Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 286, 2002 г.

Н. В. Бударина

ДЕФОРМАЦИИ ДИОФАНТОВЫХ СИСТЕМ ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ КУБИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

Введение

Одной из центральных проблем арифметической теории квадратичных форм является задача построения формул для числа представлений X формы A формой Q, т.е. нахождение количества решений матричного уравнения

$$Q[X] = {}^tXQX = A, \tag{1}$$

где Q и A — целые симметрические положительно определенные матрицы размерностей $n > m \geqslant 1$ и X пробегает множество $n\times m$–матриц с целыми коэффициентами $M_{n,m}(\mathbb{Z})$.

В статье рассматриваются деформации [1] матричных квадратичных уравнений (1). Удобно отождествить квадратичные формы с их матрицами и говорить только о квадратичных формах.

Специализация квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$ с фиксированным блоком A' переводит уравнение (1) в уравнения того же вида $K'[Y] = A''$ и сохраняет формулу веса [2] для количества примитивных представлений $\mathrm{pr}\,(A, Q_i, G)$ формы A положительно определенными формами Q_i рода $[Q]$, сцепляющих A с формой G:

$$\sum_{i=1}^{h(Q)} \frac{\mathrm{pr}\,(A, Q_i; G)}{o(Q_i)} = \mathrm{std}\,(n-m)\alpha_2(A, Q; G) \prod_{p|\ |A||Q|, p\neq 2} \alpha_p(A, Q; G). \tag{2}$$

В формуле (2) $o(Q_i)$ обозначают порядки групп автоморфизмов для всех форм Q_i из рода $[Q]$ формы Q, функция $\mathrm{std}\,(n-m)$ — стандартный вес рода $[G]$, а произведение локальных множителей $\alpha_p(A, Q; G)$ дает отклонение от этого веса.

Используемый метод деформации позволяет из одной известной формулы для числа представлений получать единым методом бесконечно много других формул для уравнений и систем с меньшим числом переменных. При этом полученные индивидуальные уравнения и системы уравнений являются проекциями рассматриваемой "материнской" системы $Q[X] = A$ при фиксировании блока A', а число представлений $\mathrm{pr}\,(A'', K'; G)$ получается как специализация единой формулы для веса [2]. Если представления $X' : Q[X'] = A'$ образуют одну орбиту относительно группы автоморфизмов $O_{\mathbb{Z}}(Q)$, то в этом случае полностью решается вопрос о числе решений деформированного матричного квадратичного уравнения $K'[Y] = A''$.

Суть метода деформации [1] поясним на примере формы $Q = 1_6$ и тернарной формы A бесквадратного определителя. Вес представлений вычисляется по формуле (13.34) работы [2]:

$$\frac{\mathrm{pr}\,(A, Q; G)}{o(Q)} = \frac{1}{6}\alpha_2(A, Q; G) \prod_{p|\ |A|, p\neq 2} (p + \epsilon_1(A)), \qquad (3)$$

где $\epsilon_1(A)$ – знак единичной составляющей жорданова разложения A над кольцом целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$.

Рассмотрим специализацию $A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$ с блоком $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и с блоком A'' размерности $\dim A'' = 1$. Представления $Q[X'] = A'$ имеют одну орбиту X' с представителем

$${}^tX' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для X' ортогональным дополнением служит форма с матрицей Грама

$$K' = 1_3 \oplus 3.$$

Тогда методом деформации получается следующий известный результат:

для бесквадратного A'', не делящегося на 3, система (1) преобразуется в диофантово уравнение вида

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 3y_4^2 = A'',$$

имеющее число целых решений

$$r(A''; K') = 8\alpha_2(A; Q)\left(3 - \left(\frac{A''}{3}\right)\right) \prod_{p|A'', p\neq 2,3} \left(p + \left(\frac{3}{p}\right)\right), \qquad (4)$$

где множитель $\alpha_2(A;Q)$ вычисляется по формулам (5.4)–(5.6) (см. §5 данной работы).

Другая специализация формы A с блоком $A' = 6$ приводит к иным квадратичным формам. Теперь множество решений матричного уравнения $Q[X'] = A'$ имеет две орбиты с представителями

$$ {}^tX'_I = (211000) \quad \text{и} \quad {}^tX'_{II} = (111111). $$

Ортогональные дополнения к ним

$$ K'_I = 1_3 \oplus 2 \oplus 3 \quad \text{и} \quad K'_{II} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} $$

принадлежат разным родам: $K'_I \in [K'_I]$ – нечетному роду, а $K'_{II} \in [K'_{II}]$ – четному роду. Для сцепляющей формы G имеются две возможности G_I или G_{II} и, в зависимости от их выбора, формула (3) преобразуется к виду

$$ r(A'', K'_I; G) = 6\left(3 + \left(\frac{|A''|}{3}\right)\right) \prod_{p\,|\,|A''|, p\neq 2,3} \left(p + \left(\frac{6}{p}\right)\epsilon_1(A'')\right) \qquad (5) $$

или

$$ r(A'', K'_{II}; G) = 30\left(3 + \left(\frac{|A''|}{3}\right)\right) \prod_{p\,|\,|A''|, p\neq 2,3} \left(p + \left(\frac{6}{p}\right)\epsilon_1(A'')\right). \qquad (6) $$

Левые части равенств (5), (6) обозначают число целых решений уравнений $K'_i[Y] = A'' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$, равносильных системе диофантовых уравнений

$$ \begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_4^2 + 3y_5^2 & = a_1, \\ y_1y_6 + y_2y_7 + y_3y_8 + 2y_4y_9 + 3y_5y_{10} & = a_2, \\ y_6^2 + y_7^2 + y_8^2 + 2y_9^2 + 3y_{10}^2 & = a_3, \end{cases} $$

для K_I', а для формы K_{II}' — соответственно системе

$$\begin{cases} 2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2+2y_5^2+2y_1(y_2+y_3+y_4+y_5)+ & \\ 2y_2(y_3+y_4+y_5)+2y_3(y_4+y_5)+2y_4y_5 & =a_1, \\ 2(y_1y_6+y_2y_7+y_3y_8+y_4y_9+y_5y_{10})+y_1(y_7+y_8+y_9+ & \\ y_{10})+y_2(y_6+y_8+y_9+y_{10})+y_3(y_6+y_7+y_9+y_{10})+ & \\ +y_4(y_6+y_7+y_8+y_{10})+y_5(y_6+y_7+y_8+y_9) & =a_2, \\ 2y_6^2+2y_7^2+2y_8^2+2y_9^2+2y_{10}^2+2y_6(y_7+y_8+y_9+y_{10})+ & \\ +2y_7(y_8+y_9+y_{10})+2y_8(y_9+y_{10})+2y_9y_{10} & =a_3. \end{cases}$$

Остановимся на кратком содержании данной работы. В §1 определяются ортогональные дополнения K и инверсные к ним формы G, участвующие в формуле веса, для квадратичных форм Q кубических решеток $\mathbb{Z}^n$ размерностей $n \leqslant 8$. Для форм вида $A = A' \oplus A''$ установлена связь между числом примитивных представлений $\mathrm{pr}\,(A, Q; G)$ формы A формой Q и числом примитивных представлений $\mathrm{pr}\,(A'', K_i'; G)$ формы A'' формами K_i', где K_i' – формы, ортогональные представлениям $X' : Q[X'] = A'$.

В §§2, 3 рассматриваются минимальные локальные вложения форм A в Q над $\mathbb{Z}_p$. Если определители A и Q взаимно простые, то при вложении над локальным кольцом $\mathbb{Z}_p$, $p \neq 2$, ортогональные дополнения K определяются формами Q и A однозначно. Представление A формой Q над кольцом $\mathbb{Z}_2$ становится проблемой даже в условиях взаимной простоты определителей, потому что имеет место ветвление вложений.

В §4 вычисляется орбитальная масс-формула для веса орбит $\{X'\}$ примитивных представлений $Q[X'] = A'$ с ортогональными дополнениями $K' \perp X'$ из рода $[K']$ и вычисляется порядок группы автоморфизмов ортогонального дополнения K'.

В §§5, 6 приводятся примеры конкретных диофантовых систем, демонстрирующие возможности метода деформации. Найдены формы K' из одноклассных и многоклассных родов при вложении одномерных и двумерных форм A' в $Q = 1_6$ небольших определителей. Путем деформации системы $Q[X] = A$ через специализацию формы $A = A' \oplus A''$ получены формулы для веса представлений формы A'' формами K_i'. Последний §6 освещает многоорбитные представления с ортогональными дополнениями K' из разных родов. Разводя эти формы по разным родам, удалось получить представления только одним родом.

Основные результаты собраны в таблицы.

Ранее формулы веса представлений формы одноклассным (многоклассным) родом форм, полученных в результате деформации, были рассмотрены в [3].

§1. Ортогональные дополнения K и инверсные к ним формы G

1.1. Предположим, что форма A примитивно представляется квадратичной формой Q над $\mathbb{Z}_p$, т.е. существует целая $n \times m$-матрица b с условием

$$Q[b] = {}^t bQb = A \tag{1.1}$$

и при этом b примитивна, потому что наибольший общий делитель ее миноров порядка m равен единице кольца $\mathbb{Z}_p$.

Свойство примитивности равносильно существованию расширенной матрицы $B = (b|e)$ из унимодулярной группы $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ и, следовательно, форма Q эквивалентна $Q \sim Q_B$ относительно $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ целой форме

$$Q_B = Q[B] = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & Q' \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Рациональное преобразование $M_C = \begin{pmatrix} 1_m & -A^{-1}C \\ 0 & 1_{n-m} \end{pmatrix}$ разлагает Q_B в прямую сумму

$$Q_B[M_C] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & G' \end{pmatrix} = A \oplus G' \tag{1.3}$$

форм A и $G' = Q' - A^{-1}[C]$. Левую и правую часть равенства (1.3) умножим на ступень a формы A и получим разложение

$$aQ_B[M_C] = \begin{pmatrix} aA & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad G = aQ' - E[C] \tag{1.4}$$

— целая симметрическая невырожденная матрица порядка $k = n-m > 0$ и матрица $E = aA^{-1}$ также целая. Ступенью матрицы A называется наименьшее положительное целое число a с условием, что матрица aA^{-1} целая. Блок Q' целый, поэтому C содержится в множестве решений матричного уравнения

$$E[C] \equiv -G \pmod{a},\ C \in M_{m,k}(\mathbb{Z}_p). \tag{1.5}$$

Обратно, пусть для матрицы G выполняется матричное сравнение (1.5), тогда форма

$$Q^A_G(C) = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} aA & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}[M_C^{-1}] = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & \frac{1}{a}(E[C]+G) \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

будет целой и эквивалентной исходной форме Q. Отметим, что из разложения (1.4) вытекает независимость определителя

$$|G| = \frac{a^{n-m}|Q|}{|A|} \tag{1.7}$$

формы G от выбора примитивного представления b.

1.2. Примитивному представлению формы A отвечает примитивное вложение решетки

$$M_A = \left\{ x = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} : x' \in M_{m,1}(\mathbb{Z}_p) \right\} \overset{\mathrm{pr}}{\hookrightarrow} M_Q = M_{n,1}(\mathbb{Z}_p)$$

с сохранением значений квадратичных форм $Q[x] = A[x']$. Обозначим через $M_K = M_A^{\perp}$ ортогональную к M_A подрешетку из M_Q. Принадлежность $y = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}$ решетке M_K с y' и y'' высоты m и $k = n - m$ соответственно равносильна условию

$$y' = -A^{-1}Cy''. \tag{1.8}$$

Определим подрешетку L из $M = M_{k,1}(\mathbb{Z}_p)$ решений матричного сравнения

$$A^{-1}CX \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}_p}. \tag{1.9}$$

Выберем некоторый базис подрешетки L и возьмем его в качестве столбцов матрицы B. Тогда $L = BM$ и, в силу (1.8) и (1.9), $M_K = \begin{pmatrix} -A^{-1}C \\ 1_k \end{pmatrix} BM$, где $B_1 = A^{-1}CB$ из $M_{m,k}(\mathbb{Z}_p)$ и $CB = AB_1$. Теперь, используя выбранный базис и равенства (1.2) и (1.6), находим для решетки M_K ее матрицу Грама

$$K = \frac{1}{a}G[B]. \tag{1.10}$$

В силу сказанного и равенства (1.7), матрица K имеет ненулевой определитель

$$|K| = \frac{|Q| \cdot |B|^2}{|A|} \in \mathbb{Z}_p. \tag{1.11}$$

Согласно (1.2), ${}^tCA^{-1}C \equiv -\frac{1}{a}G \,(\mathrm{mod}\, \mathbb{Z}_p)$ и поэтому $\frac{1}{a}GB \equiv -{}^tCA^{-1}CB \equiv -{}^tCB_1 \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}_p}$, откуда выводим

$$U = \frac{1}{a}GB \in M_k(\mathbb{Z}_p), \quad \text{где} \quad |U| = |Q| \cdot |B|/|A|. \tag{1.12}$$

Выражая матрицу B из равенства (1.12) и подставляя ее в (1.10), заключаем

$$K = aG^{-1}[U], \quad \text{где} \quad |K| = |A| \cdot |U|^2/|Q|. \tag{1.13}$$

1.3. Пусть $\mathbb{Z}_p$ – локальное кольцо. Из леммы (6.1) [2] заключаем, что определитель $|U|$ целой матрицы U делит в кольце $\mathbb{Z}_p$ определитель $|Q|$, если p не делит $|Q|$. Таким образом, из равенства (1.13) вытекает эквивалентность над $\mathbb{Z}_p$

$$K \sim_p aG^{-1}, \quad \text{если} \quad p \not| \, |Q|. \tag{1.14}$$

Предположим, что определители $|A|$ и $|Q|$ взаимно простые. Если p не делит $|Q|$, то, по (1.13), $K \sim_p |A|/|Q| \sim_p |A| \cdot |Q|$. Сокращение $a \sim_p a'$ означает $a = \epsilon^2 a'$ для некоторой единицы ϵ из $\mathbb{Z}_p^\times$. Если же p делит $|Q|$, то $p \nmid |A|$ и ввиду определения (1.9) подрешетка L совпадает со всей решеткой M. Матрицу B можно выбрать единичной и по (1.11) снова имеем $|K| \sim_p |A| \cdot |Q|$. Отсюда вытекает равенство

$$|K| = |A| \cdot |Q|, \tag{1.15}$$

если $|A|$ и $|Q|$ не имеют общих делителей.

1.4. Рассмотрим представление

$$Q[X] = {}^tXQX = A \tag{1.16}$$

формы $A = A' \oplus A''$. Тогда матричное уравнение (1.16) распадается в систему

$$\begin{cases} Q[X'] & = A' \\ Q[X''] & = A'' \\ {}^tX'QX'' & = 0, \end{cases} \tag{1.17}$$

где матрица $X = (X'X'')$ разбита на блоки соответствующим образом.

Пусть форма Q положительно определенная и определители форм Q,A' и A'' попарно взаимно простые. Обозначим $\mathrm{pr}\,(A, Q; G)$

количество примитивных представлений $X(1.16)$, для которых $K = K_X$ – ортогональное дополнение $K \perp X$ – удовлетворяет условию (1.13). В.Г. Журавлевым в [1] установлена связь между числом примитивных представлений $\mathrm{pr}\,(A, Q; G)$ формы A формой Q и числом примитивных представлений $\mathrm{pr}\,(A'', K_i'; G)$ формы A'' формами K_i':

$$\frac{\mathrm{pr}\,(A, Q; G)}{o(Q)} = \sum_{[K']} \sum_{\{K_i'\} \in [K']} \left(\sum_{\{X'\} \longrightarrow K_i'} \mathrm{stab}\,(X')^{-1} \right) \mathrm{pr}\,(A'', K_i'; G), \tag{1.18}$$

где X' пробегает все примитивные представления $Q[X'] = A'$, $K' = K'_{X'} \perp X'$ – ортогональное дополнение к X', $o(Q)$ и $\mathrm{stab}\,(X')$ – порядки группы $O(Q)$ и стабилизатора $\mathrm{Stab}\,(X')$, т.е. подгруппы тех $T \in O(Q)$, для которых $TX' = X'$. Здесь $[K']$ пробегает все роды форм $K' \perp X'$, и запись $\{X'\} \longrightarrow \{K_i'\}$ означает принадлежность формы $K'_{X'}$ классу $\{K_i'\}$.

Будем говорить, что два целых вектора X и X^* лежат на одной орбите относительно $O(Q)$, если существует $T \in O(Q)$, для которого $X^* = TX$. Общее число элементов $|\{X'\}|$ орбиты $\{X'\}$ равно

$$|\{X'\}| = \frac{o(Q)}{\mathrm{stab}\,(X')}, \tag{1.19}$$

где $\mathrm{stab}\,(X')$ – порядок стабилизатора $\mathrm{Stab}\,(X')$.

При условии одноклассности рода $[Q]$ выражение слева из (1.18) есть вес представлений формы A родом $[Q]$, ассоциированных с родом $[G]$.

§2. Вложения над локальными кольцами при $p \neq 2$

2.1. Инварианты квадратичных форм записываются p-адическими символами [4]. При этом следует различать нечетные простые p и $p = 2$.

В случае нечетного p для невырожденной формы (симметрической матрицы) $A \in M_m(\mathbb{Z}_p)$ p-адический символ соглсно [4] имеет вид:

$$p_A = \prod_q q^{\epsilon_q(A) n_q(A)}, q = p^\alpha, \alpha = 0, 1, 2, \ldots$$

Это означает, что матрица A имеет над $\mathbb{Z}_p$ жорданово разложение $A \sim {}_p \sum_q qA_q$, где формы A_q являются единицами над $\mathbb{Z}_p$

размерности $n_q(A)$ и знака $\epsilon_q(A) = \left(\frac{|A_q|}{p}\right)$. Слагаемые qA_q называются жордановыми составляющими масштаба q.

2.2. Пусть p – простое нечетное число, не делящее $|Q|$. По теории приведения над $\mathbb{Z}_p$ (см. [5]), можем считать форму A представленной в виде прямой суммы

$$A = A_1 \oplus A_{\geqslant p},$$

где блок A_1 имеет максимальную размерность с условием $|A_1| \not\equiv 0 \pmod p$. Обозначим $a = p^\alpha$ ступень формы A над $\mathbb{Z}_p$. При этих предположениях целая форма G из сравнения (1.5) должна удовлетворять ограничению

$$G \sim_p \begin{pmatrix} -aA_{\geqslant p}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \pmod a. \tag{2.1}$$

Поэтому будем считать, что

$$G = G_{<a} \oplus aG_a \quad \text{с блоком} \quad G_{<a} = -aA_{\geqslant p}^{-1}. \tag{2.2}$$

2.3. Множество $C_G^A = c_G^A / \operatorname{mod} A$ содержит единственную орбиту $\{C\}$ из классов $CS/\operatorname{mod} A$, где S пробегает группу целых автоморфизмов $O_{\mathbb{Z}_p}(G)$. В терминах примитивных представлений $Q[X] = A$ все решения X образуют одну $O_{\mathbb{Z}_p}(Q)$ - орбиту $\{X\}$ над кольцом $\mathbb{Z}_p$. Согласно (1.5), орбита $\{C\}$ содержит представителя $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. С учетом равенств (1.5),(2.1) и (2.2) форма Q' примет вид

$$\begin{aligned} Q' = \frac{1}{a}(E[C] + G) &= \frac{1}{a}\left(\begin{pmatrix} aA_{\geqslant p}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} G_{<a} & 0 \\ 0 & aG_a \end{pmatrix} \Bigg) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_a \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Тогда, по (1.6), форма Q распадется в следующую прямую сумму

$$\begin{aligned} Q = Q_G^A(C) = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & Q' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{\geqslant p} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_a \end{pmatrix} \\ &= A_1 \oplus J(A_{\geqslant p}) \oplus G_a, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $J(A_{\geqslant p}) = \begin{pmatrix} A_{\geqslant p} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ — минимальное вложение формы $A_{\geqslant p} \equiv 0 \pmod p$.

2.4. Две квадратичные формы X и Y удовлетворяют неравенству $X \geqslant Y$, если $X \sim_p Y \oplus W$ для некоторой формы W. Разность $X \ominus Y$ обозначает любую из форм W, определяемую формами X и Y однозначно для нечетного p и, в общем случае, неоднозначно для $p = 2$.

2.5. Обозначим через $J(A)$ прямую сумму форм $A_1 \oplus J(A_{\geqslant p})$. Разложения (2.1) и (2.4) показывают, что с точностью до эквивалентности $\sim_p$ форма G однозначно определяется формами A и Q. Для нее имеет место разложение

$$G = -aA_{\geqslant p}^{-1} \oplus a(Q \ominus J(A)). \tag{2.5}$$

Аналогичное разложение можно записать и для формы $K = A^{\perp}$, ортогональной к A. Поскольку $(Q \ominus J(A))^{-1} \sim_p Q \ominus J(A)$, то из равенств (1.13) и (2.5) заключаем

$$K = (Q \ominus J(A)) \oplus (-A_{\geqslant p}). \tag{2.6}$$

§3. Одномерный случай при вложении над кольцом $\mathbb{Z}_2$

Представления формы A формой Q над кольцом $\mathbb{Z}_2$ начинают ветвиться и сильно зависят от характеристик форм A и Q.

3.1. Локальная классификация квадратичных форм Q над $\mathbb{Z}_2$ существенно сложнее. Это объясняется появлением двух дополнительных инвариантов: четности и странности.

Невырожденная форма $Q \in M_n(\mathbb{Z}_2)$ имеет над $\mathbb{Z}_2$ жорданово разложение $Q \sim_2 \sum_q qQ_q$ с масштабами $q = 2^{\alpha}, \alpha = 0, 1, 2, \dots,$ и формы Q_q являются единицами над $\mathbb{Z}_2$. Согласно [4], 2-адический символ равен

$$2_Q = \prod_q q_{\xi_q(Q) t_q(Q)}^{\epsilon_q(Q) n_q(Q)}, \tag{3.1}$$

при этом $n_q(Q) = \dim Q_q$ и $\epsilon_q(Q) = \left(\frac{|Q|}{2}\right)$ — соответственно размерность и знак жордановой составляющей qQ_q, где

$$\left(\frac{a}{2}\right) = \begin{cases} +1, & \text{если} \quad a \equiv \pm 1 \pmod 8, \\ -1, & \text{если} \quad a \equiv \pm 3 \pmod 8, \end{cases} \tag{3.2}$$

— символ Якоби–Лежандра; $\xi_q(Q) = I$ или II для нечетной или четной Q_q соответственно и называется типом Q_q, $t_q(Q)$ называется странностью qQ_q. Так, $\xi_q(Q) = I$ тогда и только тогда, когда на главной диагонали Q_q существует нечетный элемент, и II в противном случае. Если Q_q (типа I) была диагонализирована, то $t_q(Q)$ является ее следом, взятым по модулю 8. Если Q_q имеет тип II, то $t_q(Q) = 0$. Запись Q_{II} означает четность формы Q, а запись Q_I — нечетность.

3.2. К несчастью, форма может иметь несколько существенно различных жордановых разложений, а значит, и несколько различных 2-адических символов. Поэтому, наряду с 2-символом будем использовать понятие канонического символа 2_Q^{can}; подробности по этому поводу см. в [4].

Предположим, что форма Q имеет 2-адический символ (3.1). Назовем интервалом форм все, в том числе имеющие и размерность нуль, формы qQ_q, для которых $q_1 \leqslant q \leqslant q_2$, где q_1, q_2 являются степенями числа 2. Купе называется максимальный интервал, в котором все формы имеют тип I. Поездом называется максимальный интервал, из каждой пары соседних форм которого по крайней мере одна имеет тип I. Купе заключаются в квадратные скобки, а поезда разделяются двоеточиями. Заметим, что поезда могут иметь несколько купе или не иметь их совсем.

Имеется два способа изменять такие символы, чтобы они все еще представляли 2-адически эквивалентные формы.

1. Слияние странностей. Два 2-адических символа представляют одну и ту же форму, если эти символы отличаются только странностями, причем общая сумма в каждом купе совпадает. Значит, можем заменить отдельные показатели странности в купе полным показателем (по модулю 8), записанным как нижний индекс при всем купе.

2. Проход знаков. Форма не изменится, если в поезде одновременно поменять знаки ϵ_q в любых двух членах. Это может привести к изменению на 4 некоторых странностей. Изменение суммарной странности сравнимо с $4 \pmod 8$ в точности в том случае, когда число шагов, которое нужно сделать вдоль купе, является нечетным.

Используя перечисленные правила, можем добиться, чтобы в поезде был самое большое один знак минус, который может относиться к любой форме с размерностью, отличной от нуля. Удобно полагать, что этот минус относится к первой форме в поезде, имеющей ненулевую размерность. Если выполняется это соглашение и задаются только суммарные странности купе, то получающийся символ единственен и может рассматриваться как канонический символ для формы.

Две формы 2-адически эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают их канонические p-символы:

$$Q \sim_2 Q' \Leftrightarrow 2_Q^{can} = 2_{Q'}^{can}. \tag{3.3}$$

В дальнейшем будет важно уметь определять какие из систем инвариантов соответствуют некоторым существующим квадратичным формам. Условия существования для каждой жордановой составляющей qQ_q размерности n со знаком ϵ для $p \neq 2$ таковы:

$$\text{если} \quad n = 0, \quad \text{то} \quad \epsilon = +;$$

для $p = 2$:

$$\text{если} \quad n = 0, \quad \text{то} \quad \xi = II \quad \text{и} \quad \epsilon = +,$$

$$\text{если} \quad n = 1, \quad \text{то} \quad \begin{cases} \epsilon = + \ \Rightarrow \ t \equiv \pm 1 \pmod 8, \\ \epsilon = - \ \Rightarrow \ t \equiv \pm 3 \pmod 8, \end{cases}$$

$$\text{если} \quad n = 2 \quad \text{и} \quad \xi = I, \quad \text{то}$$

$$\begin{cases} \epsilon = + \ \Rightarrow \ t \equiv 0 \quad \text{или} \quad \pm 2 \pmod 8, \\ \epsilon = - \ \Rightarrow \ t \equiv 4 \quad \text{или} \quad \pm 2 \pmod 8). \end{cases} \tag{3.4}$$

В случае произвольного n имеем $t \equiv n \pmod 2$ и $t \equiv 0 \pmod 8$ для типа II, так что для нечетного n тип жордановой составляющей есть I.

3.3. Пусть $p = 2$ не делит $|Q|$ и $a = 2^\alpha$ будет ступенью формы $A = A_1 \oplus A_{\geqslant p}$. В сравнении (1.5) $C \bmod A$ можем выбрать в виде $\begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}$, тогда, по (1.6):

$$Q = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & Q' \end{pmatrix} = A_1 \oplus \begin{pmatrix} A_{\geqslant p} & C \\ {}^tC & Q' \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

с блоком $Q' = (E[C]+G)/a$ и $E = aA_{\geqslant p}^{-1}$. В частности, если $A = A_1$, то из разложения (3.5) и (1.13) сразу выводим

$$G = G_1 = Q \ominus A_1, \ K = Q \ominus A_1. \tag{3.6}$$

Общий случай формула (3.5) сводит к форме $A = A_{\geqslant p}$, т.е. $A \equiv 0 \pmod 2$. Согласно [2], с точностью до эквивалентности над $GL(\mathbb{Z}_2)$, имеет место матричное сравнение

$$G \overset{*}{\equiv} \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \pmod a, \tag{3.7}$$

где знак $\overset{*}{\equiv}$ обозначает обычное сравнение для нечетных форм Q_I и сравнение с дополнительным условием — четности диагонали — для четных форм Q_{II}.

3.4. Рассмотрим нетривиальный одномерный случай $A = 2A_2$, где размерность блока $\dim A_2 = 1$, со ступенью $a = 2$, $E = A_2^{-1} \equiv 1 \pmod 2$ и $E \equiv A_2 \pmod 8$.

Сравнения (3.7) налагают на форму G следующие ограничения: $G = G_1 \oplus 2G_2$, $\dim G_1 = 1$ и G_1 – нечетное число. В сравнении (1.5) в качестве $C \bmod 2$ возьмем $C = (10)$. По (3.5), имеем разложение

$$Q = \begin{pmatrix} 2A_2 & 1 & 0 \\ 1 & (A_2 + G_1)/2 & 0 \\ 0 & 0 & G_2 \end{pmatrix} = J(2A_2) \oplus G_2 \tag{3.8}$$

с минимальным для формы $A = 2A_2$ вложением

$$J(2A_2) = \begin{pmatrix} 2A_2 & 1 \\ 1 & (A_2 + G_1)/2 \end{pmatrix}.$$

Прямым вычислением находим все инварианты формы $J(2A_2)$:

$$\begin{aligned} \dim J = 2,\ |J| &\equiv A_2^2 + A_2G_1 - 1 \equiv A_2G_1 \pmod 8, \\ J = J_I, &\quad \text{если} \quad A_2 + G_1 \not\equiv 0 \pmod 4, \\ t(J_I) &\equiv (A_2 + G_1)(1 + A_2G_1)/2 \pmod 8 \quad \text{или} \\ J = J_{II}, &\quad \text{если} \quad A_2 + G_1 \equiv 0 \pmod 4,\ t(J_{II}) = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Удобно записать инварианты в виде таблицы 1. В первой строке указаны 2-символы блоков G_1, в первом столбце — форм $A = 2A_2$, а на пересечении симметрично относительно главной диагонали расположены 2-символы двумерных форм $J(2A_2)$ из разложения (3.8).

Таблица 1.

$J(2A_2)$	$1^{+1}_{I,1}$	$1^{-1}_{I,5}$	$1^{-1}_{I,3}$	$1^{+1}_{I,7}$
$2^{+1}_{I,1}$	$1^{+2}_{I,2}$	$1^{-2}_{I,2}$	1^{-2}_{II}	1^{+2}_{II}
$2^{-1}_{I,5}$	$1^{-2}_{I,2}$	$1^{+2}_{I,2}$	1^{+2}_{II}	1^{-2}_{II}
$2^{-1}_{I,3}$	1^{-2}_{II}	1^{+2}_{II}	$1^{+2}_{I,6}$	$1^{-2}_{I,6}$
$2^{+1}_{I,7}$	1^{+2}_{II}	1^{-2}_{II}	$1^{-2}_{I,6}$	$1^{+2}_{I,6}$

Возвращаясь к более общему случаю $A = A_1 \oplus 2A_2$, $\dim A_2 = 1$, обозначим $J(A) = A_1 \oplus J(2A_2)$. Из (1.13), (3.5) и (3.8) выводим разложения

$$G = G_1 \oplus 2(Q \ominus J(A)),\ K = (Q \ominus J(A)) \oplus 2G_1, \tag{3.10}$$

где одномерный блок G_1 может быть любым нечетным числом, а $J(A)$ вычисляется по A_1 и таблице 1.

§4. Порядки групп автоморфизмов ортогональных дополнений

Две примитивные квадратичные формы данного дискриминанта принадлежат одному роду, если они рационально эквивалентны [5]. Необходимым и достаточным условием принадлежности двух квадратичных форм одному роду является совпадение всех их p–символов [4].

4.1. Будем исходить из формы Q, примитивно представляющей форму A' с взаимно простым с $|Q|$ определителем $|A'|$. Если $Q[X'] = A'$, то обозначим через $K' = K'_{X'}$ ортогональную к представлению X' форму, и пусть ее род разбит на классы $[K'] = \bigcup_i \{K'_i\}$. Принадлежность формы $K'_{X'}$ классу $\{K'_i\}$ изображаем стрелкой $\{X'\} \to \{K'_i\}$. Пусть $C(A', Q; G_i)$ обозначает множество решений $C \bmod A'$ сравнения

$$E[C] \equiv -G_i \pmod{a}, \tag{4.1}$$

где $E = a(A')^{-1}$, $\{G_i\}$ соответствуют классу $\{K'_i\}$ и форма (1.6) $Q^{A'}_{G_i}$ эквивалентна форме Q. По [2], для $\{X'\}$ существует биекция

$$\{X'\} \longrightarrow \{C\} \tag{4.2}$$

с орбитами $\{C\} = \{CS \bmod A' : S \in O_{\mathbb{Z}}(G_i)\}$ решений C из множества $C(A', Q; G_i)$. Порядок орбиты $\{C\}$ равен

$$|\{C\}| = o(G_i)/\mathrm{stab}\,(C), \tag{4.3}$$

где $\mathrm{Stab}\,(C)$ — стабилизатор, состоящий из автоморфизмов S группы $O_{\mathbb{Z}}(G_i)$, таких, что $CS = C \pmod{A'}$. Биекция (4.2) между орбитами подымается до изоморфизма их групп стабилизаторов

$$\mathrm{Stab}\,(X') \to \mathrm{Stab}\,(C). \tag{4.4}$$

Разбивая решения $C(A', Q; G_i)$ на орбиты $\{C\}$ и затем используя (4.3) и (4.4), приходим к равенству

$$c(A', Q; G_i) = \sum_{\{X'\} \longrightarrow \{K'_i\}} o(G_i)\mathrm{stab}\,(X')^{-1}.$$

Из последнего равенства возникает следующая сумма:

$$\sum_{\{X'\} \longrightarrow \{K'_i\}} \mathrm{stab}\,(X')^{-1} = c(A', Q; G_i)o(G_i)^{-1}. \tag{4.5}$$

Это равенство есть орбитальная масс-формула для веса орбит $\{X'\}$ примитивных представлений $Q[X'] = A'$ с ортогональными дополнениями $K'_{X'}$ из класса $\{K'_i\}$. Формула (4.5) справедлива только при условии существования представлений X'.

4.2. Число решений $c(A', Q; G)$ сравнения (4.1) для форм Q из одноклассного рода факторизуется

$$c(A', Q; G) = \prod_{p|a} c_p(A', Q; G). \tag{4.6}$$

Множители $c_p(A', Q; G)$ представляют собой число решений $C \bmod A'\mathbb{Z}_p$ сравнений

$$E[C] \equiv -G \pmod{p^\alpha \mathbb{Z}_p} \tag{4.7}$$

с условием $Q_G^{A'}(C) \sim {}_pQ$, где p^α – наибольшая степень, входящая в ступень a формы A'.

Для нечетных p в [2] доказано, что

$$c_p(A', Q; G) = o(q(A')), \tag{4.8}$$

где $o(q(A'))$ — порядок группы автоморфизмов $O(q(A'))$, состоящей из матриц $U \bmod A_{\geqslant p}$ из $GL(\mathbb{Z}_p)$ с условием $A_{\geqslant p}^{-1}[U] \equiv A_{\geqslant p}^{-1}$ $(\mathrm{mod}\ \mathbb{Z}_p)$, где $A' = A_1 \oplus A_{\geqslant p}$.

Для $p = 2$ рассматриваются только нечетные формы $Q = 1_n$, $n \leqslant 8$. Формулы, полученные в результате вычислений, объединяет

Лемма 1. *Если форма $A' = A_1 \oplus A_{\geqslant p}$ имеет определитель $|A'|$, взаимно простой с $|Q|$, то для числа решений $c_p(A', Q; G)$ сравнения (4.7) выполняются следующие равенства:*

$$c_p(A', Q; G) = 2, \quad \text{если} \quad A_{\geqslant p} = p^\alpha A_{p^\alpha}, \dim A_{p^\alpha} = 1 \tag{4.9}$$

для p нечетного;

$$c_2(A', Q; G) = 1, \quad \text{если} \quad |A'| \not\equiv 0 \pmod 2 \tag{4.10}$$

для $p = 2$ и любой формы Q;

$$c_2(A', Q; G) = 1, \quad \text{если} \quad A_{\geqslant 2} = 2A_2, \dim A_2 = 1, n \geqslant 3 \tag{4.11}$$

для $Q = 1_n$, $n \leqslant 8$.

4.3. Просуммируем равенства (4.5) по всем классам $\{K_i'\}$ произвольного рода $[K']$ ортогональных дополнений K_i' примитивных представлений $Q[X'] = A'$:

$$\sum_{\{K_i'\} \in [K']} \sum_{\{X'\} \to \{K_i'\}} \mathrm{stab}\,(X')^{-1} = \sum_{\{G_i\} \to [G]} c(A', Q; G_i) o(G_i)^{-1}. \tag{4.12}$$

Для форм Q из одноклассного рода ввиду (4.6) и (4.7) множители $c(A', Q; G_i)$ зависят лишь от локальных характеристик G_i над $\mathbb{Z}_p$, т.е. от рода $[G]$. Сумму из $o(G_i)^{-1}$ для всех классов рода $[G]$ можно заменить на массу

$$m(K') = \sum_{\{K_i'\} \in [K']} o(K_i')^{-1} \tag{4.13}$$

рода $[K']$, так как формы G_i и K_i' имеют изоморфные группы автоморфизмов в силу эквивалентности (1.13).

Теорема 1. *В условиях одноклассности рода формы Q и взаимной простоты определителей $|Q|$ и $|A'|$ выполняется орбитальная масс–формула*

$$\sum_{\{X'\} \to [K']} \mathrm{stab}\,(X')^{-1} = c(A', Q; G) m(K'), \tag{4.14}$$

если классы ортогональных дополнений $K'_{X'} \perp X'$ примитивных представлений $X' : Q[X'] = A'$ образуют полный род $[K']$. Множитель $c(A', Q; G)$ вычисляется по формуле (4.6) и лемме 1.

Следствие. *Если примитивные представления $X' : Q[X'] = A'$ образуют одну орбиту $\{X'\}$, где формы Q и A' имеют взаимно простые определители, то порядок группы автоморфизмов ортогонального дополнения $K' \perp X'$ вычисляется по формуле*

$$o(K') = c(A', Q; G)\mathrm{stab}\,(X'). \tag{4.15}$$

§5. Представление тернарной формы A формой $Q = 1_6$ из одноклассного рода

Рассмотрим представление $Q[X] = A$ формой $Q = 1_6$ тернарной формы A бесквадратного определителя $a = \det A$. Вес представлений выражается формулой

$$\frac{\mathrm{pr}\,(A, Q; G)}{o(Q)} = \frac{1}{6}\alpha_2(A, Q; G) \prod_{p|\,|A|, p\neq 2} (p + \epsilon_1(A)), \tag{5.1}$$

где $\epsilon_1(A)$ – знак единичной составляющей жорданова разложения A над кольцом целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$.

5.1. Специализацией возьмем форму $A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$ с блоком $A' = 7$. Определители форм Q, A' и A'' попарно взаимно простые.

Координатной записью уравнения $Q[X'] = A'$ является диофантово квадратичное уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 7. \tag{5.2}$$

Множество решений уравнения (5.2) образует одну орбиту $\{X'\}$ с представителем ${}^tX' = (211100)$, порядок стабилизатора вычисляем непосредственно и получаем $\mathrm{stab}\,(X') = 2!3!2^2 = 48$. Выбирая минимальный базис, находим ортогональное дополнение $K' \perp X'$ – форму с матрицей Грама:

$$K' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1_2 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ортогональное дополнение K' имеет определитель $\det K' = \det A' = 7$ и следующие p-символы: $2_{K'} = 1^{+5}_{I,7}$, $7_{K'} = 1^{-4}7^{-1}$.

Согласно равенству (5.1), вес представлений равен

$$\frac{\mathrm{pr}\,(A,Q;G)}{o(Q)} = \frac{1}{6}\alpha_2(A;Q)\left(7+\left(\frac{|A''|}{7}\right)\right)$$
$$\times \prod_{p|\,|A''|,p\neq 2,7}\left(p+\epsilon_1(A'')\left(\frac{7}{p}\right)\right), \qquad (5.3)$$

где $\epsilon_1(A'')$ — знак жордановой составляющей A''_1.

В данном случае форма A'' бесквадратного определителя имеет над $\mathbb{Z}_p(p\neq 2,A')$ жорданово разложение:

$$A'' \sim_p A''_1 \oplus pA''_p, \quad \text{если} \quad p|\,|A''|, \quad \text{или}$$
$$A'' \sim_p A''_1, \quad \text{если} \quad p \not|\,|A''|.$$

Тогда p–адический символ $(p\neq 2,A')$ примет вид

$$p_{A''} = 1^{\epsilon_1(A'')1}p^{\epsilon_p(A'')1}, \quad \text{где} \quad \epsilon_1(A'') = \left(\frac{A''_1}{p}\right) \quad \text{для} \quad p|\,|A''|,$$
$$p_{A''} = 1^{\epsilon_1(A'')2}, \quad \text{где} \quad \epsilon_1(A'') = \left(\frac{|A''|}{p}\right) \quad \text{для} \quad p \not|\,|A''|.$$

Множитель $\alpha_2(A;Q)$ вычисляется по нижеприводимым формулам, где определители форм A и Q совпадают со ступенями a и d самих форм и $n' = n-m-1$:

а) если a – четное число, то для нечетной формы A_I по формуле (13.23) работы [2]

$$\alpha_2(A_I;Q_I) = \frac{1}{4}2^{-n'/2}(2^{n'}+\epsilon_2), \qquad (5.4)$$

где $\epsilon_2 = \left(\frac{a_1(t_1(Q)-t(A))}{2}\right)$, $a_1 = \frac{a}{2}$, а странность $t(A)$ определяется из 2-символа $2_A \sim [1^{+(m-1)}2^{\epsilon(A)1}]_{t(A)}$;

б) если a – четное число, то для четной формы A_{II} по формуле (13.20) работы [2]

$$\alpha_2(A_{II};Q_I) = \frac{1}{4}2^{-n'/2}(2^{n'}+\epsilon_2), \qquad (5.5)$$

где $\epsilon_2 = \left(\frac{a_1(t_1(Q)-t(A))}{2}\right)$, $a_1 = \frac{a}{2}$, а странность $t(A)$ определяется из 2-символа $2_A \sim 1^{+(m-1)}_{II,0}2^{\epsilon(A)1}_{I,t(A)}$;

в) если a — нечетное число, то по формуле (13.31) работы [2]

$$\alpha_2(A;Q_I)=\frac{1}{4}(1\pm 2^{-n'/2})\quad \text{для}\quad \mathrm{oct}\equiv \pm 1\quad \text{или}\quad \pm 3\pmod 8 \tag{5.6}$$

соответственно, где октановое число

$$\mathrm{oct}\equiv t_1(Q)-t_1(A)\pmod 8\quad \text{для}\quad \left(\frac{ad}{2}\right)=+1\quad \text{и}$$

$$\mathrm{oct}\equiv t_1(Q)-t_1(A)+4\pmod 8\quad \text{для}\quad \left(\frac{ad}{2}\right)=-1,$$

а странности $t_1(A)$ и $t_1(Q)$ определяются из 2-символов (3.1) форм A и Q.

В формулах (5.4)–(5.6) предполагается, что форма Q_I нечетная, и разность размерностей форм $n-m\geqslant 3$ нечетная.

В силу равенства (1.18), левая часть равенства (5.3) примет вид

$$\frac{\mathrm{pr}\,(A,Q;G)}{o(Q)}=\frac{\mathrm{pr}\,(A'',K';G)}{\mathrm{stab}\,(X')}. \tag{5.7}$$

По условию, определитель $|A|$ бесквадратный и любое представление $Y:K'[Y]=A''$ примитивное. Это обстоятельство позволяет заменить $\mathrm{pr}\,(A'',K';G)$ на число всех представлений $r(A'',K')$ формы A'' формой K'. Из равенств (5.3) и (5.7) вытекает

Теорема 2. *Для бесквадратного* $\det A''$, *не делящегося на 7, уравнение* $K'[Y]=A''=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_2 & a_3\end{pmatrix}$, *равносильное системе диофантовых уравнений*

$$\begin{cases} y_1^2+y_2^2+2y_3^2+2y_4^2+3y_5^2+2y_3y_4+2y_3y_5 &=a_1,\\ y_1y_6+y_2y_7+2y_3y_8+2y_4y_9+3y_5y_{10} & \\ +y_4y_8+y_5y_8+y_3y_9+y_3y_{10} &=a_2,\\ y_6^2+y_7^2+2y_8^2+2y_9^2+3y_{10}^2+2y_8y_9+2y_8y_{10} &=a_3\end{cases}$$

имеет число целых решений, равное

$$r(A'',K')=8\alpha_2(A;Q)\left(7+\left(\frac{|A''|}{7}\right)\right)\prod_{p|\ |A''|,p\neq 2,7}\left(p+\epsilon_1(A'')\left(\frac{7}{p}\right)\right), \tag{5.8}$$

где $\alpha_2(A;Q)$ *вычисляется по формуле (5.4) или (5.6).*

5.2. Пусть A, целая положительно определенная тернарная форма бесквадратного определителя, равная прямой сумме одномерной формы A' и бинарной формы A'', вкладывается в $Q = 1_6$. Тогда, придавая блоку A' конкретные значения и используя формулу веса (5.1), аналогично п. 5.1 найдем число целых решений систем $K'_i[Y] = A''$. Объединим полученные результаты в следующую таблицу.

Таблица 2

Для $A' = 3$:

$$K' = 1_3 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$r(A'', K') = 48\alpha_2(A;Q)\left(3 + \left(|A''|3\right)\right) \prod_{p|\,|A''|, p\neq 2,3} \left(p + \epsilon_1(A'')\left(\frac{3}{p}\right)\right);$$

для $A' = 15$:

$$K'_1 = 1_2 \oplus 3 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad K'_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} &9r(A'', K'_1) + 4r(A'', K'_2) = \\ &= 24\alpha_2(A;Q)\left(3 + \left(\frac{|A''|}{3}\right)\right)\left(5 + \frac{|A''|}{5}\right)\right) \\ &\times \prod_{p|\,|A''|, p\neq 2,3,5} \left(p + \epsilon_1(A'')\left(\frac{15}{p}\right)\right); \end{aligned}$$

для $A' = 19$:

$$K'_1 = 1_2 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad K'_2 = 1_3 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix},$$

$$K'_3 = 1 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$2r(A'', K_1') + r(A'', K_2') + 12r(A'', K_3') =$$
$$= 16\alpha_2(A;Q)\left(19 + \left(\frac{|A''|}{19}\right)\right)\prod_{p|\ |A''|, p\neq 2,19}\left(p + \epsilon_1(A'')\left(\frac{19}{p}\right)\right);$$

для $A' = 21$:

$$K_1' = 1_2 \oplus 7 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad K_2' = 1_3 \oplus \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$K_3' = 1 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad K_4' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$5r(A'', K_1') + 5r(A'', K_2') + 10r(A'', K_3') + 4r(A'', K_4') =$$
$$= 40\alpha_2(A;Q)\left(3 + \left(\frac{|A''|}{3}\right)\right)\left(7 + \left(\frac{|A''|}{7}\right)\right)$$
$$\prod_{p|\ |A''|, p\neq 2,3,7}\left(p + \epsilon_1(A'')\left(\frac{21}{p}\right)\right);$$

для $A' = 26$:

$$K_1' = 1_4 \oplus 26, \quad K_2' = 1_3 \oplus \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$K_3' = 1 \oplus 2 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad K_4' = 1_2 \oplus 2 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix},$$

$$K_5' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$r(A'', K_1') + 8r(A'', K_2') + 48r(A'', K_3') + 12r(A'', K_4') + 16r(A'', K_5') =$$
$$= 64\alpha_2(A;Q)\left(13 + \left(\frac{|A''|}{13}\right)\right)\prod_{p|\ |A''|, p\neq 2,13}\left(p + \epsilon_1(A'')\left(\frac{26}{p}\right)\right).$$

Множитель $\alpha_2(A;Q)$ вычисляется по формулам (5.4), (5.5) или (5.6).

5.3. Теперь рассмотрим специализацию $A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$ с блоком $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ определителя $|A'| = 13$. Определители форм Q, A' и A'' попарно взаимно простые. Представления $X' : Q[X'] = A'$ распадаются на 2 орбиты с представителями

$$ {}^tX'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad {}^tX'_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, $$

для которых порядки стабилизаторов равны:

$$ \mathrm{stab}\,(X'_1) = 2!2 = 4, \quad \mathrm{stab}\,(X'_2) = 2!2!2^2 = 16. $$

Подбирая минимальные базисы, находим ортогональные дополнения:

для X'_1:

$$ K'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \oplus \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, $$

для X'_2:

$$ K'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = 1_2 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}. $$

Ортогональные дополнения K'_i имеют определитель $\det K'_i = \det A' = 13$ и принадлежат одному нечетному роду $[K'_I]$ с p-символами: $2_{K'_I} = 1^{-4}_{I,4}$, $13_{K'_I} = 1^{-3}13^{-1}$. Форма K'_1 не представляет 1_2, значит, класс $\{K'_1\}$ неэквивалентен классу $\{K'_2\}$.

Вес представлений формы A формой Q выражается равенством (5.1), где $\epsilon_1(A) = -\left(\frac{A''}{13}\right)$ для $p = 13$ и $\epsilon_1(A) = \left(\frac{13}{p}\right)$ для простых $p \neq 13$.

Множитель $\alpha_2(A; Q)$ вычисляется следующим образом:

а) если $a = 13A''$ — четное число, то по формуле (5.4)

$$ \alpha_2(A_I; Q_I) = \frac{1}{8}(4 + \epsilon_2), \quad \text{где} \quad \epsilon_2 = \left(\frac{a_1(6 - t(A))}{2}\right), $$
$$ 2_A \sim [1^{+(m-1)}2^{\epsilon(A)1}]_{t(A)}; \tag{5.9} $$

б) если $a = 13A''$ — нечетное число, то по формуле (5.6)

$$\alpha_2(A;Q_I) = \frac{1}{4}(1 \pm \frac{1}{2}) \quad \text{для} \quad \mathrm{oct} \equiv \pm 1 \quad \text{или} \quad \pm 3 \pmod 8 \quad (5.10)$$

соответственно, где октановое число

$$\mathrm{oct} \equiv 6 - t_1(A) \pmod 8 \quad \text{для} \quad \left(\frac{13A''}{2}\right) = +1 \quad \text{и}$$

$$\mathrm{oct} \equiv 6 - t_1(A) + 4 \pmod 8 \quad \text{для} \quad \left(\frac{13A''}{2}\right) = -1;$$

здесь странности форм $Q = 1_6$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & A'' \end{pmatrix}$ равны $t_1(Q) = t_1(1_6) = 6$, $t_1(A) = 2 + A''$.

Формула (1.18) принимает вид

$$\frac{\mathrm{pr}\,(A,Q;G)}{o(Q)} = \frac{\mathrm{pr}\,(A'',K_1';G)}{4} + \frac{\mathrm{pr}\,(A'',K_2';G)}{16}. \qquad (5.11)$$

По условию, определитель $|A|$ бесквадратный и любое представление $Y : K_i'[Y] = A''$ примитивное, поэтому можно заменить $\mathrm{pr}\,(A'',K_i';G)$ на число всех представлений $r(A'',K_i')$ формы A'' формами K_i'. Из равенств (5.1), (5.11) вытекает

Теорема 3. *Для бесквадратного A'', не делящегося на 13, число всех взвешенных представлений числа A'' формами K_1' и K_2' равно*

$$12r(A'',K_1') + 3r(A'',K_2') = 8\alpha_2(A;Q)\left(13 - \left(\frac{A''}{13}\right)\right) \prod_{p|A'',p\neq 2,13}\left(p + \left(\frac{13}{p}\right)\right), \qquad (5.12)$$

где $\alpha_2(A;Q)$ вычисляется по формуле (5.9) или (5.10).

5.4. Согласно рассмотренному выше методу деформации диофантовых систем составлена таблица 3 для количества целых решений уравнений $K_i'[Y] = A''$, полученных в результате специализации тернарной формы $A = A' \oplus A''$ бесквадратного определителя, вкладываемой в $Q = 1_6$.

Таблица 3

Для $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$K' = 1_2 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$r(A'', K') = \frac{8}{3}\alpha_2(A; Q)\left(5 - \left(\frac{A''}{5}\right)\right) \prod_{p|A'',\ p\neq 2,5} \left(p + \left(\frac{5}{p}\right)\right);$$

для $A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$:

$$K_1' = 1 \oplus 2 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad K_2' = 1_3 \oplus 6,$$

$$2r(A'', K_1') + r(A'', K_2') = 8\alpha_2(A; Q)\left(3 - \left(\frac{A''}{3}\right)\right) \times \prod_{p|A'',\ p\neq 2,3} \left(p + \left(\frac{6}{p}\right)\right);$$

для $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$:

$$K_1' = 1_2 \oplus \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad K_2' = 1_3 \oplus 11,$$

$$6r(A'', K_1') + r(A'', K_2') = 8\alpha_2(A; Q)\left(11 - \left(\frac{A''}{11}\right)\right) \times \prod_{p|A'',\ p\neq 2,11} \left(p + \left(\frac{11}{p}\right)\right);$$

для $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$:

$$K_1' = 1_2 \oplus 2 \oplus 7, \qquad K_2' = 1_3 \oplus 14, \qquad K_3' = 1 \oplus 2 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$3r(A'',K_1')+r(A'',K_2')+6r(A'',K_3')=8\alpha_2(A;Q)\left(7-\left(\frac{A''}{7}\right)\right)$$
$$\times\prod_{p|A'',\,p\neq 2,7}\left(p+\left(14p\right)\right);$$

для $A'=\begin{pmatrix}2&1\\1&8\end{pmatrix}$:

$$K'=1\oplus 5\oplus\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix},\qquad K_2'=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&3&0\\1&1&0&3\end{pmatrix},$$

$$r(A'',K_1')+2r(A'',K_2')=$$
$$=2\alpha_2(A;Q)\left(3-\left(\frac{A''}{3}\right)\right)\left(5-\left(\frac{A''}{5}\right)\right)\prod_{p|A'',\,p\neq 2,3,5}\left(p+\left(\frac{15}{p}\right)\right).$$

Множитель $\alpha_2(A;Q)$ вычисляется по формулам (5.4), (5.5) или (5.6).

§6. Разделение родов

Многоорбитные представления с ортогональными дополнениями из разных родов типичны и поэтому особенно интересны.

6.1. Рассмотрим тернарную форму $A=\begin{pmatrix}A'&0\\0&A''\end{pmatrix}$ бесквадратного определителя с блоком $A'=6$ и с блоком A'' определителя $|A''|$, не делящегося на 2 и 3, и вложим ее в $Q=1_6$. Вес представлений формы A формой Q вычисляется по формуле (5.1). Представления $X':Q[X']=A'$ распадаются на 2 орбиты с представителями

$${}^tX_I'=(211000)\quad\text{и}\quad {}^tX_{II}'=(111111),$$

порядки стабилизаторов равны

$$\mathrm{stab}\,(X_I')=2!3!2^3=96\quad\text{и}\quad\mathrm{stab}\,(X_{II}')=6!=720.$$

Подбирая минимальные базисы, находим матрицы Грама:

$$K'_I = 1_3 \oplus 2 \oplus 3, \quad K'_{II} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ортогональные дополнения, согласно (1.15), имеют определитель $|K'_i| = |A'| = 6$, и принадлежат двум родам: $K'_I \in [K'_I]$ – нечетному и $K'_{II} \in [K'_{II}]$ – четному роду. Для $p = 3$ у них p-символ общий: $1^{-4}3^{+1}$, а для $p = 2$ p-символы разные: $[1^{+4}2^{-1}]_3$ для K'_I и $1^{+4}_{II,0}2^{-1}_{I,3}$ для K'_{II}.

Формула (4.15) позволяет находить порядки групп автоморфизмов

$$o(K'_i) = c(A', Q; G_i)\mathrm{stab}\,(X'_i).$$

Для формы $Q = 1_6$ согласно (4.6), (4.9), (4.11) имеем

$$c(A', Q; G_i) = c_2(A', Q; G_i)c_3(A', Q; G_i) = 1 \cdot 2 = 2,$$

что дает $o(K'_I) = 2 \cdot 96 = 192$, $o(K'_{II}) = 2 \cdot 720 = 1440$.

Левая часть формулы (5.1) может включать представления двумя формами K'_I и K'_{II}. Выбирая G, разведем эти формы на два рода. Используя таблицу 1, находим минимальные вложения $J(A) = A'' \oplus J(A')$. С учетом условий существования (3.4) символов $2_{Q \ominus J(A)}$, где блок A''_I имеет 2-символы $1^{+2}_{I,2}$, $1^{-2}_{I,2}$, $1^{-2}_{I,4}$, разности $Q \ominus J(A)$ будут нечетными. Разность $K_I = K'_I \ominus A''_I$ – снова нечетная форма, если блок A''_I имеет следующие 2-символы:

$$1^{+2}_{I,2} \quad \text{или} \quad 1^{-2}_{I,4}. \tag{6.1}$$

Если же блок A''_{II} четный, то разность $K_{II} = K'_{II} \ominus A''_{II}$ четная, а $K'_I \ominus A''_{II}$ – нечетная. Если теперь положить $G = G_I$, или $G = G_{II}$, где G_I, соответственно G_{II}, отвечает по (1.13) форме K_I, соответственно K_{II}, то левая часть формулы (5.1) будет содержать представления только одним родом $[K'_I]$ или $[K'_{II}]$.

6.2. Для нечетной формы $A_I = A''_I \oplus 2 \cdot 3$ по формуле (5.4) находим

$$\alpha_2(A_I, Q; G_I) = \frac{1}{8}(4 + \epsilon_2), \quad \text{где} \quad \epsilon_2 = \left(\frac{3|A''|}{2}\right)\left(\frac{t(Q) - t(A)}{2}\right)$$

и $t(A)$ определяется из канонического 2-символа $2_A^{can} = [1^2 2^{*\cdot 1}]_{t(A)}$. Форма A''_I имеет символ $2_{A''} = 1_{I,t}^{\epsilon\cdot 2}$, где $\epsilon = \left(\frac{|A''|}{2}\right)$, $t = t(A'')$. Странность $t(A)$ удовлетворяет сравнениям $t(A) \equiv 3,5 \pmod 8$ для A'' с 2-символами $1_{I,4}^{-2}$ и $1_{I,2}^{+2}$ соответственно. Тогда $\epsilon_2 = -1$ во всех этих случаях и множитель $\alpha_2(A_I, Q; G_I) = \frac{3}{8}$ для A_I с блоком A''_I (6.1).

Для четной формы $A'' = A''_{II}$ имеем $2_A = 1_{II,0}^{\epsilon_1(A)\cdot(m-1)} 2_{I,3}^{-1}$, $2_G = 1_{I,t_1(G)}^{\epsilon_1(G)\cdot 1} 2_{\xi_2(G),t_2(G)}^{\epsilon_2(G)\cdot n'}$. Используя инварианты формы G, находим, что множитель $\alpha_2(A, Q; G)$ для четной формы A_{II} четной ступени a и нечетной формы Q_I, согласно п. 13.4 [2], равен

$$\alpha_2(A_{II}, Q_I; G) = \frac{1}{2} 2^{-n'/2}, \quad \text{если} \quad \xi_2(G) = II, \tag{6.2}$$

или

$$\alpha_2(A_{II}, Q_I; G) = \frac{1}{4} 2^{-n'/2}(2^{n'} - 1), \quad \text{если} \quad \xi_2(G) = I, \tag{6.3}$$

где $n' = n - m - 1$ и $n - m$ нечетное.

Разность $K'_{II} \ominus A''_{II}$ — четная форма, поэтому здесь $\xi_2(G) = II$, тогда в силу равенства (6.2) имеем $\alpha_2(A_{II}, Q; G_{II}) = \frac{1}{4}$. Разность $K'_I \ominus A''_{II}$ — нечетная форма, поэтому $\xi_2(G) = I$, тогда по формуле (6.3) $\alpha_2(A_{II}, Q; G_I) = \frac{3}{8}$.

6.3. В силу равенства (1.18), левая часть (5.1) редуцируется к представлениям формами K'_i:

$$\frac{\mathrm{pr}\,(A_I, Q; G_I)}{o(Q)} = \frac{\mathrm{pr}\,(A''_I, K'_I; G_I)}{\mathrm{stab}\,(X'_I)},$$

$$\frac{\mathrm{pr}\,(A_{II}, Q; G_{II})}{o(Q)} = \frac{\mathrm{pr}\,(A''_{II}, K'_{II}; G_{II})}{\mathrm{stab}\,(X'_{II})},$$

$$\frac{\mathrm{pr}\,(A_{II}, Q; G_I)}{o(Q)} = \frac{\mathrm{pr}\,(A''_{II}, K'_I; G_I)}{\mathrm{stab}\,(X'_I)}. \tag{6.4}$$

Осталось еще найти знаки $\epsilon_1(A)$ в (5.1). Поскольку форма $A = A'' \oplus 6$, то $\epsilon_1(A) = \left(\frac{|A''|}{3}\right)$ для $p = 3$ и $\epsilon_1(A) = \epsilon_1(A'')\left(\frac{6}{p}\right)$ для $p \neq 3$, делящих $|A''|$. По условию определитель $|A|$ бесквадратный и любое представление $Y : K'_i[Y] = A''$ примитивное, поэтому можно заменить $\mathrm{pr}\,(A'', K'_i; G)$ на число всех представлений $r(A'', K'_i)$

формы A'' формами K'_i. Объединяя (5.1) и (6.4), приходим к следующим формулам для числа представлений $r(A'', K'_i)$ формы A'' формой K'_i:

$$r(A''_I, K'_I) = 6\left(3 + \left(\frac{|A''_I|}{3}\right)\right) \prod_{p\,|\,|A''_I|, p\neq 2,3} \left(p + \left(\frac{6}{p}\right)\epsilon_1(A''_I)\right), \quad (6.5)$$

$$r(A''_{II}, K'_{II}) = 30\left(3 + \left(\frac{|A''_{II}|}{3}\right)\right) \prod_{p\,|\,|A''_{II}|, p\neq 2,3} \left(p + \left(\frac{6}{p}\right)\epsilon_1(A''_{II})\right), \quad (6.6)$$

$$r(A''_{II}, K'_I) = 6\left(3 + \left(\frac{|A''_{II}|}{3}\right)\right) \prod_{p\,|\,|A''_{II}|, p\neq 2,3} \left(p + \left(\frac{6}{p}\right)\epsilon_1(A''_{II})\right), \quad (6.7)$$

где бинарные формы A''_i имеют бесквадратный определитель $|A''_i|$, не делящийся на 2 и 3, и нечетная форма A''_I удовлетворяет условию (6.1).

Сложив равенства (6.6) и (6.7), получим формулу для числа представлений четной формы A''_{II} двумя родами $[K'_I]$ и $[K'_{II}]$:

$$r(A''_{II}, K'_I) + r(A''_{II}, K'_{II}) = 36\left(3 + \left(\frac{|A''_{II}|}{3}\right)\right) \prod_{p\,|\,|A''_{II}|, p\neq 2,3} \left(p + \left(6p\right)\epsilon_1(A''_{II})\right). \quad (6.8)$$

6.4. Приведем несколько характерных примеров, демонстрирующих метод разделения родов (по аналогии с пп. 6.1–6.3).

Таблица 4

Для $A' = 14$:

$$K'_1 = 1_3 \oplus \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, K'_2 = 1 \oplus 2 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$K'_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

ортогональные дополнения принадлежат двум родам: $K_1', K_2' \in [K_I']$ нечетному и $K_3' \in [K_{II}']$ четному роду;

$$r(A_i'', K_1') + 2r(A_i'', K_2') = 3\left(7 + \left(\frac{|A_i''|}{7}\right)\right) \times \prod_{p \mid |A_i''|, p \neq 2,7} \left(p + \left(\frac{14}{p}\right)\epsilon_1(A_i'')\right)$$

для $i = I$, если $2_{A_I''} = 1_{I,4}^{-2}$, или $i = II$,

$$r(A_{II}'', K_{II}') = 5\left(7 + \left(\frac{|A_{II}''|}{7}\right)\right) \prod_{p \mid |A_{II}''|, p \neq 2,7} \left(p + \left(\frac{14}{p}\right)\epsilon_1(A_{II}'')\right).$$

Для $A' = 22$:

$$K_1' = 1_3 \oplus 2 \oplus 11,$$

$$K_2' = 1_2 \oplus 2 \oplus \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, K_3' = 1 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$K_4' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

ортогональные дополнения принадлежат двум родам: $K_1', K_2', K_3' \in [K_I']$ нечетному и $K_4' \in [K_{II}']$ четному роду;

$$r(A_i'', K_1') + 6r(A_i'', K_2') + 8r(A_i'', K_3') = 6\left(11 + \left(\frac{|A_i''|}{11}\right)\right) \times \prod_{p \mid |A_i''|, p \neq 2,11} \left(p + \left(\frac{22}{p}\right)\epsilon_1(A_i'')\right)$$

для $i = I$, если $2_{A_I''} = 1_{I,4}^{-2}$, или для $i = II$,

$$r(A_{II}'', K_{II}') = 2\left(11 + \left(\frac{|A_{II}''|}{11}\right)\right) \prod_{p \mid |A_{II}''|, p \neq 2,11} \left(p + \left(\frac{22}{p}\right)\epsilon_1(A_{II}'')\right).$$

Для $A' = 30$:

$$K_1' = 1_3 \oplus 5 \oplus 6,$$

$$K_2' = 1 \oplus 2 \oplus 5 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, K_3' = 1_2 \oplus \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$K_4' = 2 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$K_5' = 6 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, K_6' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

ортогональные дополнения принадлежат двум родам: $K_1', K_2', K_3', K_4' \in [K_I']$ – нечетному и $K_5', K_6' \in [K_{II}']$ четному роду;

$$r(A_i'', K_1') + 2r(A_i'', K_2') + 6r(A_i'', K_3') + 4r(A_i'', K_4') =$$
$$= 3\left(3 + \left(\frac{|A_i''|}{3}\right)\right)\left(5 + \left(\frac{|A_i''|}{5}\right)\right) \prod_{p|\,|A_i''|, p\neq 2,3,5} \left(p + \left(\frac{30}{p}\right)\epsilon_1(A_i'')\right)$$

для $i = I$, если $2_{A_I''} = 1_{I,2}^{-2}$, или для $i = II$,

$$3r(A_{II}'', K_5') + 10r(A_{II}'', K_6') =$$
$$= 15\left(3 + \left(\frac{|A_{II}''|}{3}\right)\right)\left(5 + \left(\frac{|A_{II}''|}{5}\right)\right)$$
$$\times \prod_{p|\,|A_{II}''|, p\neq 2,3,5} \left(p + \left(\frac{30}{p}\right)\epsilon_1(A_{II}'')\right).$$

Литература

1. В. Г. Журавлев, *Деформации диофантовых квадратичных систем*, Изв. РАН. Сер. мат. **65**, Но.6 (2001), 15–56.
2. В. Г. Журавлев, *Представление формы родом квадратичных форм*, Алгебра и анализ. **8**, Но.1 (1996), 21–112.
3. Н. В. Бударина, *Представление квадратичных форм формами подрешеток кубической решетки*, Деп. ВИНИТИ, 2110-Б2001, 2001.

4. Дж. Конвей, Н. Слоэн, *Упаковки шаров, решетки и группы*, М., Мир, 1990.
5. Дж. Касселс, *Рациональные квадратичные формы*, М., Мир, 1982.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступило 12 марта 2002 г.