Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 286, 2002 г.

Г. В. Кузьмина

ЗАДАЧИ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ РИМАНОВОЙ СФЕРЫ. II

Экстремальные конфигурации многих задач об экстремальном разбиении со свободными параметрами обладают той или иной симметрией. Решения указанных задач определяются в терминах ассоциированных квадратичных дифференциалов, полюсами этих дифференциалов служат свободные параметры рассматриваемых задач. При достаточно большом числе свободных параметров выявление симметрии экстремальных конфигураций задач об экстремальном разбиении или, что равносильно, симметрии в расположении полюсов ассоциированных квадратичных дифференциалов представляет собой основную трудность при решении таких задач.

Хорошо известна связь задач об экстремальном разбиении с экстремально-метрическими проблемами для семейств классов кривых и роль этих задач в решении различных вопросов геометрической теории функций [1]. Ряд задач об экстремальном разбиении был решен при помощи метода симметризации [2]. Наряду с симметризационными подходами к ряду новых результатов в теории указанных задач привела впервые установленная в [3] связь между различными задачами об экстремальном разбиении.

Данная работа продолжает исследования в [4]. Как и в [4], в ней разрабатывается экстремально-метрический подход, позволяющий обнаруживать симметрию в расположении свободных полюсов ассоциированного квадратичного дифференциала в задаче об экстремальном разбиении $\overline{\mathbb{C}}$. Этот подход основывается на конструировании допустимой метрики в рассматриваемой проблеме модуля из экстремальных метрик более простых проблем модуля для семейств классов кривых, определенных на специальных областях на $\overline{\mathbb{C}}$. В идейном плане этот подход восходит

Работа выполнена частично при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 00-01-00118)

к работе Дж. Дженкинса [5] и результату в [3]. В качестве приложений мы получаем новые результаты в известном круге задач о максимуме взвешенной суммы

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 M(D_k, a_k)$$

(здесь $M(D_k, a_k)$ – приведенный модуль области D_k относительно точки a_k) в семействе $\mathcal{D}(\mathbf{a})$ всех систем $\mathbb{D} = \{D_k\}_{k=1}^n$ неналегающих односвязных областей на $\overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in D_k$, $k = 1, \dots, n$, где система точек $\mathbf{a} = \{a_k\}$ и система положительных чисел $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ удовлетворяют предписанным геометрическим условиям. Рассматривается также задача о максимуме конформного инварианта, связанная с предыдущей задачей.

Максимум суммы (1) в семействе $\mathcal{D}(\mathbf{a})$ будем обозначать через $\mathcal{M}(a_1, \dots, a_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$. $\mathcal{M}(a_1, \dots, a_n; 1, \dots, 1)$ обозначаем через $\mathcal{M}(a_1, \dots, a_n)$.

§1

1.1. В дальнейшем $U = \{z : |z| < 1|\}$, $U^* = \{z : |z| > 1\}$, $C = \{z : |z| = 1\}$.

Следующая теорема дополняет результаты в [6, 4], относящиеся к задаче о максимуме суммы (1) в случае, когда системой точек $\{a_k\}$ служат точки окружности C и точки 0, ∞.

Теорема 1. *Пусть $a_1, \dots, a_n$ – различные точки окружности C, расположенные в порядке возрастания $\arg a_k$, $n \geqslant 2$, $a_0 \in U$.*

Пусть $a_0 = 0$. Полагая

$$\arg \frac{a_{k+1}}{a_k} = 2\pi\lambda_k, \quad k = 1, \dots, n \ \ (\text{здесь} \quad a_{n+1} = a_1),$$

$$0 < \lambda_k < 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1,$$

имеем неравенство

$$2\pi\mathcal{M}(0, a_1, \dots, a_n, \infty) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left\{2\pi\mathcal{M}(1, 0, \infty; 1, \lambda_k, \lambda_k) + \log \lambda_k\right\}. \quad (2)$$

Пусть $a_0 \neq 0$ и пусть

$$f_0(z) = \frac{z - a_0}{1 - \overline{a}_0 z}, \quad \dot{a}_k = f_0(a_k).$$

Предполагаем, что выполнены следующие условия:

$$\arg\frac{a_{k+1}}{a_k} = 2\pi\lambda_k, \quad \arg\frac{\dot{a}_{k+1}}{\dot{a}_k} = 2\pi\dot{\lambda}_k,$$

где

$$0 < \lambda_k,\ \dot{\lambda}_k \leqslant 1/2, \quad \sum_{k=1}^{n}\lambda_k = \sum_{k=1}^{n}\dot{\lambda}_k = 1.$$

Тогда справедливо неравенство

$$2\pi\mathcal{M}(0, a_1, \ldots, a_n, \infty) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\Big\{\pi\big[\mathcal{M}(1,0,\infty;1,\lambda_k,\lambda_k) + \mathcal{M}(1,0,\infty;1,\dot{\lambda}_k,\dot{\lambda}_k)\big] +$$

$$= \frac{1}{2}\big(\log\lambda_k + \log\dot{\lambda}_k\big)\Big\} - \Big(\frac{n}{2} - 1\Big)\log(1 - |a_0|^2) + \sum_{k=1}^{n}\log|a_k - a_0|. \quad (3)$$

Замечание. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – точки окружности C. Через $K_0(a_1, \ldots, a_n)$ обозначаем замкнутую выпуклую оболочку множества $\{a_1, \ldots, a_n\}$, через $K_0^{(h)}(a_1, \ldots, a_n)$ – гиперболическую замкнутую выпуклую оболочку указанного точечного множества по отношению к кругу U. В случае $a_0 \neq 0$ условия теоремы 1 означают, что

$$0 \in K_0(a_1, \ldots, a_n), \quad a_0 \in K_0^{(h)}(a_1, \ldots, a_n).$$

1.2. При доказательстве теоремы 1 существенно используются факты о структуре траекторий ассоциированного квадратичного дифференциала задачи о $\mathcal{M}(1,0,\infty;1,\lambda,\lambda)$, которые мы приводим в следующей лемме.

Через $\Pi(a, b; \alpha, \beta)$ обозначаем двуугольник с вершинами a, b и внутренними углами в этих вершинах соответственно α и β. $\Pi(a, b; \alpha, \beta)$ обозначаем коротко также через $\Pi(a, b)$.

Лемма 1. *Пусть* $0 < \lambda < 1$. *Экстремальной метрикой проблемы модуля, определяющей* $\mathcal{M}(1,0,\infty;1,\lambda,\lambda)$, *служит метрика* $\rho^*(z)|dz| = |Q(z,\lambda)|^{1/2}|dz|$, *где* $Q(z,\lambda)dz^2$ – *ассоциированный квадратичный дифференциал данной задачи:*

$$Q(z,\lambda)dz^2 = -\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\,\frac{(z+\varkappa)(z+1/\varkappa)}{z^2(z-1)^2}dz^2, \quad \varkappa + 1/\varkappa = 1/\lambda^2 - 2. \quad (4)$$

Экстремальная система областей задачи о $\mathcal{M}(1,0,\infty;1,\lambda,\lambda)$ состоит из круговых областей D_1^*, D_2^*, D_3^* дифференциала (4), содержащих соответственно точки 1, 0, ∞. В структуре траекторий дифференциала $-Q(z,\lambda)dz^2$ присутствуют три (при $\lambda \neq 1/2$) или две (при $\lambda = 1/2$) полосообразные области. В случае $\lambda \leqslant 1/2$ этими областями являются двуугольники

$$\Pi_1 = \Pi_1(0,1;2\pi,2\pi\lambda), \quad \Pi_2 = \Pi_2(1,\infty;2\pi\lambda,2\pi),$$
$$\Pi_3 = \Pi_3(1,1;\pi(1-2\lambda),\pi(1-2\lambda)),$$

в случае $\lambda \geqslant 1/2$ – двуугольники

$$\Pi_1 = \Pi_1(0,1;2\pi,2\pi\lambda), \quad \Pi_2 = \Pi_2(1,\infty;2\pi\lambda,2\pi),$$
$$\Pi_3 = \Pi_3(0,\infty;\pi(2-1/\lambda),\pi(2-1/\lambda)).$$

Области $\Pi_1(0,1$ и $\Pi_2(1,\infty)$ лежат соответственно внутри и вне круга U и симметричны друг с другом относительно окружности C, при $\lambda < 1/2$ эти области разделяются двуугольником $\Pi_3(1,1)$, при $\lambda = 1/2$ $\Pi_1(0,1) = U \setminus [-1,0)$, $\Pi_2(1,\infty) = U^* \setminus [-\infty,-1]$, при $\lambda > 1/2$ области $\Pi_1(0,1)$ и $\Pi_2(1,\infty)$ имеют дугу окружности C своей общей граничной дугой. При $\lambda < 1/2$ двуугольник $\Pi_3 = \Pi_3(1,1)$ симметричен относительно окружности C и его замыкание содержит эту окружность, при $\lambda > 1/2$ двуугольник $\Pi_3 = \Pi_3(0,\infty)$ содержит дугу окружности C и симметричен относительно этой окружности. При $\lambda = 1/2$ области $\Pi_3(1,1)$ и $\Pi_3(0,\infty)$ вырождаются.

Эта лемма вытекает из известных результатов метода экстремальной метрики (см. [7, 8]). Данное в лемме описание свойств полосообразных областей дифференциала $-Q(z,\lambda)dz^2$ опирается на общие факты о структуре траекторий квадратичных дифференциалов и фактически не использует аналитического выражения (4) для дифференциала $Q(z,\lambda)dz^2$.

Структура ортогональных траекторий квадратичного дифференциала $Q(z,\lambda)dz^2$ соответственно в случаях $0<\lambda<1/2$, $\lambda = 1/2$ и $1/2 < \lambda < 1$ схематично изображена на рис. 1, 2 и 3.

Лемма 2. *Пусть $0<\lambda<1$. Справедливо равенство*

$$2\pi\mathcal{M}(1,0,\infty;1,\lambda,\lambda) = -2\Big\{\Big(\frac{1}{2}-\lambda\Big)^2\log\Big|\frac{1}{2}-\lambda\Big| +$$
$$+\Big(\frac{1}{2}+\lambda\Big)^2\log\Big(\frac{1}{2}+\lambda\Big) - 2\lambda^2\log\lambda - \frac{1}{2}\log 2\Big\}.$$

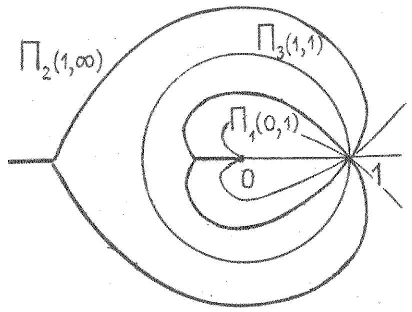

Рис. 1

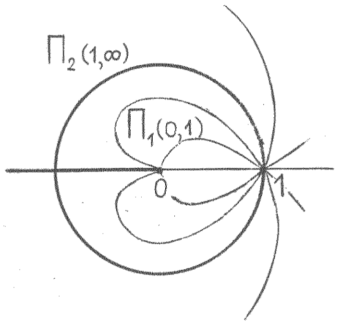

Рис. 2.

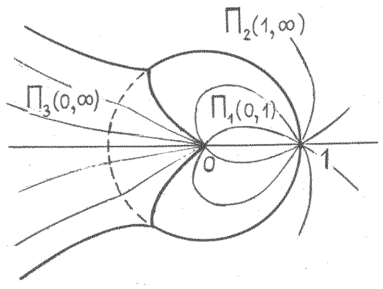

Рис. 3.

1.3. Доказательство теоремы 1. Пусть сначала $a_0 = 0$. Рассмотрим разбиение области $\overline{\mathbb{C}}' = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, a_1, \dots, a_n, \infty\}$ на n углов

$$S_k = \{z : \arg a_k < \arg z < \arg a_{k+1}\}.$$

Пусть

$$w_k = f_k(z) = (z/a_k)^{1/\lambda_k} \tag{5}$$

– отображение угла S_k на w_k-плоскость с разрезом по лучу $[0, \infty]$. На w_k-сфере рассмотрим задачу о $\mathcal{M}(1, 0, \infty; 1, \lambda_k, \lambda_k)$. Пусть $Q(w_k, \lambda_k) dw_k^2$ – ассоциированный квадратичный дифференциал этой задачи, определенный в лемме 1. Положим

$$\rho_k(z)|dz| = |Q(f_k(z), \lambda_k)|^{1/2} |f_k'(z)| \, |dz|.$$

Покажем, что метрика $\rho(z)|dz|$, определенная условием

$$\rho(z)|dz| = \rho_k(z)|dz| \quad \text{при} \quad z \in S_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

является допустимой метрикой проблемы модуля, определяющей $\mathcal{M}(1, 0, \infty; 1, \lambda_k, \lambda_k)$. Для этого обратимся к фактам о структуре ортогональных траекторий дифференциала $Q(w_k, \lambda_k)dw_k^2$, описанным в лемме 1. Обозначим через $\Pi_k^+(0,1)$ и $\Pi_k^+(1,\infty)$ пересечения полосообразных областей $\Pi_k(0,1)$ и $\Pi_k(1,\infty)$ дифференциала $-Q(w_k, \lambda_k)dw_k^2$ с верхней полуплоскостью $\operatorname{Im} w_k > 0$, через $\Pi_k^-(0,1)$ и $\Pi_k^-(1,\infty)$ – пересечения указанных областей с нижней полуплоскостью $\operatorname{Im} w_k < 0$. В случае $\lambda_k \leqslant 1/2$ угол S_k заполнен образами областей

$$\Pi_k^+(0,1), \quad \Pi_k^-(0,1), \quad \Pi_k^+(1,\infty), \quad \Pi_k^-(1,\infty) \ \text{ и } \ \Pi_k(1,1)$$

при отображении $z = f_k^{-1}(w_k)$, обратном к отображению (5); вид этих областей определяется леммой 1 и характером отображения (5). В случае $\lambda_k > 1/2$ угол S_k заполнен образами двуугольников

$$\Pi_k^+(0,1), \quad \Pi_k^-(0,1), \quad \Pi_k^+(1,\infty), \quad \Pi_k^-(1,\infty) \ \text{ и } \ \Pi_k(0,\infty)$$

при указанном отображении.

Пусть γ – замкнутая кривая на $\overline{\mathbb{C}}'$, гомотопная точечной кривой в точке $z = 0$ или $z = \infty$. Тогда кривая γ содержит дуги γ_k, $k = 1, \dots, n$, где γ_k соединяет стороны $L_k = \{z : \arg z = \arg a_k\}$ и L_{k+1} угла S_k и полностью лежит внутри этого угла. Очевидно, ρ-длина γ_k, т.е. длина дуги γ_k в метрике $\rho(z)|dz|$, удовлетворяет неравенству ρ-длина $\gamma_k \geqslant \lambda_k$ и потому ρ-длина $\gamma \geqslant n\lambda_k = 1$. Пусть теперь γ – кривая на $\overline{\mathbb{C}}'$, гомотопная точечному контуру в точке a_k. Тогда кривая γ пересекает отрезок $l_k = (0, a_k)$, дугу $c_{k-1} = C \cap S_{k-1}$, луч $l_k^* = (a_k, \infty)$, являющийся продолжением отрезка $[0, a_k]$, и дугу $c_k = C \cap S_k$. Пусть $\gamma^{(1)}$ (соответственно, $\gamma^{(2)}$) – дуга γ, имеющая концы на отрезке $(0, a_k)$ и луче l_k^* и пересекающая дугу c_{k-1} (соответственно, дугу c_k). Если $\gamma^{(1)}$ полностью лежит в угле S_{k-1}, то $\gamma^{(1)}$ пересекает противоположные стороны каждого из двуугольников, лежащих в угле S_{k-1} и имеющих точку a_k общей вершиной, и потому ρ-длина $\gamma^{(1)} \geqslant 1/2$. Легко видеть, что это неравенство справедливо и в том случае, когда $\gamma^{(1)}$ пересекается с лучом L_{k-1}. Аналогично, ρ-длина $\gamma^{(2)} \geqslant 1/2$ и потому ρ-длина $\gamma \geqslant 1$. Следовательно, метрика

$\rho(z)|dz|$ является допустимой метрикой в проблеме модуля, определяющей $\mathcal{M}(0, a_1, \dots, a_n, \infty)$.

Пусть $\rho^*(z)|dz|$ – экстремальная метрика проблемы модуля, определяющей $\mathcal{M}(0, a_1, \dots, a_n, \infty)$. Пусть $\overline{\mathbb{C}}(\varepsilon)$ получается из $\overline{\mathbb{C}}$ удалением ε-окрестностей точек $0, a_1, \dots, a_n, \infty$, и пусть $S_k(\varepsilon) = S_k \cap \overline{\mathbb{C}}(\varepsilon)$. Тогда

$$\mathcal{M}(0, a_1, \dots, a_n, \infty) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big\{ \underset{\rho^*}{\text{площ.}}\, \overline{\mathbb{C}}(\varepsilon) + \frac{1}{2\pi}(n+2)\log\varepsilon \Big\} = $$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \underset{\rho^*}{\text{площ.}}\, S_k(\varepsilon) + \frac{1}{2\pi}(n+2)\log\varepsilon \Big\}.$$

Так как метрика $\rho(z)|dz|$ является допустимой, то, учитывая изменение ε-окрестностей точек $0, a_1, \dots, a_n, \infty$ при отображениях (5), приходим к неравенству (2) теоремы 1.

Пусть теперь $a_0 \neq 0$. Рассмотрим разбиение области $\overline{\mathbb{C}}' = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_n, \infty\}$ на n угловых областей S_k, $k = 1, \dots, n$, где область S_k ограничена геодезическими $l_k^{(h)}$ и $l_{k+1}^{(h)}$ в круге U, имеющими своими концами соответственно точки a_0, a_k и a_0, a_{k+1}, и прямолинейными лучами l_k^*, l_{k+1}^*, выходящими соответственно из точек a_k, a_{k+1} и содержащих начало координат на своих продолжениях. Пусть $S_k^{(1)}$ и $S_k^{(2)}$ – подобласти S_k, лежащие соответственно в круге U и в области U^* и имеющие общей границей дугу $c_k = C \cap S_k$ окружности C.

При отображении $\dot{z} = f_0(z)$ область $S_k^{(1)}$ переходит в круговой сектор

$$\dot{S}_k = \Big\{ \dot{z} : |\dot{z}| < 1, \arg \dot{a}_k < \arg z < \arg \dot{a}_{k+1} \Big\}.$$

Далее, при отображении

$$w_k = \dot{f}_k(\dot{z}) = \Big(\frac{\dot{z}}{\dot{a}_k}\Big)^{1/\lambda_k} \tag{5'}$$

сектору $\dot{S}_k^{(1)}$ соответствует круг U с разрезом по отрезку $[0,1]$. Пусть $Q(w_k, \dot{\lambda}_k)dw_k^2$ – квадратичный дифференциал, определенный в лемме 1. В силу условия $0 < \dot{\lambda}_k \leqslant 1/2$, окружность C является замыканием ортогональной траектории (при $\dot{\lambda}_k < 1/2$) или объединением замыканий двух ортогональных траекторий (при $\dot{\lambda}_k = 1/2$) указанного дифференциала. Обозначим через $\Pi_k^+(0,1)$,

$\Pi_k^-(0,1)$, $\Pi_k'(1,1)$ подобласти полосообразных областей дифференциала $-Q(w_k,\dot\lambda_k)dw_k^2$, заполняющие область $U\setminus[0,1]$, и пусть

$$\dot P_k^{(1)}=\dot P_k^{(1)}\big(0,a_k;\pi\dot\lambda_k,\pi\dot\lambda_k\big),\quad \dot P_k^{(2)}=\dot P_k^{(2)}\big(0,a_{k+1};\pi\dot\lambda_k,\pi\dot\lambda_k\big),$$
$$\dot P_k^{(3)}=\dot P_k^{(3)}\big(a_k,a_{k+1};\pi(1/2-\dot\lambda_k),\pi(1/2-\dot\lambda_k)\big)$$

– прообразы указанных двуугольников при отображении (5′) (при $\dot\lambda_k=1/2$ области $\dot P_k^{(1)}$ и $\dot P_k^{(2)}$ являются круговыми секторами круга U, а $\dot P_k^{(3)}$ вырождается).

При отображении

$$w_k=f_k(z)=(z/a_k)^{1/\lambda_k}\tag{5}$$

области $S_k^{(2)}$ соответствует внешность U^* круга U с разрезом по лучу $[1,\infty]$. Пусть $Q(w_k,\lambda_k)dw^2$ – квадратичный дифференциал леммы 1. Обозначим через $\Pi_k^+(1,\infty)$, $\Pi_k^-(1,\infty)$, $\Pi_k''(1,1)$ подобласти полосообразных областей дифференциала $-Q(w_k,\lambda_k)dw_k^2$, заполняющие область $U^*\setminus[1,\infty]$, и пусть

$$P_k^{(1)}=P_k^{(1)}\big(a_k,\infty;\pi\lambda_k,\pi\lambda_k\big),\quad P_k^{(2)}=P_k^{(2)}\big(a_{k+1},\infty;\pi\lambda_k,\pi\lambda_k\big),$$
$$P_k^{(3)}=P_k^{(3)}\big(a_k,a_{k+1};\pi(1/2-\lambda_k),\pi(1/2-\lambda_k)\big)$$

– прообразы указанных областей при отображении (5) (при $\lambda_k=1/2$ двуугольник $P_k^{(3)}$ вырождается).

Пусть

$$\rho_k(z)|dz|=\big|Q(f_k(z))\big|^{1/2}|f_k'(z)|\ |dz|,$$
$$\dot\rho_k(z)|dz|=\big|Q(\dot f_k(f_0(z)))\big|^{1/2}|\dot f_k'(f_0(z))f_0'(z)|\ |dz|.$$

Метрика $\rho(z)|dz|$, определенная в каждой из областей S_k, $k=1,\dots,n$, условием

$$\rho(z)|dz|=\begin{cases}\dot\rho_k(z)|dz| & \text{при}\quad z\in S_k^{(1)},\\ \rho_k(z)|dz| & \text{при}\quad z\in S_k^{(2)}\end{cases}$$

является допустимой метрикой проблемы модуля, определяющей $\mathcal M(a_0,a_1,\dots,a_n,\infty)$. Действительно, из вида двуугольников $\dot P_k^{(1)}(0,a_k)$, $\dot P_k^{(2)}(0,a_{k+1})$, $\dot P_k^{(3)}(a_k,a_{k+1})$ и $P_k^{(1)}(a_k,\infty)$, $P_k^{(2)}(a_{k+1},\infty)$, $P_k^{(3)}(a_k,a_{k+1})$, образующих разбиение областей S_k в случае $0<$

$\lambda_k,\ \dot\lambda_k \leqslant 1/2,\ k = 1,\dots,n$, непосредственно следует, что каждая кривая на $\overline{\mathbb{C}}'$, гомотопная точечной кривой в какой-либо из точек $a_k,\ k = 1,\dots,n$, имеет в ρ-метрике длину, большую или равную 1, и каждая кривая, гомотопная точечной кривой в одной из точек a_0 или ∞, имеет в ρ-метрике длину, удовлетворяющую тому же условию.

Пусть $\overline{\mathbb{C}}(\varepsilon)$ – область, получаемая из z-сферы удалением ε-окрестностей точек $a_0, a_1, \dots, a_n, \infty$. Пусть $U(\varepsilon) = U \cap \overline{\mathbb{C}}(\varepsilon)$, $U^*(\varepsilon) = U^* \cap \overline{\mathbb{C}}(\varepsilon)$ и пусть $S_k^{(1)}(\varepsilon) = S_k^{(1)} \cap U(\varepsilon)$, $S_k^{(2)}(\varepsilon) = S_k^{(2)} \cap U^*(\varepsilon)$. Пусть $\rho^*(z)|dz|$ – экстремальная метрика задачи о $\mathcal{M}(a_0, a_1, \dots, a_n, \infty)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(a_0, a_1, \dots, a_n, \infty) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{\underset{\rho^*}{\text{площ.}}\ \overline{\mathbb{C}}(\varepsilon) + \frac{1}{2\pi}(n+1)\log\varepsilon\Big\} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{\underset{\rho^*}{\text{площ.}}\ U(\varepsilon) + \frac{1}{4\pi}(n+1)\log\varepsilon\Big\} + \\ &+ \lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{\underset{\rho^*}{\text{площ.}}\ U^*(\varepsilon) + \frac{1}{4\pi}(n+1)\log\varepsilon\Big\}.\end{aligned} \tag{6}$$

Принимая во внимание, что ρ-метрика допустима в проблеме модуля, определяющей $\mathcal{M}(a_0, a_1, \dots, a_n, \infty)$, и учитывая изменение ε-окрестностей точек $a_0, a_1, \dots, a_n, \infty$ при рассматриваемых отображениях, получаем

$$\begin{aligned}&\underset{\rho^*}{\text{площ.}}\ U(\varepsilon) = \\ &= \underset{\rho^*}{\text{площ.}}\ f_0\big(U(\varepsilon)\big) - \frac{1}{2\pi}\Big\{\log|f_0'(a_0)| + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\log|f_0'(a_k)|\Big\} + O(\varepsilon) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\underset{\rho}{\text{площ.}}\ \dot f_k\big[f_0(S_k^{(1)}(\varepsilon))\big] - \\ &- \frac{1}{2\pi}\Big\{\log|f_0'(a_0)| + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\log|f_0'(a_k)|\Big\} + O(\varepsilon) = \\ &= \underset{\rho}{\text{площ.}}\ U(\varepsilon) - \\ &- \frac{1}{2\pi}\Big\{\log|f_0'(a_0)| + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\log|f_0'(a_k)| + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\log(2\dot\lambda_k)\Big\} + O(\varepsilon),\end{aligned}$$

откуда

$$\underset{\rho^*}{\text{площ.}}\ U(\varepsilon) + \frac{1}{4\pi}(n+1)\log(\varepsilon) \leqslant \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\mathcal{M}\big(-1, 1, 0, \infty; 1, 1, 2\dot\lambda_k, 2\dot\lambda_k\big) -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\left\{\log|f_0'(a_0)|+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\log|f_0'(a_k)|+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\log(2\dot{\lambda}_k)\right\}+O(\varepsilon). \quad (7)$$

Аналогично, получаем неравенство

$$\underset{\rho^*}{\text{площ.}}\, U^*(\varepsilon)+\frac{1}{4\pi}(n+1)\log(\varepsilon)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\mathcal{M}\big(-1,1,0,\infty;1,1,2\lambda_k,2\lambda_k\big)-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\log(2\lambda_k)+O(\varepsilon). \quad (8)$$

Из (6)–(8) получаем

$$2\pi\mathcal{M}(a_0,a_1,\dots,a_n,\infty)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\pi}{2}\Big[\mathcal{M}\big(-1,1,0,\infty;1,1,2\lambda_k,2\lambda_k\big)+\right.$$

$$\left.+\mathcal{M}\big(-1,1,0,\infty;1,1,2\dot{\lambda}_k,2\dot{\lambda}_k\big)\Big]+\frac{1}{2}\big(\log(2\lambda_k)+\log(2\dot{\lambda}_k)\big)\right\}-$$

$$-\log|f_0'(a_0)|-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\log|f_0'(a_k)|.$$

Используя очевидное равенство

$$\pi\mathcal{M}\big(-1,1,0,\infty;1,1,2\lambda_k,2\lambda_k\big)=2\pi\mathcal{M}\big(1,0,\infty;1,\lambda_k,\lambda_k\big)-\log 2 \quad (9)$$

и выражение для функции $f_0(z)$, приходим к неравенству (3).

В случае $a_0=0$ краткое доказательство теоремы 1 для любого $n\geqslant 2$ было указано в [4]. При $n\geqslant 3$ в [4] показано, что максимум суммы $\mathcal{M}(0,a_1,\dots,a_n,\infty)$, где $a_1,\dots,a_n$ – любые точки окружности C, реализуется только в том случае, когда $a_1,\dots,a_n$ – равноотстоящие точки на C.

1.4. Пусть $\mathbf{b}=\{b_1,\dots,b_m\}$ – система различных точек $\overline{\mathbb{C}}$. С задачей о максимуме суммы $\mathcal{M}(b_1,\dots,b_m)$ в семействе $\mathcal{D}(\mathbf{b})$ непосредственно связана задача о максимуме величины

$$\log J(b_1,\dots,b_m)=$$

$$=2\pi\mathcal{M}(b_1,\dots,b_m)-\frac{2}{m-1}\log\sum_{1\leqslant k<l\leqslant m}|b_k-b_m| \quad (10)$$

относительно всех систем точек $b_1,\dots,b_m$. Величина (10) – инвариант относительно группы Γ дробно-линейных автоморфизмов

$\overline{\mathbb{C}}$. При $m = 4$ решения обеих указанных задач известны. Остановимся на задаче о максимуме инварианта (10) при $m = 5$. Этот максимум будем обозначать через J_5.

Пусть функция $H(\lambda)$, $0 < \lambda < 1$, определяется равенством

$$2\pi\mathcal{M}(1, 0, \infty; 1, \lambda, \lambda) + \log\lambda - \frac{1}{2}\log(2\sin\pi\lambda) = -2H(\lambda). \tag{11}$$

Тогда, по лемме 2,

$$H(\lambda) = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 \log\left|\frac{1}{2} - \lambda\right| + \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)^2 \log\left(\frac{1}{2} + \lambda\right) - \\ - \left(\frac{1}{2} + 2\lambda^2\right)\log\lambda + \frac{1}{4}\log(2\sin\pi\lambda) - \frac{1}{2}\log 2. \tag{12}$$

Переформулируя теорему 1 в частном случае $n = 3$, в результате несложных вычислений получаем следующий результат в задаче о максимуме инварианта (10) при $m = 5$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда в случае $a_0 = 0$ имеем неравенство*

$$\log J(0, a_1, a_2, a_3, \infty) \leqslant -2\sum_{k=1}^{3} H(\lambda_k), \tag{13}$$

в случае $a_0 \neq 0$

$$\log J(a_0, a_1, a_2, a_3, \infty) \leqslant -\sum_{k=1}^{3}\Big(H(\lambda_k) + H(\dot{\lambda}_k)\Big) + \frac{1}{4}\log(1 - |a_0|^2). \tag{14}$$

Эти результаты были получены в [9] более сложным путем: в [9] использовалась теорема в [3] о связи двух задач об экстремальном разбиении, что потребовало подсчета приведенных модулей рассматриваемых двуугольников. На основании неравенств (13), (14) и исследования свойств функции $\mathcal{H}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{k=1}^{3} H(\lambda_k)$ при соответствующих условиях на λ_1, λ_2, λ_3 в [9] было показано, что для любых систем точек $b_1, \dots, b_5$, симметричных относительно некоторой окружности или прямой, справедливо точное неравенство

$$\log J(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \leqslant \log J(0, 1, e^{2\pi i/3}, e^{-2\pi i/3}, \infty), \tag{15}$$

и равенство в (15) имеет место только для систем точек, соответствующих указанной симметричной системе при преобразованиях из группы Γ. Этот же результат был получен в [10] методом симметризации.

Будем рассматривать задачу о J_5 несколько в другой нормировке. Очевидно, можно считать, что рассматриваемыми системами точек служат системы вида $-1, 1, a, \infty, b$. Будем считать, что $\operatorname{Im} a > 0$ и точка b лежит внутри окружности, проходящей через точки $-1, 1, a$. Действительно, каждый из остальных случаев либо сводится к указанному посредством надлежащего преобразования из группы Γ, либо не является экстремальным [4, 9].

В дальнейшем через $C(a)$ обозначаем окружность, проходящую через точки $-1, 1, a$, $U(a) = \operatorname{Int} C(a)$, $c(a)$ – центр окружности $C(a)$. Через $K(-1,1,a)$ обозначаем замкнутую выпуклую оболочку множества $\{-1,1,a\}$, через $K^{(h)}(-1,1,a)$ – гиперболическую замкнутую выпуклую оболочку этого множества по отношению к кругу $U(a)$.

Результаты о максимуме величины $J(-1,1,a,b,\infty)$, полученные в [4, 9], можно сформулировать следующим образом.

Теорема A. *Пусть* $\operatorname{Im} a > 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = a$, $a_3 = -1$, $b \in U(a)$. *Пусть выполнено одно из условий:*

1) $b = c(a)$; 2) $c(a) \in K(-1,1,a)$, $b \in K^{(h)}(-1,1,a)$, $b \neq c(a)$.

В первом из этих случаев справедливо неравенство

$$\log J(-1,1,a,b,\infty) \leqslant \log J(-1,1,i\sqrt{3}, i\sqrt{3}/3, \infty), \qquad (16)$$

и равенство в (16) *достигается только для указанной системы точек. Во втором случае в* (16) *имеет место строгое неравенство.*

В [4] анонсирована теорема, утверждающая, что неравенство (16) справедливо для всех систем $(-1,1,a,b,\infty)$. Однако приведенное в [4] доказательство этой теоремы имеет пробел. Тем самым вопрос о справедливости неравенства (16) в общем случае остается открытым.

Мы вернемся к задаче о максимуме величины $J(-1,1,a,b,\infty)$ в следующем параграфе.

§2

2.1. Геометрический подход, использованный при доказательстве теоремы 1, приводит к следующему простому результату.

Теорема 2. *Пусть* $0 \leqslant a < 1$, $\alpha > 0$. *Справедливо неравенство*

$$\mathcal{M}(-1,1,a,\infty;1,1,\alpha,\alpha) \leqslant$$
$$\leqslant \mathcal{M}(-1,1,0,\infty;1,1,\alpha,\alpha) + \frac{\delta}{2\pi}\log(1-a^2), \tag{17}$$

где

$$\delta = \alpha^2 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \qquad \delta = 1 \quad \text{при} \quad \alpha > 1.$$

Доказательство. Пусть сначала $0 < \alpha \leqslant 1$. Пусть $\rho_1(z)|dz|$ – экстремальная метрика задачи о $\mathcal{M}(-1,1,a,1/a;1,1,\alpha,\alpha)$, $\rho_2(z)|dz|$ – экстремальная метрика задачи о $\mathcal{M}(-1,1,0,\infty;-1,1,\alpha,\alpha)$. Покажем, что метрика

$$\rho(z)|dz| = \begin{cases} \rho_1(z)|dz| & \text{при} \quad z \in U = \{z : |z| < 1\}, \\ \rho_2(z)|dz| & \text{при} \quad z \in U^* = \{z : |z| > 1\} \end{cases}$$

является допустимой метрикой проблемы модуля, определяющей $\mathcal{M}(-1,1,a,\infty;1,1,\alpha,\alpha)$. Действительно, имеем равенства

$$\rho_1(z)|dz| = |Q_1(z)^{1/2}|dz|, \quad \rho_2(z)|dz| = |Q_2(z)^{1/2}|dz|,$$

где $Q_1(z)dz^2$ и $Q_2(z)dz^2$ – ассоциированные квадратичные дифференциалы соответственно в задаче о $\mathcal{M}(-1,1,a,1/a;1,1,\alpha,\alpha)$ и в задаче о $\mathcal{M}(-1,1,0,\infty;1,1,\alpha,\alpha)$. Дифференциалы $Q_1(z)dz^2$ и $Q_2(z)dz^2$ обладают симметричной структурой траекторий и в случае $0 < \alpha \leqslant 1$ окружность C представляет собой объединение замыканий ортогональных траекторий каждого из этих дифференциалов. Круг U заполнен двуугольниками

$$\Pi_1^{(1)} = \Pi_1^{(1)}(a,1;\pi,\pi\alpha), \quad \Pi_2^{(1)} = \Pi_2^{(1)}(a,-1;\pi,\pi\alpha),$$
$$\Pi_3^{(1)} = \Pi_3^{(1)}\Big(-1,1;\frac{\pi}{2}(1-\alpha),\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\Big), \quad \Pi_4^{(1)} = \big\{\overline{z} : z \in \Pi_3^{(1)}\big\},$$

где $\Pi_1^{(1)}$ и $\Pi_2^{(1)}$ – полосообразные области дифференциала $-Q_1(z)dz^2$, $\Pi_3^{(1)}$ и $\Pi_4^{(1)}$ – подобласти полосообразных областей этого дифференциала, одной из сторон двуугольника $\Pi_3^{(1)}$ служит полуокружность $C_+ = \{z : z \in C, \operatorname{Im} z > 0\}$, а одной из сторон двуугольника $\Pi_4^{(1)}$ – полуокружность $C_- = \{z : z \in C, \operatorname{Im} z < 0\}$. Аналогично, область U^* заполнена двуугольниками

$$\Pi_1^{(2)} = \Pi_1^{(2)}\big(1, \infty; \pi, \pi\alpha\big), \quad \Pi_2^{(2)} = \Pi_2^{(2)}\big(-z : z \in \Pi_1^{(2)}\big),$$

$$\Pi_3^{(2)} = \Pi_3^{(2)}\Big(-1, 1; \frac{\pi}{2}(1-\alpha), \frac{\pi}{2}(1-\alpha)\Big), \quad \Pi_4^{(2)} = \big\{\overline{z} : z \in \Pi_3^{(2)}\big\},$$

где $\Pi_1^{(2)}$ и $\Pi_2^{(2)}$ – полосообразные области дифференциала $-Q_2(z)dz^2$, $\Pi_3^{(2)}$ и $\Pi_4^{(2)}$ – подобласти полосообразных областей этого дифференциала, одной из сторон двуугольника $\Pi_3^{(2)}$ является полуокружность C_+, двуугольника $\Pi_4^{(2)}$ – полуокружность C_-. При $\alpha = 1$ области $\Pi_3^{(1)}$, $\Pi_4^{(1)}$ и $\Pi_3^{(2)}$, $\Pi_4^{(2)}$ вырождаются. Структура ортогональных траекторий дифференциалов $Q_1(z)dz^2$ и $Q_2(z, dz^2)$ соответственно в круге U и в области U^* в случае $0 < \alpha < 1$ изображена на рис. 4, в случае $\alpha = 1$ – на рис. 5.

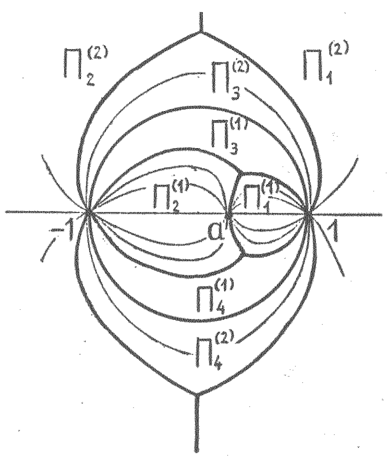

Рис. 4

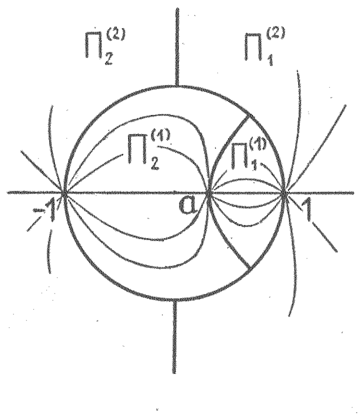

Рис. 5.

Из структуры полосообразных областей указанных дифференциалов в случае $0 < \alpha \leqslant 1$ непосредственно следует, что каждая кривая на $\mathbb{C}' = \mathbb{C}\setminus\{-1, 1, a\}$, гомотопная точечной кривой в одной из точек $1, -1$, пересекает противоположные стороны каждого из двуугольников, имеющих указанную точку своей общей вершиной (этими двуугольниками являются области $\Pi_1^{(1)}$, $\Pi_3^{(1)}$, $\Pi_4^{(1)}$ и

$\Pi_1^{(2)}$, $\Pi_3^{(2)}$, $\Pi_4^{(2)}$ в первом случае и $\Pi_2^{(1)}$, $\Pi_3^{(1)}$, $\Pi_4^{(1)}$ и $\Pi_2^{(2)}$, $\Pi_3^{(2)}$, $\Pi_4^{(2)}$ – во втором), и потому упомянутая кривая имеет в ρ-метрике длину, большую или равную 1. По аналогичной причине каждая кривая, гомотопная точечной кривой в одной из точек a, ∞, имеет в ρ-метрике длину, большую или равную α. Итак, в указанном случае метрика $\rho(z)|dz|$ является допустимой.

Пусть $\overline{\mathbb{C}}(\varepsilon)$ – область, получаемая из z-сферы удалением ε-окрестностей точек $-1, 1, a, \infty$, и пусть $U(\varepsilon) = U \cap \mathbb{C}(\varepsilon)$, $U^*(\varepsilon) = U^* \cap \mathbb{C}(\varepsilon)$. Пусть $\rho^*(z)|dz|$ – экстремальная метрика задачи о $\mathcal{M}(-1, 1, a, \infty; 1, 1, \alpha, \alpha)$:

$$\mathcal{M}(-1, 1, a, \infty; 1, 1, \alpha, \alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big\{ \underset{\rho^*}{\text{площ.}}\ \overline{\mathbb{C}}(\varepsilon) + \frac{1}{4\pi}(1 + \alpha^2) \log \varepsilon \Big\}.$$

Пусть $D_1^{(j)}$, $D_2^{(j)}$, $D_3^{(j)}$, $D_4^{(j)}$ – круговые области дифференциалов $Q_j(z)dz^2$, $j = 1, 2$, содержащие соответственно точки $-1, 1, a, \infty$ и точки $-1, 1, 0, \infty$. Благодаря допустимости метрики $\rho(z)|dz|$ в задаче о $\mathcal{M}(-1, 1, a, \infty; 1, 1, \alpha, \alpha)$ справедливо неравенство

$$\mathcal{M}(-1, 1, a, \infty; 1, 1, \alpha, \alpha) \leqslant \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2,$$

где

$$\mathcal{M}_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big\{ \underset{\rho_1}{\text{площ.}}\ U(\varepsilon) + \frac{1}{2\pi}(1 + \alpha^2) \log \varepsilon \Big\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Big\{ \frac{1}{2} \Big[\log R(D_1^{(1)}, -1) + \log R(D_2^{(1)}, 1) \Big] + \alpha^2 \log R(D_3^{(1)}, a) \Big\},$$

$$\mathcal{M}_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big\{ \underset{\rho_2}{\text{площ.}}\ U^*(\varepsilon) + \frac{1}{2\pi}(1 + \alpha^2) \log \varepsilon \Big\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Big\{ \frac{1}{2} \Big[\log R(D_1^{(2)}, -1) + \log R(D_2^{(2)}, 1) \Big] - \alpha^2 \log R(D_4^{(2)}, \infty) \Big\},$$

Имеем $1/R(D_4^{(2)}, \infty) = R(D_3^{(2)}, 0)$ и легко видеть, что

$$\mathcal{M}_2 = \frac{1}{2}\mathcal{M}(-1, 1, 0, \infty; 1, 1, \alpha, \alpha)$$

При отображении

$$z \to \frac{z - a}{1 - az}$$

круга U в себя областям $D_1^{(1)}$, $D_2^{(1)}$ и $D_3^{(1)}$ соответствуют области $D_1^{(2)}$, $D_2^{(2)}$ и $D_3^{(2)}$, причем

$$R(D_1^{(2)},-1)=\frac{1-a}{1+a}R(D_1^{(1)},-1),\qquad R(D_2^{(2)},1)=\frac{1+a}{1-a}R(D_2^{(1)},1),$$

$$R(D_3^{(2)},0)=\frac{1}{1-a^2}R(D_3^{(1)},a).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\Big[\log R(D_1^{(2)},-1)+\log R(D_2^{(2)},1)\Big]+\\ +\frac{\alpha^2}{2\pi}\Big[R(D_3^{(2)},0)+\log(1-a^2)\Big]=\\ =\frac{1}{2}\mathcal{M}(-1,1,0,\infty;1,1,\alpha,\alpha)+\frac{\alpha^2}{2\pi}\log(1-a^2).\end{aligned}$$

Это доказывает теорему в случае $0<\alpha\leqslant 1$.

Пусть теперь $\alpha>1$. Этот случай легко сводится к предыдущему. Пусть $Q^*(z)dz^2$ – ассоциированный квадратичный дифференциал задачи о $\mathcal{M}(-1,1,a,\infty;1,1,\alpha,\alpha)$, D_1^*, D_2^*, D_3^*, D_4^* – круговые области этого дифференциала, содержащие соответственно точки $-1,1,a,\infty$. Полагая $\beta=1/\alpha$, имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(-1,1,a,\infty;1,1,\alpha,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\Big\{\log R(D_1^*,-1)+\log R(D_2^*,1)+\\ +\alpha^2\Big[\log R(D_3^*,a)-\log R(D_4^*,\infty)\Big]\Big\}=\\ =\frac{\alpha^2}{2\pi}\Big\{\beta^2\Big[\log R(D_1^*,-1)+\log R(D_2^*,1)\Big]+\\ +\log R(D_3^*,a)-\log R(D_4^*,\infty)\Big\}.\end{aligned}\tag{18}$$

При отображении

$$w=f_1(z)=\frac{z+1-2a}{z-1},$$

точки $-1,1,a,\infty$ переходят соответственно в $a,\infty,-1,1$. Пусть $\widetilde{D}_k$ – образ области D_k^* при указанном отображении, $k=1,2,3,4$. Имеем равенства

$$R(\widetilde{D}_1,a)=\frac{1-a}{2}R(D_1^*,-1),\qquad \frac{1}{R(\widetilde{D}_2,\infty)}=\frac{1}{2(1-a)}R(D_2^*,1),$$

$$R(\widetilde{D}_3,-1)=\frac{2}{1-a}R(D_3^*,a),\quad R(\widetilde{D}_4,1)=2(1-a)\frac{1}{(D_4^*,\infty)}.$$

Из (18) теперь получаем

$$\mathcal{M}(-1,1,a,\infty;1,1,\alpha,\alpha)==\frac{\alpha^2}{2\pi}\Big\{\log R(\widetilde{D}_3,-1)+\log R(\widetilde{D}_4,1)+$$
$$+\beta^2\Big[\log R(\widetilde{D}_1,a)-\log R(\widetilde{D}_2,\infty)\Big]\Big\}+\frac{1}{2\pi}(1-\alpha^2)\log 4.$$

Легко видеть, что области $\widetilde{D}_1,\ldots,\widetilde{D}_4$ представляют собой эктремальную систему областей задачи о $\mathcal{M}(-1,1,a,\infty;1,1,1/\alpha,1/\alpha)$. Следовательно,

$$\mathcal{M}(-1,1,a,\infty;1,1,\alpha,\alpha)=$$
$$=\alpha^2\mathcal{M}(-1,1,a,\infty;1,1,1/\alpha,1/\alpha)+\frac{1}{2\pi}(1-\alpha^2)\log 4. \quad (19)$$

При $a=0$ из (19) получаем

$$\mathcal{M}(-1,1,0,\infty;1,1,\alpha,\alpha)=$$
$$=\alpha^2\mathcal{M}(-1,1,0,\infty;1,1,1/\alpha,1/\alpha)+\frac{1}{2\pi}(1-\alpha^2)\log 4.$$

Поэтому (19) можем записать в симметричном виде:

$$\mathcal{M}(-1,1,a,\infty;1,1,\alpha,\alpha)-\mathcal{M}(-1,1,0,\infty;1,1,\alpha,\alpha)=$$
$$=\alpha^2\Big\{\mathcal{M}(-1,1,a,\infty;1,1,1/\alpha,1/\alpha)-\mathcal{M}(-1,1,0,\infty;1,1,1/\alpha,1/\alpha)\Big\}.$$

Отсюда и из неравенства (17), установленного в предыдущем случае, получаем неравенство

$$\mathcal{M}(-1,1,a,\infty;1,1,\alpha,\alpha)\leqslant\mathcal{M}(-1,1,0,\infty;1,1,\alpha,\alpha)+\frac{1}{2\pi}\log(1-a^2).$$

2.2. Как и в §1.4, при $\operatorname{Im}a>0$ через $C(a)$ обозначаем окружность, содержащую точки $-1,1,a$, и пусть $U(a)=\operatorname{Int}C(a)$. Через $H(\lambda)$ по-прежнему обозначаем функцию (12).

Теорема 2 приводит к неравенству для величины $J(-1,1,a,b,\infty)$, устанавливаемому следующей теоремой.

Теорема 3. *Пусть* $\operatorname{Im} a > 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = a$, $a_3 = -1$ *– точки окружности* $C(a)$, $b \in U(a)$. *Пусть положительные числа* r_k *и* α_k, $k = 1, 2, 3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$, *определяются условиями*

$$|a_k - b| = r_k, \quad \arg \frac{a_{k+1} - b}{a_k - b} = \pi\alpha_k \ (\textit{здесь} \ \ a_4 = a_1).$$

Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &\log J(-1, 1, a, b, \infty) \leqslant \\ &\leqslant -2\sum_{k=1}^{3} H(\alpha_k/2) - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{3} \log \frac{G(r_{k+1}/r_k) - \cos \pi\alpha_k}{1 - \cos \pi\alpha_k} + \\ &+ \sum_{k=1}^{3}{}' (1 - \alpha_k^2) \log G\Big[\big(r_{k+1}/r_k\big)^{1/(2\alpha_k)}\Big], \end{aligned} \tag{20}$$

где $G(t) = \frac{1}{2}(t + 1/t)$ *– функция Жуковского, и штрих у последней суммы в правой части* (20) *означает, что в этой сумме суммирование производится только по тем значениям* $k = 1, 2, 3$, *для которых* $\alpha_k < 1$.

Доказательство. Пусть S_k – угол, образованный лучами, выходящими из точки b и проходящими соответственно через точки a_k и a_{k+1}:

$$S_k = \big\{ z : \arg(a_k - b) < \arg(z - b) < \arg(a_{k+1} - b) \big\}, \quad k = 1, 2, 3.$$

При отображении

$$\begin{aligned} v_k = F_k(z) &= \frac{2w_k + r_{k+1}^{1/\alpha_k} - r_k^{1/\alpha_k}}{r_{k+1}^{1/\alpha_k} + r_k^{1/\alpha_k}}, \\ \text{где} \quad w_k = f_k(z) &= \Big\{ (z - b) e^{-i \arg(a_k - b)} \Big\}^{1/\alpha_k}, \end{aligned} \tag{21}$$

углу S_k соответствует верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} v_k > 0$, точкам a_{k+1}, a_k, ∞ соответствуют точки $-1, 1, \infty$, а точке b – точка

$$b_k = \big(r_{k+1}^{1/\alpha_k} - r_k^{1/\alpha_k}\big) / \big(r_{k+1}^{1/\alpha_k} + r_k^{1/\alpha_k}\big).$$

Рассмотрим задачу о $\mathcal{M}(-1, 1, b_k, \infty; 1, 1, \alpha_k, \alpha_k)$ и пусть $\rho_k(v_k)|dv_k|$ – экстремальная метрика проблемы модуля, определяющей указанную величину:

$$\rho_k(v_k)|dv_k| = |Q_k(v_k)|^{1/2} |dv_k|,$$

где $Q_k(v_k)dv_k^2$ – ассоциированный квадратичный дифференциал задачи о $\mathcal{M}(-1,1,b_k,\infty;1,1,\alpha_k,\alpha_k)$. Траектории и ортогональные траектории дифференциала $Q_k(v_k)dv_k^2$ обладают симметрией относительно вещественной оси v_k-плоскости и указанная ось является объединением замыканий ортогональных траекторий этого дифференцала. Структура полосообразных областей дифференциала $-Q_k(v_k)dv_k^2$ обладает простыми свойствами и рассуждая также, как и при доказательстве теорем 1 и 2, убеждаемся, что метрика $\rho(z)|dz|$, удовлетворяющая условию

$$\rho(z)|dz| = \rho_k(F_k(z))|F_k'(z)|\,|dz| \quad \text{при} \quad z\in S_k, \quad k=1,2,3,$$

является допустимой метрикой проблемы модуля, определяющей $\mathcal{M}(-1,1,a,b,\infty)$. Принимая во внимание, что при отображении (21) ε-окрестностям точек a_k и a_{k+1} соответствуют окрестности точек 1 и -1 соответственно радиусов $|F_k'(a_k)|\varepsilon$ и $|F_k'(a_{k+1})|\varepsilon$, приходим к неравенству

$$2\pi\mathcal{M}(-1,1,a,b,\infty) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} 2\pi\mathcal{M}(-1,1,b_k,\infty;1,1,\alpha_k,\alpha_k) - \\ - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\log\left|F_k'(a_k)F_k'(a_{k+1}\right|. \tag{22}$$

В результате несложных вычислений из (22) получаем

$$2\pi\mathcal{M}(-1,1,a,b,\infty) \leqslant \sum_{k=1}^{3}\left\{\pi\mathcal{M}(-1,1,b_k,\infty;1,1,\alpha_k,\alpha_k)+\log\alpha_k\right\} + \\ + \sum_{k=1}^{3}\log G\big[(r_{k+1}/r_k)^{1/(2\alpha_k)}\big] + \log(r_1r_2r_3). \tag{23}$$

Пусть $\alpha_k\leqslant 1$, $k=1,2,3$. Используя неравенство (17) теоремы 2 при $\alpha\leqslant 1$ и равенство

$$1-b_k^2 = 1/G^2\big[(r_{k+1}/r_k)^{1/(2\alpha_k)}\big], \tag{24}$$

из (23) получаем

$$2\pi\mathcal{M}(-1,1,a,b,\infty) \leqslant \sum_{k=1}^{3}\left\{\pi\mathcal{M}(-1,1,0,\infty;1,1,\alpha_k,\alpha_k)+\log\alpha_k\right\} +$$

$$+\sum_{k=1}^{3}(1-\alpha_k^2)\log G\big[(r_{k+1}/r_k)^{1/(2\alpha_k)}\big]+\log(r_1r_2r_3). \qquad (25)$$

Учитывая равенство (9), (25) можем записать в виде

$$2\pi\mathcal{M}(-1,a,1,b,\infty)\leqslant\sum_{k=1}^{3}\big\{2\pi\mathcal{M}(1,0,\infty;1,\alpha_k/2,\alpha_k/2)+\log(\alpha_k/2)\big\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{3}(1-\alpha_k^2)\log G\big[(r_{k+1}/r_k)^{1/(2\alpha_k)}\big]+\log(r_1r_2r_3).$$

Далее имеем

$$\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k<l\leqslant 3}\log|a_k-a_l|+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\log|a_k-b|=$$

$$=\frac{1}{2}\log(r_1r_2r_3)+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{3}\log\left(r_{k+1}^2+r_k^2-2r_{k+1}r_k\cos\pi\alpha_k\right)= \qquad (26)$$

$$=\log(r_1r_2r_3)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\log\left(2\sin\frac{\pi\alpha_k}{2}\right)+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{3}\log\frac{G(r_{k+1}/r_k)-\cos\pi\alpha_k}{1-\cos\pi\alpha_k}.$$

Итак, в случае $\alpha_k\leqslant 1,\ k=1,2,3,$

$$\log J(-1,1,a,b,\infty)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{3}\left\{2\pi\mathcal{M}(1,0,\infty;1,\alpha_k/2,\alpha_k/2)+\log(\alpha_k/2)-\frac{1}{2}\log\left(2\sin\frac{\pi\alpha_k}{2}\right)\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{3}(1-\alpha_k^2)\log G\big[(r_{k+1}/r_k)^{1/(2\alpha_k)}\big]-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{3}\log\frac{G(r_{k+1}/r_k)-\cos\pi\alpha_k}{1-\cos\pi\alpha_k}.$$

В силу выражения (12) для функции $H(\lambda)$ мы получили неравенство (20).

Пусть теперь $\alpha_j>1$, например, $\alpha_3>1$. Обозначим правую часть неравенства (23) через

$$\sum_{k=1}^{3}X_k+\log(r_1r_2r_3).$$

Используя неравенство (17) теоремы 2 в случае $\alpha > 1$, а также неравенство (24) для $1 - b_3^2$ и (26), получаем оценку

$$X_3 = \pi\mathcal{M}(-1,1,b_3,\infty;1,1,\alpha_3,\alpha_3) + \log\alpha_3 + \log G\big[(r_1/r_3)^{1/(2\alpha_3)}\big] \leqslant$$
$$\leqslant \pi\mathcal{M}(-1,1,0,\infty;1,1,\alpha_3,\alpha_3) + \log\alpha_3 =$$
$$= 2\pi\mathcal{M}(1,0,\infty;1,\alpha_3/2,\alpha_3/2) + \log(\alpha_3/2).$$

Учитывая выражение (26), теперь из (23) получаем

$$\log J(-1,1,a,b,\infty) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{3}\Big\{2\pi\mathcal{M}(1,0,\infty;1,\alpha_k/2,\alpha_k/2) + \log(\alpha_3/2) - \frac{1}{2}\log\Big(2\sin\frac{\pi\alpha_k}{2}\Big)\Big\} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{2}(1-\alpha_k^2)\log G\big[(r_{k+1}/r_k)^{1/(2\alpha_k)}\big] - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{3}\log\frac{G(r_{k+1}/r_k) - \cos\pi\alpha_k}{1-\cos\pi\alpha_k},$$

что и завершает доказательство теоремы.

2.3. Остановимся коротко на доказательстве теоремы о максимуме инварианта $J(-1,1,a,b,\infty)$ в общем случае. Как показывает теорема A, остается рассмотреть два случая:

1) $c(a) \in K(-1,1,a)$ и при этом $b \overline{\in} K^{(h)}(-1,1,a)$;

2) $c(a) \overline{\in} K(-1,1,a)$, b – любая точка круга $U(a)$, $b \neq c(a)$.

Пусть имеет место случай 1). Множество $U(a) \setminus K^{(h)}(-1,1,a)$ состоит из трех областей Δ_{-1}, Δ_1 и Δ_a, где $1, a \in \partial\Delta_{-1}$, $-1, a \in \partial\Delta_1$ и $-1, 1 \in \partial\Delta_a$. Рассматривая отображения

$$\mathcal{F}_1(z) = \frac{z+1-2a}{z-1}, \quad \mathcal{F}_2(z) = \frac{2a+1-z}{z+1}, \quad \mathcal{F}_3(z) = \frac{az-1}{z-a},$$

переводящие четверку $(-1,1,a,\infty)$ в ту же четверку точек, и другие отображения из группы Γ, можем исключить из рассмотрения некоторые множества значений b. Например, если $b \in \Delta_a$, то замечая, что неподвижная окружность преобразования $z \to \mathcal{F}_3(z)$ разделяет область $\Delta_a \cap \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ на две подобласти, соответствующие друг другу при указанном преобразовании, можем считать, что точка b принадлежит только одной из них. Далее, использование известных неравенств, установленных Г. М. Голузиным и М. А. Лаврентьевым для инварианта $J(b_1,\dots,b_m)$ в случаях $m = 3$ и $m = 2$, показывает, что для точек b, достаточно близких к какой-либо из точек $-1, 1, a$, величина $J(-1, 1, a, b, \infty)$ не достигает своего максимума. В тех случаях, когда расстояния точки b до точек $-1, 1, a$ достаточно близки друг к другу, оказывается достаточным применение теоремы 3. Случай 2) рассматривается при помощи аналогичных соображений.

Подробное изложение доказательства теоремы о максимуме величины $J(-1, 1, a, b, \infty)$ мы предполагаем привести в одной из следующих публикаций.

Литература

1. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций.* I, II, Алгебра и анализ **9**, вып. 3 (1997), 41–103; вып. 5 (1997), 1–50.
2. В. Н. Дубинин, *Симметризация в теории функций комплексного переменного,* Успехи мат. наук **49**, вып. 1 (1994), 3–76.
3. Е. Г. Емельянов, *О связи двух задач об экстремальном разбиении,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **160** (1987), 91–98.
4. Г. В. Кузьмина, *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы,* Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 253–275.
5. J. A. Jenkins, *On certain problems of minimal capacity,* Ill. J. Math **10**, No. 3 (1966), 460–465.
6. В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 48–66.
7. J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mappings,* Ergeb. Math. Grenzgeb. (N.F.), Bd. 18, Springer-Verlag, Berlin etc., 1958; 2nd ed. corrected, 1965. Пер. на рус. яз. 1-го изд., Дж. Дженкинс, Однолистные функции и конформные отображения, М., 1962.
8. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы,* Тр. Матем. ин-та СССР **139** (1980), 1–240.
9. Г. В. Кузьмина, *К вопросу об экстремальном разбиении римановой сферы,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **185** (1990), 72–95.
10. В. Н. Дубинин, *О максимуме одного конформного инварианта,* Препринт ДВО АН СССР. Ин-т приклад. мат., Владивосток, 1990.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:kuzmina@pdmi.ras.ru

Поступило 25 декабря 2002 г.,
в дополненном виде
25 марта 2002 г.