определенных на произвольно фиксированном множестве X. Конечно изучать тройки (X, τ_1, τ_2) или же пары (τ_1, τ_2), где τ_1, τ_2 – топологические структуры на X, по-существу одно и то же, но формально это разные объекты. Во многих случаях даже не применялся и сам термин битопологическое пространство.

Точно так обстоит дело и со специальными отношениями между топологическими структурами, введенными Архангельским и Бокало. Мы опишем вкратце их подход к определению некоторых специальных бинарных отношений между топологическими структурами или же, в нашей терминологии, специальных классов битопологических пространств.

Говорят, что две топологические структуры τ_1 и τ_2 *совпадают в некоторой точке* $x \in X$, если в этой точке фильтр τ_1-окрестностей и фильтр τ_2-окрестностей совпадают.

Пусть θ и μ – некоторые свойства подмножеств топологических пространств. Через $\mathcal{E}_\mu(X, \tau)$ или просто $\mathcal{E}_\mu$, если это не приводит к недоразумениям, обозначают множество всех непустых подмножеств множества X, обладающих свойством μ в топологическом пространстве (X,τ). Для каждого $Y \in \mathcal{E}_\mu$ определено множество $\mathcal{E}_\theta(Y)$ всех непустых подмножеств множества Y обладающих свойством θ в $(Y,\tau|Y)$. Все такие множества составляют, в совокупности, множество $\mathcal{E}_{\theta,\mu}$.

Топологическая структура τ_1 называется (θ,μ)-*гранью* топологической структуры τ_2, если для каждого $Y \in \mathcal{E}_\mu(X,\tau_2)$ найдется множество $Z \in \mathcal{E}_\theta(Y)$ такое, что $\tau_1|Y$ и $\tau_2|Y$ совпадают в некоторой точке множества Z. Эти определения позволяют рассматривать класс $T_{(\theta,\mu)}$ битопологических пространств, состоящий из всех (X,τ_1,τ_2), удовлетворяющих условию: τ_1 является (θ,μ)-гранью τ_2.

В простейшем случае, когда $\theta = t$, $\mu = t$, где t-свойство быть подмножеством, класс $T_{t,t}$ обозначают через Tan. В соответствии с определением класс Tan состоит из всех битопологических пространств (X,τ_1,τ_2), для которых в любом непустом подмножестве $Y \subset X$ найдется точка, для которой $\tau_1|Y$-фильтр и $\tau_2|Y$-фильтр окрестностей совпадают.

Используется также следующая терминология. *Точкой касания* топологических структур τ_1 и τ_2 называют точку, в которой совокупность τ_1-окрестностей и τ_2-окрестностей совпадают. Топологическая структура τ_1 *касается* топологической структуры τ_2, если в каждом непустом подмножестве $Y \subset X$ существует точка касания топологических структур $\tau_1|Y$ и $\tau_2|Y$. Вводятся также следующие определения.

Топологическая структура τ_1 *слабо касается* топологической структуры τ_2, если в каждом непустом τ_1-замкнутом множестве $Y \subset X$ существует точка касания топологических структур $\tau_1|Y$ и $\tau_2|Y$.

Топологическая структура τ_1 *сильно касается* топологической структуры τ_2, если для любого непустого множества $Y \subset X$ множество точек касания топологических структур $\tau_1|Y$ и $\tau_2|Y$ имеет непустую внутренность в $(Y,\tau_1|Y)$.

В соответствии с этими определениями мы можем рассматривать следующие классы битопологических пространств:

Tan состоит из всех битопологических пространств (X,τ_1,τ_2), для которых τ_1 касается τ_2.

wTan состоит из всех битопологических пространств (X,τ_1,τ_2), для которых τ_1 слабо касается τ_2.

sTan состоит из всех битопологических пространств (X,τ_1,τ_2), для которых τ_1 сильно касается τ_2.

Очевидно, что

$$s\mathrm{Tan} \subset \mathrm{Tan} \subset w\mathrm{Tan}.$$

Нетрудно заметить, что битопологическое пространство (X, τ, τ) для произвольных X и τ принадлежит каждому классу $T_{\theta,\mu}$, каковы бы ни были свойства θ и μ. Поэтому принадлежность того или иного битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) к некоторому классу $T_{\theta,\mu}$ можно рассматривать, как отражение характера и степени совпадения (несовпадения) топологических стуктур τ_1 и τ_2, определенных на одном и том же множестве. Чем уже этот класс тем ближе друг к другу топологические структуры τ_1 и τ_2 и тем ближе битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) к классу T.

Возможны, впрочем, и другие подходы к оценке степени близости двух топологических структур, заданных на одном и том же множестве. Мы можем, например, осуществить непосредственное сравнение топологических структур τ_1 и τ_2, как систем подмножеств множества X, рассмотрев их пересечение. Представляется интуитивно ясным, что чем больше это пересечение, тем ближе друг к другу топологические структуры τ_1 и τ_2. Если $\tau_1 \cap \tau_2 = \emptyset$, то между этими топологическими структурами вообще вроде бы нет ничего общего. С другой стороны возможен и другой подход к оценке степени совпадения τ_1 и τ_2. Он основан на приведенной выше идее. Мы можем рассмотреть совокупность $\mathcal{I}(X, \tau_1, \tau_2)$ всех подмножеств множества X на каждом из которых топологические структуры τ_1 и τ_2 индуцируют одну и ту же топологическую структуру. Опять же интуитивно ясно, что чем больше $\mathcal{I}(X, \tau_1, \tau_2)$ тем ближе τ_1 и τ_2 друг к другу. Рассмотрим, однако, следующий пример. Пусть $X = [0,1]$, $X' = (0,1)$, τ'-обычная топологическая структура на интервале $(0,1)$. Положим

$$\tau_1 = \{G' \cup \{0\} | G' \in \tau'\} \cup \{\emptyset, X\}, \tau_2 = \{G' \cup \{1\} | G' \in \tau'\} \cup \{\emptyset, X\}.$$

Каждое τ_1-открытое множество, отличное от $\emptyset$ и X, содержит точку 0 и каждое τ_2-открытое множество, отличное от $\emptyset$ и X, содержит точку 1. Отсюда следует, что $\tau_1 \cap \tau_2 = \{\emptyset, X\}$. Оценка совпадения по $\tau_1 \cap \tau_2$ приводит нас к заключению о том, что τ_1 и τ_2 далеки друг от друга. С другой стороны, τ_1 и τ_2 совпадают на множестве X' отличном от множества X только двумя точками и потому оценка близости по $\mathcal{I}(X, \tau_1, \tau_2)$ убеждает нас в том, что τ_1

и τ_2 близки друг к другу. Различные подходы к оценке близости τ_1 и τ_2 дают нам различные результаты.

С битопологической точки зрения мы получили различные оценки близости рассматриваемого битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) к классу T. Представляется естественным искать наиболее близкое к (X, τ_1, τ_2) топологическое пространство среди топологических пространств (X, τ), структура которых лежит между $\inf\{\tau_1, \tau_2\}$ и $\sup\{\tau_1, \tau_2\}$. В рассмотренном выше примере можно считать, повидимому, что наиболее близким к битопологическому пространству (X, τ_1, τ_2) является топологическое пространство (X, τ), для которого $\tau = \{G' \cup \{0,1\} | G' \in \tau'\} \cup \{\emptyset\}$.

4. Расширения битопологических пространств. Создание теории расширений битопологических в смысле Келли пространств потребовало преодоления известных трудностей уже на этапе формирования ее основных понятий, в том числе и самого понятия расширения. Разные авторы давали существенно различные определения этого понятия, исходя из соответствующего понятия расширения топологического пространства.

Мы не будем приводить здесь все имеющиеся в литературе варианты понятия расширения битопологического пространства, а остановимся лишь на двух из них.

Определение. *Битопологическое пространство (X', τ_1', τ_2') называют расширением битопологического пространства (X, τ_1, τ_2), если (X, τ_1, τ_2) является подпространством битопологического в смысле Келли пространства (X', τ_1', τ_2') и замыкания, $\mathrm{cl}_{\tau_1'} X$ и $\mathrm{cl}_{\tau_2'} X$ множества X в топологических пространствах (X', τ_1') и (X', τ_2') равны X'.*

Определение. *Битопологическое пространство (X', τ_1', τ_2') называют слабым расширением битопологического пространства (X, τ_1, τ_2), если (X, τ_1, τ_2) является подпространством битопологического в смысле Келли пространства (X', τ_1', τ_2') и объединение замыканий, $\mathrm{cl}_{\tau_1'} X$ и $\mathrm{cl}_{\tau_2'} X$ множества X в топологических пространствах (X', τ_1') и (X', τ_2') равно X'.*

Замечание. Понятие слабого расширения битопологического пространства в общем соответствует идее введения слабых свойств битопологических пространств, что становится особенно ясным при переходе от рассмотрения замыканий множеств к рассмотрению окрестностей точек. На языке окрестностей (X', τ_1', τ_2') будет расширением его подпространства (X, τ_1, τ_2), если для любой точки $x \in X'$ любая ее τ_1'-окрестность и любая ее τ_2'-окрестность имеют непустое пересечение с X, и будет слабым расширением, если для любой точки $x \in X'$ любая ее τ_1'-окрестность или любая ее τ_2'-окрестность имеет непустое пересечение с X.

Рассматривая расширения битопологических в смысле Келли пространств мы можем, прежде всего, перенести на них понятие регулярности расширения. Как и для топологических пространств, понятие регулярности расширения включает в себя понятие строгого расширения и понятие точного расширения.

Определение. *Будем говорить, что (X', τ_1', τ_2') – строгое расширение, битопологического пространства (X, τ_1, τ_2), если (X', τ_1') и (X', τ_2') – строгие расширения топологических пространств (X, τ_1) и (X, τ_2), соответственно.*

Определение. *Будем говорить, что (X', τ_1', τ_2') – точное расширение, битопологического пространства (X, τ_1, τ_2), если топологические пространства (X', τ_1') и (X', τ_2') – точные расширения топологических пространств (X, τ_1) и (X, τ_2), соответственно.*

Определение. *Будем гворить, что (X', τ_1', τ_2') – слабо точное расширение битопологического пространства (X, τ_1, τ_2), если любые его две точки, из которых хоть одна не принадлежит X, битопологически различимы из X, то есть для них найдется множество $A \subset X$ такое, что его замыкание в (X', τ_1') или же его замыкание в (X', τ_2') содержит одну из этих точек и не содержит другую.*

Определение. *Строгое и точное расширение битопологического пространства мы будем называть его регулярным расширением, строгое и слабо точное расширение – слабо регулярным.*

Для слабых расширений мы также можем сформулировать определения строгости, точности и слабой точности, аналогичные приведенным выше.

Определения. *Будем говорить, что (X', τ_1', τ_2') – строгое расширение, если замыкания в (X', τ_1') всех подмножеств множества X образуют его базу замкнутых множеств и замыкания в (X', τ_2')*

всех подмножеств множества X образуют его базу замкнутых множеств.

Будем говорить, что (X', τ_1', τ_2') – точное расширение, если $cl_{\tau_1'}X$ и $cl_{\tau_2'}X$ – точные расширения топологических пространств (X, τ_1) и (X, τ_2), соответственно.

Будем говорить, что (X', τ_1', τ_2') – слабо точное расширение, если любые две различные точки, из которых хоть одна не принадлежит X, битопологически различимы из X, то есть для них найдется множество $A \subset X$ такое, что его замыкание в (X', τ_1') или же его замыкание в (X', τ_2') содержит одну из этих точек и не солержит другую.

Строгое и точное слабое расширение мы будем называть регулярным слабым расширением, строгое и слабо точное слабое расширение мы будем называть слабо регулярным слабым расширением.

Если (X', τ_1', τ_2')–регулярное расширение битопологического в смысле Келли пространства (X, τ_1, τ_2), то любая точка $x \in X'$ определяет открытые фильтры $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ в топологических пространствах (X, τ_1) и (X, τ_2), соответственно (замкнутые кофильтры $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$)

Множества $\Omega_1(X') = \{\omega_1(x) | x \in X' \setminus X\}$ и $\Omega_2(X') = \{\omega_2(x) | x \in X' \setminus X\}$ однозначно определяют с точностью до гомеоморфизма какие-то регулярные расширения соответствующих топологических пространств, однако они не определяют, даже с точностью до гомеоморфизма, соответствующее расширение (X', τ_1', τ_2'). Для этого надо еще знать какое-нибудь взаимно однозначное соответствие между элементами множества $\Omega_1(X')$ и множества $\Omega_2(X')$, определяемое соответствиями

$$\omega_1(x) \longleftarrow x \longrightarrow \omega_2(x)$$

для всех точек $x \in X' \setminus X$. В этом состоит *принципиальное отличие теории расширений битопологических пространств от теории расширений топологических пространств.*

Следующая конструкция всегда приводит к регулярному расширению произвольно заданного битопологического пространства.

Рассматриваются какие-нибудь множества Ω_1 и Ω_2 открытых фильтров топологических пространств (X, τ_1) и (X, τ_2), не содержащие фильтров вида $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ для $x \in X$ (можно рассматривать соответствующие множества Γ_1 и Γ_2 замкнутых кофильтров) и фиксируется какое-нибудь взвимно однозначное соответствие (*спаривание*) $\varphi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ между точками этих множеств. К множеству X присоединяется график Γ_φ этого соответствия. Полагаем $X' = X \cup \Gamma_\varphi$ и на X' вводим две топологические структуры. Эти топологические структуры τ_1', τ_2' на множестве X' определяются их открытыми базами, состоящими из всех множеств вида

$$G_1 \cup \{(\omega_1, \omega_2) | \omega_2 = \varphi(\omega_1), G_1 \in \omega_1 \in \Omega_1\}, \;\; G_1 \in \tau_1$$

и, соответственно,

$$G_2 \cup \{(\omega_1, \omega_2) | \omega_2 = \varphi(\omega_1), \quad G_2 \in \omega_2 \in \Omega_2\}, \quad G_2 \in \tau_2.$$

Замечание. Небезинтересно отметить, что для регулярного расширения (X', τ_1', τ_2'), битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) из $\tau_1 = \tau_2$ совсем не следует $\tau_1' = \tau_2'$. Это будет так, если $\varphi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ тождественное отображение.

Если (X', τ_1', τ_2') – регулярное или слабо регулярное слабое расширение битопологического в смысле Келли пространства (X, τ_1, τ_2), то любая точка $x \in X'$ определяет открытый фильтр $\omega_1(x)$ или открытый фильтр $\omega_2(x)$ в топологических пространствах (X, τ_1) и (X, τ_2), соответственно, или такие фильтры в обоих топологических пространствах (замкнутые кофильтры $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$).

Рассмотрим множества $\Omega_1(X') = \{\omega_1(x) | x \in \mathrm{cl}_{\tau_1'} X \setminus X\}$ и $\Omega_2(X') = \{\omega_2(x) | x \in \mathrm{cl}_{\tau_2'} X \setminus X\}$. Если точке $x \in X' \setminus X$ соответствует пара $(\omega_1(x), \omega_2(x))$, то определено соответствие

$$\omega_1(x) \longrightarrow x \longleftarrow \omega_2(x).$$

Это соответствие определяет, в общем случае, частичное многозначное отображение φ множества $\Omega_1(X')$ в множество $\Omega_2(X')$. График этого отображения Γ_φ определим следующим образом:
если отображение φ определено для $\omega_1 \in \Omega_1(X')$, и $\omega_2 = \varphi(\omega_1)$ то $(\omega_1, \omega_2) \in \Gamma_\varphi$,
если отображение φ не определено для $\omega_1 \in \Omega_1(X')$, то $\omega_1 \in \Gamma_\varphi$,
если $\omega_2 \in \Omega_2(X')$ не является φ-образом никакого элемента из $\Omega_1(X')$, то $\omega_2 \in \Gamma_\varphi$.

Нетрудно убедиться в том, что условие слабой точности обеспечивает взаимную однозначность соответствия между всеми точками множества $X' \setminus X$ и всеми точками множества Γ_φ.

Действительно, мы имеем

$$x \mapsto \omega(x) = \begin{cases} \omega_1(x) \in \Gamma_\varphi | x \notin \mathrm{cl}_{\tau_2'} X, \\ \omega_2(x) \in \Gamma_\varphi | x \notin \mathrm{cl}_{\tau_1'} X, \\ (\omega_1(x), \omega_2(x)) \in \Gamma_\varphi | x \in \mathrm{cl}_{\tau_1'} X \cap \mathrm{cl}_{\tau_2'} X \end{cases}.$$

Если $\omega(x) = \omega(y)$ для некоторых точек x, y из $X' \setminus X$, то либо $\omega_1(x) = \omega_1(y)$ либо $\omega_2(x) = \omega_2(y)$ либо $(\omega_1(x), \omega_2(x)) = (\omega_1(y), \omega_2(y)$, в соответствии с этими случаями
точки x и y не принадлежат множеству $\mathrm{cl}_{\tau_2'} X$
точки x и y не принадлежат множеству $\mathrm{cl}_{\tau_1'} X$
точки x и y принадлежат множеству $\mathrm{cl}_{\tau_1'} X \cap \mathrm{cl}_{\tau_2'} X$.

В первом случае $x = y$, так как если это не так, то должно найтись множество $F \subset X$, τ_1'-замыкание которого содержит одну из этих точек и не содержит другую, что влечет $\omega_1(x) \neq \omega_1(y)$.

Во втором случае $x = y$, так как если это не так, то должно найтись множество $F \subset X$, τ_2'-замыкание которого содержит одну из этих точек и не содержит другую, что влечет $\omega_2(x) \neq \omega_2(y)$.

В третьем случае $x = y$, так как если это не так, то должно найтись множество $F \subset X$, τ_2'-замыкание или τ_1'-замыкание которого содержит одну из этих точек и не содержит другую, что влечет $(\omega_1(x), \omega_2(x)) \neq (\omega_1(y), \omega_2(y))$.

Следующая конструкция всегда дает, в общем случае, слабо регулярное слабое расширение битопологического в смысле Келли пространства, а в соответствующих частных случаях дает регулярное расширение, слабо регулярное расширение или регулярное слабое расширение. Описывать эту конструкцию мы будем в терминах замкнутых кофильтров, так как в теории слабых расширений, в отличие от теории расширений битопологических в смысле Келли пространств, использование замкнутых кофильтров предпочтительнее.

Пусть Γ_1 и Γ_2 – какие-то множества замкнутых кофильтров топологических пространств (X, τ_1) и (X, τ_2), не содержащие кофильтров вида $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ для $x \in X$, соответственно. Пусть, далее, $\varphi : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ – частичное многозначное отображение, Γ_φ – график этого отображения. Образуем множество $X' = X \cup \Gamma_\varphi$ и введем на этом множестве две топологические структуры τ_1' и τ_2', определяемые следующими базисами замкнутых множеств.

Для τ_1' базис состоит из всех множеств вида

$$F_1 \cup \{\gamma_1,\ (\gamma_1, \gamma_2) | F_1 \in \gamma_1 \in \Gamma_\varphi;\ F_1 \in \gamma_1,\ (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_\varphi\},$$

где $F_1 \in C\tau_1$.

Для τ_2' базис состоит из всех множеств вида

$$F_2 \cup \{\gamma_2,\ (\gamma_1,\gamma_2) | F_2 \in \gamma_2 \in \Gamma_\varphi;\ F_2 \in \gamma_2,\ (\gamma_1,\gamma_2) \in \Gamma_\varphi\},$$

где $F_2 \in C\tau_2$.

Нетрудно заметить, что (X', τ_1', τ_2') – строгое расширение. Это следует непосредственно из определения топологических структур τ_1' и τ_2'. Оно является также слабо точным расширением, то есть для любых двух различных точек x, y множества X', из которых по крайней мере одна не принадлежит X, найдется такое множество $F \in X$, что $\mathrm{cl}_{\tau_1'}\ F$ или $\mathrm{cl}_{\tau_2'} F$ содержит одну из этих точек и не содержит другую.

Действительно, пусть x, y – произвольные точки множества X'. Без нарушения общности можно считать, что $y \in X' \backslash X = \Gamma_\varphi$, а $x \in X$ или $x \notin X$. Пусть $x \in X, y \in X' \setminus X$. Для y возможны три случая, а именно:

$$y = \begin{cases} \gamma_1 \neq \gamma_1(x), \gamma_1 \in \Gamma_1, \\ \gamma_2 \neq \gamma_2(x), \gamma_2 \in \Gamma_2 \\ (\gamma_1,\gamma_2), \gamma_1(x) \neq \gamma_1 \in \Gamma_1, \gamma_2(x) \neq \gamma_2 \in \Gamma_2 \end{cases}.$$

В первом случае найдется множество $F \subset X$, которое принадлежит одному из кофильтров $\gamma_1, \gamma_1(x)$ и не принадлежит другому и, следовательно, $\mathrm{cl}_{\tau_1'} F$ содержит одну из точек γ_1, x и не содержит другую. Остальные случаи рассматриваются аналогично, причем в третьем случае можно использовать либо соотношение $\gamma_1(x) \neq \gamma_1$, либо соотношение $\gamma_2(x) \neq \gamma_2$.

Пусть теперь точки x, y принадлежат Γ_φ. Если они принадлежат множеству $\mathrm{cl}_{\tau_1'} X \cup \mathrm{cl}_{\tau_2'} X$, то $x = (\gamma_1, \gamma_2), y = (\gamma_1', \gamma_2')$, причем либо $\gamma_1 \neq \gamma_1'$, либо $\gamma_2 \neq \gamma_2\prime$. В первом случае найдется множество F, принадлежащее одному из кофильтров γ_1, γ_1' и не принадлежащее другому. Тогда $\mathrm{cl}_{\tau_1'} F$ содержит одну из точек x, y и не содержит другую. Случай $\gamma_2 \neq \gamma_2\prime$ рассматривается аналогично.

Пусть теперь хоть одна из точек x, y, например y, не принадлежит множеству $\mathrm{cl}_{\tau_1'} X \cap \mathrm{cl}_{\tau_2'} X$. Будем, для определенности, считать, что $y \notin \mathrm{cl}_{\tau_1'} X$ и потому $y \in \mathrm{cl}_{\tau_2'} X$. Если $x \bar{\in} \mathrm{cl}_{\tau_2'} X$, то $\mathrm{cl}_{\tau_2'} X$ содержит одну из точек x, y и не содержит другую. Осталось рассмотреть последний случай, в котором обе точки x, y принадлежат $\mathrm{cl}_{\tau_2'} X$, а $y \notin \mathrm{cl}_{\tau_1'} X$. Тогда $y = \gamma_2$, в то время как $x = \gamma_2'$ или $x = (\gamma_1, \gamma_2')$. Если $x = \gamma_2'$, то $\gamma_2' \neq \gamma_2$ и потому найдется множество

F, принадлежащее одному из этих кофильтров и не принадлежащее другому. Тогда $\mathrm{cl}_{\tau_2'}F$ будет содержать одну из точек x, y и не содержать другую. Если же $x = (\gamma_1, \gamma_2')$, то $\mathrm{cl}_{\tau_1'}X$ будет содержать точку x и не содержать точку y.

Мы показали в предыдущих разделах, что произвольное слабо регулярное слабое расширение битопологического в смысле Келли пространства (X, τ_1, τ_2) определяется фактически графиком Γ_φ (частичного) отображения $\varphi : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 – некоторые множества кофильтров в (X, τ_1) и (X, τ_2), не содержащие кофильтров вида $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ для $x \in X$, сответственно.

Если φ – частичное взаимно однозначное отображение множества Γ_1 в Γ_2, то мы получаем регулярное слабое расширение. Действительно, пусть x, y какие-то различные точки из $\mathrm{cl}_{\tau_1'}X$. Тогда, без нарушения общности, можно считать, что $x = \gamma_1, y = \gamma_1'$ или $x = \gamma_1, y = (\gamma_1', \gamma_2)$, или $x = (\gamma_1, \gamma_2), y = (\gamma_1', \gamma_2')$. Так как отображение φ взаимно однозначное, то во всех этих случаях $\gamma_1 \neq \gamma_1'$ и потому точки x, y всегда различимы из X и, следовательно, (X', τ_1') – точное расширение топологического пространства (X, τ_1). Аналогично доказывается, что (X', τ_2') – точное расширение топологического пространства (X, τ_2).

Если φ – отображение множества Γ_1 на Γ_2, то мы получаем слабо регулярное расширение битопологического в смысле Келли пространства, если же φ – взаимно однозначное отображение множества Γ_1 на Γ_2, то мы получаем регулярное расширение.

5. Пополнение биравномерных пространств. Во многих случаях расширение битопологического пространства определяется, хотя и не однозначно, фиксированной на нем биструктурой. В качестве таких биструктур мы будем рассматривать пары структур близости или пары структур смежности или пары равномерных структур, заданных на некотором битопологическом в смысле Келли пространстве. При этом мы будем говорить о пополнении заданного битопологического пространства по соответствующей биструктуре.

Определение. *Тройка (X, ρ_1, ρ_2) называется биравномерным пространством, определенным на битопологическом пространстве (X, τ_1, τ_2), если ρ_1 и ρ_2 – равномерные структуры на топологических пространствах (X, τ_1) и (X, τ_2), соответственно.*

Замечание. Это определение биравномерного пространства соответствует определению битопологического в смысле Келли пространства. Здесь ρ_1 и ρ_2 – системы τ_1-открытых и τ_2-открытых покрытий, удовлетворяющие условиям P_1, P_2.

Так как равномерная структура (покрытий), определенная на некотором множестве, однозначно определяет на нем топологическую структуру, то битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) однозначно определяется биравномерным пространством (X, ρ_1, ρ_2). Тем самым определены расширения $(\rho_1 X, \rho_1 \tau_1)$ и $(\rho_2 X, \rho_2 \tau_2)$. Наросты этих расширений, то есть множества $\rho_1 X \setminus X$ и $\rho_2 X \setminus X$ обозначим через $\widehat{X}_{\rho_1}$ и $\widehat{X}_{\rho_2}$, соответственно. Если задано некоторое, возможно частичное и многозначное, отображение $\varphi : \widehat{X}_{\rho_1} \longrightarrow \widehat{X}_{\rho_2}$ *(спаривание)*, то определено расширение

$$((\rho_1, \rho_2)_\varphi X, (\rho_1, \rho_2)_\varphi \tau_1, (\rho_1, \rho_2)_\varphi \tau_2)$$

битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) и пополнение

$$((\rho_1, \rho_2)_\varphi X, (\rho_1, \rho_2)_\varphi \rho_1, (\rho_1, \rho_2)_\varphi \rho_2)$$

биравномерного пространства (X, ρ_1, ρ_2), которое мы будем называть $(\rho_1, \rho_2)_\varphi$-пополнением.

Такая процедура пополнения биравномерного пространства требует, как мы видели, не только задания двух равномерных структур, но и задания какого-нибудь отображения $\varphi : \widehat{X}_{\rho_1} \longrightarrow \widehat{X}_{\rho_2}$. Но задание такого отображения требует предварительно введения множеств $\widehat{X}_{\rho_1}$ и $\widehat{X}_{\rho_2}$ соответствующих фильтров (кофильтров), то есть введения довольно сложных структурных объектов.

Мы можем обойти эти структурные трудности, воспользовавшись следующей своеобразной конструкцией. Рассмотрим произвольное биравномерное пространство (X, ρ_1, ρ_2), заданное на некотором битопологическом в смысле Келли пространстве (X, τ_1, τ_2). Пусть s_1 и s_2 – произвольные покрытия, принадлежащие равномерным структурам ρ_1 и ρ_2, соответственно. По этим покрытиям можно построить покрытие $s_{12} = s_1 \times s_2 = \{G_1 \times G_2 | G_1 \in s_1, G_2 \in s_2\}$, являющееся открытым покрытием топологического пространства $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2)$. Совокупность таких покрытий, взятых по всем элементам s_1, s_2 равномерных структур ρ_1, ρ_2, образует базу $\{s_1 \times s_2 | s_1 \in \rho_1, s_2 \in \rho_2\}$ равномерной структуры $\rho_{12} = \rho_1 \times \rho_2$, определенной на топологическом пространстве $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2)$. Это следует из очевидного соотношения $(G_1 \times G_2) \cap (G_1' \times G_2') = (G_1 \cap G_1') \times (G_2 \cap G_2\prime)$.

Для любого множества $\Phi \subset X \times X$ можно образовать его s_{12}-окружение, а именно $U(\Phi, s_{12}) = \bigcup (G_1 \times G_2) | (G_1 \times G_2) \cap \Phi \neq \emptyset$. Систему всех таких окружений множества Φ, взятую по всем элементам s_1, s_2 равномерных структур ρ_1, ρ_2, обозначим через $\mathfrak{U}(\Phi, \rho_{12})$.

Мы можем теперь определять различные $(\rho_1, \rho_2)_\varphi$-пополнения биравномерного пространства (X, ρ_1, ρ_2) фиксируя то или иное подмножество $\Phi \subset X \times X$. Отображение спаривания $\varphi : \widehat{X}_{\rho_1} \longrightarrow \widehat{X}_{\rho_2}$ определяется при этом следующим образом:
если $\omega_1 \in \widehat{X}_{\rho_1}, \omega_2 \in \widehat{X}_{\rho_2}$, то $\varphi(\omega_1) = \omega_2$ тогда и только тогда, когда для любого s_{12}-окружения множества Φ найдутся такие $G_1 \in \omega_1, G_2 \in \omega_2$, что $G_1 \times G_2$ содержится в этом окружении.

В частности, если $\Phi = \emptyset$, то никакие элементы множеств $\widehat{X}_{\rho_1}$ и $\widehat{X}_{\rho_2}$ не спариваются, если же $\Phi = X \times X$, то каждый элемент нароста $\varphi : \widehat{X}_{\rho_1}$ спаривается с каждым элементом нароста $\widehat{X}_{\rho_2}$.

Пример. Пусть $X = (0, 1)$ – единичный интервал, $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ – обычная топологическая структура единичного интервала, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ – равномерная структура на (X, τ), определяемая расширением $X' = [0, 1]$. Множество $\widehat{X}_{\rho_1} = \widehat{X}_{\rho_2}$ состоит из двух точек, скажем точки 0 и точки 1. Существует шестнадцать различных отображений двухточечного множества .в себя, считая частичные и многозначные. Мы рассмотрим только два из них, а именно тождественное и инволюцию ($\varphi(0) = 1, \varphi(1) = 0$). В первом случае нам достаточно взять в качестве Φ в $X \times X$ диагональ Δ, во втором же из рассматриваемых случаев в качестве Φ можно взять побочную диагональ $\{(x, y) | y = 1 - x\}$. В обоих случаях множество $X' = [0, 1]$, то есть пополнение будет получаться присоединеним к X двухточечного множества $\{0, 1\}$, но в первом случае $\tau_1' = \tau_2'$ – обычная топологическая структура единичного отрезка $[0, 1]$, во втором же случае $\tau_1' \neq \tau_2'$, любая последовательность, сходящаяся к точке 0 относительно τ_1', сходится к точке 1 относительно τ_2' и наоборот.

Биравномерное пространство (X, ρ_1, ρ_2) можно считать полным, если равномерные пространства (X, ρ_1) и (X, ρ_2) являются полными равномерными пространствами. При таком понимании полноты битопологических остранств оба рассмотренны в этом примере пополнения будут полными битопологическими пространствами.

6. Эквивалентность структурной и категорной теории. В KT-теории, как, впрочем, и в T-теории, категорный и структурный подходы по-существу эквивалентны. Дело в том, что имеет место взаимно однозначное соответствие между топологическими структурами τ, определенными на множестве X, и совокупностями всех непрерывных отображений $f : (X, \tau) \longrightarrow (D, \tau_r)$, где $\tau_r = \{\emptyset, D, \{0\}\}$. При этом соответствии каждое множество $G \in \tau$ задается непрерывным отображением $f_G : (X, \tau) \longrightarrow (D, \tau_r)$, для которого

$$f_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ 1, & x \notin G. \end{cases},$$

и, таким образом,

$$\tau \longleftrightarrow \{f_G | G \in \tau\}$$

Аналогично, можно установить соответствие между парами (τ_1, τ_2) топологических структур на X и совокупностями всех бинепрерывных отображений

$$f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (D, \tau_r, \tau_0),$$

$$f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (D, \tau_0, \tau_r),$$

где

$$\tau_0 = \{\emptyset, D\}.$$

При этом соответствии каждое множество G, принадлежащее τ_1 или τ_2 опять задается отображением $f : X \longrightarrow D$, для которого

$$f_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ 1, & x \notin G. \end{cases}$$

Но, если $G \in \tau_1$, то отображение

$$f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (D, \tau_r, \tau_0),$$

бинепрерывно, если же $G \in \tau_2$, то отображение

$$f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (D, \tau_0, \tau_r),$$

бинепрерывно. Заметим, кстати, что в общей теории битопологических пространств ситуация совершенно иная. Здесь структурный подход и категорный подход не эквивалентны друг другу, битопологические структуры не определяются, в общем случае, совокупностями соответствующих бинепрерывных отображений.

Действительно, пусть $\mathcal{B}$ – произвольно фиксированное множество битопологических пространств. Тогда найдется множество X, мощность которого больше мощности множества точек любого битопологического пространства из $\mathcal{B}$. Пусть, далее, $\beta = \{\emptyset, X \times X, \Delta\}$. Рассмотрим все возможные бинепрерывные отображения $f : (X, \beta) \longrightarrow (X', \beta')$ для всех $(X', \beta') \in \mathcal{B}$. Для того чтобы совокупность всех таких отображений определила β необходимо существование таких (X', β'), $f : (X, \beta) \longrightarrow (X', \beta')$, $G' \in \beta'$, что $(f \times f)^{-1}(G') = \Delta$. Но, в силу предполагаемого нами соотношения между мощностями множеств X и X', найдутся в $X \times X$ такие точки x, y, $x \neq y$, что $f(x) = f(y)$. Для этих точек

$$(f \times f)(x, y) = (f(x), f(y)) = (f(x), f(x)) = (f \times f)(x, x) \in G',$$

то есть $(x, y) \in (f \times f)^{-1}(G')$ и потому $\Delta \neq (f \times f)^{-1}(G')$. Но это и означает, что $\mathcal{B}$ не определяет β. Тем не менее, категорные методы могут с успехом применяться не только в категориях T и KT, где они, как было сказано, универсальны, но и в категории BT.

7. Связь с другими структурами. В этом заключительном параграфе пятой главы мы еще раз обратимся к вопросу о роли и месте битопологических в смысле Келли пространств в различных областях математики, об их характерных с этой точки зрения особенностях.

Один из основных принципов применения битопологических в смысле Келли пространств состоит в следующем. Допустим, что нас интересует некоторый класс отображений каких-то множеств в себя или же в другие множества. Допустим, далее, что мы хотели бы иметь топологическое описание этого класса, то есть представить этот класс, как класс всех непрерывных отображений этих множеств снабженных соответствующими топологическими структурами. Если это возможно, то будем говорить, что этот класс имеет топологическое представление. К сожалению это не всегда возможно, но в некоторых случаях такой класс $\mathcal{F}$ можно представить в виде пересечения $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ двух классов $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, каждый из которых имеет топологическое представление. Класс $\mathcal{F}$ состоит из всех отображений f, для которых $f:(X,\tau_1)\longrightarrow(X',\tau_1')$ и $f:(X,\tau_2)\longrightarrow(X',\tau_2')$ непрерывны и, следовательно, непрерывно отображение $f:(X,\beta)\longrightarrow(X',\beta')$. В этой ситуации мы будем говорить, что класс $\mathcal{F}$ имеет битопологическое (в смысле Келли) представление, он является объектом битопологической в смысле Келли теории и его можно изучать в рамках этой теории.

Другим принципом применения битопологических в смысле Келли пространств является замена одной структуры двумя более простыми. Рассмотрим, например, топологизацию множества PX, в которой множество $\{PG, QG|G\in\tau\}$, где τ – фиксированая на X топологическая структура, образует ее предбазу Эту топологическую структуру на PX мы можем заменить двумя структурами – τ_1 и τ_2, из которых одна имеет предбазой совокупность множеств вида PG, а другая – вида QG. Эти топологические структуры изучаются проще, чем исходная. Их совместное изучение есть изучение соответствующего битопологического пространства (X,τ_1,τ_2).

Другим примером применения того же принципа является замена сходимости $\xi_n\longrightarrow\xi$ вещественных случайных величин, определяемой условием сходимости к нулю вероятности $P(|\xi_n-\xi|\geqslant\epsilon)$ для любого $\epsilon>0$, на две сходимости, одна из которых определяется условием сходимости к нулю вероятности $P(\xi_n-\xi\geqslant\epsilon)$, а другая определяется условием сходимости к нулю вероятности $P(\xi-\xi_n\geqslant\epsilon)$ для любого $\epsilon>0$.

Структура битопологического в смысле Келли пространства состоит из двух самостоятельных частей и в этом его принципиальная особенность. Совместное изучение этих частей – особенность теории битопологических пространств. В любой математической теории, в которой объекты могут описываться парами более простых объектов есть возможность применения теории битопологических в смысле Келли пространств.

Глава VI

Общая теория битопологических пространств

§1. Классические конструкции

Хотя общая теория битопологических пространств существенно отличается от классической наличием оригинальных идей и конструкций, в ней все же нашлось место и для классики. Такие понятия, как подпространство, факторпространство, прямое произведение, свободное объединение, ослабление, имеющие категорный характер, естественно входят и в общую теорию.

1. Категория битопологических пространств. Структурное описание категории битопологических пространств и их отображений позволяет ввести структурные определения многих классических понятий.

Определение. *Будем говорить, что на множестве X определена битопологическая структура β, если β – топологическая структура на $X \times X$.*
Иначе говоря (X, β) – битопологическое пространство, если $(X \times X, \beta)$ – топологическое пространство.

Некоторые битопологические пространства в этом понимании уже изучались – это равномерные пространства окружений. Такая структура на множестве X является множеством *окружений диагонали*, то есть некоторой совокупностью подмножеств квадрата $X \times X$, содержащих диагональ $\Delta = \{(x,x)|x \in X\}$. Требования, предъявляемые к такой совокупности, делают ее топологической структурой на $X \times X$, если присоединить к ней пустое множество. Нашлись и различные применения битопологических структур, например в кусочно линейной топологии.

Естественно определяются (би)непрерывные отображения битопологичечких пространств.

Определение. *Будем говорить, что отображение $f : X \longrightarrow X'$ является (би)непрерывным отображением $f : (X, \beta) \longrightarrow (X', \beta')$, если $f \times f : (X \times X, \beta) \longrightarrow (X' \times X', \beta')$, $(f \times f)(x, y) = (f(x), f(y))$, – непрерывное отображение.*

Нетрудно проверить, что класс битопологических пространств и их отображений образует категорию, которую мы будем обозначать через **BTop** или через **BT**.

Битопологическое пространство было определено выше, как множество, рассматриваемое вместе с некоторой топологической структурой на его квадрате. Возможно и другое понимание, битопологического пространства, при котором берется за основу не множество X а множество $X \times X$. Битопологическим пространством будет тогда топологическое пространство (Y, β) с дополнительной структурой представления Y в виде квадрата $X \times X$ какого-нибудь множества X. Так как в общем случае такое представление не единственно, то оно действительно является дополнительной структурой на Y.

Битопологическое пространство в этом понимании будет довольно сложным объектом, а именно (Y, β, X, j), где j – взаимно однозначное отображение $X \times X$ на Y.

Между рассмотренными вариантами понятия битопологического пространства нет, по-существу, особой разницы. В обоих случаях мы имеем дело с топологическими структурами на множестве $X \times X$. Можно, однако, ввести еще одну интерпретацию понятия битопологического пространства, в котором множество $X \times X$ в явном виде не фигурирует.

Пусть (X, β) – некоторое битопологическое пространство, $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ – произвольная направленная система точек в X, ($x_\lambda \in X$ для каждого $\lambda \in \Lambda$)). Рассматривая систему $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ вместе с некоторой точкой $x \in X$, мы будем говорить о *присоединении* $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ к точке x, записывая это присоединение в виде $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \mapsto x$ (о сходимости к точке x здесь не может быть и речи, так как топологическая структура на X не определена).

Определение. *Пусть* $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \mapsto x$, $(y_\lambda | \lambda \in \Lambda) \mapsto y$. *Будем говорить, что система* $(y_\lambda | \lambda \in \Lambda) \mapsto y$ *есть результат переноса системы* $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \mapsto x$ *из точки* x *в точку* y, *если*

$$((x_\lambda, y_\lambda) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y).$$

В этом случае будем писать

$$(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda | \lambda \in \Lambda).$$

Другими словами

$$((x_\lambda, y_\lambda) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y) \iff ((x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda | \lambda \in \Lambda)).$$

Замечание. В общем случае, определенное здесь отношение переноса не транзитивно, не симметрично и даже не рефлексивно.

В качестве битопологического пространства мы можем теперь рассматривать произвольное множество X вместе с некоторым, определеным на нем, переносом направленных систем точек. Это сложное по форме определение обладает некоторым преимуществом наглядности.

Существование различных подходов к понятию битопологического пространства позволяет варьировать их, выбирая наиболее подходящий, в той или иной ситуации, вариант.

Каждому варианту понятия битопологического пространства соответствует свое понятие бинепрерывного отображения.

Пониманию битопологического пространства в смысле Келли, соответствует следующее определение.

Отображение $f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (X', \tau_1', \tau_2')$ называется *бинепрерывным отображением*, если отображения

$$f : (X, \tau_1) \longrightarrow (X', \tau_1') \quad \text{и} \quad f : (X, \tau_2) \longrightarrow (X', \tau_2')$$

непрерывны.

Пониманию битопологического пространства, как пары (X, β) соответствует следующее определение.

Отображение

$$f : (X, \beta) \longrightarrow (X', \beta')$$

называется *бинепрерывным отображением*, если отображение

$$f \times f : (X \times X, \beta) \longrightarrow (X' \times X', \beta')$$

непрерывно, $(f \times f)(x, y) = (f(x), f(y))$.

Пониманию битопологического пространства, как пары (Y, β), где (Y, β) – топологическое пространство и $Y = X \times X$, соответствует следующее определение.

Непрерывное отображение $f : (Y, \beta) \longrightarrow (Y', \beta')$ с указанными на Y и Y' представлениями $Y = X \times X$, $Y' = X' \times X'$ называется *бинепрерывным отображением*, если $f = g \times g$, $g : X \longrightarrow X'$.

Пониманию битопологического пространства, как множества X с фиксированными на нем переносами

$$(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda | \lambda \in \Lambda)$$

направленных систем точек, соответствует следующее определение.

Отображение $f : X \longrightarrow X'$ с указанными на X и X' переносами направленных систем точек называется *бинепрерывным отображением*, если из

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda)$$

следует

$$(f(x_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{f(x),f(y)} (f(y_\lambda)|\lambda \in \Lambda).$$

Нетрудно доказать, что все эти определения бинепрерывности отображений переходят друг в друга при замене одной формулировки понятия битопологического пространства на другую.

2. Битопологические подпространства и факторпространства.

Определение. *Пусть (X, β) – битопологическое пространство и $X' \subset X$. Тогда $X' \times X' \subset X \times X$ и поэтому топологическая структура β, определенная на множестве $X \times X$, индуцирует на $X' \times X'$ топологическую структуру $\beta' = \beta|X' \times X' = \{G \cap (X' \times X')|G \in \beta\}$. Битопологическое пространство (X', β') будем называть подпространством битопологического пространства (X, β).*

Замечание. Нетрудно заметить, что если $\beta = \tau_1 \times \tau_2$, – разложимая битопологическая структура, то и $\beta' = \tau_1' \times \tau_2'$, где $\tau_1' = \tau_1|X'$, $\tau_2' = \tau_2|X'$ – разложимая битопологическая структура. Если, кроме того, $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, то и $\tau_1' = \tau_2' = \tau'$. Действительно, $\tau_1 \times \tau_2|X' \times X' = \tau_1|X' \times \tau_2|X' = \tau_1' \times \tau_2'$, $\tau \times \tau|X' \times X' = \tau|X' \times \tau|X'$. Таким образом переход к битопологическим подпространствам не выводит нас ни из класса KT ни из класса T.

Определение. *Пусть (X, β) – битопологическое пространство и p-отображение множества X на какое-то множество X''. Тогда $p \times p : X \times X \longrightarrow X'' \times X''$. Это отображение позволяет определить на $X'' \times X''$ топологическую структуру $\beta'' = (p \times p)\beta = \{G|(p \times p)^{-1}(G) \in \beta\}$. Топологическое пространство $(X'' \times X'', \beta'')$ будет факторпространством топологического пространства $(X \times X, \beta)$, определенным отображением $p \times p$. Битопологическое пространство (X'', β'') будем называть факторпространством битопологического пространства (X, β), определенным отображением p.*

Замечание. Нетрудно заметить, что если $\beta = \tau_1 \times \tau_2$ – разложимая битопологическая структура, то и $\beta'' = \tau_1'' \times \tau_2''$, где

$\tau_1'' = p\tau_1$, $\tau_2'' = p\tau_2$, – разложимая битопологическая структура. Если, кроме того, $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, то и $\tau_1'' = \tau_2'' = \tau''$. Действительно, $(p \times p)(\tau_1 \times \tau_2) = p\tau_1 \times p\tau_2 = \tau_1'' \times \tau_2''$, $(p \times p)(\tau \times \tau) = p\tau \times p\tau = \tau'' \times \tau''$.

Таким образом, переход к битопологическим факторпространствам не выводит нас ни из класса KT ни из класса T.

3. Битопологические прямые произведения и свободные объединения.

Определение. *Пусть* $((X_\lambda, \beta_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$ *– система битопологических пространств,* $X = \prod X_\lambda|\lambda \in \Lambda$ *– произведение множеств* X_λ*, образованное по всем* $\lambda \in \Lambda$*,* $pr_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda$ *– проекция произведения* X *на множество* X_λ*,где* $pr_\lambda(x) = x_\lambda$ *для каждого* $x = (x_\mu|\mu \in \Lambda) \in X$*. Тогда* $pr_\lambda \times pr_\lambda$ *отображает* $X \times X$ *на* $X_\lambda \times X_\lambda$*,* $(pr_\lambda \times pr_\lambda)(x, y) = (x_\lambda, y_\lambda)$*.*

Множества $(pr_\lambda \times pr_\lambda)^{-1}(U)$*, взятые по всем* $\lambda \in \Lambda$ *и всем* $U \in \beta_\lambda$*, порождают на множестве* $X \times X$ *топологическую структуру* β*. Битопологическое пространство* (X, β) *называют прямым произведением битопологических пространств семейства* $((X_\lambda, \beta_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$*.*

$$(X, \beta) = \prod (X_\lambda, \beta_\lambda)|\lambda \in \Lambda.$$

При изучении произведений битопологических пространств иногда оказываются полезными следующие соображения.

Рассмотрим топологические пространства $(X \times X, \beta)$ и $\prod(X_\lambda \times X_\lambda, \beta_\lambda)|\lambda \in \Lambda$. Множества точек этих пространств не совпадают, так как точками топологического пространства $(X \times X, \beta)$ и точками топологического пространства $\prod(X_\lambda \times X_\lambda, \beta_\lambda)|\lambda \in \Lambda$, будут, соответственно, точки $((x_\lambda|\lambda \in \Lambda), (y_\lambda|\lambda \in \Lambda))$ и $((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$.

Однако между этими точками имеется каноническое соответствие

$$((x_\lambda|\lambda \in \Lambda), (y_\lambda|\lambda \in \Lambda)) \longleftrightarrow ((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda).$$

При этом соответствии множества

$$\{((x_\lambda|\lambda \in \Lambda), (y_\lambda|\lambda \in \Lambda))|(x_\mu, y_\mu) \in G \in \beta_\mu)\}$$

и

$$\{((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda)|(x_\mu, y_\mu) \in G \in \beta_\mu\},$$

где $x_\mu = pr_\mu(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$, $y_\mu = pr_\mu(y_\lambda|\lambda \in \Lambda)$, взаимно переходят друг в друга для любого фиксированного $\mu \in \Lambda$ и любого фиксированного $G \in \beta_\mu$.

Отсюда следует,что указанное соответствие определяет гомеоморфизм между топологическими пространствами $(X \times X, \beta)$ и $\prod(X_\lambda \times X_\lambda, \beta_\lambda)|\lambda \in \Lambda$. Топологическая структура второго пространства является произведением $\prod \beta_\lambda|\lambda \in \Lambda$, топологическая структура β первого пространства через β_λ в явной форме в общем случае не выписывается.

Замечание. Нетрудно заметить, что если все β_λ являются разложимыми битопологическими структурами, то и β будет разложимой битопологической структурой. Действительно, пусть $\beta_\lambda = \tau_\lambda \times \tau'_\lambda$ для каждого $\lambda \in \Lambda$. Тогда в качестве порождающих топологическую структуру β на $X \times X$ можно будет брать совокупность множеств вида $(pr_\lambda \times pr_\lambda)^{-1}(U)$, ограничиваясь случаем $U = G_\lambda \times G'_\lambda$, где $G_\lambda \in \tau_\lambda$, $G'_\lambda \in \tau'_\lambda$. Но в этом случае $(pr_\lambda \times pr_\lambda)^{-1}(G_\lambda \times G'_\lambda) = pr_\lambda^{-1}(G_\lambda) \times pr_\lambda^{-1}(G'_\lambda)$. Заметим теперь, что множества вида $pr_\lambda^{-1}(G_\lambda)$ порождают топологическую структуру $\tau = \prod \tau_\lambda|\lambda \in \Lambda$, а множества вида $pr_\lambda^{-1}(G'_\lambda)$ порождают топологическую структуру $\tau' = \prod \tau'_\lambda|\lambda \in \Lambda$, поэтому $\beta = \tau \times \tau'$. Если к тому же $\tau_\lambda = \tau'_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$, то и $\tau = \tau'$. Таким образом переход к битопологическим произведениям не выводит нас ни из класса KT ни из класса T.

Определение. *Пусть $((X_\lambda, \beta_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$ – система битопологических пространств, причем мы будем предполагать, что $X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset$ для всех $\lambda \neq \mu$ из Λ. Пусть $X = \cup X_\lambda|\lambda \in \Lambda$. Введем на множестве $X \times X$ топологическую структуру β, состоящую из всех множеств $U \subset X \times X$, удовлетворяющих условию*

$$U \cap (X_\lambda \times X_\lambda) \in \beta_\lambda$$

для всех $\lambda \in \Lambda$. Битопологическое пространство (X, β) называют свободным объединением битопологических пространств семейства $((X_\lambda, \beta_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$.

Замечание. Заметим, что за исключением тривиального случая, когда Λ – одноточечное множество, объединение $\cup(X_\lambda \times X_\lambda)|\lambda \in \Lambda$ не совпадает с $X \times X$. Поэтому в пространстве $(X \times X, \beta)$ всегда имеется дискретная часть. Этот факт позволяет легко строить примеры, в которых из разложимости всех $\beta_\lambda, \lambda \in \Lambda$, не следует разложимость β. Более того, даже в случае когда $\beta_\lambda = \tau_\lambda \times \tau_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$, битопологическое пространство (X, β) являющееся свободным объединением пространств $(X_\lambda, \tau_\lambda \times \tau_\lambda)$, будет, как правило, неразложимым. Простейшим примером такого рода является свободное объединение (X, β) тривиального двухточечного битопологического пространства и одноточечного битопологического пространства.

4. Простейшие конструкции. Теория битопологических в смысле Келли пространств, ставшая ныне классической, развивалась как некоторое обобщение теории топологических пространств. Авторы статей формулировали определения и утверждения, относящиеся к битопологическим пространствам, переделывая соответствующим образом те или иные определения и утверждения, относящиеся к топологическим пространствам. Например, условия типа "$G \in \tau$" для топологического пространства (X, τ) заменялось на условие "$G \in \tau_1$" или "$G \in \tau_2$" для битопологического пространства (X, τ_1, τ_2). Такая замена могла осуществляться по-разному и потому в KT-теории мы имеем различные обобщения одних и тех же определений и утверждений T-теории. Имеются и другие причины неоднозначности обобщений, но так или иначе имело место расщепление формулировок. Такое расщепление возникает и при переходе от KT-теории к BT-теории. Процесс обобщения определений и утверждений оказывается здесь даже более вариантным, так как при этом могут быть использованы разнообразные связи между BT-пространствами, KT-пространствами и T-пространствами. С этой точки зрения представляют интерес конструкции, устанавливающие такого рода связи. Мы рассмотрим здесь некоторые из таких конструкций, а именно диагональную, горизонтальных и вертикальных множеств, подъема, прямоугольных оболочек.

1. *Диагональная конструкция.* Пусть (X, β)-произвольное битопологическое пространство. Битопологическая структура β, являясь топологической структурой на множестве $X \times X$, индуцирует топологическую структуру $\beta|\Delta$ на диагонали $\Delta \subset X \times X$. Вложение $i : X \longrightarrow X \times X,\ i(x) = (x, x)$, переносит структуру $\beta|\Delta$ на множество X, результат переноса обозначим через $\beta|X$. Таким образом битопологическому пространству (X, β) ставится в соответствие топологическое пространство $(X, \beta|X)$. Такое соответствие имеет функторный характер, так как если $f : (X, \beta) \longrightarrow (X', \beta')$ – бинепрерывное отображение, то $f : (X, \beta|X) \longrightarrow (X', \beta'|X')$ – непрерывное отображение. Соответствующий функтор $\mathcal{P} : BT \longrightarrow T$ является даже ретракцией, так как он тождественен на T (мы

условились считать, что $T \subset BT$).

2. *Горизонтальная и вертикальная конструкции.* Различные конструкции связаны с так называемыми *следами* битопологических структур на горизонтальных и вертикальных множествах. Пусть (X, β) – произвольное битопологическое пространство. Битопологическая структура β, являясь топологической структурой на множестве $X \times X$, индуцирует топологическую структуру на каждом *горизонтальном множестве* $X \times \{y\}$ и на каждом *вертикальном множестве* $\{x\} \times X$. Будем обозначать эти топологические структуры (следы β) через $\beta(\ , y)$ и $\beta(x, \ )$, соответственно. Вложения $j(y) : X \longrightarrow X \times X$, $j(x) : X \longrightarrow X \times X$, $j(y)(x) = (x, y)$, $j(x)(y) = (x, y)$, позволяют перенести топологические структуры $\beta(\ , y)$ и $\beta(x, \ )$ на X, результаты переноса будем также обозначать через $\beta(\ , y)$ и $\beta(x, \ )$. Мы получаем, таким образом, две системы следов структуры β, а именно: *горизонтальную систему следов* $(\beta(\ , y) | y \in X)$ и *вертикальную систему следов* $(\beta(x, \ ) | x \in X)$.

Существуют различные способы построения топологической структуры по данной системе топологических структур, заданных на одном и том же множестве. В частности, можно построить топологическую структуру τ_1 по горизонтальной системе следов и, возможно другим способом, построить топологическую структуру τ_2 по вертикальной системе следов. Тем самым будет установлено некоторое соответствие между битопологическими пространствами и битопологическими в смысле Келли пространствами. Понятно, что такое соответствие определено неоднозначно, оно зависит от выбранных способов построения топологических структур τ_1 и τ_2. Оно не обязательно будет функторным соответствием. Например, если τ_1 и τ_2 являются пересечениями горизонтальных следов и, соответственно, вертикальных следов, то полученное таким способом сопоставление $F : BT \to KT$ будет функторным. Если, с другой стороны, τ_1 и τ_2 являются объединениями соответствующих следов, то сопоставление не будет функторным. Действительно, если $f : (X, \beta) \longrightarrow (X', \beta')$ является бинепрерывным отображением, то каждое вертикальное (горизонтальное) в $X \times X$ множество отображается при этом непрерывно в соответствующее вертикальное (горизонтальное) в $X' \times X'$ множество. Отсюда следует, что пробраз следа битопологической структуры β' на любом вертикальном (горизонтальном) в $X' \times X'$ множестве содержится в следе битопологической структуры β на соотвествующем вертикальном (горизонтальном) в $X \times X$ множестве, если такое множество существует. Если f отображает X на X', то в каждое вертикальное (горизонтальное) в $X' \times X'$ множество отображается какое-нибудь вертикальное (горизонтальное) в $X \times X$ множество, поэтому f-прообраз как пересечения так и объединения следов структуры β', будет содержаться в пересечении или, соответственно, в объединении следов структуры β. В этом случае отображения $f : (X, \tau) \longrightarrow (X', \tau')$, будут непрерывными. Если же $f(X) \neq X'$, то найдется вертикальное (горизонтальное) в $X' \times X'$ множество, не содержащееся в $(f \times f)(X \times X)$. Бинепрерывность отображения f не зависит от следов структуры β' на таких множествах, поэтому можно считать их дискретными. При объединении соответствующих следов мы получим дискретную топологическую структуру, в то время как объединение следов структуры β может оказаться и не дискретным. Что же касается пересечения следов то оно может только уменьшится в связи с привлечением следов структуры β' на вертикальных (горизонтальных) множествах, не содержащихся в $(f \times f)(X \times X)$. Поэтому отображения $f : (X, \tau_1) \longrightarrow (X', \tau_1')$ и $f : (X, \tau_1) \longrightarrow (X', \tau_1')$ окажутся непрерывными.

3. *Метод подъема.* Приведенные выше конструкции определяли соответствия тождественные на топологических пространствах. Рассмотрим теперь конструкцию, определяющую функтор $F : BT \longrightarrow T$, не тождественный на T.

Пусть (X, β) – произвольное битопологическое пространство. Положим $F(X, \beta) = (X \times X, \beta)$, $F(f) = f \times f$. Если $\beta = \tau \times \tau$, то $F(X, \beta) = (X \times X, \beta) = (X, \tau) \times (X, \tau)$ и, таким образом, функтор F переводит любое топологическое пространство в его квадрат. Заменяя пространства и отображения, входящие в определения и утверждения какой-нибудь T-теории, на их F-прообразы, мы получаем, конечно, определения и утверждения некоторой BT-теории. Однако мы не можем утверждать, что получили при этом соответствующее обобщение исходной T-теории. Это будет так только и том случае, когда эта T-теория инвариантна относительно одновременного перехода к квадратам топологических пространств и их отображений. Например, так нельзя обобщать теорию размерности топологических пространств.

4. *Крест конструкция.* Следующая конструкция может явиться основой своеобразной битопологической теории.

Пусть (X, β) – произвольное битопологическое пространство. Для любой точки $(x, y) \in X \times X$ однозначно определена битопологическая структура $\beta(x, y) = \beta(\ , y) \times \beta(x,\ )$ или, что, по-существу, то же самое, битопологическое пространство $(X, \beta(\ , y), \beta(x,\ ))$. Пусть $\mathcal{P}$ – некоторое свойство KT-пространств. Тогда в $X \times X$ однозначно определено множество $\mathcal{P}(\beta)$ всех точек (x, y), для которых битопологическое в смысле Келли пространство $(X, \beta(\ , y), \beta(x,\ ))$ обладает свойством $\mathcal{P}$. Возникающая на этой основе теория является обобщением KT-теории в том смысле, что для каждого KT-пространства (X, τ_1, τ_2) множество $\mathcal{P}(\beta)$ либо совпадает с $X \times X$ либо пусто, в общем же случае возможны и другие варианты. Здесь представляет интерес изучение множества $\mathcal{P}(\beta) \subset X \times X$ для данного свойства $\mathcal{P}$ и данной битопологической структуры β, а также изучение соотношений между $\mathcal{P}(\beta)$ для различных свойств $\mathcal{P}$ и различных битопологических структур β.

5. *Неполные конструкции.* Каждая из рассмотренных нами конструкций однозначно определяет соответствующую связь между битопологическими пространствами и битопологическими в смысле Келли пространствами или же топологическими пространствами. Эти конструкции вполне определяют соответствующие BT-теории и поэтому их можно считать, так сказать, полными конструкциями. Но есть и неполные конструкции, оставляющие возможность выбора вариантов при построении обобщения той или иной KT-теории или T-теории. Такие конструкции содержат только указания на характер соответствующих обобщений. Мы можем, например, фиксировать какой-нибудь функтор категории BT в себя и рассматривать его композиции с различными функторами, устанавливающими те или иные связи между категориями BT, KT, T. Рассмотрим, например, *метод прямоугольных оболочек.*

Пусть β –произвольная битопологическая структура на X. Переходя от множества A к его прямоугольной оболочке $[A]$, мы получим множество, не принадлежащее в общем случае к β. Совокупность прямоугольных оболочек всех множеств принадлежащих β порождает некоторую топологическую структуру на $X \times X$, которую мы будем обозначать через $[\beta]$. В общем случае $\beta \neq [\beta]$.Может случиться, что $[\beta] \subset \beta$, например для $\beta = \{\emptyset, X \times X, \Delta\}$ его прямоугольная оболочка $[\beta] = \{\emptyset, X \times X\}$

строго содержится в β. Возможен и случай $\beta \subset [\beta]$, например для структуры β, состоящей из всех подмножеств диагонали и $X \times X$. Построенная таким способом операция перехода от одного битопологического пространства к другому тождественна на разложимых битопологических пространствах.

6. *Объединения.* Свободные объединения являются частными случаями произвольных объединений. Пусть X – некоторое множество, $(X_\xi | \xi \in \Xi)$ – какое-нибудь покрытие множества X. Предположим, что на каждом множестве X_ξ определена битопологическая структура β_ξ, $\xi \in \Xi$ и все эти битопологические структуры согласованы так, что для каждых ξ, η из Ξ структуры β_ξ, β_η индуцируют на $X_\xi \cap X_\eta$ одну и ту же битопологическую структуру $\beta_{\xi\eta}$, причем $(X_\xi \times X_\xi) \cap (X_\eta \times X_\eta)$ принадлежит как β_ξ так и β_η. Битопологическая структура β, индуцирующая на каждом множестве X_ξ, битопологическую структуру β_ξ, называется *объединением* битопологических структур X_ξ, взятым по всем $\xi \in \Xi$. Ясно, что свободное объединение является его частным случаем. Естественно возникает проблема существования и проблема единственности объединения при тех или иных условиях.

Эта битопологическая проблема сводится, очевидно, к соответствующей топологической проблеме. Каждому множеству $X_\xi \subset X$ соответствует множество $X_\xi \times X_\xi \subset X \times X$. К сожалению множества $X_\xi \times X_\xi$ не образуют, как правило, покрытие множества $X \times X$, хотя они покрывают диагональ Δ. Мы можем, однако, попытаться дополнить систему $(X_\xi \times X_\xi | \xi \in \Xi)$ до какой-нибудь системы $(H_\mu | \mu \in M)$, $\Xi \subset M$, $H_\mu \subset X \times X$, образующей покрытие множества $X \times X$. Если удастся ввести на всех множествах H_μ согласованные друг с другом, в упомянутом выше смысле, топологические структуры β_μ, совпадающие с β_μ для $\mu \in \Xi$, то нам остается только найти на $X \times X$ топологическую структуру β, согласованную со всеми β_μ. Это и будет объединением битопологических структур β_ξ, взятое по всем $\xi \in \Xi$.

Заметим, прежде всего, что такое объединение битопологических структур определено неоднозначно. Эта неоднозначность порождается различными причинами, прежде всего неоднозначностью выбора H_μ и β_μ. Нетрудно показать соответствующими примерами, что и для фиксированных H_μ и β_μ объединение определено неоднозначно. Однако последнюю причину неоднозначности можно преодолеть, рассматривая максимальное объединение, которое всегда существует. Оно состоит из всех $U \subset X \times X$, для которых каждое $U \cap H_\mu \in \beta_\mu$, $\mu \in M$. Для того чтобы убедиться в этом достаточно заметить, что в наших условиях $\beta_{\xi\eta} \subset (\beta_\xi \cap \beta_\eta)$ для любых ξ и η из M.

7. *Ослабления.* Пусть (X, β) – некоторое битопологическое пространство и $\mathcal{A}$ – какая-нибудь система подмножеств в $X \times X$. На каждом множестве $A \in \mathcal{A}$ определена топологическая структура β_A индуцированная на $A \subset X \times X$ топологической структурой β, определенной на $X \times X$. Рассмотрим структуру $\beta_{\mathcal{A}}$, состоящую из всех тех подмножеств U множества $X \times X$, для которых из $A \in \mathcal{A}$ следует $U \cap A \in \beta_A$. Структура $\beta_{\mathcal{A}}$ является, очевидно, топологической структурой на $X \times X$ и $\beta \subset \beta_{\mathcal{A}}$. В частности, если $\mathcal{A}$ состоит только из $X \times X$, то $\beta = \beta_{\mathcal{A}}$, если же $\mathcal{A} = \emptyset$, то $\beta_{\mathcal{A}}$ – дискретная битопологическая структура. Говорят, что битопологическая структура $\beta_{\mathcal{A}}$ получена *ослаблением* битопологической структуры β по системе $\mathcal{A}$.

Возможен, однако, и другой способ ослабления, когда за основу берутся не открытые, а замкнутые множества. В этом варианте рассматривается не β, а $C\beta$ – структура замкнутых множеств и структура $(C\beta)_{\mathcal{A}}$, состоящая из всех тех подмножеств F множества $X \times X$, для которых из $A \in \mathcal{A}$ следует $F \cap A \in (C\beta)_{\mathcal{A}}$. Структура $(C\beta)_{\mathcal{A}}$ является, очевидно, структурой замкнутых множеств на $X \times X$ и $C\beta \subset (C\beta)_{\mathcal{A}}$. В частности, если $\mathcal{A}$ состоит только из $X \times X$, то $C\beta = (C\beta)_{\mathcal{A}}$, если же $\mathcal{A} = \emptyset$, то $(C\beta)_{\mathcal{A}}$ – дискретная структура замкнутых множеств. И в этом случае будем говорить, что структура $(C\beta)_{\mathcal{A}}$ получена ослаблением структуры $C\beta$ по системе $\mathcal{A}$. В конечном счете оба варианта ослабления эквивалентны, как эквивалентна структура открытых множеств топологического пространства его структуре замкнутых множеств.

Замечание. Процедура ослабления, описанная здесь, имеет смысл для произвольного топологического пространства (X, τ), а не только для топологического пространства $(X \times X, \beta)$, то есть для битопологического пространства (X, β).

8. *Наследственность ослабления.* Пусть $\tau_{\mathcal{A}}$ – ослабление топологической структуры τ на X посредством некоторой системы $\mathcal{A}$ подмножеств множества X, (X', τ') – подпространство топологического пространства (X, τ). Мы можем рассмотреть три процедуры ослабления структуры τ', а именно процедуру дающую $\tau'_{\mathcal{A}'}$ – ослабление топологической структуры τ' по системе

$\mathcal{A}' = \{A \cap X' | A \in \mathcal{A}\}$, процедуру дающую $\tau_{\mathcal{A}'}|X'$ – топологическую структуру, индуцированную на X' ослаблением топологической структуры τ по системе $\mathcal{A}' = \{A \cap X' | A \in \mathcal{A}\}$ и процедуру дающую $\tau_{\mathcal{A}}|X'$ – топологическую структуру, индуцированную на X' топологической структурой $\tau_{\mathcal{A}}$ заданной на X. Нетрудно доказать, что между этими структурами имеют место следующие включения:

$$\tau_{\mathcal{A}}|X' \subset \tau_{\mathcal{A}'}|X' \subset \tau'_{\mathcal{A}'}$$

Действительно, пусть $U' \in \tau_{\mathcal{A}}|X'$, то есть $U' = U \cap X'$ и $U \cap A \in \tau|A$ для каждого $A \in \mathcal{A}$. Тогда $U \cap A' \in \tau|A'$ для каждого $A' \in \mathcal{A}'$. Тем самым доказано первое включение.

Пусть, теперь, $U' \in \tau_{\mathcal{A}'}|X'$ то есть $U' = U \cap X'$ и $U \cap A' \in \tau|A'$ для каждого $A' \in \mathcal{A}'$. Тогда $(U \cap A) \cap X' \in \tau|A'$, то есть $U' \cap A' \in \tau'|A'$, откуда следует, что $U' \in \tau'_{\mathcal{A}'}$. Тем самым доказано и второе включение.

Второе из этих включений обратимо, так как $U' \in \tau_{A'}|X' \iff U' = U \cap X'$, где $U \in \tau_{A'}$, то есть $U \cap A'$ для каждого $A' \in \mathcal{A}' \iff U' \cap A' \in \tau'$ для каждого $A' \in \mathcal{A}' \iff U' \in \tau'|X'$.

К сожалению, первое из доказанных выше включений необратимо, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = \{a_0, a_1, a_2\}$, τ – тривиальная топологическая структура на X, $X' = \{a_1, a_2\}$, (X', τ') – подпространство топологического пространства (X, τ), система $\mathcal{A}$ состоит из двух множеств, а именно из множества $A_1 = \{a_0, a_1\}$ и множества $A_2 = \{a_0, a_2\}$. Тогда система $\mathcal{A}'$ будет состоять из двух одноточечных множеств $A'_1 = \{a_1\}$ и $X' = \{a_2\}$, исчерпывающих X'. В этом случае структура $\tau_{\mathcal{A}}|X'$ будет тривиальной. Действительно, пусть $U \in \tau_{\mathcal{A}}$, то есть $U \cap A_1 \in \tau|A_1$ и $U \cap A_2 \in \tau|A_2$ но тогда $U \cap A_1 = A_1$ и $U \cap A_2 = A_2$ и потому $U = X$. Отсюда следует, что $\tau_{\mathcal{A}}$ – также тривиальная топологическая структура на X и поэтому $\tau_{\mathcal{A}}|X'$ – тривиальная топологическая структура на X'. С другой стороны, хотя τ – тривиальная топологическая структура на X, но $\mathcal{A}'$ состоит из одноточечных множеств и поэтому $\tau_{\mathcal{A}'}$ – дискретная топологическая структура. Отсюда следует, что топологические структуры $\tau_{\mathcal{A}}|X'$ и $\tau_{\mathcal{A}'}|X'$ различны.

Из рассмотренного примера следует также, что топологические структуры $\tau_{\mathcal{A}}|X'$ и $\tau'_{\mathcal{A}'}$ вообще говоря различны. Можно, однако, доказать, что в некоторых случаях имеет место их совпадение. Мы рассмотрим здесь следующие случаи:

1) X' – $\tau_{\mathcal{A}}$-открытое множество,
2) X' – $\tau_{\mathcal{A}}$-замкнутое множество,
3) $\mathcal{A}$ состоит из подмножеств множества X'.

Во всех этих случаях нам достаточно доказать включение

$$\tau'_{\mathcal{A}'} \subset \tau_{\mathcal{A}}|X',$$

так как обратное включение всегда имеет место.

Случай 1). Пусть множество G' является $\tau'_{\mathcal{A}'}$-открытым множеством, то есть $G' \cap A' \in \tau'|A'$. Так как $\tau'|A' = \tau|A'$ и $G' \cap A' = G' \cap A$ то $G' \cap A \in \tau|A'$. Заметим, теперь, что для любого $A \in \mathcal{A}$ мы имеем включение $\tau|A' \subset \tau|A$. Действительно, в случае 1) требуется, чтобы $X' \cap A \in \tau|A$ или, что то же самое, $A' \in \tau|A$ откуда требуемое включение и следует. Таким образом, для любого $A \in \mathcal{A}$ мы имеем $G' \cap A \in \tau|A$, то есть $G' \in \tau_{\mathcal{A}}$.

Случай 2) рассматривается аналогично.

Случай 3). В этом случае $A = A'$, поэтому условие $G' \cap A' \in \tau'|A'$ совпадает с условием $G' \cap A \in \tau'|A$. С другой стороны $(\tau|X')|A' = \tau|A'$ и, так как $A = A'$, то $\tau'|A = \tau|A$ и поэтому $G' \cap A' \in \tau'|A'$ влечет $G' \cap A \in \tau|A$. Отсюда следует включение $\tau'_{\mathcal{A}'} \subset \tau_{\mathcal{A}}|X'$.

§2. Рефлексивные, симметричные и транзитивные битопологические структуры

Некоторые битопологические структуры имеют те или иные особенности, позволяющие объединить их в соответствующие классы. Здесь будут представлены некоторые из таких классов.

1. Рефлексивные структуры.

Определение. *Будем говорить, что битопологическая структура β, определенная на множестве X, рефлексивна, если рефлексивно соответствующее ей отношение переноса*

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda),$$

то есть для любой направленной системы точек $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ в X и любой точки $x \in X$ имеем

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,x} (x_\lambda|\lambda \in \Lambda).$$

Замечание. Рефлексивность битопологической структуры β эквивалентна условию

$$((x_\lambda, x_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, x),$$

где точка $x \in X$ и система $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ произвольны.

Теорема. *Битопологическая структура β рефлексивна тогда и только тогда, когда любое открытое в $(X \times X, \beta)$ множество G либо не имеет общих точек с диагональю либо ее содержит, то есть $G \in \beta, G \cap \Delta \neq \emptyset \implies \Delta \subset G$.*

Доказательство. Пусть β – некоторая рефлексивная битопологическая структура на X, $G \in \beta$, $(x, x) \in G \cap \Delta$. Рассмотрим произвольную точку $(y, y) \in \Delta$, одноточечное направленное множество Λ и направленную систему $((x_\lambda, x_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$, в которой $x_\lambda = y$. В силу рефлексивности β имеет место сходимость

$$((x_\lambda, x_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, x).$$

Тогда $(x_\lambda, x_\lambda) = (y, y) \in G$, так как G является окрестностью точки (x, x) в $(X \times X, \beta)$. Но это означает, что любая точка (y, y) диагонали принадлежит множеству G. Тем самым доказано, что $\Delta \subset G$.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $G \in \beta$, $G \cap \Delta \neq \emptyset \implies \Delta \subset G$. Рассмотрим произвольную точку $(x, x) \in \Delta$. Пусть $((x_\lambda, x_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$ – произвольная направленная система. Если $(x, x) \in G \in \beta$, то $\Delta \subset G$, поэтому $(x_\lambda, x_\lambda) \in G$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Но это означает, что

$$((x_\lambda, x_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \mapsto_\beta (x, x),$$

то есть β – рефлексивная битопологическая структура.

Рассмотрим произвольную, не обязательно рефлексивную, битопологическую структуру β. По ней можно построить структуру $ref\beta$, состоящую из всех элементов структуры β, либо не пересекающихся с диагональю (множества первого типа), либо ее содержащих (множества второго типа). Структура $ref\beta$ будет также битопологической структурой на X, то есть топологической структурой на $X \times X$. Действительно, заметим, прежде всего, что $\emptyset \in ref\beta$, так как $\emptyset \cap \Delta = \emptyset$, $X \times X \in ref\beta$, так как $\Delta \subset X \times X$. Заметим, далее, что если совокупность элементов структуры $ref\beta$ состоит только из множеств первого (второго) типа, то объединение и пересечение элементов этой совокупности принадлежит первому (второму) типу. Если в эту совокупность входят как множества первого, так и множества второго типа, то их объединение будет множеством второго, а пересечение – первого типа. Итак, $ref\beta$ есть битопологическая структура. Более того, по построению она рефлексивна.

Определение. *Дефектом рефлексивности структуры β будем называть структуру $der\beta = \beta \setminus ref\beta$.*

Для произвольной битопологической структуры β целесообразно рассматривать также следующие структуры: структуру $\Delta\beta$ состоящую из окружений диагонали, то есть из множеств $G \in \beta$, $\Delta \subset G$, и пустого множества, а также структуру $\nabla\beta$ состоящую из β-спутников диагонали, то есть из множеств $G \in \beta$, $\Delta \cap G = \emptyset$, и всего множества $X \times X$. Ясно, что $\Delta\beta \cup \nabla\beta = ref\beta$.

2. Симметричные структуры.

Определение. *Будем говорят, что битопологическая структура β на X симметрична, если сответствующее ей отношение переноса*

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda),$$

симметрично, то есть

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \iff (y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{y,x} (x_\lambda|\lambda \in \Lambda).$$

Замечание. Условие симметричности структуры β эквивалентно следующему условию

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y) \iff ((y_\lambda, x_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (y, x).$$

Нетрудно заметить,что битопологическая структура β на X является симметричной тогда и только тогда, когда β, как топологическая структура на $X \times X$, симметрична относительно диагонали, то есть отображение $\varphi : (X \times X, \beta) \longrightarrow (X \times X, \beta)$, $\varphi(x, y) = (y, x)$ является гомеоморфизмом.

Каждому битопологическому пространству (X, β) можно сопоставить битопологическое пространство (X, β^{-1}), где

$$\beta^{-1} = \{G^{-1}|G \in \beta\},\ G^{-1} = \{(x, y)|(y, x) \in G\},$$

иначе говоря, $\beta^{-1} = \varphi(\beta)$.

Если битопологическая структура β симметрична, то ничего нового мы при этом не получаем. В противном случае мы можем рассматривать одновременно пространства (X, β) и (X, β^{-1}) образовав к примеру битопологическое пространство $(X, \beta) \times (X, \beta^{-1})$ канонически гомеоморфное пространству $(X \times X, \beta \times \beta^{-1})$ (в литературе рассматривалось ранее пространство $(X \times X, \beta, \beta^{-1})$.

Для произвольной битопологической структуры β можно построить ее верхнюю симметризацию ($\overline{\mathrm{sym}}\beta$) и *нижнюю симметризацию* ($\underline{\mathrm{sym}}\beta$). Под верхней симметризацией мы будем понимать наименьшую симметричную битопологическую структуру на X содержащую β, под нижней симметризацией мы будем понимать наибольшую битопологическую структуру на X содержащуюся в β. Можно ввести также *верхний* ($\overline{\mathrm{des}}\beta$) *и нижний* ($\underline{\mathrm{des}}\beta$) *дефекты* структуры β, положив

$$\overline{\mathrm{des}}\beta = \overline{\mathrm{sym}}\beta \setminus \beta,$$

$$\underline{\mathrm{des}}\beta = \beta \setminus \underline{\mathrm{sym}}\beta.$$

3. Транзитивные структуры.

Определение. *Будем говорить, что битопологическая структура транзитивна, если транзитивно соответствующее ей отношение переноса, то есть если*

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda)$$

и

$$(y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{y,z} (z_\lambda|\lambda \in \Lambda),$$

то

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,z} (z_\lambda|\lambda \in \Lambda),$$

Замечание. Условие транзитивности эквивалентно следующему условию, если

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y),$$

и

$$((y_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (y, z),$$

то

$$((x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, z).$$

Сформулированное таким образом условие транзитивности дано здесь не в терминах самой битопологической структуры. Можно, однако, ввести дополнительные условия, делающие такое описание возможным.

Теорема. *Любая разложимая битопологическая структура транзитивна.*

Доказательство. Если $\beta = \tau_1 \times \tau_2$, то

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y) \iff \begin{cases} (x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1} x \\ (y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_2} y \end{cases}$$

$$((y_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (y, z) \iff \begin{cases} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1} y \\ (z_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_2} z \end{cases}$$

$$((x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, z) \iff \begin{cases} (x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1} x \\ (z_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_2} z. \end{cases}$$

Поэтому, из

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y)$$

и

$$((y_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (y, z)$$

следует

$$\begin{cases} (x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1} x \\ (y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_2} y \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1} y \\ (z_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_2} z \end{cases}$$

поэтому

$$\begin{cases} (x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1} x \\ (z_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_2} z \end{cases}$$

и, наконец

$$((x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, z).$$

Однако разложимые битопологические структуры не исчерпывают класс транзитивных, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}$, β_0 – топологическая структура на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, в которой каждое замкнутое множество, за исключением самого множества $X \times X$, является объединением конечного числа каких-то подмножеств горизонтальных и конечного числа подмножеств вертикальных в $X \times X$ множеств. Такая битопологическая структура неразложима, так как она индуцирует дискретную топологическую структуру на каждом горизонтальном и на каждом вертикальном множестве, но сама не является дискретной топологической структурой. Докажем теперь, что $(\mathbb{R}, \beta_0)$ – транзитивное битопологическое пространство.

Пусть
$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta_0} (x, y)$$
и
$$((y_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta_0} (y, z),$$
но
$$((x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \not\longrightarrow_{\beta_0} (x, z).$$
Тогда для множества $U \in \beta_0$, $(x, z) \in U$, найдется такая конфинальная часть Λ_1 направленного множества Λ, что $(x_\lambda, z_\lambda) \notin U$ для всех $\lambda \in \Lambda_1$, иначе говоря, множество $\{(x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda_1\}$ содержится в объединении конечного числа каких-то вертикальных и каких-то горизонтальных в $X \times X$ множеств. Но тогда найдется такая конфинальная часть Λ_2 направленного множества Λ_1, что множество $\{(x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda_2\}$ содержится в каком-нибудь вертикальном или же горизонтальном множестве. Будем, для определенности, считать, что множество $\{(x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda_2\}$ содержится в вертикальном множестве $\{x'\} \times \mathbb{R}$, то есть $x_\lambda = x'$ для всех $\lambda \in \Lambda_2$. Так как по предположению $((x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda_2) \longrightarrow_{\beta_2} (x, z)$, то $x_\lambda = x = x'$ для всех $\lambda \in \Lambda_2$. Мы доказали,таким образом, что $((x, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \not\longrightarrow_{\beta_0} (x, z)$, и поэтому $z_\lambda \neq z$ для $\lambda \in \Lambda_3$, где Λ_3 – некоторая конфинальная часть направленного множества Λ_2. Так как $((x, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta_0} (x, y)$, то $y_\lambda = y$ для $\lambda \in \Lambda_4$, где Λ_4 содержит почти все элементы из Λ_3 и уж во всяком случае является конфинальной частью Λ_3. Рассмотрим теперь направленную систему $((y_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda_4)$ Так как Λ_4 – конфинальная часть направленного множества Λ, то
$$((y, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta_0} (y, z).$$
С другой стороны,
$$((y, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda_4) \not\longrightarrow_{\beta_0} (y, z),$$

так как $z_\lambda \neq z$ для всех $\lambda \in \Lambda_4$. Полученное противоречие доказывает транзитивность рассматриваемой неразложимой битопологической структуры β_0.

4. Критерий транзитивности. Разложимые битопологические структуры дают нам хорошо описываемый класс, состоящий из транзитивных структур, но не из всех таких структур. Сейчас мы рассмотрим другой хорошо описываемый класс, также состоящий из транзитивных битопологических структур.

Определения. *Пусть A и B–произвольные подмножества множества $X \times X$, их композицией будем называть множество*

$$A \circ B = \{(x,z) | \exists y | (x,y) \in A,\, (y,z) \in B\}.$$

Битопологическую структуру β на множестве X будем называть композиционно непрерывной, если для любых точек x, y, z из X и любой окрестности W точки (x,z) в $(X \times X, \beta)$ найдутся такие окрестности U и V точек (x,y) и (y,z), соответственно, что $U \circ V \subset W$.

Теорема. *Любая разложимая битопологическая структура обладает свойством композиционной непрерывности.*

Доказательство. Пусть W – окрестность точки (x,z) в $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2)$. Мы имеем право считать, что $W = G_x \times G_z$, где $x \in G_x \in \tau_1$, $z \in G_z \in \tau_2$. Положим $G_y = X$, $U = G_x \times G_y$, $V = G_y \times G_z$. Легко заметить, что $U \circ V = W$, что и доказывает композиционную непрерывность всякой разложимой битопологической структуры.

С другой стороны справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Любая композиционно непрерывная битопологическая структура транзитивна.*

Доказательство. Пусть

$$((x_\lambda, y_\lambda) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x,y),$$

$$((y_\lambda, z_\lambda) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (y,z).$$

Рассмотрим направленную систему $((x_\lambda, z_\lambda) | \lambda \in \Lambda)$ и докажем, что она сходится в топологическом пространстве $(X \times X, \beta)$ к точке (x,z). Пусть W – произвольная окрестность точки (x,z) в $(X \times X, \beta)$. В силу композиционой непрерывности структуры β

найдутся такие окрестности U и V точек (x,y) и (y,z), соответственно, что $U \circ V \subset W$. В силу предположений о сходимости, найдется такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что $(x_\lambda, y_\lambda) \in U$ и $(y_\lambda, z_\lambda) \in V$ для всех $\lambda \geqslant \lambda_0$, $\lambda \in \Lambda$. Но тогда $(x_\lambda, z_\lambda) \in U \circ V \subset W$ для всех $\lambda \geqslant \lambda_0$ и, таким образом,

$$((x_\lambda, z_\lambda) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x,z).$$

Тем самым доказано,что битопологическая структура β транзитивна.

Мы получили хорошо описываемый класс, все элементы которого являются транзитивными битопологическими структурами. Этот класс существенно шире, чем класс разложимых битопологических структур. Действительно, продолжим рассмотрение примера предыдущего пункта и покажем,что введенная там битопологическая структура β_0 композиционно непрерывна.

Пусть, как и выше, W – окрестность точки (x,z) в $(X \times X, \beta)$. По определению структуры β_0 найдутся такие конечные множества $A \subset X$, $C \subset X$, что $x \notin A$, $z \notin C$ и

$$(X \times X) \setminus ((A \times X) \cup (X \times C)) \subset W.$$

Ясно, что для окрестностей $U = (X \times X) \setminus (A \times X)$ и $V = (X \times X) \setminus (X \times C)$ точек (x,y) и (y,z), соответственно, верно соотношение $U \circ V \subset W$, что и доказывает композиционную непрерывность структуры β_0.

Заметим,что мы получили дополнительно другое (и более простое) доказательство транзитивности битопологической структуры β_0. Мы можем получить теперь хорошее описание транзитивных структур.

Теорема. *Класс композиционно непрерывных битопологических структур совпадает с классом транзитивных битопологических структур.*

Доказательство. В предыдущей теореме было доказано, что каждая композиционно непрерывная битопологическая структура транзитивна, поэтому достаточно доказать, что класс композиционно непрерывных битопологических структур исчерпывает класс транзитивных битопологических структур.

Пусть β – некоторая транзитивная битопологическая структура на множестве X. Предположим, что она не является композиционно непрерывной. Тогда в X существуют такие точки x, y, z

и такая окрестность W точки (x,z) в $(X \times X, \beta)$, что для любых окрестностей U, V точек (x,y) и (y,z), соответственно, $U \circ V \not\subset W$.

Рассмотрим в качестве Λ направленное по включению множество пар (U,V), обладающих указанным свойством, $(U,V) > (U',V') \iff U \subset U'$, $V \subset V'$. Тогда для каждого $\lambda \in \Lambda$, то есть для каждой пары (U,V), найдутся такие точки x, y, z, что $(x_\lambda, y_\lambda) \in U$, $(y_\lambda, z_\lambda) \in V$ но $(x_\lambda, z_\lambda) \notin W$. В этой ситуации

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x,y)$$

и

$$((y_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (y,z),$$

но

$$((x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \not\longrightarrow_{\beta_0} (x,z).$$

Полученное противоречие доказывает композиционную непрерывность структуры β.

5. Вполне транзитивные структуры. В дальнейшем нам понадобится усиление понятия транзитивной структуры.

Определение. *Транзитивное битопологическое пространство (X,β) мы будем называть вполне транзитивным, если для любых точек x, y, z из X и любой сходимости*

$$((x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x,z).$$

существуют сходимости

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta_0} (x,y)$$

и

$$((y_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta_0} (y,z).$$

Замечание. Вполне транзитивность означает возможность переноса направленных систем из одной точки в другую через любую третью точку. Структуру вполне транзитивного пространства будем также называть *вполне транзитивной*.

Для вполне транзитивных битопологических пространств имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть (X,β) – вполне транзитивное битопологическое пространство, U и V – произвольные окрестности произвольно фиксированных точек (x,y) и (y,z) в $(X\times X,\beta)$. Тогда $W=U\circ V$ будет окрестностью точки (x,z) в $(X\times X,\beta)$.*

Доказательство. Пусть

$$((x_\lambda, z_\lambda)|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow_\beta (x,z).$$

Тогда, в силу вполне транзитивности (X,β), существуют сходимости

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow_\beta (x,y)$$

и

$$((y_\lambda, z_\lambda)|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow_\beta (y,z).$$

Так как U и V – окрестности точек (x,y) и (y,z), соответственно, то найдется такое $\lambda_0\in\Lambda$, что $(x_\lambda,y_\lambda)\in U$ и $(y_\lambda,z_\lambda)\in V$ для всех $\lambda\geqslant\lambda_0$, $\lambda\in\Lambda$. Но тогда $(x_\lambda,z_\lambda)\in W$ для всех $\lambda\geqslant\lambda_0$, $\lambda\in\Lambda$, а это и означает, что W является окрестностью точки (x,z) в $(X\times X,\beta)$.

Из этого утверждения можно вывести важное следствие.

Теорема. *Если (X,β) – вполне транзитивное битопологическое пространство, и*

$$((x_\lambda, x_\lambda)|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow_\beta (x,x),$$

то для любой точки $y\in X$ существует такая направленная система $(y_\lambda|\lambda\in\Lambda)$ точек, что

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow_\beta (x,y)$$

иначе говоря, направленную систему $(x_\lambda|\lambda\in\Lambda)$ можно перенести в любую точку множества X.

Доказательство. Если

$$((x_\lambda, x_\lambda)|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow_\beta (x,x)$$

и $y\in X$, то в силу вполне транзитивности битопологического пространства (X,β), существуют сходимости

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow_\beta (x,y),$$

и

$$((y_\lambda, x_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (y, x).$$

Первая из этих сходимостей дает нам перенос

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda),$$

вторая же из этих сходимостей дает нам обратный перенос

$$(y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{y,x} (x_\lambda|\lambda \in \Lambda).$$

7. Транзитивные объединения. Рассматривая проблему построения объединения битопологических структур, мы отметили, что в общем случае объединение определено не однозначно. Лишь в двух случаях объединение определено однозначно – это объединение в классе транзитивных битопологических пространств и объединение в классе локальных битопологических пространств.

1. *Транзитивные объединения.* Рассмотрим проблему построения транзитивного объединения β транзитивных битопологических структур. Здесь все исходные битопологические структуры β_ξ, определенные на X_ξ должны быть транзитивными и требуется построить их объединение, также являющееся транзитивной битопологической структурой. При построении транзитивных объединений мы будем предполагать, что выполняются все условия, накладываемые на (X_ξ, β_ξ) при построении объединений и наложим еще условие так называемой *цепной связности*.

Определение. *Будем говорить, что система (X_ξ, β_ξ) битопологических пространств, образующих покрытие множества X, цепно связана на X, если для любых точек x, y из X найдется такая последовательность точек $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$, что каждая пара x_i, x_{i+1} ее точек принадлежит какому-нибудь X_ξ, где $\xi \in \Xi$. Саму эту последовательность мы будем называть цепью, соединяющей точки x и y.*

При построении транзитивных объединений могут быть использованы два метода, а именно *метод переноса* направленных систем точек в X вдоль цепей и *метод цепных* композиций.

Метод переноса состоит в следующем. Мы рассматриваем все пары x, y точек множества X и для каждой такой пары считаем, что

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y)$$

если найдется какая-нибудь цепь, соединяющая точку x с точкой y, последовательный перенос вдоль точек которой переводит направленную систему $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ в направленную систему $(y_\lambda|\lambda \in \Lambda)$. Заметим, что при таком переносе используется то, что каждая пара x_i, x_{i+1} точек цепи $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ принадлежит какому-нибудь X_ξ для $\xi \in \Xi$. Мы получаем в конечном счете некоторую систему сходимостей направленных систем точек в X. Эта система определяет соответствующую топологическую структуру на множестве $X \times X$, являющуюся транзитивной битопологической структурой на X.

Для описания метода цепных композиций необходимо предварительно ввести понятие n-членной композиции.

Определение. *Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – множества в $X \times X$. Композицией этих множеств будем называть множество*

$$A_1 \circ A_2 \circ \ldots \circ A_n =$$
$$= \{(x_0, x_n)|(x_0, x_1) \in A_1,\ (x_1, x_2) \in A_2, \ldots, (x_{n-1}, x_n) \in A_n\}.$$

Операция n-членной композиции обладает следующим свойством.

$$(A_1 \circ \ldots \circ A_k) \circ (A_{k+1} \circ \ldots \circ A_n) = A_1 \circ A_2 \circ \ldots \circ A_n.$$

Действительно,

$$A_1 \circ \ldots \circ A_k = \{(x_0, x_k)|(x_0, x_1) \in A_1, \ldots, (x_{k-1}.x_k) \in A_k\},$$

$$A_{k+1} \circ \ldots \circ A_n = \{(x_k, x_n)|(x_k, x_{k+1}), \ldots, (x_{n-1}, x_n) \in A_n\}$$

Отсюда следует, что

$$(A_1 \circ \ldots \circ A_k) \circ (A_{k+1} \circ \ldots \circ A_n) =$$
$$= \{(x_0, x_k))|(x_0, x_1) \in A_1, \ldots, (x_{k-1}, x_k) \in A_k\} \circ$$
$$\{(x_k, x_n)|(x_k, x_{k+1}), \ldots, (x_{n-1}, x_n) \in A_n\} =$$
$$\{(x_0, x_n)|(x_0, x_1) \in A_1, (x_1, x_2) \in A_2, \ldots, (x_{n-1}, x_n) \in A_n\} =$$
$$A_1 \circ A_2 \circ \ldots \circ A_n.$$

Тем самым мы доказали, что n-членные композиции являются комбинациями двухэлементных композиций, введенных в п. 3.4.

Мы можем, теперь, перейти к понятию *цепной композиции*. Под этим мы будем понимать следующее.

Определение. *Фиксируется какая-нибудь цепь* $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$, *соединяющая точки* x *и* y, *и окрестности* U_i *точек* (x_{i-1}, x_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ *в содержащих эти точки пространствах* (X_ξ, β_ξ). *Композицию*

$$U_1 \circ U_2 \circ \ldots \circ U_n$$

мы будем называть цепной композицией.

Любую такую цепную композицию будем рассматривать как окрестность точки (x, y). Такие цепные композиции, образованные по всем возможным цепям и окрестностям U_i точек (x_{i-1}, x_i) этих цепей, дадут нам систему окрестностей порождающую топологическую структуру β на $X \times X$, являющуюся транзитивной битопологической структурой на X.

2. *Частный случай транзитивного обьединения.* Метод переноса, как и метод цепных композиций, дает нам транзитивную битопологическую структуру, однако необходимо еще доказать, что эта структура индуцирует на всех X_ξ именно битопологические структуры β_ξ. В общем случае доказательство этого не представляется возможным и мы ограничимся здесь доказательством при соответствующих довольно сильных ограничениях.

Во-первых, вместо множества X мы будем рассматривать связное топологическое пространство (X, τ), а система $(X_\xi | \xi \in \Xi)$ должна будет состоять из открытых в (X, τ) множеств, на каждом из которых определена топологическая структура $\tau_\xi = \tau | X_\xi$ и битопологическая структура β_ξ, согласованная с τ_ξ, причем $\beta_\xi | \Delta_\xi = \tau \times \tau | \Delta_\xi$, иначе говоря, имеет место сходимость $((x_\lambda, x_\lambda) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta_\xi} (x, x)$, если $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_\xi} x$. Все эти битопологические структуры β_ξ, как обычно, попарно согласованы. Во-вторых, и это существенно, проблема транзитивного объединения будет решаться в классе вполне транзитивных, согласованных с τ, битопологических пространств.

При построении транзитивного объединения в этой ситуации мы, как в пункте 1, можем рассматривать цепи.

Докажем, прежде всего, что система $(X_\xi | \xi \in \Xi)$, будет цепно связана. Действительно, если мы допустим, что это не так, то фиксировав некоторую точку x, мы сможем образовать два множества, скажем A и B, первое из которых состоит из точек y соединимых с x какой-нибудь цепью, а второе из точек этим свойством не обладающих. Первое из этих множеств будет открыто в (X, τ), так как если $y \in A$, $y \in X_\xi$ то $X_\xi \subset A$. С другой стороны, и множество B будет открыто в (X,τ). Действительно, пусть $y \in B$, тогда найдется такое $\xi \in \Xi$, что $y \in X_\xi$. Заметим теперь, что если некоторая точка z из X_ξ принадлежит A, то есть соединена с x какой-нибудь цепью, то и точка y будет соединена с точкой x цепью, что неверно. Таким образом, если $y \in B \cap X_\xi$, то $X_\xi \subset B$ и потому B открыто в (X,τ). Но $A \cup B = X$ и потому, в силу связности (X,τ), одно из этих множеств должно быть пустым. Так как $A \neq \emptyset$ то $B = \emptyset$, то есть система $(X_\xi | \xi \in \Xi)$ – цепно связана.

Перейдем теперь к построению транзитивного объединения битопологических структур β_ξ. Мы начнем, как в пункте 1, с переноса направленных систем точек по цепям. При этом, в силу согласованности всех β_ξ с τ, рассматриваемые направленные системы $S_1, S_2, \ldots, S_n$ сходятся к соответствующим точкам пространства (X,τ). Таким образом мы полагаем

$$((x_\nu, y_\nu)|\nu \in N) \longrightarrow_\beta (x,y),$$

если существует некоторая цепь соединяющая точку x с точкой y и переносящая направленную систему $(x_\nu|\nu \in N)$, сходящуюся к x в направленную систему $(y_\nu|\nu \in N)$, сходящуюся к y.

Докажем теперь что так определенные сходимости не только определяют β, как это было в предыдущем пункте, но даже исчерпывают все β-сходимости. Иначе говоря совокупность так определенных сходимостей удовлетворяет всем аксиомам сходимости. Мы ограничимся здесь единственным нетривиальным доказательством, а именно доказательством выполнения аксиомы композиции. Пусть

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x,y),$$
$$((x_\nu, y_\nu)|\nu \in N_\lambda) \longrightarrow_\beta (x_\lambda, y_\lambda).$$

Мы должны доказать, что

$$((x_\mu, y_\mu)|\mu \in M) \longrightarrow_\beta (x,y),$$

где M является композицией Λ и всех N_λ, то есть доказать существование цепи, переносящей $(x_\mu|\mu \in M)$ в $(y_\mu|\mu \in M)$. Трудность состоит здесь в том, что цепи, вдоль которых осуществляются переносы направленных систем $(x_\nu|\nu \in N_\lambda)$ в направленные системы $(y_\nu|\nu \in N_\lambda)$, в принципе зависят от λ. В качестве основной цепи мы возьмем цепь, соединяющую точку x с точкой y вдоль которой $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ переносится в $(y_\lambda|\lambda \in \Lambda)$. Мы можем рассматривать следующие переносы:

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda),$$

причем перенос осуществляется по основной цепи,

$$(x_\nu|\nu \in N_\lambda) \mapsto_{x_\lambda, y_\lambda} (y_\nu|\nu \in N_\lambda),$$

причем перенос осуществляется по неизвестным нам цепям, зависящим от $\lambda \in \Lambda$

$$(x_\nu|\nu \in N_\lambda) \mapsto_{x_\lambda, y_\lambda} (y'_\nu|\nu \in N_\xi),$$

причем перенос осуществляется не по основной цепи, а по цепям зависящим от $\lambda \in \Lambda$, но близким к основной в следующем смысле.

Основная цепь состоит из точек

$$x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y,$$

причем каждая пара $x_{i-1},\ x_i$ соседних точек этой цепи содержится в некотором множестве X_{ξ_i}, $\xi_i \in \Xi$. Мы фиксируем систему X_{ξ_i}, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ и любую цепь

$$x' = x'_0, x'_1, \ldots, x'_n = y',$$

для которой

$$x'_0 \in X_{\xi_0},\ x'_1 \in X_{\xi_0}, x'_1 \in X_{\xi_1}, \ldots,\ x'_n \in X_{\xi_n}$$

будем называть близкой к основной. Заметим при этом, что все направленные системы фигурирующие в наших рассуждениях можно заменить направленными системами, состоящими из точек фиксированной нами системы множеств $X_{\xi_i},\ i = 0, 1, \ldots, n$.

$$(x_\mu|\mu \in M) \mapsto_{x,y} (y'_\mu|\mu \in M),$$

причем перенос осуществляется по основной цепи.

К сожалению, не видно как эти переносы обеспечивают выполнение аксиомы композиции сходимостей, однако положение меняется, если мы добавим еще одно условие, а именно условие независимости переноса от цепи. Это условие носит глобальный характер, так как оно имеет в виду свойство системы $((X_\xi, \beta_\xi)|\xi \in \Xi$ в целом. Его можно сформулировать следующим образом.

Если

$$(x_\lambda|\lambda\in\Lambda)\mapsto_{x,x}(x'_\lambda|\lambda\in\Lambda),$$
$$(x_\lambda|\lambda\in\Lambda)\mapsto_{x,y}(y_\lambda|\lambda\in\Lambda),$$
$$(x'_\lambda|\lambda\in\Lambda)\mapsto_{x,y}(y'_\lambda|\lambda\in\Lambda),$$

причем последние два переноса могут осуществляться по разным цепям, то

$$(y_\lambda|\lambda\in\Lambda)\mapsto_{y,y}(y'_\lambda|\lambda\in\Lambda).$$

При этом дополнительном условии мы будем иметь переносы

$$(x_\mu|\mu\in M)\mapsto_{x,y}(y'_\mu|\mu\in M),$$
$$(y'_\mu|\mu\in M)\mapsto_{y,y}(y_\mu|\mu\in M),$$

и, следовательно, в силу транзитивности β,

$$(x_\mu|\mu\in M)\mapsto_{x,y}(y_\mu|\mu\in M),$$

то есть

$$((x_\mu,y_\mu)|\mu\in M)\longrightarrow_\beta(x,y).$$

По самому построению, мы получаем транзитивную битопологическую структуру β, более того, в силу полной транзитивности всех (X_ξ,β_ξ) структура β также будет вполне транзитивной. Осталось доказать, что построенная нами битопологическая структура β индуцирует на каждом множестве X_ξ исходную битопологическую структуру β_ξ, но это следует непосредственно из дополнительного условия.

§3. Локально разложимые структуры.

Понятие локальной разложимости является естественным ослаблением понятия разложимости битопологической структуры.

1. Разложение сходимостей.

Определение. *Битопологическое пространство (X,β) будем называть локально разложимым, если сходимость направленных систем точек в $(X\times X,\beta)$ обладает следующим свойством:*

$$((x_\lambda,y_\lambda)|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow_\beta(x,y)\iff\left\{\begin{array}{l}((x_\lambda,y)|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow_\beta(x,y)\\((x,y_\lambda)|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow_\beta(x,y)\end{array}\right..$$

В этом случае будем называть локально разложимой и битопологическую структуру β.

Замечание. Заметим, что условие локальной разложимости дает возможность заменить любую сходимость в (X, β) к некоторой точке (x, y) на две сходимости, а именно на соответствующую сходимость к этой точке в горизонтальном множестве $X \times \{y\}$ и соответствующую сходимость к ней в вертикальном множестве $\{x\} \times X$. Можно считать при этом, что эти две сходимости рассматриваются не как сходимости в топологическом пространстве $(X \times X, \beta)$, а как сходимости в топологических пространствах $(X \times \{y\}, \beta(\ , y))$ и $(\{x\} \times X, \beta(x,\ ))$. Здесь топологические структуры $\beta(\ , y)$ и $\beta(x,\ )$ на горизонтальном и вертикальном множествах, соответственно, индуцированы топологической структурой β.

Теорема. *Любое разложимое битопологическое пространство является локально разложимым пространством.*

Доказательство. Так как

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1 \times \tau_2} (x, y) \iff \begin{cases} (x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1} x \\ (y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_2} y, \end{cases}$$

а, с другой стороны,

$$\begin{aligned} ((x_\lambda, y)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1 \times \tau_2} (x, y) &\iff (x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1} x \\ ((x, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1 \times \tau_2} (x, y) &\iff (y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_2} y. \end{aligned}$$

то

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1 \times \tau_2} (x, y) \iff \begin{cases} ((x_\lambda, y)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1 \times \tau_2} (x, y) \\ ((x, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1 \times \tau_2} (x, y), \end{cases}$$

Таким образом и для локально разложимого пространства и для разложимого, сходимости направленных систем точек

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta} (x, y)$$

в топологическом пространстве $(X \times X, \beta)$ для произвольно фиксированной точки (x, y) разлагаются в сходимости к этой точке направленных систем

$$((x_\lambda, y)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta(\ ,y)} (x, y),\ \ ((x, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta(x,\ )} (x, y)$$

по горизонтальному множеству $X \times \{y\}$ и вертикальному множеству $\{x\} \times X$, соответственно. Разница состоит в том, что для локально разложиых пространств эти сходимости могут *существенно зависеть от точки* (x, y).

Замечание. Заметим теперь, что любая локально разложимая битопологическая структура β однозначно определена топологическими структурами $\beta(\ ,y)$ и $\beta(x,\ )$, которые β индуцирует на горизонтальных множествах $X \times \{y\}$ и на вертикальных множествах $\{x\} \times X$.

Определение. *Топологические структуры $\beta(\ ,y)$ и $\beta(x,\ )$, определенные для всех точек (x, y) множества $X \times Y$, будем называть следами структуры β на соответствующих горизонтальных и вертикальных множествах. Систему*

$$(\beta(\ ,y), \beta(x,\ )|x \in X, y \in X)$$

всех таких топологических структур будем называть системой следов структуры β на этих множествах.

Замечание. Эта система следов может совпадать, вообще говоря, для различных битопологических структур, но системы следов несовпадающих локально разложимых структур различны.

2. Критерий локальной разложимости. Понятие локальной разложимости битопологического пространства (X, β) можно сформулировать в терминах *прямоугольных окрестностей* точек топологического пространства $(X \times X, \beta)$.

Теорема. *Битопологическое пространство (X, β) локально разложимо тогда и только тогда, когда каждая точка топологического пространства $(X \times X, \beta)$ имеет базу окрестностей, состоящую из прямоугольных множеств.*

Доказательство. Пусть β является локально разложимой битопологической структурой. Рассмотрим произвольную точку $(x, y) \in X \times X$, ее окрестности $U \times \{y\}$ и $\{x\} \times V$ в подпространствах на $X \times \{y\}$ и $\{x\} \times X$ топологического пространства $(X \times X, \beta)$, соответственно, и прямоугольное множество $U \times V$. Пусть

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y),$$

тогда, в силу локальной разложимости,

$$((x_\lambda, y)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y),$$
$$((x, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y).$$

Но тогда найдется такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что $(x_\lambda, y) \in U \times \{y\}$, $(x, y_\lambda) \in \{x\} \times V$, а потому $(x_\lambda, y_\lambda) \in U \times V$ для всех $\lambda \geqslant \lambda_0$. Тем самым доказано, что $U \times V$ является окрестностью точки (x, y) в $(X \times X, \beta)$.

Докажем теперь, что совокупность всех таких окрестностей точки (x, y) является базой всех окрестностей этой точки в $(X \times X, \beta)$. Рассмотрим в качестве Λ множество $U \times V$, упорядоченное по включению. Предположим,что существует окрестность W точки (x, y) в $(X \times X, \beta)$, для которой $U \times V \in \Lambda \implies (U \times V) \setminus W \neq \emptyset$. В этом случае для каждого $U \times V = \lambda \in \Lambda$ найдется точка $(x_\lambda, y_\lambda) \in (U \times V) \setminus W$ и можно рассмотреть направленную систему $((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$ точек в $(X \times X, \beta)$. Система $((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$ не сходится к точке (x, y), так как окрестность W этой точки вообще не содержит точек рассматриваемой здесь системы.

С другой стороны, так как точки (x_λ, y) и (x, y_λ) выбирались в окрестностях $U \times \{y\}$ и $\{x\} \times V$ соответствующих подпространств на множествах $X \times \{y\}$ и $\{x\} \times X$, то имеют место сходимости

$$((x_\lambda, y)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y),$$
$$((x, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y).$$

Но тогда, в силу локальной разложимости β, должна будет иметь место и сходимость

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y),$$

что противоречит нашему предположению. Тем самым доказано, что система $(U \times V)$ образует базу окрестностей точки (x, y) в пространстве $(X \times X, \beta)$.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть прямоугольные окрестности $U \times V$ каждой точки в $(X \times X, \beta)$ образуют базу ее окрестностей. Нетрудно заметить, прежде всего, что является окрестностью каждое прямоугольное множество $U \times V$, для которого $U \times \{y\}$ и $\{x\} \times V$ будут окрестностями точки (x, y) в подпространствах топологического пространства $(X \times X, \beta)$ на множествах $X \times \{y\}$ и $\{x\} \times X$ (горизонтальном и вертикальном множествах).

Действительно, найдется $W \in \beta$ такое, что $W \cap (X \times \{y\}) \subset U$ и $W \cap (\{x\} \times X) \subset V$. Отсюда не следует, конечно, что $W \subset U \times V$, но по нашему предположению найдется окрестность $U_1 \times V_1$ точки (x, y), содержащаяся в W. Так как $U_1 \subset U$ и $V_1 \subset V$, то $U_1 \times V_1 \subset U \times V$ и, следовательно $U \times V$ является окрестностью точки (x, y) в $(X \times X, \beta)$.

Пусть, теперь, $((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$ – произвольная направленная система точек в $X \times X$ и $U \times V$ – произвольная прямоугольная окрестность точки (x, y) в $(X \times X, \beta)$. Тогда

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y) \iff (x_\lambda, y_\lambda) \in U \times V|\lambda \geqslant \lambda_0(U, V) \iff$$

$$(x_\lambda, y) \in U \times \{y\}, (x, y_\lambda) \in \{x\} \times V|\lambda \geqslant \lambda_0(U, V) \iff$$

$$((x_\lambda, y)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y), \ ((x, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y).$$

Тем самым доказано,что β – локально разложимая битопологическая структура на X.

3. Открытые прямоугольные окрестности. Прямоугольные окрестности, фигурирующие в альтернативном определении локальной разложимости, *нельзя заменить, в общем случае, на прямоугольные открытые множества*, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = [0, 1]$ – единичный отрезок, β – топологическая структура на единичном квадрате $X \times X$, состоящая из всех открытых множеств G единичного квадрата, удовлетворяющих следующему условию:

$$(*)\begin{cases} (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}) \notin G \implies (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}) \notin G \\ (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+2}) \notin G \implies (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}) \notin G. \end{cases}$$

Докажем, прежде всего, что каждая точка (x, y) топологического пространства $(X \times X, \beta)$ имеет базу окрестностей, состоящую из прямоугольных множеств, то есть (X, β) является локально разложимым битопологическим пространством.

В обычной топологии единичного квадрата любое открытое множество, содержащее точку $(0, 0)$, содержит некоторое множество $G = [0, \epsilon) \times [0, \epsilon)$. Существует только конечное число точек вида $(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n})$ и точек вида $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+2})$, не принадлежащих G. Удалив из G все точки вида $(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1})$ и вида $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2})$ для соответствующих n (на самом деле будут удалены только две точки) мы получим открытое в обычной топологии единичного квадрата множество, удовлетворяющее условию $(*)$, то есть β-открытое множество. Таким образом множество $[0,\epsilon)\times[0,\epsilon)$, будет прямоугольной окрестностью точки $(0,0)$ в $(X\times X,\beta)$. Это значит, что точка $(0,0)$ имеет в $(X\times X,\beta)$ базу окрестностей, состоящую из прямоугольных множеств. Каждая точка вида $(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1})$ будет иметь прямоугольную окрестность, состоящую из двух сколь угодно малых квадратов с центрами в точках $(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1})$ и $(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n})$. Такие пряоугольные множества образуют базу окрестностей точки $(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1})$, так как любое открытое в $(X\times X,\beta)$, содержащее точку $(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1})$ содержит, в силу условия $(*)$ и точку $(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n})$. Аналогичная ситуация имеет место и для точек вида $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2})$. Все остальные точки топологического пространства $(X\times X,\beta)$ будут иметь базы окрестностей, состоящие из сколь угодно малыхъ прямоугольных множеств (квадратов с центрами в этих точках).

Тем самым доказано, что (X,β) является локально разложимым битопологическим пространством. Докажем теперь, что точка $(0,0)$, имея сколь угодно малые прямоугольные окрестности, не иеет сколь угодно малых открытых прямоугольных окрестностей в $(X\times X,\beta)$.

Действительно, пусть $G = A\times B$ – открытая окрестность точки $(0,0)$ в топологическом пространстве $(X\times X,\beta)$. При этом можно считать,что $(1,1)\notin G$. Тогда для достаточно малого $\epsilon > 0$ множество $[0,\epsilon)\times[0,\epsilon)$ содержится в G. Пусть $\frac{1}{n+1} < \epsilon \leqslant \frac{1}{n}$ и потому имеет место включение $\{\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\}\subset A\cap B$. Отсюда следует,что точки $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2})$ и $(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1})$ принадлежат G. Но тогда,в силу условия $(*)$, и точки $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+2})$, $(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n})$ принадлежат G, а потому имеет место включение $\{\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\}\subset A\cap B$. Повторяя это рассуждение достаточно много раз мы придем в конечном счете к влючению $\{\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1},\ldots,1\}\subset A\cap B$. Но тогда $(1,1)\in G$, что противоречит принятому выше условию. Тем самым доказано, что точка $(0,0)$ не имеет базу окрестностей, состоящую из прямоугольных открытых множеств.

4. Следы битопологической структуры. Любая локально разложимая битопологическая структура β, определенная на множестве X, однозначно восстанавливается по своей системе следов

$(\beta(\ ,y),\beta(x,\ )|x\in X,\ y\in X)$ на всех горизонтальных и на всех вертикальных в $(X\times X,\beta)$ множествах. Иногда существуют, кроме того и другие битопологические структуры на X (не локально разложимые) с той же системой следов.

С другой стороны, если мы определим произвольно какие-то топологические структуры на всех горизонтальных и на всех вертикальных множествах, то может случиться так, что битопологической структуры с такой системой следов вообще нет или же она есть, но нет локально разложимой. Следующие примеры показывают, что все эти случаи возможны.

Пример 1. Пусть $X=\{0,1\}, \tau(0,\ )$ и $\tau(1,\ )$ тривиальны, $\tau(\ ,0)$ и $\tau(\ ,1)$ содержат кроме тривиальных множеств $\emptyset$ и X только множества $\{(0,0)\}$ и $\{(1,1)\}$, соответственно.

Допустим, что битопологическая структура β с такой системой следов существует. Тогда должно существовать такое множество $G\in\beta$, что $G\cap(X\times\{0\})=\{(0,0)\}$, так как $\tau(\ ,0)$ содержит множество $\{(0,0)\}$. Но в этом случае и точка $(0,1)$ принадлежит G, так как топологическая структура $\tau(0,\ )$ тривиальна, и точка $(1,1)$ принадлежит G, так как множество $\{(0,1)\}\notin\tau(\ ,1)$, и точка $(1,0)$ принадлежит G, так как топологическая структура $\tau(1,\ )$ тривиальна. Таким образом $G=X\times X$, что противоречит выбору G. Тем самым доказано, что битопологическая структура с указанной системой следов не существует.

Пример 2. Пусть $X=\{0,1\}$, β – битопологическая структура на X, состоящая из $\emptyset$, $X\times X$, $\{(1,0)\}$, $\{(0,1)\}$, $\{(0,0),(1,1)\}$.

На каждом горизонтальном и на каждом вертикальном в $X\times X$ множестве структура β индуцирует дискретную топологическую структуру, хотя сама она, как топологическая структура на $X\times X$, не дискретна. С другой стороны, ту же систему следов определяет и дискретная на $X\times X$ топологическая структура, являющаяся локально разложимой битопологической структурой.

Пример 3. Пусть $X=\{0,1\}$, β – битопологическая структура на X, состоящая из множеств $\emptyset$, $X\times X$, $\{(0,0),(1,0),(1,1)\}$.

Эта битопологическая структура не является локально разложимой, так как $X\times X$ – единственная прямоугольная окрестность точки $(0,0)$, а она не содержится в окрестности $\{(0,0),(1,0),(1,1)\}$

этой точки. Другой битопологической структуры β' на $X \times X$, имеющей одинаковую с β систему следов, нет.

Действительно, если $G \in \beta'$ и $G \cap (\{0\} \times X) = \{(0,0)\}$, то и точка $(1,0)$ принадлежит G, так как $\beta(\ ,0)$–тривиальная топологическая структура, и точка $(1,1)$ принадлежит G, так как $\beta(1,\ )$–тривиальная топологическая структура, следовательно $G = \{(0,0),(1,0),(1,1)\}$. Аналогично рассматриваются случаи $G \cap (\{1\} \times X) = \{(1,0),(1,1)\}$, $G \cap (X \times \{0\}) = \{(0,0),(1,0)\}$ и $G \cap (X \times \{1\}) = \{(1,1)\}$. В каждом из эти случаев доказывается, что $G = \{(0,0),(1,0),(1,1)\}$ или же $G = X \times X$. Тем самым доказано, что существует единственная битопологическая структура с рассмотренной в этом примере системой следов, причем эта структура не локально разложима.

Пример 4. Пусть $X = \{0,1\}, \beta$ – битопологическая структура, являющаяся тривиальной топологической структурой на $X \times X$. Эта структура локально разложима, а другой битопологической структуры с той же системой следов нет.

5. Непрерывность системы следов.

Определения. *Будем говорить, что система $(\beta(\ ,y), \beta(x,\ )|x \in X,\, y \in X)$ вертикально непрерывна, если из сходимостей*

$$((x_\lambda, y_\xi)|\lambda \in \Lambda_\xi) \longrightarrow_{\beta(\ ,y_\xi)} (x_\xi, y_\xi),$$
$$((x, y_\xi)|\xi \in \Xi) \longrightarrow_{\beta(x,\ )} (x, y),$$
$$((x_\xi, y)|\xi \in \Xi) \longrightarrow_{\beta(\ ,y)} (x, y),$$

следует сходимость

$$((x_\mu, y)|\mu \in M) \longrightarrow_{\beta(\ ,y)} (x, y),$$

где M – композиция упорядоченного множества Ξ и всех Λ_ξ.

Аналогично формулируется условие горизонтальной непрерывности системы $(\beta(\ ,y), \beta(x,\ )|x \in X, y \in X)$.

Будем говорить, что система $(\beta(\ ,y), \beta(x,\ )|x \in X, y \in X)$ непрерывна, если она и вертикально и горизонтально непрерывна.

Теорема. *Пусть $(\beta(\ ,y), \beta(x,\ )|x \in X, y \in X)$ – система топологических структур, заданных на всех горизонтальных и вертикальных* *в $X \times X$ множествах. Эта система (однозначно) определяет соответствующую локально разложимую структуру на X тогда и только тогда, когда она непрерывна.*

Доказательство. Предполагая существование локально разложимой структуры β, согласованной с системой $(\beta(\ ,y), \beta(x,\ )|x \in X, y \in X)$, докажем непрерывность этой системы. Пусть

$$((x_\lambda, y_\xi)|\lambda \in \Lambda_\xi) \longrightarrow_{\beta(\ ,y_\xi)} (x_\xi, y_\xi), \tag{1}$$

$$((x, y_\xi)|\xi \in \Xi) \longrightarrow_{\beta(x,\ )} (x, y), \tag{2}$$

$$(x_\xi, y)|\xi \in \Xi) \longrightarrow_{\beta(\ ,y)} (x, y). \tag{3}$$

Тогда, в силу локальной разложимости β из (2) и (3) следует

$$((x_\xi, y_\xi)|\xi \in \Xi) \longrightarrow_{\beta} (x, y). \tag{4}$$

Из (1) и (4) следует, в силу известного свойства сходимости,

$$((x_\mu, y_\mu)|\mu \in M) \longrightarrow_{\beta} (x, y),$$

где $\mu = (\xi, \eta)$, и потому, в силу локальной разложимости,

$$((x_\mu, y)|\mu \in M) \longrightarrow_{\beta(\ ,y)} (x, y),$$

что доказывает вертикальную непрерывность системы
$(\beta(\ ,y), \quad \beta(x,\ )|x \in X, y \in X)$.

Аналогично доказывается горизонтальная непрерывность этой системы. Таким образом система
$(\beta(\ ,y), \beta(x,\ )|x \in X, y \in X)$ непрерывна.

Предположим теперь, что система $(\beta(\ ,y), \beta(x,\ )|x \in X, y \in X)$ непрерывна. Введем на $X \times X$ сходимость, положив

$$((x_\xi, y_\xi)|\xi \in \Xi) \longrightarrow (x, y),$$

тогда и только тогда, когда

$$((x, y_\xi)|\xi \in \Xi) \longrightarrow (x, y) \quad (x_\xi, y)|\xi \in \Xi) \longrightarrow (x, y).$$

Такая сходимость будет определять некоторую топологическую структуру на $X \times X$, если для нее выполняются все аксиомы сходимости. Единственным более или менее нетривиальным рассуждением является здесь проверка выполнения аксиомы композиции сходящихся направленных систем.

Пусть

$$((x_\xi, y_\xi)|\xi \in \Xi) \longrightarrow (x, y) \tag{5}$$

$$((x_\lambda, y_\xi)|\lambda \in \Lambda_\xi) \longrightarrow (x_\xi, y_\xi), \tag{6}$$

для каждого $\xi \in \Xi$. Рассмотрим направленную систему $((x_\mu, y_\mu)|\mu \in M)$, где $x_\mu = x_\lambda$, для $\mu = (\xi, \eta)$, $\lambda = \eta(\xi)$. По определению сходимости в $X \times X$ из (6) следует

$$((x_\lambda, y_\xi)|\lambda \in \Lambda_\xi) \longrightarrow (x_\xi, y_\xi), \tag{7}$$

$$((x_\xi, y_\lambda)|\xi \in \Xi) \longrightarrow (x_\xi, y_\xi) \tag{8}$$

и в силу (5)

$$((x, y_\xi)|\xi \in \Xi) \longrightarrow (x, y), \tag{9}$$

$$((x_\xi, y)|\xi \in \Xi) \longrightarrow (x, y). \tag{10}$$

Из (7), (9), (10) в силу вертикальной непрерывности получаем

$$((x_\mu, y)|\mu \in M) \longrightarrow (x, y),$$

аналогично, пользуясь горизонтальной непрерывностью, получаем

$$((x, y_\mu)|\mu \in M) \longrightarrow (x, y)$$

и, наконец, в соответствии с определением сходимости в $X \times X$, имеем

$$((x_\mu, y_\mu)|\mu \in M) \longrightarrow (x, y).$$

Теорема доказана.

6. Критерий непрерывности системы следов. В предыдущем пункте был описан метод построения локально разложимой битопологической структуры β на X по заданной системе

$$(\beta(\ , y), \beta(x,\ )|x \in X,\ y \in X)$$

ее следов, основанный на сходимости направленных систем точек. Рассмотрим теперь другой подход, основанный не на сходимостях, а на окрестностях точек.

Пусть на X определена какая-то непрерывная система следов локально разложимой битопологической структуры β, которую предстоит описать и терминах окрестностей точек. Для каждой точки $(x, y) \in X \times X$ определена система $(U \times V|x \in U \in \beta(\ , y),\ y \in$

$V \in \beta(x, \ ))$ прямоугольных множеств. Эта система образует базу окрестностей точки (x, y) в топологическом пространстве $(X \times X, \beta)$. Действительно, любая локально разложимая битопологическая структура имеет, как известно, базу прямоугольных окрестностей точек. Но если $A \times B$ является прямоугольной окрестностью некоторой точки (x, y), то A будет окрестностью точки x в топологическом пространстве $(X, \beta(\ , y))$, а B будет окрестностью точки y в топологическом пространстве $(X, \beta(x, \ ))$ – это следует непосредственно из сходимостных условий локальной разложимости. С другой стороны, условие непрерывности рассматриваемой системы следов может быть сформулировано на языке окрестностей следующим образом.

Теорема. *Система $(\beta(\ , y), \beta(x, \ )|x \in X, y \in X)$ топологических структур на всех горизонтальных и вертикальных в $X \times X$ множествах непрерывна тогда и только тогда, когда для каждых $x \in U \in \beta(\ , y)$, $y \in V \in \beta(x, \ )$ найдутся такие $U', V', x \in U' \in \beta(\ , y), y \in \ V' \in \beta(x, \ ))$, что $U \in \beta(\ , y')$, $V \in \beta(x', \ )$ для всех $x' \in U'$, $y' \in V'$.*

Доказательство. Это условие непосредственно следует из соответствующей аксиомы для окрестностей точек топологического пространства и условия локальной разложимости в терминах окрестностей. Действительно, пусть $x \in U \in \beta(\ , y)$, $y \in V \in \beta(x, \ )$, тогда множество $U \times V$ является окрестностью точки (x, y) в $(X \times X, \beta)$. Из соответствующей аксиомы для окрестностей следует существование такой окрестности G точки (x, y), что $U \times V$ является окрестностью каждой точки (x', y') из G. С другой стороны, так как прямоугольные окрестности образуют базу окрестностей в локально разложимом битопологическом пространстве, найдется окрестность $U' \times V'$ точки (x, y), содержащаяся в G, поэтому $U \in \beta(\ , y')$, $V \in \beta(x', \ )$ для всех $x' \in U'$, $y' \in V'$.

7. Структуры с одинаковой системой следов. Пусть $(\tau(\ , y), \tau(x, \ )|x \in X, y \in X)$ произвольно фиксированная система топологических структур на всех горизонтальных и вертикальных в $X \times X$ множествах. Рассмотрим множество всех битопологических структур на X, для которых эта система является системой следов. Это множество может оказаться и пустым, как показывает пример 1 пункта 4. Пусть это множество не пусто, тогда его можно упорядочить по включению. Нетрудно заметить, что *наибольшая из таких структур всегда существует.* Эта структура состоит из всех множеств $G \subset X \times X$, удовлетворяющих условию

$$G \cap (X \times \{y\}) \in \tau(\ ,y),\ \ G \cap (\{x\} \times X) \in \tau(x,\ )$$

для всех $x \in X$, $y \in X$. С другой стороны, наименьшей среди таких структур может и не существовать, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}$, топологические структуры $\tau(\ ,y)$ и $\tau(x,\ )$ на всех горизонтальных и вертикальных в $\mathbb{R}^2$ множествах дискретны, β_1 имеет базу, состоящую из множеств точек прямых $y - x = b$, $b \in \mathbb{R}$, β_2 имеет базу, состоящую множеств точек прямых $y + x = b$, $b \in \mathbb{R}$. Следы этих битопологических структур дискретны. В то же время $\beta_1 \cap \beta_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$ имеет совсем другие следы (тривиальные) и, таким образом, среди всех битопологических структур на $\mathbb{R}$ с дискретными следами нет наименьшей.

§4. Локальные битопологические структуры

Диагональ $\Delta \subset X \times X$ играет заметную роль в теории битопологических пространств. Это объясняется, прежде всего, тем, что среди всех вложений X в $X \times X$ естественно выделяется вложение $j : X \longrightarrow X \times X$, $j(x) = (x,x)$, $j(X) = \Delta$. Это естественно определенное вложение позволяет ввести каноническое соответствие $\beta \mapsto \tau$, сопоставляющее каждой битопологической структуре β на X, то есть топологической структуре на $X \times X$, топологическую структуру $\beta|X = j^{-1}(\beta) = \{j^{-1}(G) | G \in \beta\}$ на X. Отображение j является каноническим гомеоморфизмом топологического пространства $(X, \beta|X)$ на топологическое пространство$(\Delta, \beta|\Delta)$. С диагональю связан ряд битопологических понятий. Вот некоторые из такого рода понятий.

Битопологическое пространство (X, β) называется Δ-*нормальным*, если диагональ Δ имеет замкнутый базис окрестностей в $(X \times X, \beta)$.

Битопологическое пространство (X, β) называется Δ-*делимым*, если произвольная окрестность U диагонали Δ в $(X \times X, \beta)$ содержит окрестность диагонали V такую, что $V^2 \subset U$.,

Битопологическое пространство (X, β) называется Δ-*транзитивным*, если произвольная окрестность U диагонали Δ в $(X \times X, \beta)$ содержит окрестность диагонали V такую, что $V^2 = V$.

Битопологическое пространство (X, β) называется *локально транзитивным*, если из сходимостей

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, x),$$

и

$$((y_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, x),$$

следует сходимость

$$((x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \mapsto_\beta (x, x).$$

Все эти понятия так или иначе связаны с диагональю. С диагональю связано и понятие локального битопологического пространства.

1. Локализация.

Определение. *Будем говорить, что битопологическое пространство (X, β) локально, если $G \cap \Delta = \emptyset \implies G \in \beta$. Локальной называют в этом случае и битопологическую структуру β.*

Замечание. Нетрудно заметить, что локальная битопологическая структура однозначно определяется сходимостями к точкам диагонали. Любую битопологическую структуру можно *локализовать*, то есть оставить только сходимости к точкам диагонали и тривиальные сходимости.

Определение. *Пусть β – произвольная битопологическая структура. Локализацией β называют битопологическую структуру $loc\beta = \beta \vee P((X \times X) \setminus \Delta)$ – наименьшую топологическую структуру на $X \times X$, содержащую β и $P((X \times X) \setminus \Delta) = \{G | G \cap \Delta = \emptyset\}$. Процедуру перехода от β к $loc\beta$ будем называть также локализацией структуры β.*

Так как при локализации к β присоединяются только множества, не содержащие точек диагонали, то совокупность окрестностей любой точки диагонали не меняется, в то время как любое множество $G \subset X \times X$, содержащее какую-нибудь точку вне диагонали, становится ее окрестностью. Отсюда следует, как было отмечено выше, что при локализации все сходимости к точкам диагонали сохраняются, а из сходимостей к точкам вне диагонали остаются только тривиальные (сходимости стационарных направленных систем точек).

Нетрудно заметить также, что *любое локальное битопологическое пространство* Δ*-нормально*. Каждая окрестность диагонали является в этом случае замкнутым множеством.

2. Нелокальность прямых произведений.

Теорема. *Класс локальных битопологических пространств замкнут относительно перехода к подпространствам, факторпространствам и свободным объединениям.*

Доказательство. Если (X, β) – локальная битопологическая структура, то есть $P((X \times X) \setminus \Delta) \subset \beta$ и $X\prime \subset X$, то $P((X' \times X') \setminus \Delta') \subset P((X \times X) \setminus \Delta)$ и потому $P((X' \times X') \setminus \Delta') \subset \beta|X\prime = \beta'$, то есть (X', β') – локальное битопологическое пространство. Если, теперь, (X'', β'') – факторпространство локального битопологического пространства (X, β), порожденного отображением $p : X \longrightarrow X''$, то для любой точки (x'', y''), из $X'' \times X''$, не принадлежащей Δ'', ее $(p \times p)$-прообраз не имеет общих точек с Δ и потому является открытым в (X, β) множеством. Отсюда следует, что одноточечное множество $\{(x'', y'')\}$ является открытым в $(X'' \times X'', \beta'')$ множеством, а это означает, что (X'', β'') – локальное битопологическое пространство. Аналогично доказывается локальность свободного объединения локальных битопологических пространств.

Совсем другая ситуация имеет место для произведений битопологических пространств.

Теорема. *Пусть* (X_1, β_1) *и* (X_2, β_2) *– неодноточечные локальные битопологические пространства с тривиальными топологическими структурами на диагоналях* Δ_1 *и* Δ_2*, тогда произведение этих битопологических пространств не является локальным битопологическим пространством.*

Доказательство. Пусть (X, β) – произведение битопологических пространств с указанными в условии теоремы свойствами, $X = X_1 \times X_2$, точка $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ – произвольная точка из $X \times X$, $(x_1, y_1) \in X_1 \times X_1$, $(x_2, y_2) \in X_2 \times X_2$. Точка $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ принадлежит диагонали $\Delta \subset X \times X$ тогда и только тогда, когда $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. Поэтому точка $((x_1, x_2), (x_1, y_2))$, $x_2 \neq y_2$ не принадлежит Δ. Тем не менее $\{((x_1, x_2), (x_1, y_2))\} \notin \beta$, так как $\{(x_1, x_1)\} \notin \beta_1$. Тем самым доказано, что (X, β) не является локальным битопологическим пространством.

3. Локальные объединения. Локальные битопологические пространства естественно возникают при построении объединений битопологических структур. Мы уже отмечали, что объединения битопологических пространств в общем случае определены неоднозначно. Однако в классе транзитивных битопологических пространств однозначность объединения имела место при соответствующих условиях. Аналогичная ситуация имеет место и в классе локальных битопологических пространств.

Пусть X–некоторое множество, $(X_\xi | \xi \in \Xi)$ – какое-нибудь покрытие множества X. Предположим, что на каждом множестве X_ξ определена локальная битопологическая структура X_ξ, $\xi \in \Xi$ и все эти битопологические структуры согласованы так, что для каждых ξ, η из Ξ структуры β_ξ, β_η индуцируют на $X_\xi \cap X_\eta$ одну и ту же битопологическую структуру $\beta_{\xi\eta}$, причем $(X_\xi \times X_\xi) \cap (X_\eta \times X_\eta)$ принадлежит как β_ξ так и β_η. При построении объединения всех этих битопологических структур в классе локальных битопологических пространств мы дополняем систему $(X_\xi \times X_\xi | \xi \in \Xi)$ одноточечными множествами $\{(x, y)\}$, взятыми по всем $x \neq y$ из X. Тем самым мы получаем покрытие множества $X \times X$, на каждом элементе покрытия определена топологическая структура, причем эти структуры совпадают на пересечениях.

§5. Δ-РАВНОМЕРНЫЕ БИТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

1. Категория ΔUnif.

Определение. *Систему $\mathfrak{U}$ окружений диагонали в $X \times X$ будем называть Δ-равномерной структурой на X, если она удовлетворяет следующим условиям:*
P1. *Если $U \in \mathfrak{U}$ и $U \subset U'$, то $U' \in \mathfrak{U}$,*
P2. *Если $U_1 \in \mathfrak{U}$ и $U_2 \in \mathfrak{U}$, то $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{U}$.*
Пару $(X, \mathfrak{U})$, где $\mathfrak{U}$-некоторая Δ-равномерная структура на X, будем называть Δ-равномерным пространством.

Замечание. Иначе говоря, Δ-равномерной структурой на X называется любой фильтр, состоящий из окружений диагонали $\Delta \subset X \times X$.

Определение. *Отображение $f : (X, \mathfrak{U}) \longrightarrow (X', \mathfrak{U}')$ двух Δ-равномерных пространств будем называть Δ-равномерным или* *просто равномерным отображением, если $f^{-1}(U') \in \mathfrak{U}$ для любого окружения $U' \in \mathfrak{U}'$.*

Определение. *Категорию всех Δ-равномерных пространств и их равномерных отображений будем обозначать через* $\mathbf{\Delta Unif}$ *или просто через ΔU.*

2. Вложения $\mathbf{\Delta U}$ в BT.

Определение. *Пусть $\mathfrak{U}$ – некоторая Δ-равномерная структура на множестве X. Присоединим к $\mathfrak{U}$ еще один элемент, а именно пустое множество $\emptyset$. Полученная таким образом структура $\beta_0\mathfrak{U} = \mathfrak{U} \cup \{\emptyset\}$ будет, очевидно, битопологической структурой на X. Будем называть эту структуру Δ-равномерной битопологической структурой.*

Замечание. Так как различие между $\mathfrak{U}$ и $\beta_0\mathfrak{U}$ несущественно, то мы будем называть $\beta_0\mathfrak{U}$ просто Δ-равномерной структурой, как и $\mathfrak{U}$, а пару $(X, \beta_0\mathfrak{U})$ будем называть Δ-равномерным (битопологическим) пространством. Положим $\beta_0(X, \mathfrak{U}) = (X, \beta_0\mathfrak{U})$.

Если $f : (X, \mathfrak{U}) \longrightarrow (X', \mathfrak{U}')$ – равномерное отображение, то $\beta_0 f : (X, \beta_0\mathfrak{U}) \longrightarrow (X', \beta_0\mathfrak{U}')$ – бинепрерывное отображение. Тем самым определен ковариантный функтор $\beta_0 : \Delta U \longrightarrow BT$, переводящий категорию ΔU в полную подкатегорию категории BT. Категория ΔU оказывается канонически изоморфной соответствующей подкатегории категории BT, что *позволяет рассматривать теорию Δ-равномерных пространств, как специальную часть общей теории битопологических пространств.*

Возможно и другое вложение категории ΔU в категорию BT, осуществляемое локализацией структуры. Это вложение переводит Δ-равномерную структуру $\mathfrak{U}$ в локальную битопологическую структуру $\beta_1\mathfrak{U} = \mathfrak{U} \vee P((X \times X) \setminus \Delta)$. Нетрудно доказать, что и здесь Δ-равномерная структура $\mathfrak{U}$ однозначно восстанавливается по битопологической структуре $\beta_1\mathfrak{U}$, а отображение

$$f : (X, \mathfrak{U}) \longrightarrow (X', \mathfrak{U}')$$

равномерно тогда и только тогда, когда

$$\beta_1 f : (X, \beta_1\mathfrak{U}) \longrightarrow (X', \beta_1\mathfrak{U}')$$

является бинепрерывным отображением.

3. Проекция BT на ΔU.

Определение. *Пусть (X,β) – некоторое битопологическое пространство и $\mathfrak{U}$ – структура, состоящая из всех окрестностей диагонали Δ в топологическом пространстве $(X\times X,\beta)$. Эта структура является Δ-равномерной структурой на X. Будем обозначать ее через $\Delta\beta$ и говорить, что β и $\Delta\beta$ согласованы (битопологическое пространство (X,β) и Δ-равномерное пространство $(X,\Delta\beta)$ согласованы). Любому бинепрерывному отображению $f:(X,\beta)\longrightarrow(X',\beta')$ будет сответствовать равномерное отображение $\Delta f:(X,\Delta\beta)\longrightarrow(X',\Delta\beta')$. Тем самым определен ковариантный функтор*

$$\Delta : BT \longrightarrow \Delta U.$$

Функтор $\Delta\beta_0$ является, очевидно, тождественным функтором, определенным на категории ΔU. Если мы условимся отождествлять каждую Δ-равномерную структуру $\mathfrak{U}$ с битопологической структурой $\beta_0\mathfrak{U}$, то категория ΔU окажется *ретрактом* категории BT.

Функторы Δ и β_0 являются естественной основой совместного изучения битопологических и Δ-равномерных структур, функтор β_1 является просто локализацией функтора β_0, $\beta_1\mathfrak{U}=loc(\beta_0\mathfrak{U})$.

4. Δ-расслоение категории BT. На множестве всех битопологических пространств, согласованных с некоторым фиксированым Δ-равномерным пространством, можно ввести отношение порядка, положив $(X,\beta')\leqslant(X,\beta)$, если $i:(X,\beta)\longrightarrow(X,\beta')$-бинепрерывное отображение или, что то же самое, $\beta'\subset\beta$ $(\beta'\leqslant\beta)$.

Для каждого Δ-равномерного пространства это множество непусто и, в общем случае, в нем нет ни наибольшего ни наименьшего элемента.

Действительно, пусть $\mathfrak{U}$ – некоторая Δ-равномерная структура на множестве X. Тогда $\beta_0\mathfrak{U}=\mathfrak{U}\cup\{\emptyset\}$ – битопологическая структура на множестве X, (X,β_0)-битопологическое пространство, согласованное с $(X,\mathfrak{U})$. Заметим теперь, что для любой точки $x\in X\times X$ структура $\beta_x=\mathfrak{U}\cup\{G|G\cap\Delta\subset\{x\},\ G\subset X\times X\}$ также является битопологической структурой, согласованной с $\mathfrak{U}$. Пусть β – некоторая битопологическая структура на X, содержащая β_x для всех $x\in X\times X$. Тогда для произвольного множества $G\subset X\times X$ будет иметь место соотношение $G=\cup G_x|x\in G$, где $G_x = (G \setminus \Delta) \cup (G \cap \{x\}) \in \beta_x \subset \beta$ и потому $G \in \beta$. Но это означает, что $\beta = P(X \times X)$ – дискретная топологическая структура на $X \times X$ и $\Delta\beta$ состоит из всех подмножеств множества $X \times X$, содержащих Δ.

Рассмотрим теперь произвольную битопологическую структуру β содержащуюся в $\beta_0\mathfrak{U} = \mathfrak{U} \cup \{\emptyset\}$ и согласованную с $\mathfrak{U}$. Структура β должна состоять из пустого множества и некоторых, не обязательно всех, множеств входящих в $\mathfrak{U}$. Эти множества будут образовывать базу Δ-равномерной структуры $\mathfrak{U}$ в том смысле, что каждое окружение диагонали, входящее в $\mathfrak{U}$, содержит некоторое окружение, входящее в $\Delta\beta$, то есть являющееся окрестностью диагонали в $(X \times X, \beta)$. Пусть β содержит какие-то два множества G_1, G_2, причем $X \times X \neq G_2 \not\subset G_1 \neq \emptyset$. Образуем битопологическую структуру $\beta' = (\beta \wedge G_1) \cup \{X \times X\} \subset \beta$. Так как $G_2 \neq X \times X$ и $G_2 \notin \beta \wedge G_1$, то $G_2 \notin \beta'$ и потому β' строго содержится в β. Отсюда следует то, что минимальная битопологическая структура, согласованная с $\mathfrak{U}$, должна состоять только из трех элементов,а именно $\emptyset, G, X \times X$ и потому G должно быть наименьшим элементом Δ-равномерной структуры $\mathfrak{U}$, возможно совпадающим с $X \times X$. Заметим, что, если этот наименьший элемент Δ-равномерной структуры $\mathfrak{U}$ совпадает с диагональю, то $\mathfrak{U}$ состоит из всех окружений диагонали, а наименьшая битопологическая структура, согласованная с $\mathfrak{U}$ есть $\{\emptyset, \Delta, X \times X\}$. Это единственный случай, когда среди всех битопологических структур, согласованных с $\mathfrak{U}$ есть и наибольший и наименьший элементы.

5. Частичные вложения. Мы рассмотрели два варианта канонического построения битопологических структур по Δ-равномерным структурам. Это операции β_0 и β_1. Они применимы к любой Δ-равномерной структуре $\mathfrak{U}$ и дают $\beta_0(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U} \cup \{\emptyset\}$, $\beta_1(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U} \cup P((X \times X) \setminus \Delta)$, $\beta_1(\mathfrak{U}) = loc\beta_0(\mathfrak{U})$. Введем теперь еще две операции β_l и β_d, сопоставляющие некоторым (не всем!) Δ-равномерным структурам $\mathfrak{U}$ битопологические структуры $\beta_l(\mathfrak{U})$ и $\beta_d(\mathfrak{U})$ соответственно. Начнем с операции β_l.

Пусть $\mathfrak{U}$ – некоторая Δ-равномерная структура на X. Рассмотрим битопологическую структуру $\beta_1(\mathfrak{U})$ и ее систему следов

$$(\beta_1(\ ,y), \beta_1(x,\ )|x \in X, y \in X).$$

Если эта система следов окажется непрерывной, то она определяет локально разложимую битопологическую структуру, которую мы будем обозначать через β_l. Таким образом любой Δ-равномерной структуре $\mathfrak{U}$, для которой система следов структуры $\beta_1(\mathfrak{U})$ непрерывна, мы можем сопоставить локально разложимую битопологическую структуру β_l, являющуюся, к тому же, и локальной битопологической структурой.

Пусть,теперь, β – произвольная локальная локально разложимая битопологическая структура. Ее система следов будет, непрерывной (см. 2.5). Рассмотрим Δ-равномерную структуру $\mathfrak{U} = \Delta\beta$, состоящую, по определению, из всех окрестностей диагонали в топологическом пространстве $(X \times X, \beta)$ и битопологическую структуру $\beta_1(\Delta\beta)$. Возникает естественный вопрос о совпадении систем следов битопологических структур β и $\beta_1(\Delta\beta)$. Если эти системы следов совпадают, то $\beta = \beta_l(\Delta\beta)$. К сожалению, такое совпадение не имеет, в общем случае, места, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = \{0,1\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, \{0\}, X\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, \{1\}, X\}$, $\beta = (\tau_1 \times \tau_2) \cup \{(0,0)\} \cup \{(1,0)\}$.

Топологическая структура β имеет базу, состоящую из прямоугольных множеств, поэтому она локально разложима. Δ-равномерная структура $\mathfrak{U} = \Delta\beta$ состоит из множеств $\{(0,0),$ $(0,1),(1,1)\}$ и $X \times X$. Битопологическая структура $\beta_1(\mathfrak{U})$ получается присоединением к $\mathfrak{U}$ всех подмножеств множества $X \times X$, имеющих пустое пересечение с диагональю, а именно множеств $\emptyset$, $\{(0,1)\}$, $\{(1,0)\}$, $\{(0,1),\ (1,0)\}$.

Нетрудно теперь заметить, что $\beta(0,\ )$ не совпадает с $\beta_1(0,\ )$, то есть системы следов битопологических структур β и $\beta_1(\Delta\beta)$ не совпадают.

Можно, однако, сформулировать условие, при котором система следов локальной, локально разложимой битопологической структуры β и система следов битопологической структуры $\beta_1(\Delta\beta)$ совпадают и, следовательно, $\beta = \beta_l(\Delta\beta)$.

Определение. *Битопологическую структуру β на X будем называть Δ-отделимой, если для любых несовпадающих точек x, y из X найдется такое окружение диагонали $U \in \Delta\beta$, что $(x,y) \notin U$, иначе говоря, если $\Delta = \cap U | U \in \Delta\beta$.*

Теорема. *Для любой Δ-отделимой, локальной, локально разложимой битопологической структуры β, системы следов β и $\beta_1(\Delta\beta)$ совпадают и поэтому $\beta = \beta_l(\Delta\beta)$.*

Доказательство. Пусть β – локальная, локально разложимая, Δ-отделимая битопологическая структура на X и $\beta_1 = \beta_1(\Delta\beta)$. Достаточно доказать, что $\beta(x,\ ) = \beta_1(x,\ )$ для любой точки $x \in X$, так как все условия теоремы симметричны относительно x и y. Более того, достаточно доказать, что $\beta(x,\ ) \subset \beta_1(x,\ )$ для любой точки $x \in X$, так как обратное включение имеет место всегда, по построению битопологической структуры β_1. Нам надо доказать, что из $G \in \beta(x,\ )$ следует $G \in \beta_1(x,\ )$. При этом, в силу локальности β и β_1, достаточно рассмотреть только случай $(x,x) \in G \subset \{x\} \times X$.

Итак, фиксируем некоторую точку $x_0 \in X$, $\beta(x_0,\ )$-окрестность G_0 точки (x, x_0) и докажем, что G_0 является также и $\beta_1(x_0,\ )$-окрестностью точки (x, x_0). Для этого достаточно доказать существование такого окружения $U \in \beta$ диагонали, что $U \cap (\{x_0\} \times X) \subset G_0$. Действительно, $U \cap (\{x_0\} \times X) \subset G_0$ будет тогда $\beta_1(x_0,\ )$-окрестностью точки (x_0, x_0), а потому и G_0 будет $\beta_1(x_0,\ )$-окрестностью этой точки. Такое окружение диагонали будет существовать, если для каждой точки $x \in X$ найдется окрестность U_x точки (x,x) в топологическом пространстве $(X \times X, \beta)$, для которой $U_x \cap (\{x\} \times X) \subset G_0$. В этом случае можно будет взять в качестве U множество $\cup U_x | x \in X$.

Предположим теперь, что такое окружение $U \in \beta$ диагонали не существует и, следовательно, найдется точка $x_1 \in X$ такая, что $U_{x_1} \cap (\{x_0\} \times X) \not\subset G_0$ для любой окрестности U_{x_1} точки (x_1, x_1) в $(X \times X, \beta)$. Для нас существенно здесь только то, что $U_{x_1} \cap (\{x_0\} \times X) \neq \emptyset$, и потому существует такая направленная система точек $((x_0, y_\lambda) | \lambda \in \Lambda)$, что $((x_0, y_\lambda) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x_1, x_1)$. Тогда, в силу локальной разложимости битопологической структуры β, мы будем иметь сходимость $(x_0, x_1) \longrightarrow_{\beta(\ ,x_1)} (x_1, x_1)$ Последнее означает, что $(x_0, x_1) \in U_{x_1}$ для любой окрестности U_{x_1} точки (x_1, x_1) в $(X \times X, \beta)$ в частности $(x_0, x_1) \in U$ для любого окружения $U \in \beta$ диагонали. Но последнее противоречит условию Δ -отделимости битопологической структуры β и потому неверно наше предположение о несуществования соответствующего окружения диагонали.

Замечание. В предыдущем примере битопологическая структура β не была Δ-отделимой, поэтому условие Δ-отделимости в только что доказанной теореме существенно.

6. Достаточное условие Δ-отделимости.

Теорема. *Пусть τ_1 и τ_2 – некоторые топологические структуры на множестве X, β – топологическая структура на $X \times X$, база которой состоит из всех одноточечных множеств, не содержащихся в диагонали $\Delta \subset X \times X$ и прямоугольных множеств $G_1 \times G_2$, взятых по всем $G_1 \in \tau_1$ и всем $G_2 \in \tau_2$. Если, кроме того, битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) является парно T_0-пространством, то β, будет Δ-отделимой битопологической структурой.*

Доказательство. Пусть $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$. Тогда для любой точки $(z, z) \in \Delta$ либо $z \neq x$ либо $z \neq y$, так как $x \neq y$. В первом случае, в силу парной T_0-отделимости (X, τ_1, τ_2), найдется $G_1 \in \tau_1$ такое, что $z \in G_1, x \notin G_1$ и поэтому $(x, y) \notin G_1 \times G_2$ для любого $G_2 \in \tau_2$, во втором случае, опять в силу парной T_0-отделимости (X, τ_1, τ_2), найдется $G_2 \in \tau_2$ такое, что $z \in G_2, y \notin G_2$ и поэтому $(x, y) \notin G_1 \times G_2$ для любого $G_1 \in \tau_1$. В обоих случаях найдется открытое в $(X \times X, \beta)$ множество U_z, для которого $(z, z) \in U_z, (x, y) \notin U_z$. Тогда $(x, y) \notin \cup U_z | z \in X = U \in \Delta\beta$, что и доказывает Δ-отделимость битопологического пространства (X, β).

§6. Битопологические представления

Правильное описание различных классов объектов – типичная математическая проблема, с которой начинается любое исследование. Дело в том, что возможны различные описания для каждого из рассматриваемых классов и от выбора наиболее подходящих зависит, подчас, успех исследования. Нас будут интересовать здесь так называемые *битопологические представления* классов непрерывных отображений топологических пространств, то есть их описания соответствующими классами битопологических пространств.

Определение. *Будем говорить, что некоторый класс $\mathcal{F}$ непрерывных отображений топологических пространств имеет битопологическое представление классом $\mathcal{B}$ битопологических пространств, если $\mathcal{F}$ совпадает с классом всех бинепрерывных отображений $f : (X, \beta) \longrightarrow (X', \beta')$ для всевозможных β и β' из $\mathcal{B}$.*

Так как любая битопологическая структура является одновременно топологической структурой на соответствующем множестве, то битопологическое представление класса $\mathcal{F}$ является, в конечном счете, своеобразным топологическим описанием этого класса. Иногда, впрочем, приходится рассматривать не произвольные непрерывные отображения топологических пространств, а непрерывные отображения принадлежащие хорошо описанному классу $\mathcal{A}$, например классу *взаимно однозначных отображений* (*мономорфизмов*) или классу *отображений на все пространство* (*эпиморфизмов*).

1. Условие перестановочности. Рассмотрим какое-нибудь множество Φ непрерывных отображений некоторого топологического пространства (X, τ) в себя.

Определение. *Будем говорить, что отображение ψ перестановочно с Φ, если $\psi\varphi\psi^{-1} \in \Phi$ для каждого $\varphi \in \Phi$.*

Теорема. *Пусть (X, τ) – связное топологическое пространство и $\varphi : (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau)$ – непрерывное отображение без неподвижной точки. Тогда множество всех перестановочных с φ непрерывных отображений (X, τ) в себя имеет битопологическое представление в классе всех взаимно однозначных отображений.*

Доказательство. Пусть $\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi(x)) | x \in X\}$, β_φ – топологическая структура на $X \times X$, определяемая следующими условиями: если $G \cap \Gamma_\varphi = \emptyset$, то $G \in \beta_\varphi \cap C\beta_\varphi$,

$\beta | \Gamma_\varphi = (\tau \times \tau) | \Gamma_\varphi$.

Пусть $f : (X, \beta_\varphi) \longrightarrow (X, \beta_\varphi)$ – взаимно однозначное бинепрерывное отображение. Тогда $f \times f : (X \times X, \beta_\varphi) \longrightarrow (X \times X, \beta_\varphi)$ – непрерывное отображение. Так как $\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi(x)) | x \in X\}$, то $\Gamma_\varphi = (1 \times \varphi)(X)$. С другой стороны, отображение $1 \times \varphi : (X, \tau) \longrightarrow (X \times X, \tau \times \tau)$ непрерывно, а $\beta | \Gamma_\varphi = (\tau \times \tau) | \Gamma_\varphi$, поэтому отображение $1 \times \varphi : (X, \tau) \longrightarrow (X \times X, \beta_\varphi)$ также непрерывно и, в силу связности топологического пространства (X, τ), множество Γ_φ является связным подмножеством топологического пространства $(X \times X, \beta_\varphi)$. Заметим теперь, что X и, следовательно, Γ_φ содержит более чем одну точку, так как отображение φ не имеет неподвижной точки. Поэтому Γ_φ является единственной неодноточечной компонентой связности в топологическом пространстве $(X \times X, \beta_\varphi)$. Отсюда следует, что либо $(f \times f)(\Gamma_\varphi) \subset \Gamma_\varphi$ либо $(f \times f)(\Gamma_\varphi)$ – одноточечное множество. Но последний вариант отпадает, так как f – взаимно однозначное отображение, а X содержит более одной точки. Таким образом, если $x \in X$, то $(f \times f)$

$(x, \varphi(x)) = (f(x), f\varphi(x)) \in \Gamma_\varphi$ и потому $f\varphi(x) = \varphi f(x)$, то есть отображение f перестановочно с отображением φ. Тем самым доказано,что из бинепрерывности взаимно однозначного отображения $f : (X, \beta_\varphi) \longrightarrow (X, \beta_\varphi)$ следует перестановочность отображения f с отображеним φ.

Рассмотрим теперь произвольное взаимно однозначное непрерывное отображение $f : (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau)$ перестановочное с φ. Тогда $(f \times f)(x, \varphi(x)) = (f(x), f\varphi(x)) = (f(x), \varphi f(x)) \in \Gamma_\varphi$ для всех $x \in X$, то есть $(f \times f)(\Gamma_\varphi) \subset \Gamma_\varphi$.

Так как $f : (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau)$ – непрерывное отображение, то $(f \times f) : (X \times X, \tau \times \tau) \longrightarrow (X \times X, \tau \times \tau)$ – непрерывное отображение. Заметим теперь, что по определению структуры β_φ имеет место соотношение $\tau \times \tau | \Gamma_\varphi = \beta_\varphi | \Gamma_\varphi$ и потому отображение

$$(f \times f)|\Gamma_\varphi : (\Gamma_\varphi, \beta_\varphi|\Gamma_\varphi) \longrightarrow (\Gamma_\varphi, \beta_\varphi|\Gamma_\varphi)$$

является непрерывным отображением.

Мы доказали, что ограничение отображения $f \times f : (X \times X, \beta_\varphi) \longrightarrow (X \times X, \beta_\varphi)$ на Γ_φ является непрерывным отображением. С другой стороны, и ограничение этого отображения на $(X \times X) \setminus \Gamma_\varphi$ также является непрерывным отображением, так как топологическая структура β_φ индуцирует на этом множестве дискретную топологию. Но оба этих множества открыты в $(X \times X, \beta_\varphi)$, поэтому $f \times f : (X \times X, \beta_\varphi) \longrightarrow (X \times X, \beta_\varphi)$ – непрерывное отображение, то есть $f : (X, \beta_\varphi) \longrightarrow (X, \beta_\varphi)$ – бинепрерывное отображение. Тем самым доказано, что рассматриваемое множество отображений имеет битопологическое представление одним битопологическим пространством.

Определение. *Пусть Φ – некоторое множество непрерывных отображений топологического пространства (X, τ) в себя. Рассмотрим систему $(\Gamma_\varphi | \varphi \in \Phi)$ графиков отображений $\varphi \in \Phi$. На каждом Γ_φ фиксируем топологическую структуру $\beta_\varphi = \tau \times \tau | \Gamma_\varphi$. Введем топологическую структуру β_Φ на $X \times X$, положив $G \in \beta_\Phi$ тогда и только тогда, когда $G \cap \Gamma_\varphi \in \beta_\varphi$ для каждого $\varphi \in \Phi$. Непрерывное отображение $\psi : (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau)$ будем называть Φ-отображением, если отображение $1 \times \psi : (X, \tau) \longrightarrow (X \times X, \beta_\Phi)$ непрерывно.*

Лемма. *Любое отображение $\varphi \in \Phi$ является Φ-отображением.*

Доказательство. Так как $(1 \times \varphi)(x) = (x, \varphi(x)) \in \Gamma_\varphi$ для каждого $x \in X$, то $(1 \times \varphi)(X) \subset \Gamma_\varphi$. С другой стороны, $\beta_\varphi = (\tau \times \tau)|\Gamma_\varphi$ и потому из непрерывности отображения $1\times\varphi : (X,\tau) \longrightarrow (X\times X, \tau\times\tau)$ следует непрерывность отображения $1\times\varphi : (X,\tau) \longrightarrow (\Gamma_\varphi, \beta_\varphi)$ и, в силу того,что $\beta_\Phi|\Gamma_\varphi = \beta_\varphi$, непрерывность отображения $1\times\varphi : (X,\tau) \longrightarrow (X\times X, \beta_\Phi)$. Лемма доказана.

Определение. *Множество Φ непрерывных отображений (X,τ) в себя будем называть битопологически полным, если любое Φ-отображение принадлежит Φ.*

Теорема. *Если Φ – битопологически полная система непрерывных отображений $\varphi : (X,\tau) \longrightarrow (X,\tau)$, то гомеоморфизм $\psi : (X,\tau) \longrightarrow (X,\tau)$ будет бинепрерывным отображением (X,β_Φ) на себя тогда и только тогда, когда $\psi\varphi\psi^{-1} \in \Phi$ для каждого $\varphi \in \Phi$.*

Доказательство. Пусть ψ – гомеоморфизм (X,τ) на себя и $\psi\varphi\psi^{-1} \in \Phi$ для каждого $\varphi \in \Phi$. Докажем, что в этом случае $\psi : (X,\beta_\Phi) \longrightarrow (X,\beta_\Phi)$ – бинепрерывное отображение. Если $(x,y) \in \Gamma_\varphi$, то есть $y = \varphi(x)$, тогда $(\psi\times\psi)(x,y) = = (\psi(x),\psi(y)) = (\psi(x),\psi\varphi(x)) = (\psi(x),\varphi'\psi(x)) \in \Gamma_{\varphi'}$, где $\varphi' = \psi\varphi\psi^{-1} \in \Phi$. Таким образом $(\psi\times\psi)(\Gamma_\varphi) \subset \Gamma_{\varphi'}$. Так как $\beta_\varphi = (\tau\times\tau)|\Gamma_\varphi$ и $\beta_{\varphi'} = (\tau\times\tau)|\Gamma_{\varphi'}$, то отображение $\psi\times\psi : (X\times X, \beta_\Phi) \longrightarrow (X\times X, \beta_\Phi)$ – непрерывно на каждом множестве Γ_φ, $\varphi \in \Phi$ и, следовательно, в силу определения β_Φ, оно непрерывно на всем пространстве $(X\times X, \beta_\Phi)$, то есть $\psi : (X,\beta_\Phi) \longrightarrow (X,\beta_\Phi)$ – непрерывное отображение. Пусть теперь ψ – гомеоморфизм (X,τ) на себя, являющийся бинепрерывным отображением (X,β_Φ) на себя. Отображение ψ^{-1} будет непрерывным отображением (X,τ) на себя. Пусть $\varphi \in \Phi$, тогда $1\times\varphi : (X,\tau) \longrightarrow (X\times X, \beta_\Phi)$ – непрерывное отображение, в силу предыдущей леммы. Но тогда композиция $(\psi\times\psi)(1\times\varphi)\psi^{-1} = (1\times\psi\varphi\psi^{-1})$, также будет непрерывным отображением (X,τ) в $(X\times X, \beta_\Phi)$, то есть $\psi\varphi\psi^{-1}$ будет Φ-отображением. Отсюда, в силу битопологической полноты Φ,следует $\psi\varphi\psi^{-1} \in \Phi$.

Следствие. *Если Φ – битопологически полная система непрерывных отображений топологического пространства (X,τ) в себя, то множество гомеоморфизмов (X,τ) в себя перестановочных с Φ имеет битопологическое представление.*

Доказательство. Перестановочность ψ с Φ $(\psi\Phi = \Phi\psi)$ означает, что для любого $\varphi \in \Phi$ имеет место соотношение $\psi\varphi = \varphi'\psi$, где $\varphi' \in \Phi$ и потому $\psi\varphi\psi^{-1} \in \Phi$. Битопологическим представлением рассматриваемого множества гомеоморфизмов (X,τ) на себя будет битопологическая структура β_Φ.

Ivanov A. A. Space structures, their theory and application.

The paper is the first part of a book "Space structures, their theory and application". This part can be considered as an introduction in general topology. It consists of six chapters: structures and categories, metric type structures, structures of continuity, extension stuctures, classic bitopological structures, general theory of bitopological structures.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 7 февраля 2002 г.