Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 285, 2002 г.

И. О. Рассказов

СЛАБО ВОЗМУЩЕННАЯ ЗАДАЧА “О РАСПАДЕ РАЗРЫВА” ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ

Постановка задачи

Рассмотрим строго гиперболическую систему двух квазилинейных уравнений с малым параметром, которую мы будем записывать в инвариантах Римана:

$$\begin{cases} u_t + \boldsymbol{\lambda}(u,v)u_x = \varepsilon f(u,v), \\ v_t + \boldsymbol{\mu}(u,v)v_x = \varepsilon g(u,v). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр. Эта же система может быть записана в форме законов сохранения в виде:

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{\Phi}^1(u,v) + \partial_x \boldsymbol{\Psi}^1(u,v) = \varepsilon F^1(u,v), \\ \partial_t \boldsymbol{\Phi}^2(u,v) + \partial_x \boldsymbol{\Psi}^2(u,v) = \varepsilon F^2(u,v). \end{cases} \tag{1'}$$

Известно [1], что система (1) допускает, вообще говоря, некоторое семейство законов сохранения вида $(1')$. Выберем какие-нибудь конкретные законы сохранения системы уравнений (1). Фиксация законов сохранения обеспечивает единственность решения в классе разрывных функций. Все известные функции, как в (1), так и в $(1')$, предполагаются гладкими, бесконечно дифференцируемыми по своим аргументам.

Уравнения (1) дополняются начальными условиями:

$$u(0,x,\varepsilon) = \overset{\circ}{u}(x,\varepsilon), \quad v(0,x,\varepsilon) = \overset{\circ}{v}(x,\varepsilon). \tag{2}$$

Считаем, что функции $\overset{\circ}{u}(x,\varepsilon)$ и $\overset{\circ}{v}(x,\varepsilon)$ разлагаются в асимптотические ряды при $\varepsilon \to 0$. Коэффициенты этих рядов имеют разрыв первого рода в точке $x = 0$ и их можно представить в виде сле-

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда грантов РФФИ № 01-01-06136, 00-01-00663, 00-15-96038 и INTAS № 1068.

дующих рядов:

$$\overset{\circ}{u}(x,\varepsilon)=\begin{cases}\overset{\circ}{u}{}_0^- + \varepsilon\overset{\circ}{u}{}_1^-(x)+\dots, & x<0,\\ \overset{\circ}{u}{}_0^+ + \varepsilon\overset{\circ}{u}{}_1^+(x)+\dots, & x>0,\end{cases}$$
$$\overset{\circ}{v}(x,\varepsilon)=\begin{cases}\overset{\circ}{v}{}_0^- + \varepsilon\overset{\circ}{v}{}_1^-(x)+\dots, & x<0,\\ \overset{\circ}{v}{}_0^+ + \varepsilon\overset{\circ}{v}{}_1^+(x)+\dots, & x>0,\end{cases}$$

где $\overset{\circ}{u}{}_0^{\pm}$, $\overset{\circ}{v}{}_0^{\pm}$ – постоянные, а остальные коэффициенты – сколь угодно гладкие.

Предельная невозмущенная задача (при $\varepsilon = 0$) совпадает с известной [1] задачей “о распаде разрыва”. Предполагается, что конфигурация решения предельной задачи содержит две ударные волны.

Ставится вопрос об асимптотике при $\varepsilon \to 0$ решения возмущенной задачи и об асимптотике положения ударных волн.

Введение

Как известно [1, 2], гиперболические системы квазилинейных уравнений описывают различные физические процессы. В частности, системы такого типа образуют уравнения газовой динамики, уравнения теории “мелкой воды”, уравнения магнитной гидродинамики. Задачи в постановке, похожей на нашу, возникали в ряде работ [3], где рассматривались системы уравнений (1) и (1′) конкретного вида в приложении к теории “мелкой воды”.

К нашей задаче также сводится проблема описания асимптотики решения задачи Коши для гиперболической системы двух квазилинейных уравнений при $t \to 0$ вблизи начальной точки разрыва, в случае произвольных начальных данных. Это достигается введением малого параметра $0 < \varepsilon \ll 1$ и растяжением независимых переменных в окрестности начала координат $\boldsymbol{\tau} = t/\varepsilon$, $\boldsymbol{\chi} = x/\varepsilon$.

Основные результаты работы базируются на решении предельной невозмущенной задачи. Известно [1], что в общем случае решение задачи “о распаде разрыва” состоит из комбинации ударных волн и волн разрежения. Всего возможны четыре различных варианта таких комбинаций. Один из них мы рассматриваем в настоящей работе. Фактически, это предположение выделяет некоторый класс начальных данных для фиксированной системы уравнений (1).

Асимптотическое решение в главном совпадает с решением предельной задачи всюду, кроме узких окрестностей линий ударного перехода. В первом пункте работы описывается решение невозмущенной задачи с целью ввести необходимые обозначения и указать, как правильно понимать главные члены асимптотик и в чем их отличие от решения предельной задачи. Далее строятся первые поправки к асимптотике, для чего приходится решать функциональные уравнения специального вида. В конце работы доказаны теоремы о разрешимости таких уравнений.

Основные результаты

Линии ударного перехода на плоскости (x, t) мы будем, следуя [1], записывать в виде $x = s^{\pm}(t, \varepsilon)$. Напомним, что функции $s^{\pm}(t, \varepsilon)$ являются неотъемлемой частью решения задачи (1), (2) и подлежат определению. Скорость распространения ударной волны мы будем обозначать через $D^{\pm}(t, \varepsilon) := s'_t(t, \varepsilon)$.

Асимптотическое решение будем строить в виде:

$$s^{\pm}(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i s_i^{\pm}(t), \quad \varepsilon \to 0. \tag{3}$$

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, t), \quad v(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_i(x, t), \quad \varepsilon \to 0. \tag{4}$$

В нашем случае автомодельное решение невозмущенной задачи “о распаде разрыва” имеет вид

$$u_d(x, t) = \begin{cases} \overset{\circ}{u}{}_0^{+}, & x > D_d^{+} t, \\ \widetilde{u}_0, & D_d^{+} t > x > D_d^{-} t, \\ \overset{\circ}{u}{}_0^{-}, & x < D_d^{-} t, \end{cases}$$

$$v_d(x, t) = \begin{cases} \overset{\circ}{v}{}_0^{+}, & x > D_d^{+} t, \\ \widetilde{v}_0, & D_d^{+} t > x > D_d^{-} t, \\ \overset{\circ}{v}{}_0^{-}, & x < D_d^{-} t, \end{cases}$$

Здесь $\overset{\circ}{u}{}_0^{\pm}$, $\overset{\circ}{v}{}_0^{\pm}$ – константы из начальных данных, а $\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0$ и $D_d^{\pm}$ – константы, вычисляемые из условий Гюгонио[1]:

$$D_d^{\pm}(\mathbf{\Phi}^i(\overset{\circ}{u}{}_0^{\pm}, \overset{\circ}{u}{}_0^{\pm}) - \mathbf{\Phi}^i(\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_0)) = \mathbf{\Psi}^i(\overset{\circ}{u}{}_0^{\pm}, \overset{\circ}{u}{}_0^{\pm}) - \mathbf{\Psi}^i(\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_0), \quad i = 1, 2.$$

[1] Подробнее про законы сохранения и условия Гюгонио см. [1] или [2].

Линии ударного перехода предельной задачи $x = s_d^{\pm}(t)$ при этом являются просто прямыми $s_d^{\pm}(t) \equiv D_d^{\pm} t$.

Введем постоянные k и I следующим образом:

$$k = \frac{(\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_0 - D_d^-)(\widetilde{\boldsymbol{\mu}}_0 - D_d^+)}{(\widetilde{\boldsymbol{\mu}}_0 - D_d^-)(\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_0 - D_d^+)}, \quad \text{где} \quad \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_0 = \boldsymbol{\lambda}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0), \quad \widetilde{\boldsymbol{\mu}}_0 = \boldsymbol{\mu}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0).$$

$$I = \frac{(\boldsymbol{\Delta\Phi}^{2+}\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}{}_v^1 - \boldsymbol{\Delta\Phi}^{1+}\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}{}_v^2)(\boldsymbol{\Delta\Phi}^{2-}\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}{}_u^1 - \boldsymbol{\Delta\Phi}^{1-}\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}{}_u^2)}{(\boldsymbol{\Delta\Phi}^{2+}\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}{}_u^1 - \boldsymbol{\Delta\Phi}^{1+}\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}{}_u^2)(\boldsymbol{\Delta\Phi}^{2-}\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}{}_v^1 - \boldsymbol{\Delta\Phi}^{1-}\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}{}_v^2)},$$

где $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}{}_u^i = \boldsymbol{\Phi}_u^i(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)$, $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}{}_v^i = \boldsymbol{\Phi}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)$, $\boldsymbol{\Delta\Phi}^{i\pm} = \boldsymbol{\Phi}_v^i(\overset{\circ}{u}{}_0^{\pm}, \overset{\circ}{v}{}_0^{\pm}) - \boldsymbol{\Phi}^i(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)$.

Теорема 1. *Пусть одновременно выполнены либо неравенства* $|k| < 1$ *и* $|kI| < 1$, *либо неравенства* $|k| > 1$ *и* $|kI| > 1$. *Тогда все коэффициенты рядов* (3), (4) *могут быть построены однозначно.*

Справедливо следующее простое утверждение, из которого следует, что Теорема 1 применима к уравнениям одномерной газовой динамики и, в частности, к уравнениям теории "мелкой воды".

Утверждение 1. *Если* $|\boldsymbol{\Phi}^2| \equiv |\boldsymbol{\Psi}^1|$ *или* $|\boldsymbol{\Phi}^1| \equiv |\boldsymbol{\Psi}^2|$, *то* $|k| = |I|$.

Решение предельной задачи. Построение главного члена асимптотики

Основной вопрос этого пункта состоит в следующем: как правильно понимать главные члены асимптотических решений и в чем их отличие от решения предельной задачи?

Вырожденная задача (при $\varepsilon = 0$) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} u_{0t} + \boldsymbol{\lambda}(u_0, v_0) u_{0x} = 0, & u_0\big|_{t=0} = \overset{\circ}{u}_0(x) \\ v_{0t} + \boldsymbol{\mu}(u_0, v_0) v_{0x} = 0, & v_0\big|_{t=0} = \overset{\circ}{v}_0(x) \end{cases}. \tag{5}$$

Решение ее было приведено в начале работы. Для ответа на поставленный вопрос вспомним, как находится обобщенное решение такой задачи. Сначала строится гладкая часть решения. Гладкое решение определено в той части полуплоскости $(x, t), t > 0$, которая целиком заполнена характеристиками задачи Коши (5).

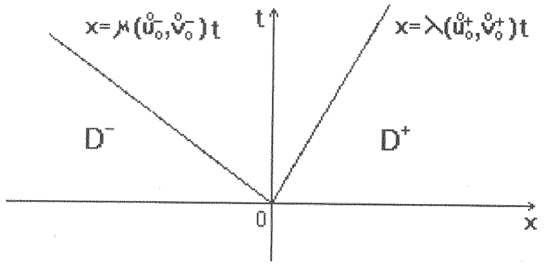

Рис. 1. Области существования гладкого решения.

Области существования гладкого решения обозначим соответственно через $\mathbf{D}^{\pm}$, где (см. рис. 1)[2]

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{-} &:= \{(x,t) \mid t>0, x<\boldsymbol{\mu}(\mathring{u}_0^-, \mathring{v}_0^-)t\}, \\ \mathbf{D}^{+} &:= \{(x,t) \mid t>0, x>\boldsymbol{\lambda}(\mathring{u}_0^+, \mathring{v}_0^+)t\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Вообще говоря, области $\mathbf{D}^-$ и $\mathbf{D}^+$ могут пересекаться, но для дальнейших построений это является несущественным[3]. В нашем случае гладкое, классическое решение задачи (5) в областях $\mathbf{D}^{\pm}$ выглядит следующим образом:

$$(u,v) = (\mathring{u}_0^+, \mathring{v}_0^+), (x,t) \in \mathbf{D}^+, \quad (u,v) = (\mathring{u}_0^-, \mathring{v}_0^-), (x,t) \in \mathbf{D}^-.$$

Чтобы построить обобщенное решение во всей полуплоскости, нужно рассматривать уравнения (5) как дифференциальные следствия интегральных законов сохранения. Обобщенное решение строится в классе кусочно непрерывных, с конечным числом разрывов функций. Из законов сохранения вытекают условия на разрывах решения задачи (5). Положение линий разрыва решения на плоскости (x,t) и величина скачка решения связаны условиями, которые в литературе принято называть условиями Гюгонио или Ренкина–Гюгонио.

[2] $\mathbf{D}^{\pm}$ – это области существования решения задачи Коши (5) с начальными данными, взятыми отдельно, сначала при $x>0$, затем при $x<0$ соответственно.

[3] В частности, это одна из причин непригодности классического решения, и здесь можно провести полную аналогию со случаем уравнения Хопфа, см. [2].

Известно [1], что в случае двух устойчивых разрывов выполнены неравенства: $s_0^+(t) > \boldsymbol{\lambda}(\overset{\circ}{u}{}_0^+, \overset{\circ}{v}{}_0^+)$ и $s_0^-(t) < \boldsymbol{\mu}(\overset{\circ}{u}{}_0^-, \overset{\circ}{v}{}_0^-)$. Это означает, что линии ударного перехода расположены каждая строго внутри соответствующей области $\mathbf{D}^+$ или $\mathbf{D}^-$ (см. рис. 2).

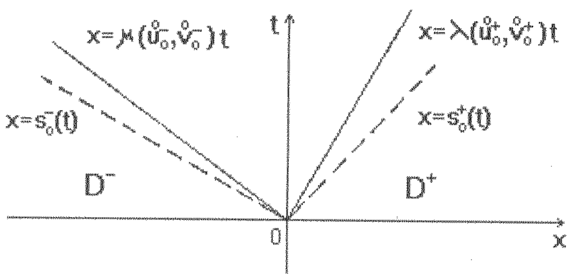

Рис. 2. Расположение ударных волн в областях $D^{\pm}$.

Теперь рассмотрим задачу Коши для уравнений (5) с начальными данными, которые поставим на линиях ударного перехода следующим образом:

$$u\big|_{x=s_0^+(t)} = \widetilde{u}_0, \quad v\big|_{x=s_0^-(t)} = \widetilde{v}_0. \tag{7}$$

Задача Коши (5), (7) корректна, в силу того, что линии ударных волн не являются характеристиками системы уравнений (5). Гладкое решение задачи (5), (7) при этом существует всюду, где проходят характеристики системы (5), пересекающиеся с линиями ударных волн. Обозначим область существования гладкого решения задачи (5), (7) через $\widetilde{\mathbf{D}}$.

$$\widetilde{\mathbf{D}} := \{(x,t) \mid \boldsymbol{\mu}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)t < x < \boldsymbol{\lambda}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)t\}.$$

В силу строгой гиперболичности системы (5) и условий устойчивости разрывов пересечение областей $D^{\pm}$ не пусто:

$$\widetilde{\mathbf{D}} \cap \mathbf{D}^+ \neq \varnothing, \quad \widetilde{\mathbf{D}} \cap \mathbf{D}^- \neq \varnothing,$$

и линии ударного перехода проходят в областях их перекрытия (см. рис. 3):

$$\{(x,t) \mid x = s_0^-(t)\} \subset \widetilde{\mathbf{D}} \cap \mathbf{D}^-, \quad \{(x,t) \mid x = s_0^+(t)\} \subset \widetilde{\mathbf{D}} \cap \mathbf{D}^+.$$

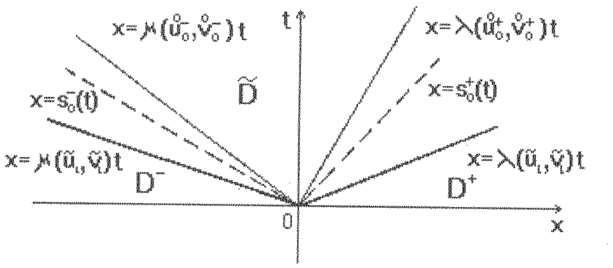

Рис. 3. Взаимное расположение областей $D^{\pm}$, $\widetilde{D}$ и линий ударного перехода.

Теперь можно пояснить, как правильно нужно понимать главные члены асимптотики в разложениях (3), (4).

Главный член асимптотики для линий ударного перехода берем из решения предельной задачи: $s_0^{\pm}(t) = s_d^{\pm}(t)$. В качестве главного члена в разложениях (4) мы будем брать либо решение Коши (5), либо решение задачи задачи Коши (5), (7), в зависимости от того, где будет располагаться очередное приближение к линии ударного перехода. Через $S_N^{\pm}(x,\varepsilon)$ обозначим частичную сумму рядов (3). Главные члены асимптотического решения строим в виде:

$$u_0^{\pm}(x,t) = \begin{cases} \overset{\circ}{u}{}_0^+, & x > S_N^+(t,\varepsilon), \\ \widetilde{u}_0, & S_N^+(t,\varepsilon) > x > S_N^-(t,\varepsilon), \\ \overset{\circ}{u}{}_0^-, & x < S_N^-(t,\varepsilon) \end{cases}$$

$$v_0^{\pm}(x,t) = \begin{cases} \overset{\circ}{v}{}_0^+, & x > S_N^+(t,\varepsilon), \\ \widetilde{v}_0, & S_N^+(t,\varepsilon) > x > S_N^-(t,\varepsilon), \\ \overset{\circ}{v}{}_0^-, & x < S_N^-(t,\varepsilon). \end{cases}$$

Таким образом, главный член в асимптотическом решении (4) зависит от количества построенных поправок к линиям разрыва решения.

Построение первой поправки

Ограничимся построением первых поправок. Все остальные поправки могут быть построены аналогичным образом. Как и главный член, мы будем строить поправки отдельно в перекрывающихся областях $\widetilde{\mathbf{D}}$ и $\mathbf{D}^{\pm}$. Подставляя формальные ряды (4) в систему (1), получаем уравнения для определения первой поправки:

$$\begin{cases} u_{1t} + \boldsymbol{\lambda}(u_0, v_0) u_{1x} = f(u_0, v_0), \\ v_{1t} + \boldsymbol{\mu}(u_0, v_0) v_{1x} = g(u_0, v_0). \end{cases} \tag{8}$$

Здесь уже учтено то, что главные члены асимптотических решений задач (5) и (5), (7) – это просто константы.

Для системы (8) ставятся начальные данные, в области $\mathbf{D}^{+}$:

$$u_1\big|_{t=0} = \overset{\circ}{u}_1(x), \quad v_1\big|_{t=0} \overset{\circ}{v}_1(x), \quad x > 0, \tag{9}$$

и в области $\mathbf{D}^{-}$:

$$u_1\big|_{t=0} = \overset{\circ}{u}_1(x), \quad v_1\big|_{t=0} = \overset{\circ}{v}_1(x), \quad x < 0. \tag{10}$$

Задачи Коши (8), (9) и (8), (10) линейные и решаются обычным методом характеристик.

Итак, осталось определить поправки к решению в области $\widetilde{\mathbf{D}}$ и поправки к положению ударных волн. Предлагается следующий способ построения: используя условия Гюгонио, поставить задачи Коши для системы уравнений (8) с начальными данными на линиях ударного перехода $x = s_0^{\pm}(t)$ предельной невозмущенной задачи.

Запишем условия Гюгонио в виде:

$$D^{\pm}\{\boldsymbol{\Phi}^i(u^{\pm}, v^{\pm}) - \boldsymbol{\Phi}^i(\widetilde{u}^{\,\pm}, \widetilde{v}^{\,\pm})\} = \boldsymbol{\Psi}^i(u^{\pm}, v^{\pm}) - \boldsymbol{\Psi}^i(\widetilde{u}^{\,\pm}, \widetilde{v}^{\,\pm}), \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

Здесь написаны два уравнения на каждой линии ударного перехода, и введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} u^{\pm}(t,\varepsilon) &= u(s^{\pm}(t,\varepsilon) \pm 0, t, \varepsilon), \quad v^{\pm}(t,\varepsilon) = v(s^{\pm}(t,\varepsilon) \pm 0, t, \varepsilon), \\ \widetilde{u}^{\pm}(t,\varepsilon) &= u(s^{\pm}(t,\varepsilon) \mp 0, t, \varepsilon), \quad \widetilde{v}^{\pm}(t,\varepsilon) = v(s^{\pm}(t,\varepsilon) \mp 0, t, \varepsilon) \end{aligned}$$

Условия Гюгонио в главном порядке мы уже использовали при определении главных членов асимптотик (3) и (4). Сейчас нам нужно получить уравнения для первой поправки. Подставляя разложения (3), (4) в (11) и учитывая то, что главные члены являются константами, при ε^1 получаем

$$\begin{aligned} D_1^{\pm}(\boldsymbol{\Phi}^{i\pm} - \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}^{\,i}) + D_0^{\pm}[\boldsymbol{\Phi}_u^{i\pm} u_1^{\pm} + \boldsymbol{\Phi}_v^{i\pm} v_1^{\pm}] - D_0^{\pm}[\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}{}_u^{\,i} \widetilde{u}_1^{\,\pm} + \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}{}_v^{\,i} \widetilde{v}_1^{\,\pm}] = \\ = \boldsymbol{\Psi}_u^{i\pm} u_1^{\pm} + \boldsymbol{\Psi}_v^{i\pm} v_1^{\pm} - \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}{}_u^{\,i} \widetilde{u}_1^{\,\pm} - \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}{}_v^{\,i} \widetilde{v}_1^{\,\pm}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь все функции зависят от $(u_0^\pm, v_0^\pm) = (u_0(s_0^\pm(t),t), v_0(s_0^\pm(t),t))$ соответственно. Таким образом, в уравнении участвует только одна независимая переменная t. Неизвестными величинами являются все функции со знаком волны, а также величины $D_1^\pm(t)$. Введя обозначения

$$\widetilde{F}_u^{\,i\pm} = \widetilde{\mathbf{\Psi}}_u^{\,i} - D_0^\pm \widetilde{\mathbf{\Phi}}_u^{\,i}, \quad \widetilde{F}_v^{\,i\pm} = \widetilde{\mathbf{\Psi}}_v^{\,i} - D_0^\pm \widetilde{\mathbf{\Psi}}_v^{\,i},$$

$$\Delta\mathbf{\Phi}^{\,i\pm} = \mathbf{\Phi}^i(u_0^\pm, v_0^\pm) - \mathbf{\Phi}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0), \quad i = 1,2$$

и группируя коэффициенты при неизвестных, уравнения (12) можно переписать в виде:

$$D_1^\pm(t)\Delta\mathbf{\Phi}^{i\pm} + \widetilde{u}_1^{\,\pm}(t)\widetilde{F}_u^{\,i\pm} + \widetilde{v}_1^{\,\pm}(t)\widetilde{F}_v^{\,i\pm} = F_1^{i\pm}(t), \quad i = 1,2. \tag{13}$$

Тут написано по два уравнения на каждой линии $x = s_0^\pm(t)$ для шести неизвестных функций. Пару неизвестных можно исключить, так как уравнения (13) – линейные. Исключая $D_1^\pm(t)$ из уравнений (13), мы в области $\widetilde{D}$ получаем следующую задачу для определения первой поправки:

$$\begin{cases} \widetilde{u}_{1t} + \boldsymbol{\lambda}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)\widetilde{u}_{1x} = f(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0), \\ \widetilde{v}_{1t} + \boldsymbol{\mu}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)\widetilde{v}_{1x} = g(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0), \end{cases} \tag{14}$$

с начальными данными в виде линейной комбинации неизвестных функций на линиях ударного перехода предельной задачи (5):

$$\widetilde{u}_1(s_0^\pm(t),t)G_u^\pm + \widetilde{v}_1(s_0^\pm(t),t)G_v^\pm = G^\pm(t). \tag{15}$$

$$G_u^\pm = \frac{\widetilde{F}_u^{\,1\pm}}{\Delta\mathbf{\Phi}^{1\pm}} - \frac{\widetilde{F}_u^{\,2\pm}}{\Delta\mathbf{\Phi}^{2\pm}}, \quad G_v^\pm = \frac{\widetilde{F}_v^{\,1\pm}}{\Delta\mathbf{\Phi}^{1\pm}} - \frac{\widetilde{F}_v^{\,2\pm}}{\Delta\mathbf{\Phi}^{2\pm}},$$

$$G^\pm = \frac{\widetilde{F}_1^{\,1\pm}}{\Delta\mathbf{\Phi}^{1\pm}} - \frac{\widetilde{F}_1^{\,2\pm}}{\Delta\mathbf{\Phi}^{2\pm}}.$$

Чтобы построить первые поправки к асимптотике, необходимо показать, что задача (14), (15) поставлена корректно. Сведем эту задачу к более простой, определив начальные данные в обычном для задачи Коши виде. Для этого введем в рассмотрение следующие параметры:

$$\boldsymbol{\xi}(t) := \widetilde{u}_1^{\,-}(t) = \widetilde{u}_1(s_0^-(t),t), \quad \boldsymbol{\eta}(t) := \widetilde{v}_1^{\,-}(t) = \widetilde{v}_1(s_0^-(t),t),$$

и проинтегрируем уравнения (14) вдоль характеристик, вплоть до линии $x = s_0^+(t)$. Это сделать можно всегда, так как уравнения (14) вдоль характеристических линий $x = \boldsymbol{\lambda}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)t$ и

$x = \boldsymbol{\mu}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)t$ – это обыкновенные неоднородные линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Так как семейства характеристик системы уравнений (14) – это неколлинеарные прямые, то, выходя из одной точки на линии $x = s_0^+(t)$ они приходят на линию $x = s_0^-(t)$ с различным смещением. А именно, из геометрических соображений видно, что в точку с координатами $(s_0^+(t^*), t^*)$ приходят характеристики, проходящие через точки с координатами $(s_0^-(k_1 t^*), k_1 t^*)$ и $(s_0^-(k_2 t^*), k_2 t^*)$ соответственно, где

$$k_1 = \frac{\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_0 - D_0^+}{\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_0 - D_0^-}, \quad k_2 = \frac{\widetilde{\boldsymbol{\mu}}_0 - D_0^+}{\widetilde{\boldsymbol{\mu}}_0 - D_0^-}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_0 = \boldsymbol{\lambda}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0), \quad \widetilde{\boldsymbol{\mu}}_0 = \boldsymbol{\mu}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0).$$

Интегрируя, получаем уравнения:

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_1^{\,+}(t) &= \widetilde{u}_1(s_0^+(y), t) = \boldsymbol{\xi}(k_1 t) + f(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)(1 - k_1)t, \\ \widetilde{v}_1^{\,+}(t) &= \widetilde{v}_1(s_0^+(y), t) = \boldsymbol{\eta}(k_1 t) + g(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)(1 - k_2)t. \end{aligned} \tag{16}$$

Далее, используя (15), получаем систему функциональных уравнений для определения неизвестных параметров $\boldsymbol{\xi}(t)$ и $\boldsymbol{\eta}(t)$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}(t) G_u^- + \boldsymbol{\eta}(t) G_v^- = G^-(t), \\ \boldsymbol{\xi}(k_1 t) G_u^+ + \boldsymbol{\eta}(k_2 t) G_v^+ = G^+(t). \end{cases} \tag{17}$$

Откуда нетрудно получить следующее уравнение на параметр $\eta(t)$:

$$G_v^+ G_u^- \boldsymbol{\eta}(kt) + G_u^+ G_v^- \boldsymbol{\eta}(t) = C(t), \quad \text{где} \quad k = \frac{k_2}{k_1}, \tag{18}$$

или аналогичное уравнение на параметр $\boldsymbol{\xi}(t)$.

Имеют место следующие два утверждения:

Утверждение 2. *Справедливы следующие неравенства* $k > 0$, $k \neq 1$.

Утверждение 3. *Числа* $G_u^{\pm}$ *и* $G_v^{\pm}$ *таковы, что система уравнений* (17) *либо сводится к невырожденному уравнению* (18) *(ситуация общего положения), либо решается тривиально (становится треугольной).*

Доказываются оба утверждения непосредственной проверкой, в силу условий устойчивости разрывов, которые имеют следующий вид: $\widetilde{\boldsymbol{\mu}}_0 < D_0^- < D_0^+ < \widetilde{\boldsymbol{\lambda}_0}$, $\boldsymbol{\mu}_0^+ < \boldsymbol{\lambda}_0^+ < D_0^+$, $D_0^- < \boldsymbol{\mu}_0^- < \boldsymbol{\lambda}_0^-$ (см. [1]).

Для законов сохранения $(1')$ системы уравнений (1) выполнены соотношения:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}(u,v) &= \frac{\boldsymbol{\Psi}_u^1(u,v)}{\boldsymbol{\Phi}_u^1(u,v)} = \frac{\boldsymbol{\Psi}_u^2(u,v)}{\boldsymbol{\Phi}_u^2(u,v)},\\
\boldsymbol{\mu}(u,v) &= \frac{\boldsymbol{\Psi}_v^1(u,v)}{\boldsymbol{\Phi}_v^1(u,v)} = \frac{\boldsymbol{\Psi}_v^2(u,v)}{\boldsymbol{\Phi}_v^2(u,v)}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Используя их, получаем

$$
\widetilde{F}\,_u^{i\pm} = \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}\,_u^i(\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_0 - D_0^{\pm}), \quad \widetilde{F}\,_v^{i\pm} = \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}\,_v^i(\widetilde{\boldsymbol{\mu}}_0 - D_0^{\pm}), \quad i = 1,2.
$$

Тогда

$$
\left|\frac{G_v^+ G_u^-}{G_u^+ G_v^-}\right| =
$$

$$
= \left|\frac{(\boldsymbol{\Delta\Phi}^{2+}\widetilde{F}\,_v^{1+} - \boldsymbol{\Delta\Phi}^{1+}\widetilde{F}\,_v^{2+})(\boldsymbol{\Delta\Phi}^{2-}\widetilde{F}\,_u^{1-} - \boldsymbol{\Delta\Phi}^{1-}\widetilde{F}\,_u^{2-})}{(\boldsymbol{\Delta\Phi}^{2+}\widetilde{F}\,_u^{1+} - \boldsymbol{\Delta\Phi}^{1+}\widetilde{F}\,_u^{2+})(\boldsymbol{\Delta\Phi}^{2-}\widetilde{F}\,_v^{1-} - \boldsymbol{\Delta\Phi}^{1-}\widetilde{F}\,_v^{2-})}\right| = kI.
$$

Учитывая, что $D_0^{\pm} = \frac{\boldsymbol{\Delta\Psi}_0^{\pm}}{\boldsymbol{\Delta\Phi}_0^{\pm}}$ и соотношения (19), теперь нетрудно убедиться в том, что $|k| = |I|$, если выполнено хотя бы одно из равенств $|\boldsymbol{\Psi}^i| \equiv |\boldsymbol{\Phi}^j|$ при $i \neq j$. Таким образом, Утверждение 1 доказано.

Для корректного построения первого приближения, а затем и всех последующих, необходимо и достаточно, чтобы решение уравнения (18) существовало и было единственным в классе непрерывных справа в точке $t = 0$ функций. Следовательно, доказательство Теоремы 1 сводится к доказательству разрешимости уравнения (18).

Разрешимость функционального уравнения

Рассмотрим уравнение

$$
Au(kt) + Bu(t) = C(t), \tag{20}
$$

где A, B – константы, $C(t)$ – известная непрерывная функция. В силу самого уравнения можно считать, что $|k| < 1$. Если это не так, то заменой $x = kt$ уравнение приводится к требуемому виду.

Теорема 2. *Решение уравнения* (20) *существует и единственно в классе непрерывных функций* $\mathbb{C}(\mathbf{R})$, *если* $\left|\frac{A}{B}\right| < 1$. *Справедливо* *следующее его представление в виде равномерно сходящегося ряда:*

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{A^i}{B^{i+1}} C(k^i t).$$

Доказательство. Равномерная сходимость ряда очевидна. То, что ряд удовлетворяет уравнению (20), легко проверить непосредственной подстановкой. Докажем единственность. Для этого покажем, что однородное уравнение (20) имеет единственное решение, тождественно равное нулю. Пусть существует t_0, такое, что $u_0(t_0) \neq 0$. Из однородного уравнения (20) можно получить следующую формулу:

$$u_0(k^i t_0) = (-1)^i \left(\frac{B}{A}\right)^i u_0(t_0),$$

откуда сразу, при $i \to \infty$, получаем противоречие. Теорема доказана. Тем самым доказана и Теорема 1.

Теорема 3. *Пусть* $|A|/|B| > 1$, *и* n – *минимальная степень числа* k, *при которой выполнено условие:* $|Ak^n|/|B| < 1$, *функция* $C(t) \in C^n(R)$. *Тогда решение уравнения* (20) *существует и единственно в классе* n *раз дифференцируемых функций.*

Доказательство прямо следует из предыдущей теоремы, если формально продифференцировать n раз уравнение (20) и учесть то, что в точке $t = 0$ известны значения самой функции $u(t)$ и всех ее производных. Если при этом функция $C(t)$ ограничена на всей оси, то решение также можно представить в виде равномерно сходящегося, вместе со своими n производными, ряда:

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{B^i}{A^{i+1}} C(k^{-i} t).$$

Такое представление можно получить при помощи замены $x = kt$. Теорема доказана.

Пример неединственности решения уравнения (20) легко получить, если искать решение соответствующего однородного уравнения в виде $u(t) = t^{\boldsymbol{\alpha}}$. Видно, что при $\boldsymbol{\alpha} = \ln(-B/A)/lnk$, $A > 0$, $B < 0$, $|B/A| < 1$ однородное уравнение удовлетворяется. При помощи логарифмической замены однородное уравнение (20) сводится к известным уравнениям со сдвигом. В частности, оно сводится к уравнению обобщающему известное [4] функциональное уравнение гамма-функции. Однако, при такой замене точка $t = 0$ является особой, и этот подход не годится в нашем случае.

Литература

1. Б. Л. РОждественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений.* М., Наука (1978), 688 с.
2. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны.* М., Мир (1977), 622 с.
3. J. Yu and J. Kevorkian, *The interaction of strong bore with small disturbances in shallow water.* Appl. Math. **91** (1994), 247–273.
4. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, В. С. Ретах, *Общие гамма-функции, экспоненты и гипергеометрические функции.* Успехи мат. наук, **53**, в. 1(319) (1998), 1–60.

Rasskazov I. O. The Riemann problem for the weakly perturbed 2×2 hyperbolic systems.

The discontinuous initial value problem for a hyperbolic system of two quasilinear equations with small perturbation is considered. The asymptotics on a small parameter of an discontinuous solution is investigated. The full asymptotic expansions are constructed, when the solution of a nonperturbed problem contains two shock waves.

Институт математики
с ВЦ Уфимского НЦ РАН
e-mail:rasskazov@imat.rb.ru

Поступило 20 декабря 2001 г.