Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 285, 2002 г.

Л. А. Молотков

ОБ ОДНОЙ ЭФФЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ ТРЕЩИНОВАТОЙ СРЕДЫ

Исследуется эффективная модель однородной изотропной упругой среды, перерезанной тремя системами параллельных трещин. Эти трещины рассматриваются как плоские границы, на которых напряжения испытывают скачки, пропорциональные смещениям. Смещения же предполагаются непрерывными. Эта модель является частным случаем сравнительно общей эффективной модели, описывающей однородные анизотропные упругие среды с разрывами как смещений, так и напряжений на трещинах [1]. Разрывы в этой работе являются линейными функциями средних смещений и напряжений на границах и характеризуются матрицами 6×6. Частный случай, когда эта матрица является диагональной и содержит три нулевых элемента и два одинаковых элемента, соответствует рассматриваемой эффективной модели.

В этой модели отсутствует диссипация, в то время как в упомянутой обобщенной эффективной модели затухание волн, как правило, имеет место. Рассматриваемая модель описывается уравнениями закона Гука и сплошной среды, которые отличаются от уравнений теории упругости только тем, что в уравнения сплошной среды добавлены дополнительные члены. Эффективная модель является изотропной, и для определения волнового поля используются потенциалы, удовлетворяющие волновым уравнениям с дополнительными членами. С этими дополнительными членами связана дисперсия продольных, поперечных и релеевских волн. Для фазовых и групповых скоростей этих волн устанавливается зависимость от частоты и волновых чисел. Фронты от одинаковых источников в эффективной модели и в упругой среде совпадают.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант No. 02-05-65081.

§1. Задание упругой среды, перерезанной тремя системами трещин, и вывод эффективной модели

Пусть в декартовой системе координат x, y, z задана однородная изотропная упругая среда $0 \leqslant x \leqslant H$, $0 \leqslant y \leqslant H$, $0 \leqslant z \leqslant H$, которая пересечена тремя системами плоско-параллельных границ. Все три системы границ перпендикулярны одной из координатных осей и задаются уравнениями

$$x = ih, \quad y = ih, \quad z = ih \quad (i = 1, 2, \dots, n-1, \quad h = H/n). \tag{1.1}$$

На этих границах смещения непрерывны, а для напряжений выполняются условия

$$\begin{aligned}
&[t_{xx}] = hd_n u_x, \ \ [t_{xy}] = hd_t u_y\,, \ \ [t_{xz}] = hd_t u_z \quad \text{при} \quad x = ih,\\
&[t_{xy}] = hd_t u_x\,, \ \ [t_{yy}] = hd_n u_y, \ \ [t_{xz}] = hd_t u_z \quad \text{при} \quad y = ih,\\
&[t_{xx}] = hd_t u_x\,, \ \ [t_{yz}] = hd_t u_y\,, \ \ [t_{zz}] = hd_n u_z \quad \text{при} \quad z = ih,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

в которых символ [ ], обозначает величину скачка напряжения, стоящего внутри скобок, на указанной границе. Между границами упругая среда характеризуется постоянными Ламе λ, μ, плотностью ρ и описывается уравнениями закона Гука

$$\begin{aligned}
t_{xx} &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right),\\
t_{yy} &= \lambda\frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda\frac{\partial u_z}{\partial z},\\
t_{zz} &= \lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z},\\
t_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right),\\
t_{xz} &= \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right),\\
t_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right),
\end{aligned} \tag{1.3}$$

и уравнениями сплошной среды

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial t_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{xz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial t_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial t_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{yz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial t_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial t_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial t_{zz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

На внешних границах среды выполняются некоторые линейные условия. Среда возбуждается источником, расположенным внутри или вне среды. Вид этих линейных условий и характеристики указанного источника оказываются несущественными при выводе эффективной модели заданной среды.

В волновом поле, возбуждаемом этим источником, совершается предельный переход при

$$n\to\infty,\quad h\to 0,\quad H=nh=\mathrm{const} \tag{1.5}$$

и выводятся уравнения, которым удовлетворяет предельное волновое поле и которые описывают эффективную модель рассматриваемой среды. Для установления этих уравнений используется тот факт, что заданная среда является частным случаем другой упругой среды, пересеченной тремя системами трещин и рассмотренной в работе [1]. В этой работе также проводится предельный переход, аналогичный предельному переходу (1.5), и устанавливаются соответствующие уравнения эффективной модели. На основании результатов работы [1], приходим к выводу, что эффективная модель заданной среды по-прежнему описывается уравнением (1.3), а вместо равенств (1.4) устанавливаются уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial t_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{xz}}{\partial z}-Au_x=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial t_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial t_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{yz}}{\partial z}-Au_y=\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial t_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial t_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial t_{zz}}{\partial z}-Au_z=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{1.6}$$

в которых

$$A=d_n+2d_t. \tag{1.7}$$

Уравнения сплошной среды (1.6) также выражают равенства сил, действующих вдоль координатных осей, при этом дополнительные слагаемые учитывают разрывы напряжений.

На основании уравнений (1.3) и (1.6) устанавливается формула для плотности потенциальной энергии

$$
\begin{aligned}
W_p = {} & \frac{\lambda+2\mu}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right] + \\
& + \lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \\
& + \frac{\mu}{2}\left[+\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)^2\right] + \\
& + \frac{A}{2}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

в эффективной модели. Первые три члена в соотношении (1.8) образуют выражение для плотности потенциальной энергии однородной изотропной упругой среды, а последнее четвертое слагаемое является добавкой к плотности потенциальной энергии, связанной с разрывами напряжений. Из физических представлений следует, что оба выражения в формуле (1.8) должны быть определенно положительными формами. Поэтому выполняется неравенство

$$A > 0 \tag{1.9}$$

и в модели отсутствует диссипация энергии.

Для решения уравнений эффективной модели полезно предварительно исключить напряжения из равенств (1.3) и (1.6) и вывести уравнение Ламе. С этой целью подставим уравнения (1.3) в равенства (1.6) и после ряда элементарных преобразований получим векторное уравнение Ламе

$$\mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - A\vec{u} = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}. \tag{1.10}$$

С использованием тождества

$$\Delta\vec{u} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} \tag{1.11}$$

заменим соотношение (1.10) уравнением

$$(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} - A\vec{u} = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}. \tag{1.12}$$

Оба уравнения (1.10) и (1.12) отличаются от уравнения Ламе для однородной изотропной упругой среды только наличием дополнительного слагаемого $-A\vec{u}$. Вследствие этого можно утверждать, что уравнения Ламе (1.10) и (1.12) для эффективной модели описывают изотропную среду.

Решение уравнений (1.12) полезно представить, как и в случае упругой среды, по формуле

$$\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\vec{\psi} \tag{1.13}$$

через потенциалы φ и $\vec{\psi}$. Используя неоднозначность векторного потенциала $\vec{\psi}$, поставим дополнительное условие

$$\operatorname{div}\vec{\psi} = 0. \tag{1.14}$$

В результате уравнение Ламе (1.12) заменится уравнениями

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\varphi - A\varphi = \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \mu\left(\Delta\vec{\psi} - \frac{\vec{\psi}}{r^2}\right) + A\vec{\psi} = \rho\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2}. \tag{1.15}$$

Эти уравнения совместно с уравнениями (1.3) и формулами (1.13) полезно использовать при построении волновых полей.

§2. Построение волнового поля, возбужденного точечным источником

Рассмотрим полупространство $z > 0$, описываемое уравнениями (1.3), (1.13) и (1.15), и пусть на его границе с момента $t = 0$ начинает действовать точечный источник, заданный граничными условиями

$$t_{zz}\Big|_{z=0} = -\frac{f(t)\delta(r)}{2\pi r}, \quad t_{rz}\big|_{z=0} = 0. \tag{2.1}$$

Образующиеся смещения и напряжения должны также удовлетворять нулевым начальным условиям

$$u_z\big|_{t=0} = u_z\big|_{t=0} = 0 \quad \frac{\partial u_z}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial u_r}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \tag{2.2}$$

Поставленная смешанная задача аналогична задаче Лэмба для упругого полупространства и решается теми же методами, как и в работе [2]. Так как волновое поле оказывается осесимметрическим, то удобно использовать цилиндрическую систему координат r, θ, z. У векторного потенциала $\vec{\psi}$ полезно сохранить только одну составляющую $\psi_\theta = \psi$. Эта составляющая и потенциал φ удовлетворяют уравнениям

$$\mu\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\psi}{r^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)-A\psi=\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},$$
$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)-A\varphi=\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \tag{2.3}$$

Отличные от нуля соответствующие вектора смещений u_r, u_z, а также компоненты тензора напряжений t_{rz}, t_{zz}, входящие в условия (2.1), выражаются равенствами

$$u_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad u_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\psi}{r},$$
$$t_{tz}=2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+A\psi+\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \tag{2.4}$$
$$t_{zz}=\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+A\varphi-2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{\partial^2\psi?}{\partial r\partial z}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$

через потенциалы φ и ψ.

Решения уравнений (2.3), удовлетворяющие нулевым начальным условиям и содержащие волны, распространяющиеся в направлении оси z, представляются равенствами

$$\varphi=\int\limits_0^\infty\frac{J_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma i\infty}^{\sigma\pi i\infty}X(k,\eta)e^{k(t\eta-z\alpha)}d\eta,$$
$$\psi=\int\limits_0^\infty\frac{J_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma i\infty}^{\sigma\pi i\infty}Y(k,\eta)e^{k(t\eta-z\beta)}d\eta, \tag{2.5}$$

в которых

$$\alpha=\sqrt{1+\frac{\eta^2}{v_p^2}+\frac{A}{(\lambda+2\mu)k^2}},\quad v_p=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},$$
$$\beta=\sqrt{1+\frac{\eta^2}{v_S^2}+\frac{A}{\mu k^2}},\quad v_S=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{2.6}$$

Для однозначности радикалов α и β из точек ветвления

$$\eta=\pm\eta_p=\pm iv_p\sqrt{1+\frac{A}{(\lambda+2\mu)k^2}},\quad \eta=\pm\eta_s=\pm iv_S\sqrt{1+\frac{A}{\mu k^2}} \tag{2.7}$$

проводятся разрезы в левую полуплоскость (рис. 1) и основные ветви фиксируются условиями

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad \text{при} \quad \eta > 0. \tag{2.8}$$

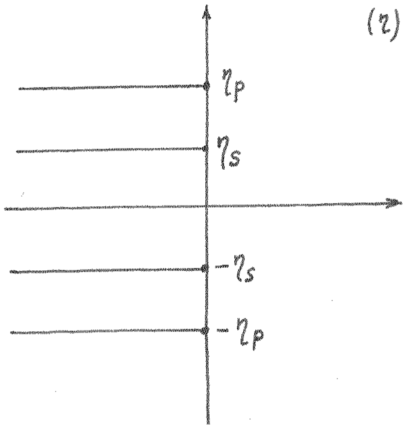

Рис. 1.

Функции $X(k,\eta)$ и $Y(k,\eta)$ определяются из граничных условий (2.1). С этой целью, на основании формул (2.4), записываются соотношения

$$\begin{aligned} t_{rz}\Big|_{z=0} &= \mu \int\limits_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma i\infty}^{\sigma\pi i\infty} [2\alpha X - gY] e^{kb\eta} d\eta, \\ t_{zz}\Big|_{z=0} &= \mu \int\limits_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma i\infty}^{\sigma\pi i\infty} [gX - 2\beta Y] e^{kb\eta} d\eta, \\ g &= 2 + \frac{\eta^2}{v_S^2} + \frac{A}{\mu k^2}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Чтобы представить правую часть первого равенства (2.1) в виде тех же интегралов, полезно функцию $\delta(r)/r$ заменить функцией

$$F_n(r) = \frac{n^2}{(1+n^2r^2)^{3/2}}, \tag{2.10}$$

описывающей распределенное воздействие. Функция $F_n(r)$ переходит при предельном переходе при $n \to \infty$ в $\delta(r)/r$ и выражается интегралом Фурье–Бесселя

$$F_n(r) = \int\limits_0^\infty kJ_0(kr)e^{-\frac{k}{n}}\,dk. \tag{2.11}$$

После указанной замены правую часть первого равенства (2.1) удается представить в виде сходящихся интегралов Фурье–Бесселя и Меллина, а условия (2.1) переходят в систему уравнений

$$\begin{aligned} gX - 2\beta Y =& -\frac{F(k\eta)e^{-k/n}}{2\pi}, \\ 2\alpha X - gY =& 0, \end{aligned} \tag{2.12}$$

в которой

$$F(k\eta) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-k\eta t}\,dt. \tag{2.13}$$

Решая систему уравнений (2.7) и переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем соотношения

$$X = -\frac{gF(k\eta)}{2\pi(g^2 - 4\alpha\beta)}, \quad Y = -\frac{2\alpha F(k\eta)}{2\pi(g^2 - 4\alpha\beta)} \tag{2.14}$$

для функций $X(k,\eta)$ и $Y(k,\eta)$, определяющих волновое поле. С учетом формул (2.14) поле смещений представляется равенствами

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma i\infty}^{\sigma\pi i\infty} \frac{ge^{-kz\alpha} - 2\alpha\beta e^{-kz\beta}}{g^2 - 4\alpha\beta}\,F(k\eta)e^{k\eta t}d\eta, \\ u_z &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma i\infty}^{\sigma\pi i\infty} \frac{ge^{-kz\alpha} - 2e^{-kz\beta}}{g^2 - 4\alpha\beta}\,F(k\eta)e^{k\eta t}d\eta. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Формулами (2.15) может быть также представлено решение задачи Лэмба в случае упругой среды и источника (2.1) [2]. Различие между волновыми полями в рассматриваемой эффективной модели и в упругой среде состоит в разных обозначениях для величин α, β и g. При $A = 0$ эти величины, согласно равенствам (2.6) и (2.9), имеют выражения

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_p^2}}, \quad \beta = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_S^2}}, \quad g = 2 + \frac{\eta^2}{v_S^2}, \tag{2.16}$$

соответствующие случаю упругой среды. В случае $A > 0$ следует использовать обозначения (2.6) и (2.9) и волновое поле оказывается более сложным.

§3. Исследование волнового поля

Основные особенности волнового поля в рассматриваемой эффективной модели состоят в том, что фазовые и групповые скорости волн оказываются функциями частоты и волновых чисел. Чтобы убедиться в этом, отметим, что интегралы в выражениях (2.15) представляют собой суперпозицию конических волн. Уравнение фронта поперечной конической волны дается, согласно соотношениям (2.15), равенством

$$t\tau - r - z\sqrt{\frac{t^2}{v_S^2} - 1 - \frac{A}{\mu k_S^2}} = 0, \tag{3.1}$$

где $\tau = \operatorname{Im}\eta$ и η лежит в интервале $\operatorname{Im}\eta > \operatorname{Im}\eta_0$ мнимой оси и k_S – волновое число поперечной волны. Так как среда изотропная, то фазовая скорость конической волны не зависит от ориентации фронта. Фазовую скорость этого фронта удобно выразить в случае, когда фронт становится цилиндрическим и его образующая параллельна оси z. В этом случае скорость фронта вдоль оси z нулевая, а фазовая скорость вдоль координаты r определяется из условий

$$v_{phS} = \tau, \quad \frac{\tau^2}{v_S^2} - 1 - \frac{A}{\mu k_S^2} = 0. \tag{3.2}$$

Из равенств (3.2) следует формула

$$v_{phS} = v_S\sqrt{1 + \frac{A}{\mu k_S^2}}, \tag{3.3}$$

определяющая зависимость фазовой скорости от волнового числа k_S для поперечной волны. Из формулы (3.3) следует, что

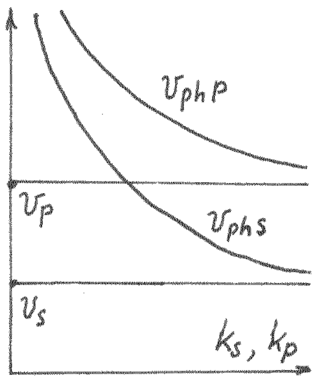

Рис. 2.

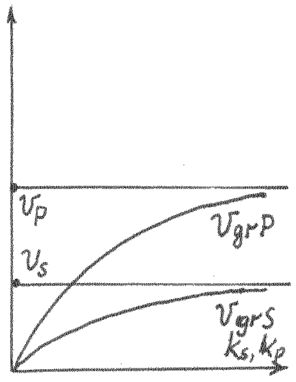

Рис. 3.

при $k_S = 0$ фазовая скорость поперечной волны бесконечно большая, что с ростом волнового числа эта скорость убывает и при $k_S = \infty$ становится равной поперечной скорости v_S (рис. 2).

Аналогичным образом устанавливается соотношение, определяющее зависимость фазовой скорости продольной волны от соответствующего волнового числа. Уравнение фронта конической волны представляется равенством

$$t\tau - r - z\sqrt{\frac{t^2}{v_P^2} - 1 - \frac{A}{(\lambda + 2\mu)k_P^2}} = 0. \qquad (3.4)$$

Из уравнения (3.4) следует соотношение

$$v_{phP} = v_P\sqrt{1 + \frac{A}{(\lambda + 2\mu)k_P^2}}, \qquad (3.5)$$

которое показывает убывание фазовой скорости от бесконечных значений до v_P с ростом волнового числа k_P (рис. 2).

В равенствах (3.3) и (3.5) полезно заменить зависимость от волновых чисел на зависимость от частоты ω. Для этого используем известные формулы

$$\omega = v_{phS}\, k_S = v_{phP}\, k_P \qquad (3.6)$$

и получим соотношения

$$k_S^2 = \frac{\omega^2}{v_S^2} - \frac{A}{\mu}, \quad k_P^2 = \frac{\omega^2}{v_P^2} - \frac{A}{\lambda + 2\mu}. \qquad (3.7)$$

После подстановки равенств (3.7) в формулы (3.3) и (3.5) приходим к соотношениям

$$v_{phS} = \frac{v_S}{\sqrt{1 - A/(\rho\omega^2)}}, \quad v_{phP} = \frac{v_P}{\sqrt{1 - A/(\rho\omega^2)}}. \qquad (3.8)$$

Из равенств (3.8) следует, что с ростом частоты обе фазовые скорости убывают и при $\omega \to \infty$ приближаются соответственно к скоростям v_S и v_P (рис. 3). Особенность частотной зависимости фазовых скоростей состоит в том, что эта зависимость начинается с пороговой частоты

$$\omega_0 = \sqrt{A/\rho} \qquad (3.9)$$

и ниже этой частоты фазовые скорости не определены.

Наряду с фазовыми скоростями введем также и групповые скорости по известным формулам

$$v_{grS} = \frac{d\omega}{dk_S}, \quad v_{grP} = \frac{d\omega}{dk_P}. \qquad (3.10)$$

После подстановки в равенства (3.6) соотношений (3.3) и (3.5) и после дифференцирования по волновым числам приходим к формулам

$$v_{grS} = \frac{v_S}{\sqrt{1 + A/(\mu k_S)}}, \quad v_{grP} = \frac{v_P}{\sqrt{1 + A/[(\lambda + 2\mu)k_P]}}. \qquad (3.11)$$

Равенства (3.11) показывают, что с ростом волновых чисел групповые скорости возрастают от нуля до соответствующих значений v_S и v_P (рис. 4). Частотные зависимости групповых скоростей v_{grS} и v_{grP} даются формулами

$$v_{grS} = v_S\sqrt{1 - A/(\rho\omega^2)}, \quad v_{grP} = v_P\sqrt{1 - A/(\rho\omega^2)}. \qquad (3.12)$$

Из равенств (3.12) следует, что групповые скорости возрастают от нуля до соответствующих значений v_S и v_P с ростом частоты от пороговой частоты (3.9) до ∞.

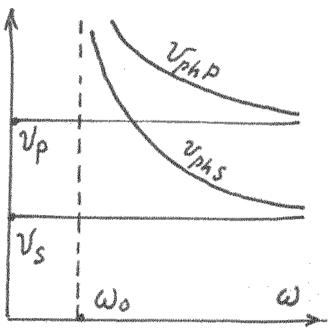

Рис. 4.

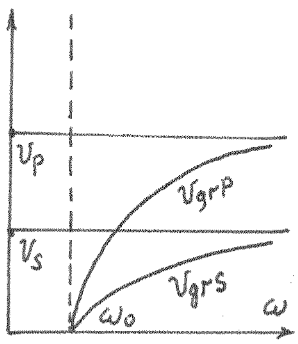

Рис. 5.

Укажем теперь на особенности зависимостей фазовых и групповых скоростей от волновых чисел и частоты. При фиксированной частоте справедливы равенства

$$\frac{v_{phS}}{v_{phP}} = \frac{v_{grS}}{v_{grP}} = \frac{v_S}{v_P}, \tag{3.13}$$

показывающие, что отношение двух фазовых скоростей равно отношению соответствующих групповых скоростей и эти отношения не зависят от частоты и равны отношению поперечной скорости к продольной скорости в упругой среде. Из других соотношений

$$v_{phS}\, v_{grS} = v_S^2, \quad v_{phP}\, v_{grP} = v_P^2 \tag{3.14}$$

следует, что произведение фазовой и групповой скоростей одной волны в эффективной модели равно квадрату скорости этой волны в упругой среде и остается постоянным при изменении частоты или волнового числа.

Кроме двух объемных волн, в эффективной модели вдоль свободной границы распространяется волна Релея. Эта волна описывается вычетами в полюсах $\eta = \pm i\tau_{R0}$ на мнимой оси, и эти полюса являются корнями уравнения

$$g^2 - 4\alpha\beta = 0 \tag{3.15}$$

или

$$\left(2-\frac{\tau^2}{v_S^2}+\frac{A}{\mu k^2}\right)^2-4\sqrt{1-\frac{\tau^2}{v_P^2}+\frac{A}{(\lambda+2\mu)k^2}}\sqrt{1-\frac{\tau^2}{v_S^2}+\frac{A}{\mu k^2}}=0. \tag{3.16}$$

После замены

$$\tau_1^2=\tau^2-\frac{A}{\rho k^2} \tag{3.17}$$

уравнение (3.16) переходит в уравнение Релея

$$\left(2-\frac{\tau_1^2}{v_S^2}\right)^2-4\sqrt{1-\frac{\tau_1^2}{v_P^2}}\sqrt{1-\frac{\tau_1^2}{v_S^2}}=0 \tag{3.18}$$

для упругой среды. Уравнение (3.18) имеет всегда в интервале $0\leqslant\tau_1\leqslant v_S$ корень $\tau_1=v_R$. Со скоростью v_R распространяется поверхностная волна Релея вдоль свободной границы упругой среды. Аналогичная волна в случае рассматриваемой эффективной модели имеет, согласно равенствам (3.17) и (3.18), фазовую скорость

$$v_{phR}=\tau_{R0}=\sqrt{v_R^2+\frac{A}{\rho k_R^2}}. \tag{3.19}$$

Учитывая связь

$$\omega=v_{phR}k_R \tag{3.20}$$

между волновым числом k_R и частотой, приходим к соотношению

$$v_{phR}=\frac{v_R}{\sqrt{1-A/(\rho\omega^2)}}. \tag{3.21}$$

Равенства (3.19) и (3.21) показывают, что фазовая скорость волны Релея убывает с ростом волнового числа и частоты и при $k_R=\infty$ или $\omega=\infty$ становится равной скорости волны Релея в упругой среде (Рис. 6, 7). Групповая скорость волны Релея как функция частоты или волнового числа представляется равенствами

$$\begin{aligned} v_{grR}&=v_R\sqrt{1-A/(\rho\omega^2)},\\ v_{grR}&=\frac{v_R}{\sqrt{1+A/(\rho k_R^2v_R^2)}}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

которые показывают, что групповая скорость возрастает с ростом частоты или волнового числа (Рис. 6, 7). Сравнение формул (3.19)–(3.22) с соответствующими равенствами (3.3), (3.5), (3.6), (3.8), (3.11) и (3.12) приводит к выводу о полной аналогии в изменениях фазовых и групповых скоростей всех трех волн с ростом частоты или волновых чисел

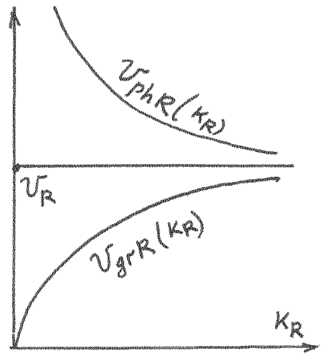

Рис. 6.

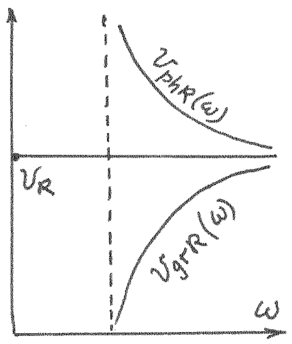

Рис. 7.

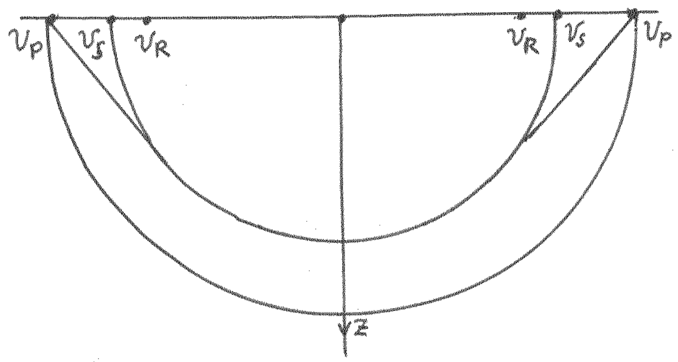

Рис. 8.

Фронты от источника (2.1) в эффективной модели и в соответствующей упругой среде одинаково расположены (Рис. 8). Это утверждение доказывается тем, что фронт определяется только старшими членами в уравнениях. Если из уравнений Ламе (1.10) исключить младшие члены, содержащие коэффициент A, то придем к соответствующим уравнениям Ламе для упругой среды. Асимптотические представления для поля смещений вблизи фронта могут быть получены методом перевала, при этом используется методика, которая применяется в случае упругой среды [3].

Литература

1. Л. А. Молотков, *О распространении волн в упругой среде, перерезанной системами параллельных трещин.* Зап. научн. семин. ПОМИ **285** (2002).
2. К. И. Огурцов, Г. И. Петрашень, *Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии.* Учен. зап. ЛГУ **149** (1951), 3–117.
3. Г. И. Петрашень, И. Н. Успенский, *О распространении волн в слоисто-изотропных упругих средах. I.* Учен. зап. ЛГУ **208** (1956), 58–141.

Molotkov L. A. On one effective model of a fractured medium.

The homogeneous isotropic elastic medium, interested by three systems of fractures on which jumps of stresses are proportional to displacements, is considered. The effective model of this medium is described by equations differing from the corresponding equations of the elastic medium by additional terms. On the basis of the equations of the effective model the wave field excited by some point source is established. The investigation of the integral representation of the wave field shows that the velocities of the longitudinal and transversal waves and of the Rayleigh wave are functions of frequency and wave numbers. The formulas for the phase and group velocities of these waves are derived.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 7 февраля 2002 г.